

# Parameterabhängige dünne Überdeckungen konvexer Körper

von

**Dipl.–Math. Martin Meyer**

aus Siegen

Vom Fachbereich Mathematik der  
Universität–Gesamthochschule Siegen  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften

genehmigte Dissertation.

Siegen 1999



Tag der Promotion: 01.09.1999  
Referent: Prof. Dr. J.M. Wills  
Koreferent: Prof. Dr. U. Betke



## Vorwort

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit endlichen und unendlichen Überdeckungen im  $d$ -dimensionalen Euklidischen Raum  $E^d$ . Die Theorie der Überdeckungen ist ein Teilgebiet der „Geometrie der Zahlen“, die mit der Einführung des Begriffs des Gitters 1831 durch C. F. GAUSS (1777–1855) gegründet und insbesondere durch H. MINKOWSKI (1864–1909) weiterentwickelt wurde.

Ganz allgemein nennt man eine Familie  $\mathcal{F}$  eine Überdeckung einer Menge  $M$ , falls  $M$  in der Vereinigung der Elemente von  $\mathcal{F}$  enthalten ist. Wir betrachten hier nur solche Überdeckungen, bei denen die Familie  $\mathcal{F}$  aus Translaten eines konvexen Körpers  $K$  besteht und  $M$  selbst eine konvexe Menge darstellt. Besitzt  $\mathcal{F}$  endlich bzw. unendlich viele Elemente, so spricht man von einer endlichen bzw. unendlichen Überdeckung. Als Beispiel für eine endliche Überdeckungsaufgabe betrachten wir folgendes Problem:

Ein Radiosender möchte in einem gewissen Gebiet  $G$  Sendestationen mit konstanter Reichweite  $R$  errichten, so dass das Gebiet vollständig versorgt wird, also jeder Haushalt in  $G$  den Sender empfangen kann. Dabei möchte man natürlich möglichst wenige Sendestationen bauen. Faßt man  $G$  als Teilmenge der Euklidischen Ebene  $E^2$  auf, so sucht man also die minimale Anzahl der Kreise mit vorgegebenem Radius  $R$ , die  $G$  überdecken können.

Um Überdeckungen zu messen und zu vergleichen, braucht man einen Dichtebegriff, der z.B. als Verhältnis zwischen dem Gesamtvolumen der überdeckenden Translate und dem Volumen der überdeckten Menge definiert werden kann. Die Dichte ist gewissermaßen ein Maß für die Güte einer Überdeckung. Dabei sucht man möglichst dünne (ökonomische) Überdeckungen, d.h. solche mit kleiner Dichte.

1995 beschrieben BETKE, HENK und WILLS in [BHW3] einen neuen Zugang zu den klassischen Problemen endlicher und unendlicher Überdeckungen. Sie führten die parametrische Dichte

$$\vartheta(K, C, \rho) = \frac{\text{card } C \cdot V(K)}{V(\text{conv } C + \rho K)}$$

einer endlichen Überdeckungsmenge (Konfiguration)  $C$  eines konvexen Körpers  $K$  bezüglich dem Parameter  $\rho \in \mathbb{R}$  ein. Dabei bezeichnet  $V(\cdot)$  das Volumen und  $\text{card } C$  die Mächtigkeit der Menge  $C$ . Für  $\rho > 0$  ist  $\text{conv } C + \rho K$  die Minkowski-Summe und für  $\rho < 0$  die Minkowski-Differenz der Mengen  $\text{conv } C$  und  $\rho K$  (siehe Seite 10 bzw. 17). Unter einer Überdeckungsmenge versteht man hier eine endliche Menge  $C$  für die  $\text{conv } C \subset C + K$  gilt. Es werden also nur solche Anordnungen von Translaten zugelassen, bei denen die konvexe Hülle der zugehörigen Translationsvektoren überdeckt wird. Solche Überdeckungen wurden zuerst von BAMBAH, ROGERS, WOODS und ZASSENHAUS untersucht (s. [BR], [BRZ], [BW]).

Für einen gegebenen konvexen Körper  $K$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ , und eine natürliche Zahl  $n$  fragen wir hier nach einer Überdeckungsmenge  $C$  mit Mächtigkeit  $n$ , für die die parametrische Dichte  $\vartheta(K, C, \rho)$  minimal wird. Weiter untersuchen wir die asymptotische Entwicklung dieser minimalen parametrischen Dichten  $\vartheta(K, n, \rho)$  bzgl.  $n$ , d.h. wir betrachten die Größe  $\vartheta(K, \rho) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, n, \rho)$ .  $\vartheta(K, \rho)$  kann als Grenzdichte endlicher Überdeckungen von  $K$  bzgl. dem Parameter  $\rho$  aufgefaßt werden.

BETKE, HENK und WILLS zeigten in [BHW3], dass für  $\rho \leq \Leftrightarrow 1$  die Grenzdichte  $\vartheta(K, \rho)$  mit der Dichte  $\vartheta(K)$  einer dünnsten unendlichen Überdeckung von  $K$  übereinstimmt. Auf diese Weise stellen die parametrischen Dichten eine Verbindung zwischen dem endlichen und unendlichen Überdeckungsproblem her. Anschaulich bedeutet  $\vartheta(K, \rho) = \vartheta(K)$ , dass volldimensionale Überdeckungsmengen  $C$  mit großer Kardinalität dünne Überdeckungen bzgl.  $\vartheta(K, C, \rho)$  sind.

An dieser Stelle möchte ich nun einen kurzen inhaltlichen Überblick über die vorliegende Arbeit geben. Bezüglich der hier beschriebenen Funktionale  $\vartheta(K, n, \rho)$  und  $\vartheta(K, \rho)$  untersuchen wir Überdeckungsmengen zentralsymmetrischer, konvexer Körper  $K$ .

*Kapitel 1* bietet im *ersten Abschnitt* eine kurze Einführung in die Theorie der endlichen und unendlichen Überdeckungen konvexer Körper. In *Abschnitt 2* werden die parametrischen Dichten definiert und einige einfache Eigenschaften angeführt. *Abschnitt 3* befaßt sich mit speziellen Überdeckungsmengen. Hier werden sogenannte „Knochen- und Wurstkongfigurationen“ vorgestellt, die bzgl. der betrachteten Funktionale im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine wichtige Rolle einnehmen.

In *Kapitel 2* betrachten wir 2-dimensionale Überdeckungsprobleme. Zunächst beschäftigen wir uns in *Abschnitt 1* mit einer Aussage von BAMBAH und WOODS, die eine scharfe obere Schranke für die konvexe Hülle von Überdeckungsmengen zentralsymmetrischer, konvexer Scheiben fanden (s. [BW]). Mit Hilfe von Methoden aus [BHW3] geben wir hier einen weiteren Beweis für

die Gültigkeit dieser Schranke an. In *Abschnitt 2* benutzen wir dann unsere Methoden, um für kleine, positive Parameter die Identität  $\vartheta(K) = \vartheta(K, \rho)$  nachzuweisen. Für den Kreis  $B^2$  wurde diese schon in [BHW3] bewiesen.

*Kapitel 3* befaßt sich mit dünnen Überdeckungen bzgl.  $\vartheta(K, C, \rho)$  im  $E^d$  für beliebige Dimensionen  $d \geq 2$ . Wir zeigen zunächst, dass für große Werte des Parameters  $\rho$  dünne Überdeckungen „fast“ eindimensional sind. Im *letzten Abschnitt* dieses Kapitels bestimmen wir dann für solche großen Parameter  $\rho$  die genaue, asymptotische Gestalt der optimalen Überdeckungskonfigurationen. Es zeigt sich, dass für dünnste knochenförmige Anordnungen (Knochenkonfigurationen)  $C_n$  der Mächtigkeit  $n$  die Dichte  $\vartheta(K, C_n, \rho)$  gegen  $\vartheta(K, \rho)$  konvergiert.

In *Kapitel 4* behandeln wir schließlich gitterförmige Überdeckungen. Im 2-dimensionalen Fall betrachten wir zunächst für zentralsymmetrische, strikt konvexe Scheiben eine Familie von Überdeckungsgittern, für die wir eine vollständige Charakterisierung der optimalen Überdeckungskonfigurationen angeben. Dabei erweisen sich für verschiedene (disjunkte) Parameterbereiche volldimensionale Konfigurationen, sogenannte „Doppelwurstkonfigurationen“ oder Wurstkonfigurationen als optimal. Wir zeigen dies zunächst für feste Gitter und anschließend für beliebige Gitter aus der betrachteten Gitterfamilie. In *Abschnitt 3* bestimmen wir für die Kugel  $B^d$  und beliebiges  $d \geq 2$  die Menge aller Überdeckungsgitter, für die Wurstkonfigurationen für große  $\rho$  und  $n$  optimal sind.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. J.M. Wills und Prof. Dr. U. Betke für die vielen Anregungen, die zu dieser Arbeit führten, sowie Prof. Dr. U. Betke für die zahlreichen und fruchtbaren Diskussionen, die in entscheidendem Maße zur Lösung einiger Probleme beitrugen.

Bei Priv.-Doz. Dr. U. Schnell und Dipl.-Math. A. Schürmann möchte ich mich für ihre Geduld und ständige Bereitschaft zu Diskussionen bedanken. Für die Erlaubnis, Ergebnisse aus gemeinsamen Arbeiten für meine Dissertation zu verwenden, danke ich Prof. U. Betke (Kapitel 3 bzw. [BM]) und Priv.-Doz. Dr. U. Schnell (Kapitel 4 bzw. [MS]).

Schließlich bedanke ich mich bei allen oben Genannten für das Lesen und Kritisieren verschiedener Versionen dieser Arbeit.

Siegen, Juni 1999.

*Martin Meyer*





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>10</b>
1.1	Grundlegende Begriffe und Definitionen . . . . .	10
1.2	Die parametrische Dichte . . . . .	16
1.3	Spezielle Konfigurationen . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Ebene Überdeckungen</b>	<b>26</b>
2.1	Über einen Satz von Bambah und Woods . . . . .	26
2.2	Die parametrische Dichte für ebene konvexe Scheiben . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Die parametrische Dichte für Überdeckungen im <math>E^d</math></b>	<b>40</b>
3.1	Einführung . . . . .	40
3.2	Die 1-Gleichmäßigkeit dünner Überdeckungen für große Parameter . . . . .	41
3.3	Dünne Überdeckungen sind knochenförmig für große Parameter . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Endliche Gitterüberdeckungen</b>	<b>54</b>
4.1	Einführung . . . . .	54
4.2	Ebene Gitterüberdeckungen . . . . .	55
4.3	Gitterförmige Kugelüberdeckungen . . . . .	68
	<b>Literatur</b>	<b>75</b>
	<b>Notationen</b>	<b>80</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Diese Arbeit beschäftigt sich mit konvexen Mengen im  $d$ -dimensionalen Euklidischen Raum  $E^d$ .  $x \cdot y$  sei das kanonische Skalarprodukt im  $E^d$  mit zugehöriger Euklidischer Norm  $\|\cdot\|$ . Weiter sei  $B^d \subset E^d$  die  $d$ -dimensionale Einheitskugel mit Volumen  $\kappa_d$ , und  $S^{d-1}$  sei der Rand dieser Kugel, also  $S^{d-1} = \text{bd } B^d$ .

Die Menge der konvexen Körper (d. h. kompakte, konvexe Mengen mit nichtleerem Inneren) bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}^d$ , und  $\mathcal{K}_0^d$  schreiben wir für die Menge aller zentralsymmetrischen, konvexen Körper  $K$ , d. h. aller  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $K = \Leftrightarrow K$ . Ein konvexer Körper  $K$  heißt strikt konvex, wenn für alle  $x, y \in K$  die Strecke  $\overline{xy}$  bis auf ihre Endpunkte im Inneren von  $K$  liegt.

Für eine beliebige Menge  $M \subset E^d$  sei  $\text{aff } M$  ( $\text{lin } M$ ) die affine (lineare) Hülle von  $M$  und  $\dim M$  die Dimension der affinen Hülle von  $M$ . Mit  $M^\perp$  meinen wir das orthogonale Komplement von  $\text{lin } M$ . Ist  $M$  eine endliche Menge, so bezeichnen wir mit  $\text{card } M$  die Anzahl der Elemente von  $M$ .

Die konvexe Hülle  $\text{conv } M$  der Menge  $M \neq \emptyset$  ist die „kleinste“ konvexe Menge  $K$ , die  $M$  enthält, d. h. es ist

$$\text{conv } M = \bigcap_{\substack{K \text{ konvex} \\ M \subset K}} K.$$

Ist  $M$  kompakt, so gilt dies auch für  $\text{conv } M$ . Besitzt  $M$  zudem innere Punkte, d.h. gilt  $\text{int } M \neq \emptyset$ , so ist daher  $\text{conv } M \in \mathcal{K}^d$ . Ist  $M$  endlich, so nennt man  $\text{conv } M$  ein Polytop.

Schließlich ist die Minkowski-Summe zweier Mengen  $P, Q \subset E^d$  durch  $P+Q = \{p+q \mid p \in P, q \in Q\}$  definiert, und für  $\alpha \in \mathbb{R}$  sei  $\alpha P = \{\alpha p \mid p \in P\}$ .

Wir kommen nun zu dem Begriff der *Überdeckung durch konvexe Körper*. Ist  $\mathcal{F}$  eine Familie von Mengen, deren Vereinigung die Menge  $M$  enthält,

so nennt man  $\mathcal{F}$  eine Überdeckung von  $M$ . Hier betrachten wir ausschließlich Überdeckungen, bei denen die zu überdeckende Menge  $M$  eine konvexe Menge darstellt und die Familie der Mengen, die  $M$  überdecken, nur aus Translaten eines konvexen Körpers  $K \in \mathcal{K}^d$  besteht.

Sei  $C \subset E^d$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$ , und sei  $B \subset E^d$  eine beliebige konvexe Menge. Gilt  $B \subset C + K$ , so nennt man  $(K, C)$  eine *Überdeckung* von  $B$ .

Sind  $(K, C_1)$  und  $(K, C_2)$  verschiedene Überdeckungen von  $B$  mit endlichen Mengen  $C_1$  und  $C_2$ , so lassen sich die Überdeckungen anhand ihrer Kardinalzahlen vergleichen. In Abbildung 1 ist die Überdeckung auf der

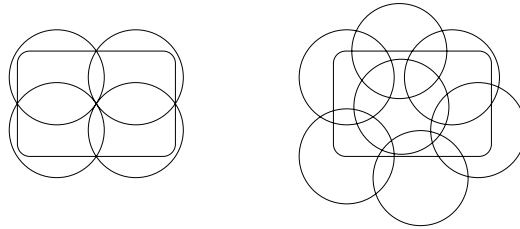


Abbildung 1: Kreisüberdeckungen

linken Seite die dünnere oder auch ökonomischere Überdeckung, denn diese kommt mit weniger Translaten aus. Dies drückt sich auch im Verhältnis der Summe der Flächen der Translate zur Fläche der überdeckten Menge aus, welches im linken Fall kleiner ausfällt. Solche Verhältnisse benutzen wir daher im folgenden, um die Güte von Überdeckungen zu messen.

Zunächst betrachten wir den unendlichen Fall, wenn also  $B$  unbeschränkt ist. Hier interessiert uns in erster Linie die Überdeckung des gesamten Raumes  $E^d$ , und daher führen wir ein Maß für die Güte einer Überdeckung  $(K, C)$  des  $E^d$  ein. Dazu benötigen wir das Lebesgue-Maß im  $E^d$ . Ist  $M \subset E^d$  meßbar, so bezeichnen wir mit  $V(M)$  das Volumen (Lebesgue-Maß) von  $M$ . Konvexe Körper  $K$  sind immer meßbar (s. [BF], [Ha], oder [Sch]), und wegen  $\text{int } K \neq \emptyset$  gilt  $V(K) > 0$ . Hin und wieder benötigen wir das Volumen einer niederdimensionalen Menge  $M$  ( $\dim M < d$ ) bzgl. ihrer affinen Hülle. Ist z. B.  $\dim M = k < d$ , so sei  $V^k(M)$  das Volumen von  $M$  bzgl. aff  $M$ .

**Definition 1.1** Sei  $W_\lambda^d$  der  $d$ -dimensionale Würfel mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge  $\lambda > 0$ , und sei  $(K, C)$  eine Überdeckung des  $E^d$ . Dann heißt

$$\vartheta(K, C) = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{V(W_\lambda^d)} \sum_{\substack{x+K \cap \text{int } W_\lambda^d \neq \emptyset \\ x \in C}} V(K)$$

die (unendliche) Dichte der Überdeckung  $(K, C)$  und

$$\vartheta(K) = \inf\{\vartheta(K, C) : (K, C) \text{ Überdeckung des } E^d\}$$

die Dichte einer dünnsten Überdeckung des  $E^d$  durch  $K$ .

$\frac{1}{V(W_\lambda^d)} \sum_{\substack{x+K \cap \text{int } W_\lambda^d \neq \emptyset \\ x \in C}} V(K)$  ist das Verhältnis zwischen der Summe der Volumina der Translate von  $K$  aus  $C$ , die einen Beitrag zur Überdeckung von  $W_\lambda^d$  liefern, und dem Volumen des überdeckten Würfels  $W_\lambda^d$ . Die Dichte  $\vartheta(K, C)$  mißt das asymptotische Verhalten dieses Quotienten. Grob gesprochen ist sie das Verhältnis von der Summe der Volumina der Translate aus  $C$  zum Volumen des gesamten Raumes  $E^d$ .

Die Dichte einer Überdeckung des  $E^d$  ist invariant gegenüber Translationen von  $K$  und unabhängig von der Folge  $W_\lambda^d$ , mit der der  $E^d$  approximiert wird. In Definition 1.1 kann man also  $W_\lambda^d$  durch jeden anderen konvexen Körper aus  $\mathcal{K}^d$  ersetzen (s. [Gro]). Zudem existiert eine Überdeckung  $(K, C^*)$  des  $E^d$  mit

$$\vartheta(K) = \vartheta(K, C^*),$$

womit die Bezeichnung Dichte einer dünnsten Überdeckung des  $E^d$  ihre Rechtfertigung findet (s. [Gro]).

Für  $d = 2$  läßt sich die Dichte  $\vartheta(K)$  für alle Körper aus  $\mathcal{K}_0^2$  bestimmen (s. Kapitel 2), doch schon für  $d = 3$  kennt man selbst für die Kugel  $B^3$  keine optimale Überdeckung des Raumes. Allgemein gilt

$$1 \leq \vartheta(K) \leq d \log d + d \log \log d + 5d$$

für  $d \geq 3$  und alle  $K \in \mathcal{K}^d$  (vgl [Ro1]). Für weitere Schranken (z. B. für spezielle konvexe Körper aus  $\mathcal{K}^d$ ) und für einen anderen Zugang zu der Dichte  $\vartheta(K)$  verweisen wir auf [GL], Seite 236f, und [FK].

Wir kommen nun zu endlichen (finiten) Überdeckungen. Ist  $B$  eine beschränkte, konvexe Menge, und ist  $n_0$  die minimale Anzahl von Translaten von  $K$ , deren Vereinigung  $B$  enthält, so ist jede Überdeckung von  $B$  durch  $K$  mit genau  $n_0$  Elementen optimal. Weiter kann man sich fragen, ob  $B$  die größte (bzgl. des Volumens) konvexe Menge ist, die durch eine solche Anzahl von Translaten von  $K$  überdeckt wird. Dies führt zu der folgenden Problemstellung für finite Überdeckungen:

Für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $n \in \mathbb{N}$  bestimme man das Maximum der Volumina solcher konvexer Körper, die durch  $n$  Tranlate von  $K$  überdeckt werden können.

Für  $d \geq 5$  und  $K = B^d$  vermutete WILLS 1983 (vgl. [W1]), dass man einen

„maximalen Körper“ erhält, wenn die Translationsvektoren der Kugeln linear angeordnet sind, d. h. alle auf einer Geraden liegen. Das Gegenstück dazu ist die *Wurstvermutung* für *finite Packungen* von L. FEJES TÓTH (s. [FejL1]). Dabei heißt eine Menge  $P$  eine *Packung* von  $K$ , falls für alle  $x, y \in P$   $(x + \text{int } K) \cap (y + \text{int } K) = \emptyset$  gilt. Das zum finiten Überdeckungsproblem duale finite Packungsproblem ist die folgende Aufgabe:

Für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $n \in \mathbb{N}$  bestimme man das Minimum der Volumina solcher konvexer Körper, in die  $n$  Translate von  $K$  gepackt werden können.

Da sich diese Arbeit ausschließlich mit Überdeckungen beschäftigt, gehen wir hier nicht näher auf Packungen ein und verweisen auf [GL], Seite 218f, 266f. Hin und wieder möchten wir allerdings Ergebnisse und Methoden von Packungsaufgaben mit denen von Überdeckungsaufgaben vergleichen.

Ähnlich wie in Definition 1.1 können wir nun eine Dichte einführen, welche die Güte von endlichen Überdeckungen mißt. Bevor wir dies tun, stellen wir weitere Bedingungen an unsere Überdeckungsmengen, da wir hier nur spezielle Anordnungen betrachten möchten. Für Resultate zu den bisher beschriebenen endlichen Überdeckungen verweisen wir auf den Übersichtsartikel von GRITZMANN und WILLS (s. [GW3]).

Im folgenden fordern wir für unsere endliche Überdeckungsfamilie, dass die konvexe Hülle der Translationsvektoren überdeckt sei. Die so überdeckte konvexe Menge ist also ein Polytop, und das Volumen eines Polytops ist im allgemeinen einfacher zu bestimmen, als das einer beliebigen konvexen Menge.

**Definition 1.2** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $C \subset E^d$  eine endliche Punktmenge. Gilt  $\text{conv } C \subset C + K$ , so nennt man  $C$  eine *Überdeckungskonfiguration* von  $K$ . Mit  $\mathcal{U}(K)$  bezeichnen wir die Menge aller endlichen Überdeckungskonfigurationen, und für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{U}(K, n) = \{C \in \mathcal{U}(K) : \text{card } C = n\}$ .

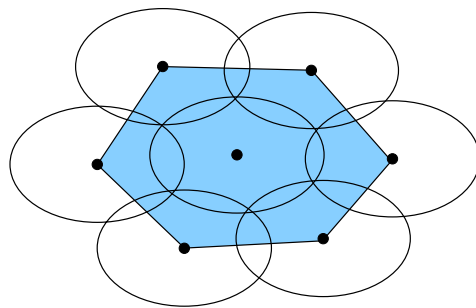


Abbildung 2: Überdeckungspolygon

Solche Überdeckungen wurden schon von BAMBAH und WOODS (vgl. [BW]) und später von BETKE, GRITZMANN, HENK und WILLS untersucht (s. [Gri], [GW1], [GW2], [BHW3]). Da diese im Mittelpunkt unserer Betrachtungen stehen, führen wir nun ein geeignetes Maß für die Qualität dieser Überdeckungen ein.

**Definition 1.3** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $C \in \mathcal{U}(K)$ . Dann heißt

$$\vartheta(K, C, 0) = \frac{\text{card } C \cdot V(K)}{V(\text{conv } C)}$$

die Dichte der Überdeckungskonfiguration  $C$  und

$$\vartheta(K, n, 0) = \min \left\{ \frac{n V(K)}{V(\text{conv } C)} : C \in \mathcal{U}(K, n) \right\}$$

die Dichte einer dünnsten finiten Überdeckung durch  $K$  der Kardinalität  $n$ .

Die Existenz des Minimums in Definition 1.3 ergibt sich aus dem Satz von BOLZANO–WEIERSTRASS. Für niederdimensionale Konfigurationen  $C$  setzen wir ferner  $\vartheta(K, C, 0) = \infty$ . Also ist  $\vartheta(K, C, 0) > 0$  für alle  $C \in \mathcal{U}(K)$ . Zudem können hier eindimensionale Überdeckungskonfigurationen keine besondere Rolle spielen. Zumindest für die Kugel zeigt sich jedoch, dass „fast lineare“ Konfigurationen, sogenannte *Knochenkonfigurationen*, bei denen „fast alle“ Translationsvektoren auf einer Geraden liegen, gute Konfigurationen darstellen (bzgl.  $\vartheta(B^d, n, 0)$ ). Diese Knochenkonfigurationen werden in Abschnitt 1.3 definiert, und für genügend große  $n$  erhält man mit ihnen kleine obere Schranken für die Dichte  $\vartheta(B^d, n, 0)$ . Es gilt

$$\vartheta(B^d, n, 0) \leq \sqrt{\frac{\pi e}{2}} (1 \Leftrightarrow cn^{-2/d})$$

mit einer nur von  $d$  abhängigen Konstanten  $c$  (s. [GW1], [GW2]).

Neben den bisher beschriebenen endlichen und unendlichen Überdeckungen sind wir auch an *gitterförmigen* Überdeckungen interessiert. Solche Überdeckungen weisen eine besondere geometrische Struktur auf und spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Überdeckungen. Eine Menge  $L \subset E^d$  nennt man ein *Gitter*, wenn  $L$  aus allen ganzzahligen Linearkombinationen von  $d$  linear unabhängigen Vektoren  $a_1, \dots, a_d$  besteht. Diese Vektoren bilden eine *Basis* von  $L$ , und der Absolutbetrag ihrer Determinante heißt *Determinante* von  $L$ ,  $\det L$ , und ist unabhängig von der Wahl der Basis. Das zu  $L$  *polare Gitter*  $L^*$  ist definiert durch

$$L^* = \left\{ y \in E^d : x \cdot y \in \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in L \right\}.$$

Ist  $A$  eine Basis von  $L$ , so ist  $A^* = (A^{-1})^T$  eine Basis von  $L^*$  (s. [G,L]). Ein Gittervektor  $u \in L$  heißt *primitiv*, falls  $\text{conv}\{0, u\} \cap L \setminus \{0, u\} = \emptyset$  gilt. Schließlich bezeichnen wir für eine beschränkte Menge  $M \subset E^d$  mit  $G(M, L)$  die Anzahl der Gitterpunkte von  $L$  in  $M$ .

Ist  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $L$  ein Gitter mit  $L + K = E^d$ , so nennt man  $L$  ein *Überdeckungsgitter* von  $K$ . Die Menge aller Überdeckungsgitter von  $K$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}(K)$ . Wie bei beliebigen Überdeckungen ist man auch hier an solchen Gittern aus  $\mathcal{L}(K)$  interessiert, die den Raum  $E^d$  ökonomisch überdecken. Daher die folgende

**Definition 1.4** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$ . Dann heißt

$$\vartheta^*(K) = \inf\{\vartheta(K, L) : L \in \mathcal{L}(K)\}$$

*Dichte einer dünnsten Gitterüberdeckung durch  $K$ .*

Für  $L \in \mathcal{L}(K)$  gilt  $\vartheta(K, L) = V(K)/\det L$  (s. [GL]). Um  $\vartheta^*(K, L)$  zu bestimmen, genügt es also, das Supremum  $\vartheta^*(K)$  der Menge  $\{\det L : L \in \mathcal{L}(K)\}$  zu berechnen. HLAWKA (s. [Hla]) zeigte die Existenz dieses Supremums, also gibt es ein Gitter  $L_0 \in \mathcal{L}(K)$  mit

$$\vartheta^*(K) = \vartheta(K, L_0) = \frac{V(K)}{\det L_0}.$$

$\vartheta^*(K)$  nennt man auch *Überdeckungskonstante* des konvexen Körpers  $K$ .

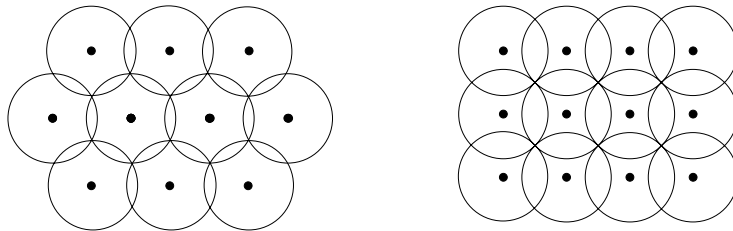


Abbildung 3: Gitterförmige Kreisüberdeckungen

Die Mittelpunkte der Kreise auf der linken Seite in Abbildung 3 gehören zum hexagonalen Gitter, welches eine optimale Kreisüberdeckung der Ebene  $E^2$  liefert. Dass die Überdeckung dünner ist als die auf der rechten Seite, erkennt man schon daran, dass sich die Kreise weniger überlappen.

Für die Kugel  $B^d$  sind dünnste Gitterüberdeckungen in den Dimensionen 1–5 bekannt (s. [CS], Seite 38). Optimale Packungsgitter bzgl.  $B^d$  hat man sogar bis zur Dimension 8 bestimmt (s. [Ro1], Seite 3), und für  $d = 3$  wurde

vor kurzem bewiesen, dass die dichteste Gitterpackung durch  $B^3$  eine dichteste Kugelpackung des  $E^3$  darstellt. Dies wurde schon 1611 von J. KEPLER vermutet (wir hatten bereits erwähnt, dass das duale Überdeckungsproblem noch nicht gelöst ist).

Für  $\vartheta^*(K)$  gilt allgemein

$$1 \leq \vartheta(K) \leq \vartheta^*(K) \leq d^{\log_2 \log d + O(1)}$$

für  $d \rightarrow \infty$  (vgl. [Ro1]).

Zum Abschluß führen wir nun noch endliche Gitterüberdeckungen und die dazugehörigen Dichten ein. Dies geschieht in Analogie zu beliebigen Überdeckungen, wir fassen uns daher kurz.

**Definition 1.5** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $L \in \mathcal{L}(K)$  und  $C \subset L$  eine endliche Punktmenge. Gilt  $\text{conv } C \subset C + K$ , so nennt man  $C$  eine Gitterüberdeckungskonfiguration von  $K$ , und mit  $\mathcal{U}(K, L)$  bezeichnen wir die Menge aller endlichen Gitterkonfigurationen in  $L$ .

**Definition 1.6** Für  $K \in \mathcal{K}^d$ ,  $L \in \mathcal{L}(K)$  und  $n \in \mathbb{N}$  seien

$$\begin{aligned} \vartheta(K, L, n, 0) &= \min\{\vartheta(K, C, 0) : C \in \mathcal{U}(K, L, n)\}, \\ \vartheta(K, L, 0) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, L, n, 0). \end{aligned}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dass alle benötigten Notationen am Ende der Arbeit ab Seite 80 kurz erläutert werden.

## 1.2 Die parametrische Dichte

1995 stellten BETKE, HENK und WILLS in [BHW3] einen neuen Zugang zu Überdeckungen vor. Sie führten das Konzept der sogenannten *parametrischen Dichte* ein, bei dem der Überdeckungskörper mit einem Parameter  $\rho$  gewichtet wird. Für beliebige Überdeckungen geben wir nun eine Definition der parametrischen Dichte an, für gitterförmige Überdeckungen tun wir dies in Kapitel 4, da wir nur dort Gitterüberdeckungen betrachten.

**Definition 1.7** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $C \in \mathcal{U}(K)$ . Für  $\rho \in \mathbb{R}$  sei

$$\begin{aligned} \vartheta(K, C, \rho) &= \frac{\text{card } C \cdot V(K)}{V(\text{conv } C + \rho K)}, \\ \vartheta(K, n, \rho) &= \inf\{\vartheta(K, C, \rho) : C \in \mathcal{U}(K, n)\}, \\ \vartheta(K, \rho) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, n, \rho). \end{aligned}$$



$\vartheta(K, C, 0)$  und  $\vartheta(K, n, 0)$  sind Spezialfälle der parametrischen Dichten  $\vartheta(K, C, \rho)$  und  $\vartheta(K, n, \rho)$ , womit sich die Bezeichnungen in Definition 1.3 erklären. Auch hier können wir in der Definition von  $\vartheta(K, n, \rho)$  „inf“ durch „min“ ersetzen. Eine Anordnung  $C$  mit  $\vartheta(K, n, \rho) = \vartheta(K, C, \rho)$  nennen wir dünnste Überdeckungskonfiguration bzgl.  $K$  und  $\rho$ .

Mit Hilfe der parametrischen Dichte für Packungen konnte die Wurstvermutung von FEJES–TÓTH für  $d \geq 13.387$  bewiesen werden (s. [BHW1]). HENK (vgl. [He]) und BETKE und HENK (vgl. [BH1]) drückten die Schranke auf 42. Dies allein rechtfertigt die Definition 1.7.

Für  $\rho > 0$  ist  $\text{conv } C + \rho K$  die schon oben eingeführte Minkowski-Summe, und für  $\rho < 0$  ist  $\text{conv } C + \rho K$  definiert durch (s. [Sch], Seite 133–137)

$$\text{conv } C + \rho K = \{x \in E^d : x + |\rho| K \subset \text{conv } C\}.$$

Man nennt dies die *Minkowski-Differenz* der Mengen  $\text{conv } C$  und  $\rho K$ . Sie hat verschiedene Anwendungen in der Konvexgeometrie (s. [Sch], Seite 137 und 350). Ist  $V(\text{conv } C + \rho K) = 0$ , so setzen wir  $\vartheta(K, C, \rho) = \infty$ . Aus der Definition folgt dann  $\vartheta(K, C, \rho) > 0$  für alle konvexen Körper, Überdeckungskonfigurationen und Parameter.

In dieser Arbeit betrachten wir überwiegend positive Parameter. Wie für  $\rho = 0$  sind auch für  $\rho > 0$  und  $K = B^d$  lineare Konfigurationen nicht optimal, und Knochenkonfigurationen liefern „kleine“ obere Schranken für die Dichten (s. [BHW3]):

$$\vartheta(B^d, \rho) < \sqrt{\frac{\pi e}{2}} (\rho + 1)^{-(d-1)}.$$

Um die parametrischen Dichten zu untersuchen, benötigt man Informationen über das Volumen des äußeren Parallelkörpers  $\text{conv } C + \rho K$ . Das Volumen dieser Minkowski-Summe läßt sich als Polynom in  $\rho$  darstellen mit den gemischten Volumina  $V(\text{conv } C, K; i)$  als Koeffizienten. Eine ausführliche Behandlung gemischter Volumina findet man in [BF] und [Sch]. Danach gilt

$$V(\text{conv } C + \rho K) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V(\text{conv } C, K; i) \rho^i. \quad (1.1)$$

Für  $i = 0, \dots, d$  sind die gemischten Volumina nichtnegativ, und es gilt  $V(\text{conv } C, K; i) = V(K, \text{conv } C; d \Leftrightarrow i)$ . Ferner sind die gemischten Volumina stetig, linear, monoton und additiv in beiden Komponenten. Weiter ist  $V(\text{conv } C, K; 0) = V(\text{conv } C)$ ,  $V(\text{conv } C, K; d) = V(K)$  und

$$V(\text{conv } C, K; i) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{conv } C) < d \Leftrightarrow i$$

für  $i < d$ . Mit den von MCMULLEN (vgl. [Mc1], [Mc2]) eingeführten inneren Volumina  $V_i(\text{conv } C) = \binom{d}{d-i} \frac{1}{\kappa_{d-i}} V(\text{conv } C, B^d; d \Leftrightarrow i)$  ergibt sich mit (1.1) für  $K = B^d$  das Steiner-Polynom

$$V(\text{conv } C + \rho B^d) = \sum_{i=0}^d V_i(\text{conv } C) \kappa_{d-i} \rho^{d-i}. \quad (1.2)$$

Wir listen nun einige einfache Eigenschaften der parametrischen Dichten auf. Die folgenden Propositionen entnehmen wir [BHW3].

**Proposition 1.8** *Sei  $K \in \mathcal{K}^d$ , und seien  $C_n, C'_n \in \mathcal{U}(K, n)$ . Dann gilt*

- (a)  $\vartheta(K, C_n, \rho) > 0$  für alle  $\rho \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $\vartheta(K, C_n, \rho) \geq \vartheta(K, C_n, \rho')$  für  $\rho < \rho'$ ,
- (c)  $\vartheta(K, C_n, \rho) \geq \vartheta(K, C'_n, \rho)$  für  $\text{conv } C_n \subset \text{conv } C'_n$ ,
- (d)  $\vartheta(AK, AC_n, \rho) = \vartheta(K, C_n, \rho)$  für eine nichtsinguläre, lineare Abbildung  $A : E^d \rightarrow E^d$ .

Aus Proposition 1.8 folgt

**Proposition 1.9** *Für  $K \in \mathcal{K}^d$  ist*

- (a)  $\vartheta(K, n, \rho) > 0$  und  $\vartheta(K, \rho) > 0$  für alle  $\rho \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $\vartheta(K, n, \rho)$  und  $\vartheta(K, \rho)$  sind monoton fallend in  $\rho$ ,
- (c)  $\vartheta(K, n, \rho) \geq 1$  und  $\vartheta(K, \rho) \geq 1$  für  $\rho \leq 0$ ,
- (d)  $\vartheta(K, n, \rho)$  und  $\vartheta(K, \rho)$  sind invariant unter linearen Abbildungen des  $E^d$ ,
- (e)  $\vartheta(K, C, \rho)$ ,  $\vartheta(K, n, \rho)$  und  $\vartheta(K, \rho)$  sind stetig in  $\rho$ ,
- (f)  $\vartheta(K, \rho) \leq \vartheta(K)$  für alle  $\rho \in \mathbb{R}$ .

Für den Beweis der Teile (b), (d) und (e) siehe auch [He], Seite 18. Man ersetze dort einfach Packungskonfigurationen durch Überdeckungskonfigurationen.

### 1.3 Spezielle Konfigurationen

Wir möchten in diesem Abschnitt die schon in 1.1 und 1.2 angesprochenen linearen und „fast linearen“ Überdeckungskonfigurationen vorstellen. Dazu benötigen wir weitere Notationen.

Sei im folgenden  $d \geq 2$ ,  $K \in \mathcal{K}_0^d$  und  $u \in S^{d-1}$ .  $f_K$  bezeichne die *Distanzfunktion* von  $K$  (s. [G,L]), d.h. für  $x \in E^d$  ist

$$f_K(x) = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Für einen affinen Teilraum  $H$  des  $E^d$  und eine Menge  $M \subset E^d$  sei  $\pi_H(M)$  oder einfach  $M/H$  die orthogonale Projektion von  $M$  auf  $H$ . Ist  $H$  eine Hyperebene, also ein  $(d \Leftrightarrow 1)$ -dimensionaler, affiner Teilraum des  $E^d$ , so bezeichnen wir mit  $\pi_H^u(M)$  die Projektion von  $M$  auf  $H$  in Richtung  $u$  bzw.  $\Leftrightarrow u$ .

Nun gibt es eine Trennhyperebene von  $K$  und  $K + \frac{2}{f_K(u)}u$ . Sei  $H_u$  der dazu parallele,  $(d \Leftrightarrow 1)$ -dimensionale, lineare Teilraum. Mit  $I_u = \text{conv}\{0, u\}$  definieren wir für  $h \in [\frac{1}{f_K(u)}, \frac{2}{f_K(u)}]$  den Zylinder

$$Z(K, u, h) = \pi_{H_u}^u(K \cap (K + hu)) + h I_u.$$

Dabei ist  $\pi_{H_u}^u(K \cap (K + hu))$  konvex und zentralsymmetrisch, und es gilt  $Z(K, u, h) \subset K \cup (K + hu)$ . Aus dem Satz von Fubini ergibt sich mit  $K_{h,u} = (K \cap (K + hu))/u^\perp$  für das Volumen von  $Z(K, u, h)$   $V(Z(K, u, h)) = h \cdot V^{d-1}(K_{h,u})$ . Unter allen Zylindern in Richtung  $u$  mit Länge  $h$ , die von  $K$  und  $K + hu$  überdeckt werden, besitzt  $Z(K, u, h)$  also maximales Volumen. Ferner gilt für das Volumen des äusseren Parallelkörpers  $Z(K, u, h) + \rho \pi_{H_u}^u(K)$

$$V(Z(K, u, h) + \rho \pi_{H_u}^u(K)) = h V^{d-1}(K_{h,u} + \rho K/u^\perp).$$

Wir ordnen  $Z(K, u, h)$  nun eine Überdeckungskonfiguration zu, indem wir zunächst  $n \Leftrightarrow 2[\log n]$  Punkte im Abstand von  $h$  auf der Geraden  $\text{lin}(u)$  anordnen. Sei also  $z_i = (i \Leftrightarrow 1)hu, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow 2[\log n]$ . Die zugehörigen Translate von  $K$ ,  $z_i + K$ , überdecken somit einen Zylinder, der aus  $(n \Leftrightarrow 2[\log n] \Leftrightarrow 1)$  sich nicht überlappenden Translaten von  $Z(K, u, h)$  besteht. In den  $(d \Leftrightarrow 1)$ -dimensionalen Enden  $\pi_{H_u}^u(K \cap (K + hu))$  und  $\pi_{H_u}^u(K \cap (K + hu)) + (n \Leftrightarrow 2[\log n] \Leftrightarrow 1)hu$  dieses Zylinders wählen wir nun jeweils  $[\log n]$  Punkte, so dass deren konvexe Hüllen diese Enden bzgl. der Hausdorffmetrik  $\delta$  (vgl. [Sch]) bestmöglichst approximieren. Insbesondere konvergieren diese einbeschriebenen Polytope gegen die Zylinderenden (s. [Du], [BI] und [BeW]). Nennen wir diese Punkte  $z_{n-2[\log n]+1}, \dots, z_n$ , so ist

$$Z_n(K, u, h) = \{z_1, \dots, z_n\} \in \mathcal{U}(K, n),$$

und  $\text{conv } Z_n(K, u, h)$  approximiert den oben erwähnten, aus  $n \Leftrightarrow 2^{\lfloor \log n \rfloor} \Leftrightarrow 1$  Translaten von  $Z(K, u, h)$  bestehenden Zylinder. Da  $Z_n(K, u, h) + K$  an die Gestalt eines Knochens erinnert, nennen wir diese Konfigurationen auch *Knochenkonfigurationen*.

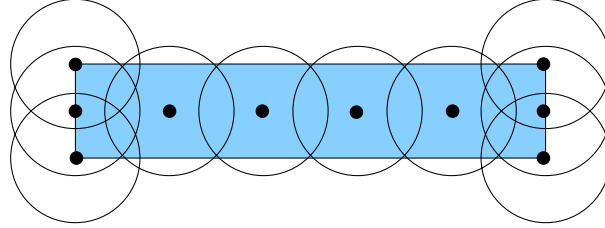


Abbildung 4: Knochenkonfiguration

Für das Volumen von  $\text{conv } Z_n(K, u, h) + \rho K$  erhalten wir mit dem Polynom (1.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned} V(\text{conv } Z_n(K, u, h) + \rho K) \\ \geq V(K) \rho^d + (n \Leftrightarrow o(n)) h V^{d-1} \left( \text{conv } Z_n(K, u, h)/u^\perp + \rho K/u^\perp \right) \end{aligned}$$

Für große, positive  $\rho$  möchten wir nun das maximale Volumen von  $Z(K, u, h) + \rho \pi_{H_u}^u(K)$  in Abhängigkeit von  $h$  bestimmen. Für  $h \in [0, 2/f_K(u)]$  sei dazu

$$\varphi(h) = \varphi(K, u, \rho, h) = h V^{d-1} \left( K_{h,u} + \rho K/u^\perp \right).$$

Es gilt  $V^{d-1} \left( K/u^\perp + \rho K/u^\perp \right) \Leftrightarrow V^{d-1} \left( \rho K/u^\perp \right) = O(\rho^{d-2})$ . Ist  $\rho$  hinreichend groß, z.B.  $\rho \geq \rho_0(d, K)$ , so liegen daher alle Maximalstellen von  $\varphi$  in dem Intervall  $[1/f_K(u), 2/f_K(u)]$ . Nur solche  $\rho$  betrachten wir im folgenden.

Für unser Vorhaben benötigen wir den Begriff einer *konkaven Schar* konvexer Mengen.

**Definition 1.10** Sei  $f$  eine Abbildung von  $[\alpha, \beta]$  in die Familie der konvexen, kompakten Mengen. Gilt für  $h_1, h_2 \in [\alpha, \beta]$  und alle  $\lambda \in [0, 1]$

$$(1 \Leftrightarrow \lambda) f(h_1) + \lambda f(h_2) \subset f((1 \Leftrightarrow \lambda) h_1 + \lambda h_2),$$

so heißt  $f([\alpha, \beta])$  *konkave Schar konvexer Mengen über  $[\alpha, \beta]$* . Gilt statt der Inklusion die Gleichheit, so heißt  $f([\alpha, \beta])$  *Linearschar konvexer Mengen über  $[\alpha, \beta]$* .

**Lemma 1.11** Sei  $u \in S^{d-1}$  beliebig. Dann besitzt die Funktion  $\varphi(h)$  auf dem Intervall  $[0, 2/f_K(u)]$  genau ein Maximum.

**Beweis:**  $\varphi$  ist stetig auf  $[0, 2/f_K(u)]$ , nimmt also ihr Maximum auf dem kompakten Intervall an.

Wir zeigen nun zunächst, dass  $K_{h,u}$  eine konkave Schar über  $[0, 2/f_K(u)]$  ist: Seien dazu  $h_1, h_2 \in [0, 2/f_K(u)]$  mit  $h_1 < h_2$ , und sei  $x \in \lambda K_{h_1,u} + (1 \Leftrightarrow \lambda) K_{h_2,u}$ , also  $x = \lambda y + (1 \Leftrightarrow \lambda) z$  mit  $y \in K_{h_1,u}$  und  $z \in K_{h_2,u}$ . Dann gibt es Punkte  $y_p \in K \cap (K + h_1 u)$  und  $z_p \in K \cap (K + h_2 u)$  mit  $y = y_p/u^\perp$  und  $z = z_p/u^\perp$ . Es gilt  $\lambda y_p + (1 \Leftrightarrow \lambda) z_p \in K$  und  $\lambda y_p + (1 \Leftrightarrow \lambda) z_p \in \lambda K + \lambda h_1 u + (1 \Leftrightarrow \lambda) K + (1 \Leftrightarrow \lambda) h_2 u \subset K + (\lambda h_1 + (1 \Leftrightarrow \lambda) h_2) u$ . Es folgt  $x \in K_{\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2, u}$ .

Weiter folgt, dass auch  $K_{h,u} + \rho K/u^\perp$  eine konkave Schar über  $[0, 2/f_K(u)]$  ist.

Wir nehmen nun an,  $m_1$  und  $m_2$ ,  $m_1 < m_2$ , seien zwei Maximalstellen von  $\varphi$ . Nach dem Satz von Brunn–Minkowski (siehe [Sch]) gilt dann

$$V^{d-1} \left( K_{(1-\lambda)m_1 + \lambda m_2, u} + \rho K/u^\perp \right)^{\frac{1}{d-1}} \geq (1 \Leftrightarrow \lambda) V^{d-1} \left( K_{m_1, u} + \rho K/u^\perp \right)^{\frac{1}{d-1}} \\ + \lambda V^{d-1} \left( K_{m_2, u} + \rho K/u^\perp \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\hat{K}_1 = K_{m_1, u} + \rho K/u^\perp$  und  $\hat{K}_2 = K_{m_2, u} + \rho K/u^\perp$  homothetisch sind, d.h. wenn  $\hat{K}_2 = r \hat{K}_1 + t$  gilt für ein  $t \in E^d$  und  $r > 0$ . Wir können annehmen, dass dies der Fall ist, so dass die Funktion

$$g(\lambda) = (m_1 + (m_2 \Leftrightarrow m_1) \lambda) \left( (1 \Leftrightarrow \lambda) V^{d-1} \left( \hat{K}_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} + \lambda V^{d-1} \left( r \hat{K}_1 \right)^{\frac{1}{d-1}} \right)^{d-1} \\ = (m_1 + (m_2 \Leftrightarrow m_1) \lambda) \left( (1 \Leftrightarrow \lambda) + \lambda r \right)^{d-1} V^{d-1} \left( \hat{K}_1 \right), \quad \lambda \in [0, 1],$$

in 0 und 1 ihr Maximum annimmt. Es gilt aber

$$g'(\lambda) = (1 \Leftrightarrow \lambda + r \lambda)^{d-2} \cdot V^{d-1}(\hat{K}_1) \cdot \\ \cdot \left( d(r \Leftrightarrow 1)(m_2 \Leftrightarrow m_1) \lambda + m_2 \Leftrightarrow m_1 + (d \Leftrightarrow 1)(r \Leftrightarrow 1)m_1 \right).$$

Da  $g(0)$  maximal ist, gilt  $g'(0) \leq 0$ . Wegen  $r < 1$  und weiter  $d(r \Leftrightarrow 1)(m_2 \Leftrightarrow m_1) < 0$  ist dann aber  $g'(\lambda) < 0$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ . Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $g(1)$ .  $\square$

Die Höhe, in der  $\varphi(K, u, \rho, h)$  ihr Maximum annimmt, bezeichnen wir mit  $h(K, u, \rho)$ . Wir nennen sie optimale *Knochenhöhe* in Richtung  $u$ , und die zugehörige Projektion  $K_{h(K, u, \rho), u}$  heißt optimaler *Knochenquerschnitt* in Richtung  $u$ . Statt  $Z(K, u, h(K, u, \rho))$  und  $Z_n(K, u, h(K, u, \rho))$  schreiben wir einfach  $Z_\rho(K, u)$  und  $Z_{\rho, n}(K, u)$ . Die Menge

$$V(K, \rho) = \left\{ v \in S^{d-1} : V \left( Z_\rho(K, v) + \rho \pi_{H_v}^v(K) \right) \right. \\ \left. = \max \left\{ V \left( Z_\rho(K, u) + \rho \pi_{H_u}^u(K) \right) : u \in S^{d-1} \right\} \right\}$$

) faßt die optimalen *Knochenrichtungen* zusammen.

Für  $K = B^d$  sind alle Richtungen gleichwertig, also ist  $V(B^d, \rho) = S^{d-1}$ . Hier gilt

$$V\left(Z(B^d, u, h) + \rho B^d/u^\perp\right) = h\kappa_{d-1} \left(\sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{h^2}{4}} + \rho\right)^{d-1}.$$

Diese in  $h$  stetige, konkave Funktion erreicht ihr Maximum in

$$h(B^d, \rho) = h(B^d, u, \rho) = \frac{1}{d} \cdot \sqrt{4d \Leftrightarrow 2\rho^2 + 2\sqrt{4(d^2 \Leftrightarrow d)\rho^2 + \rho^4}}.$$

Weiter gilt

$$V(\text{conv } Z_n(B^d, u, h) + \rho B^d) \geq \kappa_d \rho^d + (n \Leftrightarrow o(n)) \kappa_{d-1} h(r_{h,n} + \rho)^{d-1},$$

wobei  $r_{h,n}$  den Inkugelradius von  $\text{conv } Z_n(B^d, u, h)/u^\perp$  bezeichne mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{h,n} = \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{h^2}{4}}$ .

Sei nun wieder  $K \in \mathcal{K}_0^d$  beliebig. Im folgenden bezeichne  $Z_{\rho,n}(K)$  eine *dünnsste Knochenkonfiguration* aus  $\mathcal{U}(K, n)$ , d. h. es gelte

$$\vartheta(K, Z_{\rho,n}(K), \rho) = \min\{\vartheta(K, Z_{\rho,n}(K, u), \rho) : u \in S^{d-1}\}.$$

Für beliebige Knochenkonfigurationen  $Z_n(K, u, h)$  gilt allgemein

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, Z_n(K, u, h), \rho) = \frac{V(K)}{h V^{d-1}(K_{h,u} + \rho K/u^\perp)}.$$

**Definition 1.12** Sei  $K \in \mathcal{K}_0^d$ . Dann heißt

$$\vartheta_Z(K, \rho) = \min \left\{ \frac{V(K)}{h(K, u, \rho) V^{d-1}(K_{h(K, u, \rho), u} + \rho K/u^\perp)} : u \in S^{d-1} \right\}$$

die *Dichte einer dünnssten, unendlichen Knochenkonfiguration* bzgl.  $K$  und  $\rho$ .

Es gilt  $\vartheta_Z(K, \rho) = \frac{V(K)}{h(K, v, \rho) V^{d-1}(K_{h(K, v, \rho), v} + \rho K/v^\perp)}$  für beliebiges  $v \in V(K, \rho)$ .

Weiter gilt für die parametrischen Dichten

$$\begin{aligned} \vartheta(K, n, \rho) &\leq \frac{nV(K)}{V(\text{conv } Z_{\rho,n}(K) + \rho K)} \\ \vartheta(K, \rho) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, Z_{\rho,n}(K), \rho) \\ &= \vartheta_Z(K, \rho) \end{aligned}$$

und speziell

$$\vartheta(B^d, \rho) \leq \vartheta_Z(B^d, \rho) = \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-1} h(B^d, \rho) \left( \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{h(B^d, \rho)^2}{4}} + \rho \right)^{d-1}}.$$

Wir kommen nun zu einer weiteren interessanten Familie von Überdeckungskonfigurationen, die man als Grenzfall der Knochenkonfigurationen auffassen kann. Wie bisher sei  $d \geq 2$  und  $u \in S^{d-1}$ . Wir definieren

$$S_n(K, u) = \left\{ \frac{2i}{f_K(u)} : i = 1, \dots, n \right\}$$

und nennen diese Überdeckungskonfigurationen *Wurstkonfigurationen*. Nun

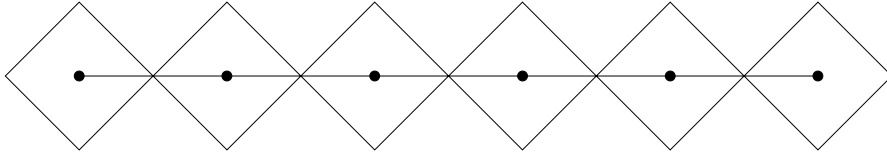


Abbildung 5: Wurstkonfiguration

ist  $\dim \left( K \cap \left( K + \frac{2}{f_K(u)} u \right) \right) < d$ , und besteht  $K \cap \left( K + \frac{2}{f_K(u)} u \right)$  aus genau einem Punkt, so kann man  $S_n(K, u)$  als spezielle Knochenkonfiguration betrachten. Für das Volumen des äußeren Parallelkörpers  $\text{conv } S_n(K, u) + \rho K$  gilt (s. [BF], Seite 45)

$$\begin{aligned} V(\text{conv } S_n(K, u) + \rho K) &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V(\text{conv } S_n(K, u), K; i) \rho^i \\ &= d V(\text{conv } S_n(K, u), K; d \Leftrightarrow 1) \rho^{d-1} + V(K) \rho^d \\ &= 2(n \Leftrightarrow 1) V^{d-1}(K/u^\perp) / f_K(u) \rho^{d-1} + V(K) \rho^d. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\min \left\{ \frac{nV(K)}{2(n \Leftrightarrow 1)V^{d-1}(K/u^\perp) / f_K(u) \rho^{d-1} + V(K)\rho^d} : u \in S^{d-1} \right\}$$

die Dichte einer *dünnsten Wurstkonfiguration* aus  $\mathcal{U}(K, n)$ . Eine dünnste Wurstkonfiguration hängt nicht vom Parameter  $\rho$  ab, und daher bezeichnen wir mit  $S_n(K)$  eine solche optimale Wurstkonfiguration aus  $\mathcal{U}(K, n)$ .

**Definition 1.13** Sei  $K \in \mathcal{K}_0^d$ . Dann heißt

$$\vartheta_S(K, \rho) = \min \left\{ \frac{V(K)}{2V^{d-1}(K/u^\perp)/f_K(u)\rho^{d-1}} : u \in S^{d-1} \right\}$$

die Dichte einer dünnsten, unendlichen Wurstkongfiguration bzgl.  $K$  und  $\rho$ .

Es gilt

$$\vartheta(K, \rho) \leq \vartheta_Z(K, \rho) \leq \vartheta_S(K, \rho). \quad (1.3)$$

Ist  $h(K, v, \rho) \neq 2/f_K(v)$  für alle  $v \in V(K, \rho)$ , so gilt zudem

$$\vartheta(K, n, \rho) \leq \vartheta(K, Z_{\rho, n}(K), \rho) < \vartheta(K, S_n(K), \rho)$$

für genügend große  $n$  bzw.

$$\vartheta(K, \rho) < \vartheta_S(K, \rho).$$

Dies ist z. B. für  $K = B^d$  der Fall. Mit

$$V(\text{conv } S_n(B^d, u) + \rho B^d) = 2(n \Leftrightarrow 1)\kappa_{d-1}\rho^{d-1} + \kappa_d\rho^d,$$

und wegen  $h(B^d, u, \rho) = h(B^d, \rho) < 2 = \frac{2}{f_{B^d}(u)} = \frac{2}{\|u\|}$  gilt

$$\vartheta(B^d, n, \rho) < \vartheta(B^d, S_n(K, u), \rho)$$

für genügend große  $n$  bzw.

$$\vartheta(B^d, \rho) < \vartheta_S(B^d, \rho) = \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-1}\rho^{d-1}}.$$

Bzgl.  $B^d$  und  $\rho \geq 0$  sind endliche ( $n$  groß) und unendliche Wurstkongfigurationen also keine optimalen Überdeckungskongfigurationen. Dies wurde auch schon in [BHW3] für  $n \geq 3$  gezeigt.

Andererseits gibt es auch konvexe Körper  $K$  mit  $\vartheta(K, \rho) = \vartheta_S(K, \rho)$  für genügend große  $\rho$ . Ein Beispiel dafür ist das Quadrat im  $E^2$ . Wir geben daher zum Abschluß des Kapitels die folgende Proposition an.

**Proposition 1.14** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  und es gelte  $\vartheta(K, \hat{\rho}) = \vartheta_S(K, \hat{\rho})$  für ein  $\hat{\rho} \geq 0$ . Dann gilt auch für alle  $\rho \geq \hat{\rho}$

$$\vartheta(K, \rho) = \vartheta_Z(K, \rho) = \vartheta_S(K, \rho)$$



**Beweis:** Nach Voraussetzung gilt für eine Teilfolge  $(n_k)$

$$\begin{aligned}\vartheta(K, \hat{\rho}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta(K, n_k, \hat{\rho}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta(K, S_{n_k}(K), \hat{\rho}) = \vartheta_S(K, \hat{\rho}).\end{aligned}$$

Also ist

$$\vartheta(K, n_k, \hat{\rho}) = \vartheta(K, S_{n_k}(K), \hat{\rho}) + o(1)$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Mit  $v \in V(K, \rho)$  folgt

$$2(n_k \Leftrightarrow 1)V^{d-1}(K/v^\perp) / f_K(v)\hat{\rho}^{d-1} \geq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} V(\text{conv } C_{n_k}, K; i) \hat{\rho}^i + o(1)$$

für alle  $C_{n_k} \in \mathcal{U}(K, n_k)$  und  $k \rightarrow \infty$ . Die gemischten Volumina sind nichtnegativ, also gilt die Ungleichung für alle  $\rho \geq \hat{\rho}$ . Für diese  $\rho$  folgt

$$\vartheta(K, S_{n_k}(K), \rho) + o(1) \leq \vartheta(K, n_k, \rho) \leq \vartheta(K, S_{n_k}(K), \rho)$$

für  $k \rightarrow \infty$  und so  $\vartheta(K, \rho) = \vartheta_S(K, \rho)$ . Mit (1.3) folgt insgesamt die Behauptung.  $\square$

## 2 Ebene Überdeckungen

### 2.1 Über einen Satz von Bambah und Woods

In diesem Kapitel behandeln wir Überdeckungen in der Euklidischen Ebene. Im Vergleich zu höheren Dimensionen ist die Theorie der Überdeckungen in der Ebene weit entwickelt. Wir fassen zunächst einige Resultate kurz zusammen. 1939 zeigte KERSHNER (s. [Ke])

$$\vartheta(B^2) = \vartheta^*(B^2) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Es gibt also ein Gitter  $L \in \mathcal{L}(B^2)$ , so dass  $L + B^2$  eine dünnste Überdeckung der Ebene darstellt. In diesem Gitter wird jeder Kreis von sechs weiteren überlappt, und die Mittelpunkte solcher sechs Kreise bilden ein reguläres Sechseck. Man nennt  $L$  daher auch hexagonales Gitter (siehe Abbildung 3).

Sei nun  $K \in \mathcal{K}^2$  beliebig. Mit  $h(K)$  bezeichnen wir die Fläche des größten in  $K$  eingeschriebenen Sechsecks. Für ein Translat  $x + K$  von  $K$  schreiben wir hier kurz  $K(x)$ . FEJES TÓTH (s. [FejL1]) bewies für eine endliche Überdeckung eines Sechsecks  $S \in \mathcal{K}^2$  mit  $S \subset \cup_{i=1}^n K(x_i)$  die Ungleichung  $V(S) \leq n h(K)$ . Für die Überdeckungskonstante  $\vartheta(K)$  von  $K$  zeigte BESICOVITCH (s. [Be])  $\vartheta(K) \geq 2/3 V(K)$ . Damit folgt insgesamt

$$\frac{V(K)}{h(K)} \leq \vartheta(K) \leq \vartheta^*(K) = \frac{V(K)}{\vartheta(K)} \leq \frac{3}{2}$$

für  $K \in \mathcal{K}^2$ . Für zentralsymmetrische, konvexe Scheiben  $K \in \mathcal{K}_0^2$  gilt sogar

$$\vartheta(K) = \vartheta^*(K) = \frac{V(K)}{\vartheta(K)} \leq \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Dies folgt nach obigem aus der Identität  $h(K) = \vartheta(K) V(K)$  (vgl. [Do]) und der Ungleichung  $\vartheta(K) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} V(K)$  (vgl. [Sa]) für alle  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Also auch für zentralsymmetrische, konvexe Scheiben sind dünnste gitterförmige Überdeckungen optimal.

Für beliebige konvexe Scheiben  $K \in \mathcal{K}^2$  läßt sich  $\vartheta(K)$  nicht so einfach bestimmen. Wie für zentralsymmetrische Körper wird allerdings auch hier  $\vartheta(K) = \vartheta^*(K)$  vermutet. Das dazu duale Packungsproblem wurde schon 1951 von ROGERS (s. [Ro2]) gelöst.

Neben der Ungleichung von FEJES TÓTH gibt es weitere, allgemeinere Aussagen über endliche Überdeckungen in der Ebene. BAMBAH und ROGERS (s. [BR]) zeigten

$$V(C) \leq (n \Leftrightarrow 1), (K) + V(K)$$

für  $C \in \mathcal{K}^2$  und  $K \in \mathcal{K}_0^2$  mit  $C \subset \cup_{i=1}^n K(x_i)$ .

1971 bewiesen BAMBAH und WOODS (s. [BW]) den folgenden Satz.

**Satz 2.1** Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  eine konvexe Scheibe, und sei  $C_n = \{c_1, \dots, c_n\} \in \mathcal{U}(K, n)$ ,  $n \geq 2$ . Weiter sei  $H(C_n) = \text{card}(C_n \cap \text{bd conv } C_n)$ . Dann gilt

$$V(\text{conv } C_n) \leq (n \Leftrightarrow H(C_n)/2 \Leftrightarrow 1), (K). \quad (2.1)$$

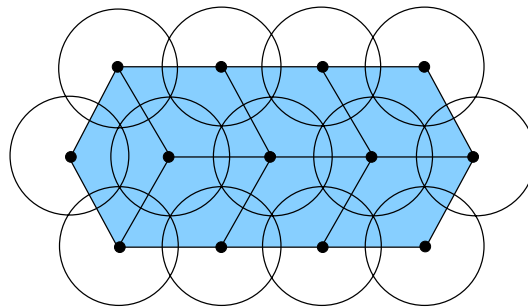


Abbildung 6: Endliche Überdeckung

### Bemerkungen:

- (a) Der Beweis von Satz 2.1 basiert auf einer Aussage von BAMBAH, ROGERS und ZASSENHAUS (s. [BRZ]) für beliebige *Jordan-Polygone*. Ein *Jordan-Polygon* ist ein Polygon, dessen Rand eine Jordankurve darstellt. Für den Einheitskreis  $B^2$  gaben BETKE, HENK und WILLS 1995 einen sehr kurzen Beweis von (2.1) an, der ohne [BRZ] auskommt. Dieser soll hier auf beliebige zentralsymmetrische, konvexe Mengen übertragen werden. Wir merken an, dass der resultierende Beweis insgesamt kürzer ist als der in [BW].
- (b) Ist  $\text{conv } C_n$  entartet, d. h.  $\dim C_n < 2$ , so gilt die Ungleichung (2.1). Wir betrachten daher nur Konfigurationen  $C_n$  mit  $n \geq 3$  und  $\dim C_n = 2$ .

- (c) Die Schranke in (2.1) ist scharf, denn für jedes  $n \geq 3$  kann man im optimalen Überdeckungsgitter von  $K$  geeignete Konfigurationen wählen, so dass in (2.1) Gleichheit gilt (siehe z.B. Abbildung 6).
- (d) Nach (c) gibt es zu jedem  $n \geq 3$  ein  $C_n \in \mathcal{U}(K, n)$  mit  $\vartheta(K, C_n, 0) = \frac{V(K)}{1-H(C_n)/2n-1/n}$ . Solche Konfigurationen  $C_n$ , bei denen zudem  $\text{card}(\text{bd conv } C_n \cap C_n)$  niedrig ausfällt, ergeben also gute obere Schranken für  $\vartheta(K, n, 0)$ .

Für den Beweis von Satz 2.1 benötigen wir einige Vorbereitungen. Sei im folgenden  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex. Für ein Jordan-Polygon mit den (geordneten) Ecken  $x_1, \dots, x_k$  schreiben wir  $[x_1, \dots, x_k]$ . Insbesondere bezeichnet  $[x_1, x_2]$  die Strecke  $\text{conv} \{x_1, x_2\}$ .

Mit Hilfe der Distanzfunktion  $f_K$  von  $K$  ordnen wir nun jedem Punkt  $c_i \in C_n$  die Menge  $D(c_i) = \{x \in \text{conv } C_n : f_K(c_i \Leftrightarrow x) \leq f_K(c_j \Leftrightarrow x) \text{ für alle } 1 \leq j \leq n\}$  zu.  $D(c_i)$  heißt *Dirichlet-Zelle* von  $K$  in  $c_i$ . Wir fassen einige Eigenschaften von Dirichlet-Zellen zusammen (siehe [BR], [BRZ], [BW], [FejG]):

Es gilt  $\text{int } D(c_i) \neq \emptyset$  und  $D(c_i) \subset K(c_i)$ .  $D(c_i)$  ist eine abgeschlossene Menge, die durch eine stetige Kurve begrenzt wird. Weiter ist  $D(c_i)$  *sternförmig* mit Mittelpunkt  $c_i$ , d.h. für  $p \in D(c_i)$  ist  $[c_i, p] \subset D(c_i)$ , es gilt sogar:

$$p \in D(c_i) \implies [c_i, p] \setminus \{p\} \cap D(c_j) = \emptyset \text{ für } i \neq j. \quad (2.2)$$

Die Dirichlet-Zellen von  $K$  in  $c_1, \dots, c_n$  zerlegen  $\text{conv } C_n$ , d.h. sie überdecken  $\text{conv } C_n$ , und es gilt  $\text{int } D(c_i) \cap \text{int } D(c_j) = \emptyset$  für  $i \neq j$  (die letzte Eigenschaft erhält man sofort aus (2.2)).

Zwei weitere wichtige Eigenschaften der Dirichlet-Zellen geben wir als Lemma an.

**Lemma 2.2** (a) Sei  $[a, b]$  eine Kante von  $\text{conv } C_n$ , und sei  $x \in C_n$  mit  $D(x) \cap [a, b] \neq \emptyset$ . Für  $p, q \in D(x) \cap [a, b]$  gilt dann  $[x, p, q] \subset D(x)$ .

(b) Seien  $x, y \in C_n$  mit  $D(x) \cap D(y) \neq \emptyset$ . Für  $z \in D(x) \cap D(y)$  enthält dann  $[x, y, z]$  keine weiteren Punkte aus  $C_n$ .

**Beweis:** (a) Folgt aus (2.2).

(b) Es gilt  $f_K(z \Leftrightarrow x) = f_K(z \Leftrightarrow y) \leq 1$  und weiter  $[x, y, z] \subset z + f_K(x \Leftrightarrow z)K$ , sogar  $[x, y, z] \setminus \{x, y\} \subset \text{int}(z + f_K(x \Leftrightarrow z)K)$ . Für  $p \in C_n \cap [x, y, z]$ ,  $p \neq x$ ,  $p \neq y$ , wäre also  $f_K(z \Leftrightarrow p) < f_K(z \Leftrightarrow x)$  im Widerspruch zu  $z \in D(x) \cap D(y)$ .  $\square$

Ein Punkt  $v \in D(c_i)$  heißt *Ecke* von  $D(c_i)$ , wenn er zu mindestens zwei weiteren Dirichlet-Zellen gehört. Schneiden sich zwei Dirichlet-Zellen  $D(c_i)$

und  $D(c_j)$  in mehr als einem Punkt, so nennen wir jede zusammenhängende Teilmenge der Schnittmenge, die mehr als einen Punkt enthält, eine *Seite* von  $D(c_i)$  und  $D(c_j)$ . Eine *Kante* von  $\text{conv } C_n$  nennen wir eine Strecke  $[c_i, c_j] \subset \text{bd conv } C_n$ , die keinen weiteren Punkt aus  $C_n$  enthält. Sei  $V$  die Eckenmenge aller Dirichlet-Zellen,  $E$  die Seitenmenge aller Dirichlet-Zellen und  $E_n$  die Kantenmenge von  $\text{conv } C_n$ . Die Mengen sind endlich (s. [BRZ]), und für  $n \geq 3$  sind  $E$  und  $E_n$  nichtleer. Einen Punkt von  $\text{bd conv } C_n$ , der zu genau zwei Dirichlet-Zellen gehört, nennen wir *uneigentliche Ecke* dieser Dirichlet-Zellen, und von einer *uneigentlichen Seite* sprechen wir, wenn diese eine zusammenhängende Teilmenge des Schnittes einer Dirichlet-Zelle mit dem Rand von  $\text{conv } C_n$  ist, die mehr als einen Punkt enthält.

Wir konstruieren nun eine weitere Zerlegung von  $\text{conv } C_n$ . Dazu betrachten wir die folgenden Polygone:

(i) Für  $v \in V$  sei  $T(v)$  das Polygon  $\text{conv } \{v_1, \dots, v_s\}$  mit den Ecken  $v_1, \dots, v_s \in C_n$ , zu deren Dirichlet-Zellen  $v$  gehört. Dann gilt  $f_K(v \Leftrightarrow v_1) = f_K(v \Leftrightarrow v_2) = \dots = f_K(v \Leftrightarrow v_s) \leq 1$  und  $v_1, \dots, v_s$  liegen auf dem Rand von  $v + f_K(v \Leftrightarrow v_i)K$ . Da  $K$  strikt konvex ist, ist  $T(v)$  nicht entartet.  $T(v)$  heißt *Delauney Polygon*, und für  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ , überlappen sich  $T(u)$  und  $T(v)$  nicht (s. [BRZ]).

(ii) Sei  $[a, b]$  eine Kante von  $\text{conv } C_n$  mit  $[a, b] \not\subset D(a) \cap D(b)$ . Eine solche Kante aus  $E_n$  nennen wir eine *lange Kante*. Nun konstruieren wir das Polygon  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  folgendermaßen:

Seien  $x_1 = a, x_k = b$ , und seien  $x_2, \dots, x_{k-1}$  Punkte aus  $C_n \setminus \{a, b\}$ , deren Dirichlet-Zellen mehr als einen Punkt von  $[a, b]$  enthalten. Der Schnitt dieser Dirichlet-Zellen mit  $[a, b]$  ist nach Lemma 2.2(a) eine Strecke. Für  $i \in \{2, \dots, k \Leftrightarrow 1\}$  sei  $x_i$  bestimmt durch  $D(x_i) \cap D(x_{i-1}) \cap [a, b] \neq \emptyset$ . Dieser Schnitt ist Ecke oder uneigentliche Ecke der beiden Dirichlet-Zellen  $D(x_i)$  und  $D(x_{i-1})$ , und wir bezeichnen diese (ev. uneigentliche) Ecke mit  $y_{i-1}$ . Für  $i = 1, \dots, k \Leftrightarrow 1$  ist  $y_i$  also der Punkt, indem  $D(x_i)$  auf  $[a, b]$  in  $D(x_{i+1})$

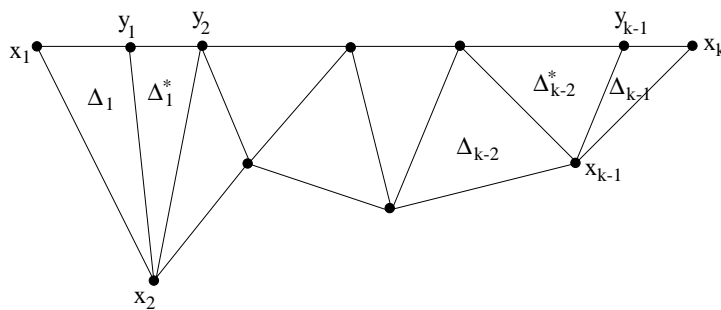


Abbildung 7:  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$

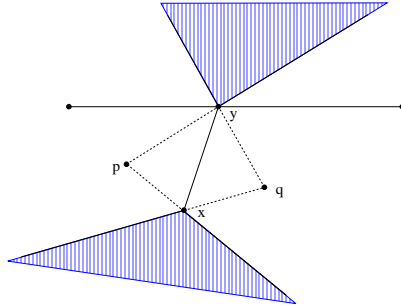
übergeht. Für die Dreiecke  $[x_i, y_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, k \Leftrightarrow 1$  und  $[y_i, y_{i+1}, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, k \Leftrightarrow 2$ , schreiben wir hin und wieder einfach  $\Delta_i$  und  $\Delta_i^*$ . Mit  $\mathcal{F}_{a,b}$  bezeichnen wir die Familie  $\{\Delta_i, i = 1, \dots, k \Leftrightarrow 1, \Delta_i^*, i = 1, \dots, k \Leftrightarrow 2\}$ . Das so konstruierte Polygon  $Q(a, b)$  ist nicht unbedingt konvex, aber in den nächsten Lemmata werden wir sehen, dass es zumindest ein Jordan-Polygon ist.

**Lemma 2.3** *Sei  $x$  Ecke des Polygons  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$ , und sei  $y \in D(x) \cap [a, b]$ . Weiter seien  $p, q \in C_n \setminus \{x\}$  mit  $D(p) \cap D(q) \neq \emptyset$ . Dann gilt  $[p, q] \cap [x, y] = \emptyset$ .*

**Beweis:** Für  $x = a$  oder  $x = b$  gilt die Behauptung. Sei also  $x = x_i$  für ein  $i \in \{2, \dots, k \Leftrightarrow 1\}$ , und wir nehmen an,  $[p, q]$  und  $[x, y]$  haben einen Punkt gemeinsam. Sei  $v \in D(p) \cap D(q)$ . Nach Lemma 2.2(b) gilt  $x \notin [p, q]$ . Da  $[x_i, y_{i-1}, y_i]$  nach Lemma 2.2(a) keinen weiteren Punkt aus  $C_n$  enthält, schneidet  $[p, q]$  die Strecken  $[x, y_{i-1}]$  und  $[x, y_i]$ . O.E. nehmen wir an, dass  $[p, q]$  von  $p$  ausgehend zunächst auf die Strecke  $[x, y_{i-1}]$  und anschließend auf die Strecke  $[x, y_i]$  trifft.  $y$  kann nicht zu  $D(p) \cap D(q)$  gehören, da sonst entweder  $[x, y_{i-1}]$  und relint  $[y, p]$ , oder  $[x, y_i]$  und relint  $[y, q]$  einen Punkt gemeinsam hätten. In jedem Fall wäre dies ein Widerspruch zu (2.2). Also gilt  $v \neq y$ .

Nun kann  $v$  nicht in dem unbeschränkten Teil der Ebene liegen, der durch die Strahlen  $\overleftrightarrow{px}$  und  $\overleftrightarrow{qx}$  begrenzt wird und die Punkte  $p$  und  $q$  nicht enthält, da wir sonst mit  $x \in [p, q, v]$  wieder einen Widerspruch zu Lemma 2.2 hätten.

Weiter hat der offene, unbeschränkte Bereich der Ebene, der durch  $\overleftrightarrow{py}$  und



$\overleftrightarrow{qy}$  begrenzt wird und die Punkte  $p$  und  $q$  nicht enthält (für  $y \in [p, q]$  sei dies der offene Halbraum, der durch die Gerade durch  $p$  und  $q$  begrenzt wird und  $\text{conv } C_n$  nicht enthält), keine gemeinsamen Punkte mit  $\text{conv } C_n$ . Also kann  $v$  auch nicht in diesem Bereich liegen. Der Polygonzug  $pvq$  schneidet daher die Strecke  $[x, y] \setminus \{x, y\}$ , was der Aussage in (2.2) widerspricht.  $\square$

**Lemma 2.4** Sei  $[a, b]$  lange Kante von  $\text{conv } C_n$ , und sei  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$ . Dann gilt

- (a) Für  $1 \leq i < j \Leftrightarrow 1 \leq k \Leftrightarrow 1$  haben die Strecken  $[x_i, x_{i+1}]$  und  $[x_j, x_{j+1}]$  keine Punkte gemeinsam.
- (b) Für  $i \in \{2, \dots, k \Leftrightarrow 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, k \Leftrightarrow 1\}$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq j + 1$ , haben die Strecken  $[x_i, y_i]$  ( $[x_i, y_{i-1}]$ ) und  $[x_j, x_{j+1}]$  keine Punkte gemeinsam.

**Beweis:** (a) Schneiden sich zwei Strecken  $[x_i, x_{i+1}]$  und  $[x_j, x_{j+1}]$ , so liegen die Punkte  $x_i, x_{i+1}$  nach Lemma 2.2 außerhalb des Dreiecks  $[x_j, y_j, x_{j+1}]$ . Also schneidet die Strecke  $[x_i, x_{i+1}]$  den Polygonzug  $x_j y_j x_{j+1}$  im Widerspruch zu Lemma 2.3

(b) Folgt direkt aus Lemma 2.3.  $\square$

**Lemma 2.5** Sei  $[a, b]$  eine lange Kante von  $\text{conv } C_n$ . Dann ist  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  ein Jordan-Polygon.

**Beweis:** Der Polygonzug  $x_1 \dots x_k$  schneidet die Strecke  $[x_1, x_k]$  nur in den Endpunkten, da  $[x_1, x_k] = [a, b]$  außer  $a$  und  $b$  keine weiteren Punkte aus  $C_n$  enthält und  $x_2, \dots, x_{k-1}$  auf einer Seite von  $[a, b]$  liegen. Da sich außerdem nach Lemma 2.4 für paarweise verschiedene  $x_i, x_{i+1}, x_j, x_{j+1} \in \{x_1, \dots, x_k\}$  die Strecken  $[x_i, x_{i+1}]$  und  $[x_j, x_{j+1}]$  nicht treffen, besitzt der Polygonzug  $x_1 \dots x_k$  keine Überschneidungen. Insgesamt ist daher  $\text{bd } Q(a, b)$  eine Jordankurve.  $\square$

**Lemma 2.6**  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  enthält alle Dreiecke aus der Familie  $\mathcal{F}_{a,b}$ .

**Beweis:** Nach Lemma 2.4 schneidet der Polygonzug  $x_1 \dots x_k$  die Strecken  $[x_i, y_i]$  und  $[x_i, y_{i-1}]$ ,  $i = 2, \dots, k \Leftrightarrow 1$ , genau einmal, nämlich in  $x_i$ . Daher liegen die Dreiecke aus  $\mathcal{F}_{a,b}$  tatsächlich in  $Q(a, b)$ .  $\square$

**Lemma 2.7** Sei  $[a, b]$  eine lange Kante von  $\text{conv } C_n$ . Dann wird  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  von den Dreiecken aus  $\mathcal{F}_{a,b}$  überdeckt.

**Beweis:** Sei  $S = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{F}_{a,b}} \Delta$ , und sei  $y \in Q(a, b) \setminus S$ . Dann ist  $y \in \text{int } Q(a, b)$ , und es gibt ein  $\epsilon > 0$ , so dass der Kreis  $B(y, \epsilon)$  mit Mittelpunkt  $y$  und Radius  $\epsilon$  keines der Dreiecke aus  $\mathcal{F}_{a,b}$  schneidet. Sei weiter  $x$  ein Punkt aus dem Inneren eines der Dreiecke. Die  $n$  Geraden  $g_i$  durch die Punkte  $x, c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , können  $B(y, \epsilon)$  nicht überdecken, also gibt es ein  $z \in B(y, \epsilon)$  mit  $z \notin \bigcup_{i=1}^n g_i$ . Sei  $t \in [x, z] \cap S$  mit  $\|t \Leftrightarrow z\| = \min\{\|u \Leftrightarrow z\| : u \in [x, z] \cap S\}$ .

Dann liegt  $t$  im Inneren einer Kante  $[p, q]$  eines Dreiecks aus  $\mathcal{F}_{a,b}$ . Sind  $p, q$  beide aus  $C_n$ , so gilt für ein  $i \in \{1, \dots, k \Leftrightarrow 1\}$   $[p, q] = [x_i, x_{i+1}]$ , und  $z$  liegt auf derselben Seite von  $[x_i, x_{i+1}]$ , wie das nach Lemma 2.6 in  $Q(a, b)$  enthaltene Dreieck  $[x_i, x_{i+1}, y_i]$ . Das ist jedoch ein Widerspruch zu der Tatsache, dass die Strecke  $[t, z]$  außer  $t$  keine weiteren Punkte aus  $S$  enthält. Da  $[p, q]$  zudem keine Teilmenge von  $[a, b]$  ist, muß  $[p, q]$  mit einer der Strecken  $[x_i, y_i]$  oder  $[x_i, y_{i-1}]$ ,  $i = 2, \dots, k \Leftrightarrow 1$ , übereinstimmen. O.E. sei  $[p, q] = [x_i, y_i]$  für ein  $i \in \{2, \dots, k \Leftrightarrow 1\}$ . Da sich die Kanten der Dreiecke  $[x_i, y_i, x_{i+1}]$  und  $[x_i, y_{i-1}, y_i]$  nach Lemma 2.4 und (2.2) nicht überkreuzen können und außerdem keines der Dreiecke im anderen enthalten ist (dies wäre ein Widerspruch zu Lemma 2.2 oder zu der Tatsache, dass alle Punkte aus  $\{x_1, \dots, x_k\}$  auf einer Seite von  $[a, b]$  liegen), werden sie durch  $\text{aff}(\{p, q\})$  getrennt. Das ist jedoch erneut ein Widerspruch zu  $[t, z] \setminus \{t\} \subset Q(a, b) \setminus S$ .  $\square$

### Bemerkungen:

( $\alpha$ ) In Lemma 2.4 haben wir gezeigt, dass sich zwei Strecken  $[x_i, x_{i+1}]$  und  $[x_j, x_{j+1}]$  bzw. zwei Strecken  $[x_i, y_i]$  ( $[x_i, y_{i-1}]$ ) und  $[x_j, x_{j+1}]$  nicht im relativ Inneren schneiden. Wegen (2.2) gilt dies natürlich auch für Strecken  $[x_i, y_i]$  und  $[x_j, y_j]$ . Da außerdem keines der Dreiecke aus  $\mathcal{F}_{a,b}$  in einem anderen Dreieck dieser Familie enthalten ist (das haben wir schon im Beweis von Lemma 2.7 gesehen), überlappen sich die Dreiecke dieser Familie nicht und bilden somit eine Zerlegung von  $Q(a, b)$ .

( $\beta$ )  $Q(a, b)$  enthält außer  $x_1, \dots, x_k$  keine weiteren Punkte aus  $C_n$ .

**Lemma 2.8** *Sei  $[x, y]$  eine Kante des Polygons  $T(v)$ ,  $v \in V$ . Dann haben  $D(x)$  und  $D(y)$  eine gemeinsame Seite  $e$  mit  $v \in e$ .*

**Beweis:** Seien  $e_1, e_2$  Seiten von  $D(x)$  mit  $e_1 \cap e_2 = v$ . Angenommen,  $D(x)$  und  $D(y)$  haben weder  $e_1$  noch  $e_2$  gemeinsam. Nun gilt  $x, y \in \text{bd}(v + f_K(v \Leftrightarrow x)K)$ .  $e_1$  und  $e_2$  liegen in den verschiedenen Gebieten, die man erhält, wenn man die Ebene  $E^2$  durch die Strahlen  $\overleftrightarrow{vx}$  und  $\overleftrightarrow{vy}$  zerlegt. Diese Seiten gehören dann zu zwei weiteren Dirichlet-Zellen, deren Mittelpunkte wegen (2.2) ebenfalls in den gegenüberliegenden Gebieten liegen. Da diese Mittelpunkte Ecken von  $T(v)$  sind und zudem auf  $\text{bd}(v + f_K(v \Leftrightarrow x)K)$  liegen, kann  $[x, y]$  keine Kante von  $T(v)$  sein.  $\square$

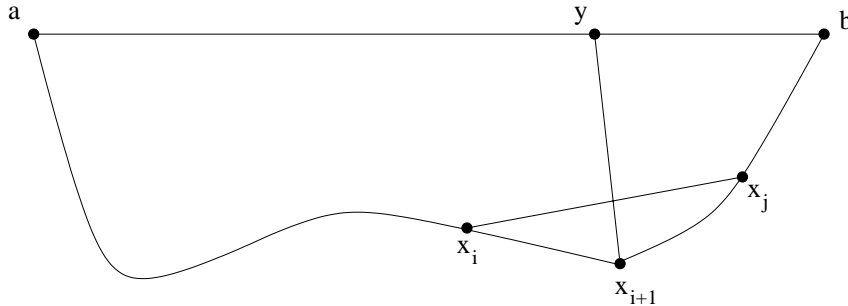
Sei  $\mathcal{F}(C_n)$  die Familie  $\{T(v) : v \in V\} \cup \{Q(a, b) : [a, b] \text{ ist lange Kante von } \text{conv } C_n\}$ .

**Satz 2.9** *Die Polygone aus  $\mathcal{F}(C_n)$  zerlegen  $\text{conv } C_n$ .*



**Beweis:** Es gilt  $\mathcal{F}(C_n) \neq \emptyset$ : Sei  $a$  Ecke der Kanten  $[a, b]$  und  $[a, c]$  aus  $E_n$ , und seien  $d_1$  und  $d_2$  die Mittelpunkte dieser Kanten. Besitzt  $\text{conv } C_n$  keine lange Kanten, so enthält  $\text{bd } D(a)$  wegen  $d_1 \in D(a) \cap D(b)$  und  $d_2 \in D(a) \cap D(c)$  eine Ecke  $v \in V$ .

Wir zeigen jetzt zunächst, dass sich die Polygone nicht überlappen. Für zwei verschiedene Delauney Polygone haben wir dies schon bei der Konstruktion dieser Polygone bemerkt. Seien daher nun  $P$  und  $Q$  Polygone aus  $\mathcal{F}(C_n)$  mit  $Q = Q(a, b)$  für eine lange Kante  $[a, b]$  von  $\text{conv } C_n$ . Wir nehmen an, die Polygone haben innere Punkte gemeinsam.  $P$  kann  $Q$  nicht enthalten, da nach Lemma 2.3  $D(a)$  und  $D(b)$  keine gemeinsamen Punkte besitzen und die Kante  $[a, b]$  somit nicht in  $P$  liegen kann. Also enthält  $Q$  im Inneren Randpunkte von  $P$ . Da sich nach Lemma 2.3 zwei verschiedene Kanten der Polygone höchstens in ihren Endpunkten schneiden, gibt es eine Kante  $[x, z]$  von  $P$ , die bis auf ihre Endpunkte im Inneren von  $Q$  liegt und  $Q$  in zwei Jordan-Polygone zerlegt. Dann gibt es also  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq i+1 < j \leq k$  und  $x = x_i$  und  $z = x_j$  (oder umgekehrt). Sei  $y \in (D(x_{i+1}) \cap [a, b])$ . Die Strecke  $[x_{i+1}, y]$  gehört nach Lemma 2.6 bis auf ihre Endpunkte zum Inneren von  $Q$  und zerlegt  $Q$  daher ebenfalls in zwei Jordan-Polygone  $Q_1, Q_2$  mit  $x \in Q_1$  und  $z \in Q_2$ . Da  $[x, z]$  zu  $Q(a, b)$  gehört und  $\text{bd } Q(a, b)$  eine Jordankurve ist, muß  $[x, z]$  die Strecke  $[x_{i+1}, y]$  schneiden. Wegen  $D(x) \cap D(z) \neq \emptyset$ , ist dies ein Widerspruch zu Lemma 2.3.



Wir zeigen nun, dass die Polygone aus  $\mathcal{F}(C_n)$  insgesamt eine Überdeckung von  $\text{conv } C_n$  bilden. Sei dazu  $S$  die Vereinigung aller Polygone aus  $\mathcal{F}(C_n)$ , und wir nehmen an, es gibt ein  $x$ , welches nicht überdeckt wird. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit  $B(x, \epsilon) \cap S = \emptyset$ . Sei  $s$  ein Punkt aus dem Inneren eines Polygons aus  $\mathcal{F}(C_n)$ . Die  $n$  Geraden  $g_i = \text{aff } \{s, c_i\}$ ,  $c_i \in C_n$ , können  $B(x, \epsilon)$  nicht überdecken, also gibt es ein  $y \in B(x, \epsilon)$  mit  $y \notin g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sei  $t \in [s, y]$  mit  $\|y \Leftrightarrow t\| = \min\{\|y \Leftrightarrow u\| : u \in [s, y] \cap S\}$ . Die Strecke  $[t, y] \setminus \{t\}$  enthält keinen weiteren Punkt aus  $S$ .  $t$  hingegen liegt im Inneren einer Kante  $[p, q]$  eines Polygons  $P \in \mathcal{F}(C_n)$ .

Sei zunächst  $P = Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  für eine lange Kante  $[a, b]$  von  $\text{conv } C_n$ . Dann gilt  $[p, q] = [x_i, x_{i+1}]$  für ein  $i \in \{1, \dots, k \ominus 1\}$ . Sei wie bisher  $y_i = D(x_i) \cap D(x_{i+1}) \cap [a, b]$ . Ist  $y_i$  Ecke der beiden Dirichlet-Zellen, so sind  $x_i$  und  $x_{i+1}$  Ecken von  $T(y_i)$ , und nach obigem liegen  $[x_i, x_{i+1}, y_i]$  und  $T(y_i)$  auf verschiedenen Seiten von  $[x_i, x_{i+1}]$ . Damit erhalten wir den Widerspruch  $t \in \text{int } S$ . Ist  $y_i$  uneigentliche Ecke, so haben  $D(x_i)$  und  $D(x_{i+1})$  eine Seite aus  $E$  gemeinsam und besitzen daher eine weitere Ecke  $v \in V$  oder eine uneigentliche Ecke  $u \in [c, d]$  für eine weitere lange Kante  $[c, d]$  von  $\text{conv } C_n$ . In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch, da entweder  $[x_i, x_{i+1}, y_i]$  und  $T(v)$  oder  $[x_i, x_{i+1}, y_i]$  und  $[x_i, x_{i+1}, u]$  nach obigem auf verschiedenen Seiten von  $[x_i, x_{i+1}]$  liegen.

Ist  $P = T(v)$  für ein  $v \in V$ , dann haben  $D(q)$  und  $D(p)$  nach Lemma 2.8 eine Seite  $e$  gemeinsam mit  $v \in e$ . Läuft man von  $v$  ausgehend entlang dieser Seite, so trifft man entweder auf eine Ecke  $v'$  oder eine uneigentliche Ecke  $u$ . In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch, denn entweder liegen  $T(v)$  und  $T(v')$  oder  $T(v)$  und  $[p, q, u]$  auf verschiedenen Seiten von  $[p, q]$ .  $\square$

Das Jordan-Polygon  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  läßt sich in  $k \ominus 2$  Dreiecke zerlegen, so dass ausser  $x_1, \dots, x_k$  keine neuen Ecken entstehen. Dies lässt sich z.B. durch Induktion über  $k$  erkennen:

Für  $k = 3$  ist das Polygon ein Dreieck. Für  $k > 3$  sei  $c$  die Ecke mit kleinstem positivem Abstand zu  $\text{aff}([a, b])$ . Dann ist  $[a, b, c] \subset P$ , und die Polygone  $[a, \dots, c]$ ,  $[a, b, c]$  und  $[c, \dots, b]$  (man beachte, eventuell sind dies nur zwei Polygone) zerlegen  $Q(a, b)$ . Ferner haben diese Polygone weniger als  $k$  Ecken. Mit Induktionsannahme erhält man die gewünschte Zerlegung in  $k \ominus 2$  Dreiecke.

Die Delauney Polygone  $T(v)$  lassen sich ebenfalls weiterzerlegen, so dass wir insgesamt eine Triangulierung von  $\text{conv } C_n$  erhalten, deren Eckenmenge genau aus den Punkten von  $C_n$  besteht. Diese Triangulierung stellt dann einen ebenen *Zellkomplex*  $\mathcal{Z}$  dar. Ein Zellkomplex im  $E^d$  ist eine Menge von Polytopen, für die gilt (s. [Zi]):

- (i) Jede Seite eines Polytops ist selbst ein Element des Zellkomplexes.
- (ii) Für zwei Polytope  $P_1, P_2$  mit nichtleerem Schnitt ist  $P_1 \cap P_2$  Seite von  $P_1$  und von  $P_2$ .

Bezeichnen wir mit  $T(C_n)$  und  $k$  die Anzahl der Dreiecke und Kanten von  $\mathcal{Z}$ , so gilt  $k = 3T(C_n)/2 + H(C_n)/2$ . Mit dem Satz von Euler (s. [Grü]) gilt weiter  $T(C_n) \Leftrightarrow k + n = 1$  bzw.  $n = \frac{1}{2}T(C_n) + \frac{1}{2}H(C_n) + 1$ . Unsere Vorbereitungen sind damit abgeschlossen, wir kommen endlich zum

**Beweis von Satz 2.1:** Sei zunächst  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex. Wir müssen  $n \geq V(\text{conv } C_n)/, (K) + H(C_n)/2 + 1$  beweisen. Es genügt daher, die Ungleichung  $T(C_n)/2 \geq V(\text{conv } C_n)/, (K)$  zu zeigen.

Sei  $[a, b]$  lange Kante von  $\text{conv } C_n$  mit zugehörigem Polygon  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$ . Sei  $g = \text{aff}([a, b])$ , und o. E. gelte für den euklidischen Abstand  $\text{dist}(\cdot, g)$  zu  $g$   $\text{dist}(x_2, g) \geq \text{dist}(x_{k-1}, g)$ . Sei weiter  $y \in [y_2, b]$  mit  $\|y \Leftrightarrow y_2\| = \|b \Leftrightarrow y_{k-1}\|$ . Dann besteht das Dreieck  $[x_1, y, x_2]$  aus den Dreiecken  $\Delta_1$ ,  $\Delta_1^*$  und  $[y_2, y, x_2]$ , und wegen  $\text{dist}(x_2, g) \geq \text{dist}(x_{k-1}, g)$  gilt  $V([y_2, y, x_2]) \geq V(\Delta_{k-1})$ . Ferner wird  $[x_1, y, x_2]$  durch die Mengen  $K(x_1)$ ,  $K(x_2)$  und  $K(y)$  überdeckt (man beachte  $y_1 \in K(x_1) \cap K(x_2)$  und  $y_2 \in K(y) \cap K(x_2)$ ). Also induziert  $[x_1, y, x_2]$  eine Gitterüberdeckung der Ebene mit Dichte  $\frac{V(K)}{2V([x_1, y, x_2])}$ . Die Dichte der dünnsten Überdeckung der Ebene durch  $K$  ist andererseits durch  $V(K)/, (K)$  gegeben. Damit folgt

$$V(\Delta_1) + V(\Delta_1^*) + V(\Delta_{k-1}) \leq V([x_1, y, x_2]) \leq \frac{1}{2}, (K).$$

Sei  $q(K)$  bzw.  $t(K)$  die Fläche des größten in  $K$  enthaltenen Vierecks bzw. Dreiecks. Da  $K$  zentralsymmetrisch ist, gilt insbesondere  $t(K) = , (K)/2$  (nach Dowker [Do] gilt ja  $h(K) = , (K)$  für  $K \in \mathcal{K}_0^2$ ). Für  $i = 2, \dots, k \Leftrightarrow 2$  haben wir  $V(\Delta_i) \leq q(K)/4 \leq , (K)/4$ , denn wegen  $[x_i, 2y_i \Leftrightarrow x_{i+1}, 2y_i \Leftrightarrow x_i, x_{i+1}] \subset y_i + f_k(x_i \Leftrightarrow y_i)K$  mit  $f_k(x_i \Leftrightarrow y_i) \leq 1$  gilt  $V(\Delta_i) = V([x_i, 2y_i \Leftrightarrow x_{i+1}, 2y_i \Leftrightarrow x_i, x_{i+1}])/4 \leq q(K)/4$ . Da weiter das Parallelogramm  $[y_i, y_{i+1}, 2x_{i+1} \Leftrightarrow y_i, 2x_{i+1} \Leftrightarrow y_{i+1}]$  in  $x_{i+1} + f_K(x_{i+1} \Leftrightarrow y_i)K$  mit  $f_K(x_{i+1} \Leftrightarrow y_i) \leq 1$  enthalten ist, folgt aus demgleichen Grund  $V(\Delta_i^*) \leq , (K)/4$  für  $i = 2, \dots, k \Leftrightarrow 2$ . Mit Lemma 2.7 erhalten wir

$$V(Q(a, b)) \leq \sum_{\Delta \in \mathcal{F}_{a,b}} V(\Delta) \leq (k \Leftrightarrow 2) \cdot \frac{(K)}{2} = (k \Leftrightarrow 2)t(K).$$

Für ein Dreieck  $\Delta$  des Zellkomplexes  $\mathcal{Z}$ , welches nicht in einem Polygon  $Q(a, b)$  enthalten ist, gilt nach Lemma 2.9  $\Delta \subset T(v) \subset v + \mu K$  für ein  $v \in V$  und ein  $\mu \leq 1$  und so  $V(\Delta) \leq t(K)$ . Insgesamt ergibt sich also

$$V(\text{conv } C_n) \leq T(C_n)t(K) = T(C_n) \cdot \frac{(K)}{2}.$$

Durch Approximation durch strikt konvexe Scheiben (s. z.B. [Eg]), kann man die Aussage des Satzes auf die Menge  $\mathcal{K}_0^2$  erweitern.  $\square$

## 2.2 Die parametrische Dichte für ebene konvexe Scheiben

In diesem Abschnitt möchten wir für zentralsymmetrische, konvexe Scheiben  $K$  die Dichten  $\vartheta(K, n, \rho)$  und  $\vartheta(K)$  miteinander vergleichen. Als Anwendung einer „metrischen Version“ von Satz 2.1 erhalten wir die Ungleichungen  $\vartheta(K, n, \rho) > \vartheta(K)$  für kleine (positive)  $\rho$  und  $\vartheta(K, n, \rho) < \vartheta(K)$  für hinreichend große  $\rho$ . Wir benötigen dazu weitere Vorbereitungen.

Sei  $h_K$  die *Stützfunktion* von  $K$  (s.[BF] oder [Sch]), die durch

$$h_K(x) = \max\{x \cdot y : y \in K\}$$

definiert ist. Weiter seien  $h_{\max} = \max_{u \in S^1} h_K(u)$  und  $h_{\min} = \min_{u \in S^1} h_K(u)$ . Bezeichnen wir mit  $D(K)$  und  $d(K)$  Durchmesser und Dicke von  $K$ , so gilt  $h_{\max} = D(K)/2$  und  $h_{\min} = d(K)/2$ . Ist  $u_0 \in S^1$  mit  $h_{\min} = h_K(u_0)$ , und ist  $u_0^\perp$  ein zu  $u_0$  orthogonaler Einheitsvektor, so gilt ferner

$$V(K) \leq 2h_K(u_0)2h_K(u_0^\perp) \leq d(K)D(K). \quad (2.3)$$

Für  $u \in S^1$  sei  $\mathcal{P}_u$  die Menge aller (ev. entarteten) Parallelelogramme  $P = [a, b, c, d] \in \mathcal{K}_0^d$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $P \subset K$ ,
- (ii) Für eine Kante von  $P$ , z. B. für  $\text{conv}\{c, b\}$ , gilt  $(c \Leftrightarrow b) \perp u$  (natürlich gilt dann auch  $(a \Leftrightarrow d) \perp u$ ). Diesen zu  $u$  senkrechten Kantenvektor bezeichnen wir mit  $e_u(P)$ .

Nach dem Auswahlssatz von BLASCHKE (vgl. [BF]) existiert nun ein  $P_u \in \mathcal{P}_u$  mit

$$\frac{1 \Leftrightarrow V(P_u)/, (K)}{\|e_u(P_u)\| h_K(u)} = \min \left\{ \frac{1 \Leftrightarrow V(P)/, (K)}{\|e_u(P)\| h_K(u)} : P \in \mathcal{P}_u \right\}.$$

Weiter sei

$$\beta_1(K) = \min \left\{ \frac{1}{\|e_u(P_u)\| h_K(u)} \left( 1 \Leftrightarrow \frac{V(P_u)}{, (K)} \right) : u \in S^1 \right\}.$$

Die Existenz des Minimums folgt wiederum aus dem Auswahlssatz von BLASCHKE. Es gibt also ein  $u_0 \in S^1$  mit

$$\beta_1(K) = \frac{1}{\|e_{u_0}(P_{u_0})\| h_K(u_0)} \left( 1 \Leftrightarrow \frac{V(P_{u_0})}{, (K)} \right).$$

Schließlich sei  $\beta_0(K) = \frac{1}{h_{\max} D(K)} \left( 1 \Leftrightarrow \frac{q(K)}{\Gamma(K)} \right)$ , wobei  $q(K)$  wieder die Fläche des größten in  $K$  enthaltenen Vierecks bezeichne.

Es gilt  $0 \leq \beta_0(K) < \beta_1(K) \leq \frac{1}{D(K)h_{\min}} = \frac{2}{D(K)d(K)}$ .

**Satz 2.10** Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$ . Dann gilt

(a) Für alle  $C_n \in \mathcal{U}(K, n)$  ist

$$n \geq \frac{1}{\Gamma(K)} V(\text{conv } C_n) + \beta_0(K) V(\text{conv } C_n, K) + 1.$$

(b) Für jedes  $n \geq 5$  gibt es ein  $C_n \in \mathcal{U}(K, n)$  mit

$$n \leq \frac{1}{\Gamma(K)} V(\text{conv } C_n) + \beta_1(K) V(\text{conv } C_n, K) + 3.$$

**Bemerkung:** Ein großer Teil des Beweises von Satz 2.10 stimmt mit dem von Satz 2.1 überein, denn wir benötigen sowohl die Zerlegung von  $\text{conv } C_n$  in die Polygone  $T(v)$  und  $Q(a, b)$  als auch die Zerlegung der Polygone  $Q(a, b)$  in die Dreiecke  $\Delta_i$  und  $\Delta_i^*$ .

**Beweis von Satz 2.10:** Sei zunächst  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex.

(a) Mit  $n = \frac{1}{2}T(C_n) + \frac{1}{2}H(C_n) + 1$  müssen wir die Ungleichung  $\frac{1}{2}T(C_n) + \frac{1}{2}H(C_n) \geq \frac{1}{\Gamma(K)}V(\text{conv } C_n) + \beta_0(K)V(\text{conv } C_n, K)$  beweisen. Sind  $e_1, \dots, e_r$  die Kanten von  $\text{conv } C_n$  mit Normalenvektoren  $u_1, \dots, u_r$  und Längen  $f_1, \dots, f_r$ , so gilt (s. [BF])

$$V(\text{conv } C_n, K) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r h_K(u_i) f_i. \quad (2.4)$$

Wir betrachten nun folgende Fälle:

- (i) Für ein Dreieck  $\Delta$ , welches nicht in einem Polygon  $Q(a, b)$  enthalten ist, gilt  $\frac{V(\Delta)}{\Gamma(K)} \leq \frac{1}{2}$ . Dabei gibt  $\frac{V(\Delta)}{\Gamma(K)}$  den Anteil von  $\Delta$  in  $\frac{1}{\Gamma(K)}V(\text{conv } C_n)$  an, und  $\frac{1}{2}$  ist der Anteil von  $\Delta$  in  $\frac{1}{2}T(C_n)$ .
- (ii) Für eine Kante  $[a, b] \in E_n$  mit Normalenvektor  $u$ , welche keine lange Kante von  $\text{conv } C_n$  ist, gilt  $\|a \Leftrightarrow b\| \leq D(K)$  und so  $\beta_0(K) \|a \Leftrightarrow b\| h_K(u) \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ . Die linke Seite gibt hier den Anteil von  $[a, b]$  in  $\beta_0(K) V(\text{conv } C_n, K)$  an und die rechte Seite dessen Anteil in  $\frac{H(C_n)}{2}$ .
- (iii) Für eine lange Kante  $[a, b] \in E_n$  mit Normalenvektor  $u$  ist der Anteil des Polygons  $Q(a, b) = [x_1, \dots, x_k]$  in  $\frac{1}{2}T(C_n)$  gleich  $\frac{k-2}{2}$  und in  $\frac{H(C_n)}{2}$  gleich  $\frac{1}{2}$ .

Wir müssen daher die Ungleichung

$$\frac{V(Q(a, b))}{\Gamma(K)} + \beta_0(K) \|a \Leftrightarrow b\| h_K(u) \frac{1}{2} \leq \frac{k \Leftrightarrow 1}{2} \quad (2.5)$$

zeigen. Für  $g = \text{aff}([a, b])$  sei o. E.  $\text{dist}(x_2, g) \geq \text{dist}(x_{k-1}, g)$ . Für  $i = 2, \dots, k \Leftrightarrow 2$  gilt

$$\frac{V(\Delta_i) + V(\Delta_i^*)}{\Gamma(K)} + \beta_0(K) \|y_{i+1} \Leftrightarrow y_i\| h_K(u) \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Wegen  $\|x_1 \leftrightarrow y_1\| \leq \frac{1}{2} D(K)$  und  $\|y_{k-1} \leftrightarrow x_k\| \leq \frac{1}{2} D(K)$  gilt zudem

$$\frac{V(\Delta_1) + V(\Delta_1^*) + V(\Delta_{k-1})}{, (K)} + \beta_0(K) \left( \|x_1 \leftrightarrow y_2\| + \|y_{k-1} \leftrightarrow x_k\| \right) h_K(u_{a,b}) \frac{1}{2} \leq 1.$$

Insgesamt ergibt dies (2.5), also gilt die Behauptung.

(b) Wir konstruieren eine Knochenkonfiguration bzgl.  $K$ , die sich minimal von der in Abschnitt 1.3 konstruierten Konfiguration unterscheidet. Sei  $P_{u_0} = [a, b, c, d] \in \mathcal{P}_{u_0}$  mit

$$\beta_1(K) = \frac{1}{\|e_{u_0}(P_{u_0})\| h_K(u_0)} \left( 1 \leftrightarrow \frac{V(P_{u_0})}{, (K)} \right)$$

und  $e_{u_0}(P_{u_0}) = c \leftrightarrow b$ . Sei weiter  $C_n = \{c_{a_1}, c_{a_2}, c_{a_3}, c_{a_4}, c_1, \dots, c_{n-4}\}$  mit  $c_i = i \cdot (c \leftrightarrow b)$ ,  $i = 1, \dots, n \leftrightarrow 4$ , und  $c_{a_1} = \frac{1}{2} \cdot (b \leftrightarrow a)$ ,  $c_{a_2} = \frac{1}{2} \cdot (a \leftrightarrow b)$ ,  $c_{a_3} = (n \leftrightarrow 3)(c \leftrightarrow b) + \frac{1}{2} \cdot (b \leftrightarrow a)$ ,  $c_{a_4} = (n \leftrightarrow 3)(c \leftrightarrow b) + \frac{1}{2} \cdot (a \leftrightarrow b)$ .  $C_n$  ist Überdeckungskonfiguration, und es gilt

$$\begin{aligned} V(\text{conv } C_n) &= (n \leftrightarrow 3)V(P_{u_0}) \\ V(\text{conv } C_n, K) &= \frac{n \leftrightarrow 3}{2} h_K(u_0) \|e_{u_0}(P_{u_0})\| 2 + s \end{aligned}$$

mit einer nur von  $K$  abhängigen Konstanten  $s$ . Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{, (K)} V(\text{conv } C_n) + \beta_1(K) V(\text{conv } C_n, K) \\ &= (n \leftrightarrow 3) \frac{V(P_{u_0})}{, (K)} + (n \leftrightarrow 3) \left( 1 \leftrightarrow \frac{V(P_{u_0})}{, (K)} \right) + s \\ &\geq n \leftrightarrow 3. \end{aligned}$$

Für beliebiges  $K \in \mathcal{K}_0^2$  folgt die Behauptung wieder durch Approximation durch strikt konvexe Scheiben aus  $\mathcal{K}_0^2$ .  $\square$

Seien  $\rho_0(K) = \frac{\Gamma(K)}{2} \beta_0(K)$  und  $\rho_1(K) = \frac{\Gamma(K)}{2} \beta_1(K)$ . Mit (2.3) folgt  $0 \leq \rho_0(K) < \rho_1(K) \leq 1$ .

**Korollar 2.11** *Für alle  $0 \leq \rho \leq \rho_0(K)$  gilt  $\vartheta(K, n, \rho) > \vartheta(K)$ , und für  $\rho \geq \rho_1(K) + \epsilon_n$  gilt  $\vartheta(K, n, \rho) < \vartheta(K)$  für eine Folge  $(\epsilon_n)$  mit  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .*

**Beweis:** Sei  $C_n \in \mathcal{U}(K, n)$ . Dann gilt mit Satz 2.10(a) und der Formel von

Steiner

$$\begin{aligned}
\vartheta(K, C_n, \rho) &= \frac{n V(K)}{V(\text{conv } C_n + \rho K)} \\
&\geq \frac{V(K) \left( \frac{1}{\beta_0(K)} V(\text{conv } C_n) + \beta_0(K) V(\text{conv } C_n, K) + 1 \right)}{V(\text{conv } C_n) + 2\rho V(\text{conv } C_n, K) + V(K)\rho^2} \\
&= \vartheta(K) \cdot \frac{V(\text{conv } C_n) + 2\rho_0(K) V(\text{conv } C_n, K) + \beta_0(K)}{V(\text{conv } C_n) + 2\rho V(\text{conv } C_n, K) + V(K)\rho^2} \\
&> \vartheta(K) \quad \text{für } \rho \leq \rho_0(K).
\end{aligned}$$

Ist  $C_n$  die Knochenkonfiguration aus Satz 2.10(b), so erhält man wie oben  $\vartheta(K, C_n, \rho) < \vartheta(K)$  für  $\rho \geq \rho_1(K) + \epsilon_n$  mit einer Folge  $(\epsilon_n)$  für die  $\epsilon_n \rightarrow 0$  gilt. Also gilt auch  $\vartheta(K, n, \rho) < \vartheta(K)$  für diese  $\rho$ .  $\square$

## 3 Die parametrische Dichte für Überdeckungen im $E^d$

### 3.1 Einführung

Dünne Überdeckungen bzgl. der parametrischen Dichte wurden in [BHW3] untersucht. Dort wurde gezeigt, dass für beliebiges  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $\rho \leq \frac{1}{2}$  volldimensionale Überdeckungskonfigurationen für große  $n$  dünn sind. Hier möchten wir die Gestalt der optimalen Überdeckungskonfigurationen für große  $\rho$  und  $n$  bestimmen. Es wird sich zeigen, dass diese knochenförmig sind. Zusammen mit optimalen Packungen bzgl. der parametrischen Dichte erhalten wir daher folgendes Bild für die Theorie endlicher Überdeckungen und Packungen:

Kleine Parameter führen zu eindimensionalen Packungen und volldimensionalen Überdeckungen, während große Parameter volldimensionale Packungen und fast eindimensionale Überdeckungen liefern.

Um unsere Überdeckungen zu beschreiben, geben wir nun eine Definition aus [ABB] an. Dazu sei für  $K \in \mathcal{K}^d$   $r_k(K)$  der Radius der größten in  $K$  enthaltenen  $k$ -dimensionalen Kugel. Solche  $k$ -dimensionalen Inkugelradien wurden in [BH2] untersucht.

**Definition 3.1** Sei  $\{M_n\}$  eine Folge endlicher Punktmengen im  $E^d$ .

1.  $\{M_n\}$  heißt *unbeschränkt vom Grad  $k$* , falls  $\#M_n \rightarrow \infty$ ,  
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_{k+1}(\text{conv } M_n) < \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_k(\text{conv } M_n) = \infty$ .
2.  $\{M_n\}$  heißt  *$k$ -flach*, wenn  $\{M_n\}$  *unbeschränkt vom Grad  $k$*  ist, und zudem ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $r_{k+1}(\text{conv } M_n) = 0$  für alle  $n \geq n_0$ .
3.  $\{M_n\}$  ist  *$k$ -gleichmäßig*, wenn  $\{M_n\}$  *unbeschränkt vom Grad  $k$*  ist, und außerdem  $\limsup_{n \rightarrow \infty} R(\text{conv } M_n) / r_k(\text{conv } M_n) < \infty$  gilt.



### 3.2 Die 1–Gleichmäßigkeit dünner Überdeckungen für große Parameter

Für  $K \in \mathcal{K}^d$  seien  $D(K)$  und  $d(K)$  wie bisher Durchmesser und Dicke von  $K$ . Mit  $R(K)$  und  $r(K)$  bezeichnen wir Umkugelradius und Inkugelradius von  $K$ . Im folgenden bezeichne  $C_{\rho,n}$  eine optimale Überdeckungskonfiguration aus  $\mathcal{U}(K, n)$ , d.h. es gelte  $\vartheta(K, n, \rho) = \vartheta(K, C_{\rho,n}, \rho)$ .  $u_{\rho,n} \in S^{d-1}$  sei eine Richtung, in der der Durchmesser von  $\text{conv } C_{\rho,n}$  angenommen wird. Für  $D(\text{conv } C_{\rho,n})$  schreiben wir aus praktischen Gründen hin und wieder  $D_{\rho,n}$ , und den Umkugelradius von  $\text{conv } C_{\rho,n} / u_{\rho,n}^\perp$  kürzen wir oft mit  $R_{\rho,n}$  ab. Es gibt also einen Rotationszylinder in Richtung  $u_{\rho,n}$  mit Radius  $R_{\rho,n}$  und Länge  $D_{\rho,n}$ , der  $\text{conv } C_{\rho,n}$  enthält. Wir zeigen nun zunächst, dass die Folge der Radien dieser Zylinder beschränkt ist. Dazu benötigen wir für eine optimale Wurst  $S_n(K)$  das Volumen  $V(\text{conv } S_n(K) + \rho K)$ . Wir definieren daher

$$s_m(d, K) = \max\{2V^{d-1}(K/u^\perp)/f_K(u) : u \in S^{d-1}\}.$$

**Satz 3.2** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $C_{\rho,n}$  eine optimale Überdeckungskonfiguration für  $K$ . Dann gibt es ein  $\rho_0 = \rho_0(d, K) \geq 0$ , so dass für alle  $\rho \geq \rho_0$  die Folge

$$R_{\rho,n} = R(\text{conv } C_{\rho,n} / u_{\rho,n}^\perp)$$

beschränkt ist.

**Beweis:** Sei  $C_{\rho,n}$  optimal, und sei  $B(K)$  die Umkugel von  $K$ . Mit der Formel von Steiner für das Volumen des äußeren Parallelkörpers gilt

$$\begin{aligned} V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K) &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} V(\text{conv } C_{\rho,n}, K; i) \rho^i \\ &\leq V(K) \rho^d + \sum_{i=1}^d V_i(\text{conv } C_{\rho,n}) \kappa_{d-i} R(K)^{d-i} \rho^{d-i}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für eine optimale Wurst  $S_n(K)$

$$V(\text{conv } S_n(K) + \rho K) = V(K) \rho^d + (n \Leftrightarrow 1) s_m(d, K) \rho^{d-1}.$$

Da  $C_{\rho,n}$  optimale Überdeckungskonfiguration ist, folgt

$$(n \Leftrightarrow 1) \frac{s_m(d, K)}{\kappa_{d-1} R(K)^{d-1}} \leq V_1(\text{conv } C_{\rho,n}) + \sum_{i=2}^d \frac{V_i(\text{conv } C_{\rho,n}) \kappa_{d-i}}{\kappa_{d-1} R(K)^{i-1}} \cdot \rho^{1-i}.$$

Aus Cauchy's Integral Darstellung für innere Volumina (siehe z.B. [Sch]) folgen die Ungleichungen  $V_i(\text{conv } C_{\rho,n}) \leq n V_i(B^d) R(K)^i$ ,  $i = 1, \dots, d$  (siehe

auch [BHW3]), also existiert eine nur von  $d$  und  $K$  abhängige Konstante  $c$  mit

$$(n \Leftrightarrow 1) \frac{s_m(d, K)}{\kappa_{d-1} R(K)^{d-1}} \leq V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) + \frac{n \cdot c}{\rho} \quad \text{für } \rho \geq 1.$$

Dies führt zu einer (wieder nur von  $d$  und  $K$  abhängigen) Konstanten  $c' > 0$  mit

$$n \cdot c' \leq V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) \quad \text{für } \rho \geq \rho_0(d, K) \geq 1 \quad (3.1)$$

Bezeichnen wir für  $C \in \mathcal{K}^d$  mit  $b(C)$  die mittlere Breite von  $C$ , so gilt andererseits

$$V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) = \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}} \cdot b(\text{conv } C_{\rho, n}) \leq \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}} D(\text{conv } C_{\rho, n}). \quad (3.2)$$

Aus (3.1) und (3.2) ergibt sich insgesamt die Existenz eines  $c'' > 0$  mit

$$D_{\rho, n} = D(\text{conv } C_{\rho, n}) \geq n \cdot c'' \quad (3.3)$$

für große  $\rho$ .

Nun enthält  $\text{conv } C_{\rho, n}$  ein ebenes Dreieck  $\Delta_{\rho, n}$  mit Seitenlänge  $D_{\rho, n}$  und Höhe  $R_{\rho, n}$ . Für dieses Dreieck gilt  $V_2(\Delta_{\rho, n}) = V^2(\Delta_{\rho, n})$ , und wegen der Monotonie der Funktionale  $V_i(\cdot)$  folgt daher

$$\frac{D_{\rho, n} \cdot R_{\rho, n}}{2} \leq V_2(\text{conv } C_{\rho, n}) \leq n \cdot V_2(B^d) R(K)^2$$

Mit (3.3) ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Korollar 3.3** Für  $\rho \geq \rho_0(d, K)$  ist  $\{C_{\rho, n}\}$  1-gleichmäßig.

**Beweis:** Zwischen Umkugelradius und Durchmesser eines konvexen Körpers  $K$  gilt die Beziehung  $R(K) \leq \sqrt{\frac{d}{2d+2}} D(K)$  ([Ju]). Wegen  $r_1(K) = D(K)/2$  ist daher jede vom Grad 1 unbeschränkte Folge  $\{M_n\}$  1-gleichmäßig. Da  $C_{\rho, n}$  optimale Überdeckungskonfiguration ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_1(\text{conv } C_{\rho, n}) = \infty$ . Aus Satz 3.2 folgt weiter  $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_2(\text{conv } C_{\rho, n}) < \infty$ , also ist  $\{C_{\rho, n}\}$  unbeschränkt vom Grad 1.  $\square$

Für strikt konvexe, zentralsymmetrische Körper zeigen wir nun sogar, dass  $R_{\rho, n}$  für große  $\rho$  und  $n$  beliebig klein wird.

**Satz 3.4** Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  strikt konvex und  $\delta > 0$ . Dann gibt es ein  $\rho_0(\delta, d, K) \geq \rho_0(d, K)$  mit

$$R_{\rho,n} < \delta$$

für alle  $\rho \geq \rho_0(\delta, d, K)$  und genügend große  $n$ .

**Beweis:** Sei  $C_{\rho,n}$  optimal, und sei  $\delta > 0$  beliebig. Wir nehmen an, für beliebig große  $\rho$  und  $n$  gilt  $R_{\rho,n} \geq \delta$ . Dann enthält  $\text{conv } C_{\rho,n}$  ein ebenes Dreieck  $\Delta_{\rho,n}$  mit Länge  $D_{\rho,n}$  und Höhe  $\delta$ .  $\Delta_{\rho,n}$  enthält wiederum ein Rechteck  $Q_{\rho,n}$  mit Seitenlängen  $D_{\rho,n}/2$  und  $\delta/2$ .

Wir nutzen nun aus, dass wir für die Überdeckung von  $Q_{\rho,n}$  mehr Translate benötigen, als für die Überdeckung einer einfachen Strecke in Richtung  $u_{\rho,n}$  mit Länge  $D_{\rho,n}/2$ . Dazu definieren wir

$$q(u) := q(K, u, \delta) = \max\{V^1(K \cap g) : g \text{ ist eine zu } \text{lin}(u) \text{ parallele Gerade mit } \text{dist}(g, \text{lin}(u)) = \delta/4\},$$

$$p(u) := p(K, u, \delta) = \frac{q(u) + 2/f_K(u)}{2} \quad \text{und}$$

$$\varphi(u) := \varphi(K, u, \delta) = \frac{4p(u)}{p(u) \cdot f_K(u) + 2}$$

Sind  $g_1, g_2$  zwei parallele Geraden in Richtung  $u$  mit Abstand  $\delta/2$ , so gilt  $\min\{V^1(K \cap g_1), V^1(K \cap g_2)\} \leq q(u)$ .

Um  $Q_{\rho,n}$  zu überdecken, müssen nun insbesondere die Kanten von  $Q_{\rho,n}$  in Richtung  $u_{\rho,n}$  überdeckt werden. Betrachten wir zunächst ein Translat von  $K$ , so wird also von einer der Kanten höchstens ein Stück der Länge  $q(u_{\rho,n}) \leq p(u_{\rho,n})$  überdeckt. Bei zwei aufeinanderfolgenden Translaten von  $K$  wird eine der beiden Kanten höchstens in Länge  $q(u_{\rho,n}) + 2/f_K(u_{\rho,n}) = 2p(u_{\rho,n})$  überdeckt. So fortfahrend erkennt man, dass wir insgesamt mindestens  $\lfloor \frac{D_{\rho,n}}{2p(u_{\rho,n})} \rfloor$  Translate von  $K$  benötigen, um  $Q_{\rho,n}$  zu überdecken. Ferner benötigen wir weitere  $\lfloor \frac{D_{\rho,n}}{4/f_K(u_{\rho,n})} \rfloor$  Translate für die Überdeckung von  $\Delta_{\rho,n} \setminus Q_{\rho,n}$ . Es gilt also

$$n \geq \frac{D_{\rho,n}}{2p(u_{\rho,n})} + \frac{D_{\rho,n}}{4/f_K(u_{\rho,n})} + o(n),$$

bzw.

$$D_{\rho,n} \leq n \cdot \frac{4p(u_{\rho,n})}{p(u_{\rho,n}) \cdot f_K(u_{\rho,n}) + 2} + o(n) = n \cdot \varphi(u_{\rho,n}) + o(n).$$

Damit, und mit Satz 3.2 ergibt sich für den Koeffizienten von  $\rho^{d-1}$  im Steiner-Polynom

$$\begin{aligned} dV(\text{conv } C_{\rho,n}, K; d \Leftrightarrow 1) &\leq \frac{d \kappa_d R_{\rho,n} R(K)^{d-1}}{n} + D_{\rho,n} \cdot V^{d-1}(K/u_{\rho,n}^\perp) \\ &\leq o(n) + n \cdot \varphi(u_{\rho,n}) V^{d-1}(K/u_{\rho,n}^\perp). \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Da  $p(u)$ ,  $f_K(u)$  und  $V^{d-1}(K/u^\perp)$  in  $u$  stetige Funktionale sind, gibt es ein  $u_0 \in S^{d-1}$ , für das  $\varphi(u) V^{d-1}(K/u^\perp)$  maximal wird. Also gilt

$$dV(\text{conv } C_{\rho,n}, K; d \Leftrightarrow 1) \leq n \cdot \varphi(u_0) V^{d-1}(K/u_0^\perp) + o(n) \quad (3.4)$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Da  $K$  strikt konvex ist, gilt nun  $p(u_0) < 2/f_K(u_0)$ . Da weiter die Funktion  $\frac{4x}{\alpha x+2}$  für  $\alpha > 0$  in  $x$  streng monoton wächst, ist auch  $\varphi(u_0) < 2/f_K(u_0)$ . Ferner, wegen  $V_i(\text{conv } C_{\rho,n}) \leq n \cdot V_i(B^d) R(K)^i$  für  $i = 1, \dots, d$ , gibt es eine nur von  $d$  und  $K$  abhängige Konstante  $c$  mit  $\sum_{i=2}^d V_i(\text{conv } C_{\rho,n}) \kappa_{d-i} \leq c \cdot n$ . Insgesamt erhalten wir mit (3.4)

$$\begin{aligned} V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K) &\Leftrightarrow V(\text{conv } S_n(K, u_0) + \rho K) \\ &\leq \rho^{d-1} \left( \left( \varphi(u_0) \Leftrightarrow \frac{2}{f_K(u_0)} \right) \cdot V^{d-1}(K/u_0^\perp) + \frac{c}{\rho} + o(n) \right) \cdot n < 0 \end{aligned}$$

für genügend große  $\rho$  und  $n$ , im Widerspruch zur Optimalität von  $C_{\rho,n}$ .  $\square$

Mit großem  $\rho$  wird  $\text{conv } C_{\rho,n}$  offensichtlich immer „schmäler“ und „länger“. Um die genaue (asymptotische) Gestalt von  $\text{conv } C_{\rho,n}$  zu bestimmen, werden wir nun  $\text{conv } C_{\rho,n}$  durch gewisse Orthogonalzylinder approximieren. Dazu sei für konvexes, kompaktes  $A \subset u^\perp$ ,  $u \in S^{d-1}$ ,  $S_A$  der Streifen  $\{A + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , und für  $l > 0$  sei  $S_{A,l}$  der Orthogonalzylinder mit Basis  $A$  und Höhe  $l$ . Für  $\epsilon > 0$  sei ferner  $S_{A,l,\epsilon}$  der an beiden Seiten um  $\epsilon$  gekürzte Zylinder  $S_{A,l}$ . Mit  $\mathcal{K}(u)$  bezeichnen wir die Familie der konvexen, kompakten Mengen in  $u^\perp$ .

Wir definieren weiter

$$h(A, K) = \max\{h \geq 0 : A \subset K_{h,u} + t \text{ für ein } t \in E^d\}.$$

Da  $K_{h,u}$  bzgl. der Hausdorffmetrik in  $h$  stetig ist, wird das Maximum angenommen. Für  $A \not\subset K$  sei zudem  $h(A, K) = 0$ .

**Lemma 3.5**  $h(\cdot, K)$  ist stetig auf der Menge der  $(d \Leftrightarrow 1)$ -dimensionalen, konvexen Körper im  $E^d$ .

**Beweis:** Sei  $A_n \in \mathcal{K}(u_n)$  mit  $A_n \rightarrow A \in \mathcal{K}(u)$  (also  $u_n \rightarrow u$ ). Wir können annehmen, dass  $h(A_n, K)$  konvergiert. Sei daher  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, K)$ , und wir nehmen an, es gilt  $\alpha > h(A, K)$ . Dann ist  $h(A_n, K) \geq (\alpha + h(A, K))/2$  für große  $n$ . Für diese  $n$  gilt weiter  $A_n \subset (K \cap (K + (\alpha + h(A, K))/2 u_n)) / u_n^\perp + t_n$  mit geeigneten  $t_n \in E^d$ . Nach ev. Übergang zu einer Teilfolge gilt  $t_n \rightarrow t$ . Aus der Stetigkeit von Schnitt und Projektion folgt dann  $A \subset (K \cap (K + (\alpha$

$+h(A, K)/2u)) / u^\perp + t$  im Widerspruch zur Definition von  $h(A, K)$ . Für  $\alpha < h(A, K)$  erhält man auf analoge Weise einen Widerspruch.  $\square$

Nach Satz 3.4 kann man  $C_{\rho, n}$  für große  $\rho$  in Rotationszylinder mit kleinen Radien einbetten. Wir betrachten daher im folgenden sehr schmale Zylinder  $S_{A, l}$ , d.h. Zylinder mit kleinen Umkugelradien von  $A$ . Für die nächsten Aussagen sei  $u \in S^{d-1}$  fest. Sei  $A \subset \delta B^d / u^\perp$ , und für  $l > 0$  gebe es eine Überdeckung von  $S_{A, l}$  durch  $m$  Translate von  $K$ . Für genügend kleines  $\delta$ , z.B.  $\delta \leq \delta_0$ , gibt es dann eine Überdeckung von  $S_{A, l}$  durch Translate  $K(x_1), \dots, K(x_m)$  von  $K$ , die die zusätzliche Eigenschaft haben, dass für zwei Translate  $K(x_i), K(x_j)$  mit nichtleerem Schnitt

$$A \subset (K(x_i) \cap K(x_j)) / u^\perp \tag{3.5}$$

gilt. Durch geeignetes Translieren der konvexen Mengen kann man nämlich jede Überdeckung in eine solche überführen. In Abbildung 6 wird auf der

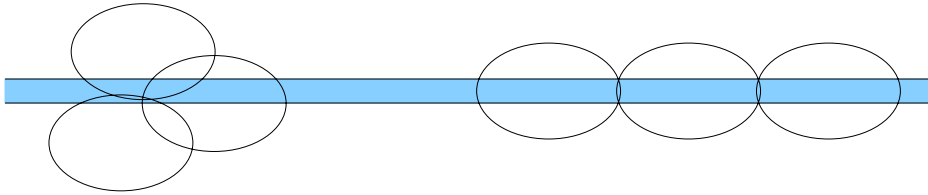


Abbildung 8: Zylinderüberdeckungen

rechten Seite ein längeres Zylinderstück überdeckt, als links. Man kann die Translate auf der linken Seite durch die Translate auf der rechten Seite ersetzen, ohne die Überdeckungseigenschaft zu verlieren.

Wir schätzen nun die Länge unserer Approximationszylinder ab.

**Lemma 3.6** Sei  $A \in \mathcal{K}(u)$  mit  $R(A) \leq \delta_0$ . Für die Translate  $K(x_1), \dots, K(x_m)$  gelte  $S_{A, l} \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i)$ . Dann gibt es ein  $A' \in \mathcal{K}(u)$ ,  $A'$  zentral-symmetrisch mit  $A \subset A'$  und  $R(A') \leq \delta_0$  und Translate  $K(y_1), \dots, K(y_m)$  mit

$$S_{A', l, \epsilon} \subset \bigcup_{i=1}^m K(y_i)$$

für ein geeignetes  $\epsilon$  mit  $0 \leq \epsilon \leq D(K)$ .

**Beweis:** Nach der Vorbemerkung zu diesem Lemma gibt es Translate  $K(y_1), \dots, K(y_m)$ , die  $S_{A, l}$  überdecken und die Eigenschaft (3.5) besitzen.

Nun ist der Schnitt zweier zentralsymmetrischer, konvexer Mengen wieder zentralsymmetrisch und konvex. Ebenfalls ist die senkrechte Projektion eines Körpers aus  $\mathcal{K}_0^d$  auf einen Unterraum des  $E^d$  wieder zentralsymmetrisch und konvex.  $A'$  erhält man nun als Schnitt der zentralsymmetrischen, konvexen Mengen in  $u^\perp$ , die  $A$  enthalten. Damit ist  $A'$  nämlich im Schnitt der Projektionen (auf  $u^\perp$ ) der Schnitte  $K(y_i) \cap K(y_j)$  mit  $K(y_i) \cap K(y_j) \neq \emptyset$  enthalten, womit die geforderte Überdeckungseigenschaft erfüllt ist. Zudem ist  $A \subset A'$  und da die Umkugel von  $A$  zentralsymmetrisch ist, enthält sie auch  $A'$  und es folgt  $R(A') \leq \delta_0$   $\square$

**Lemma 3.7** Sei  $A \in \mathcal{K}(u)$  zentralsymmetrisch mit  $R(A) \leq \delta_0$ . Gibt es Translate  $K(x_1), \dots, K(x_m)$  mit  $S_{A,l} \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i)$ , so gilt

$$l \leq m h(A, K).$$

**Beweis:** Nach der Vorbemerkung zu Lemma 3.6 können wir annehmen, dass für  $i = 1, \dots, m$   $A$  in  $K(x_i)/u^\perp$  enthalten ist.

Sei nun  $K(x)$  eines dieser  $m$  Translate, und sei  $a$  der Mittelpunkt von  $A$ . Weiter sei  $y = x/u^\perp \Leftrightarrow a$  und  $z = x \Leftrightarrow y$ . Somit ist  $a$  auch Mittelpunkt von  $K(z)/u^\perp$ .

Nun gibt es eine zu  $u$  parallele Gerade  $g_1 \subset S_A$  mit

$$V^1(g_1 \cap K(z)) = \min\{V^1(g \cap K(z)) : g \subset S_A \text{ ist Gerade in Richtung } u\}.$$

Für  $g_2 = g_1 + 2(a \Leftrightarrow g_1/u^\perp)$  folgt aus der Zentralsymmetrie von  $K(z)$   $V^1(g_2 \cap K(z)) = V^1(g_1 \cap K(z))$ . Weiter folgt aus der Konvexität und wiederum der Zentralsymmetrie von  $K(z)$

$$\begin{aligned} V^1(g_1 \cap K(z)) &\geq (V^1((g_1 + y) \cap K(z)) + V^1((g_1 \Leftrightarrow y) \cap K(z))) / 2 \\ &= (V^1((g_2 \Leftrightarrow y) \cap K(z)) + V^1((g_1 \Leftrightarrow y) \cap K(z))) / 2 \\ &= (V^1(g_2 \cap K(x)) + V^1(g_1 \cap K(x))) / 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} l &\leq \min \left\{ \sum_{i=1}^m V^1(g_1 \cap K(x_i)), \sum_{i=1}^m V^1(g_2 \cap K(x_i)) \right\} \\ &\leq m \cdot V^1(g_1 \cap K(z)) = m \cdot h(A, K). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei folgt die Gleichheit in (3.6) aus der Definition von  $h(A, K)$ .  $\square$

Aus den letzten beiden Lemmata folgt nun

**Lemma 3.8** Für  $A \in \mathcal{K}(u)$  mit  $R(A) \leq \delta_0$  gebe es Translate  $K(x_1), \dots, K(x_m)$  mit  $S_{A,l} \subset \bigcup_{i=1}^m K(x_i)$ . Dann gilt

$$l \leq m h(A, K) + 2 D(K).$$

### 3.3 Dünne Überdeckungen sind knochenförmig für große Parameter

Sei weiterhin  $d \geq 2$  und  $K \in \mathcal{K}_0^d$  strikt konvex, und sei  $\rho \geq \rho_0(\delta_0, d, K)$  fest. Wir benötigen weitere Notationen.

Es gibt  $x'_n, y'_n \in E^d$  mit  $\|y'_n \Leftrightarrow x'_n\| = D_{\rho,n}$ . Sei  $(\mu_n)$  eine Folge positiver, reeller Zahlen mit  $\mu_n \rightarrow \infty$  und mit  $\mu_n/D_{\rho,n} \rightarrow 0$ . Wir betrachten nun die Punktfolgen  $x_n = x'_n + \mu_n u_{\rho,n}$  und  $y_n = y'_n \Leftrightarrow \mu_n u_{\rho,n}$ . Dabei können wir ohne Einschränkung  $x_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen. Für genügend große  $n$  läßt sich dann  $\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\text{conv}\{0, y_n\}) \cap \text{conv} C_{\rho,n}$  lokal als Zylinder auffassen:

Für beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt nach Lemma 14 in [ABB] für einen Normalenvektor  $v$  des Randes von  $\text{conv} C_{\rho,n}$  in einem Punkt von  $\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\text{conv}\{0, y_n\}) \cap \text{conv} C_{\rho,n}$   $|\langle u_{\rho,n}, v \rangle| < \epsilon$ , falls wir  $n$  genügend groß wählen. Für eine weitere Umschreibung der lokalen Zylindereigenschaft von  $\text{conv} C_{\rho,n}$  benötigen wir die Mengen

$$A_{\lambda,n} = \left( \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\lambda y_n) \cap \text{conv} C_{\rho,n} \right) / u^\perp.$$

Ferner sei  $\delta$  der Hausdorffabstand zwischen kompakten Mengen im  $E^d$  (s. [Sch]).

**Lemma 3.9** *Seien  $\lambda \in (0, 1)$  und  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall  $I(\epsilon, \lambda)$  mit*

$$\delta(A_{\lambda,n}, A_{\mu,n}) < \epsilon$$

für  $\mu \in I(\epsilon, \lambda)$ .

**Beweis:** Seien  $p_n \in \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(x'_n) \cap \text{conv} C_{\rho,n}$  und  $q_n \in \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(y'_n) \cap \text{conv} C_{\rho,n}$ . Für  $\mu < \lambda$  definieren wir die Mengen  $P_n = \text{conv}\{p_n, \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\lambda y_n) \cap \text{conv} C_{\rho,n}\}$  und  $Q_n = \text{conv}\{q_n, \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\mu y_n) \cap \text{conv} C_{\rho,n}\}$ . Nach Satz 3.2 gibt es eine nur von  $d$  und  $K$  abhängige Konstante  $c$  mit  $R_{\rho,n} \leq c$ . Mit  $\tau(\epsilon, \lambda) = \min\left\{\frac{\epsilon\lambda}{2c}, \frac{\epsilon(1-\lambda)}{2c}\right\}$  folgt  $\|\mu y_n \Leftrightarrow \lambda y_n\| \leq \min\left\{\frac{\epsilon\lambda\|y_n\|}{2c}, \frac{\epsilon(1-\lambda)\|y_n\|}{2c}\right\}$  für  $\lambda \Leftrightarrow \mu < \tau(\epsilon, \lambda)$ , und mittels elementarer Geometrie ergeben sich daher für solche  $\mu$  die folgenden Inklusionen:

$$A_{\lambda,n} \subset \left( \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\mu y_n) \cap P_n \right) / u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp \subset A_{\mu,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp$$

und

$$A_{\mu,n} \subset \left( \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\lambda y_n) \cap Q_n \right) / u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp \subset A_{\lambda,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp.$$

Damit folgt die Behauptung, und für  $\mu > \lambda$  beweist man die Aussage analog.  $\square$

**Bemerkung:** Die Intervalle  $I(\epsilon, \lambda)$  aus Lemma 3.9 sind unabhängig von  $n$ . Die Existenz eines solchen Intervalls, welches 0 (1) enthält, ist nicht bewiesen. Jedoch ergibt sich wie in Lemma 3.9 die Existenz eines Intervalls  $I(\epsilon, 0)$  ( $I(\epsilon, 1)$ ) mit  $A_{0,n} \subset A_{\mu,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp$  ( $A_{1,n} \subset A_{\mu,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp$ ) für  $\mu \in I(\epsilon, 0)$  ( $\mu \in I(\epsilon, 1)$ ). Möchten wir das Volumen von  $\text{conv } C_{\rho,n}$  nach oben abschätzen, so können wir annehmen, dass auch die umgekehrten Inklusionen  $A_{\mu,n} \subset A_{0,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp$  ( $A_{\mu,n} \subset A_{1,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp$ ) gelten, wir können ja  $A_{0,n}$  ( $A_{1,n}$ ) entsprechend „vergrößern“. Wir kommen später darauf zurück.

Für einen  $j$ -dimensionalen, affinen Unterraum  $H$  des  $E^d$  und eine konvexe Menge  $M \subset H$  sei nun

$$M_\mu = \{x \in M : (x + \mu B^d) \cap H \subset M\}.$$

$M_\mu$  heißt *innerer Parallelkörper* von  $M$  bzgl. aff  $M$ . Wir betrachten nun folgende Zylinder:

Sei  $\lambda \in (0, 1)$ , und für  $\epsilon > 0$  sei  $I(\epsilon, \lambda)$  wie in Lemma 3.9. Es gilt

$$\bigcap_{\mu \in I(\epsilon, \lambda)} A_{\mu,n} + \{\mu y_n : \mu \in I(\epsilon, \lambda)\} \subset \text{conv } C_{\rho,n} \quad (3.7)$$

und

$$\begin{aligned} \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I(\epsilon, \lambda)\}) \cap \text{conv } C_{\rho,n} \\ \subset A_{\lambda,n} + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp + \{\mu y_n : \mu \in I(\epsilon, \lambda)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Mit  $v(\cdot)$  bezeichnen wir die gemischten Volumina in Hyperebenen des  $E^d$ . Für  $\epsilon \geq 0$  gilt nun

$$\begin{aligned} V^{d-1}(A_{\lambda,n} + \rho K / u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp) &\Leftrightarrow V^{d-1}(A_{\lambda,n} + \rho K / u_{\rho,n}^\perp) \\ &= \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i} \epsilon^i v(A_{\lambda,n} + \rho K / u_{\rho,n}^\perp, B^d / u_{\rho,n}^\perp; i) = o(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.9)$$

für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Wegen  $(A_{\lambda,n})_\epsilon \subset \bigcap_{\mu \in I(\epsilon, \lambda)} A_{\mu,n}$  gilt ferner  $\bigcap_{\mu \in I(\epsilon, \lambda)} A_{\mu,n} \rightarrow A_{\lambda,n}$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . Mit (3.9) folgt

$$\begin{aligned} h\left(\bigcap_{\mu \in I(\epsilon, \lambda)} A_{\mu,n}, K\right) V^{d-1}(A_{\lambda,n} + \rho K / u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d / u_{\rho,n}^\perp) = \\ h(A_{\lambda,n}, K) V^{d-1}(A_{\lambda,n} + \rho K / u_{\rho,n}^\perp) + o(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Gilt für  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\epsilon > 0$  und  $T \subset C_{\rho,n}$

$$\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I(\epsilon, \lambda)\}) \cap (\text{conv } C_{\rho,n} + K) \subset T + K,$$



so gilt dies auch für den in  $\text{conv } C_{\rho,n}$  enthaltenen Zylinder in (3.7). Mit Lemma 3.8 kann man die Länge dieses Zylinders und damit auch die Länge des äusseren Zylinders in (3.8) abschätzen (in Abhängigkeit von  $T$ ). Insgesamt können wir damit das Volumen von  $\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I(\epsilon, \lambda)\}) \cap (\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)$  nach oben abschätzen.

**Lemma 3.10** *Sei  $c > 0$  beliebig. Sei weiter  $I = [\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ , und es gelte  $\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I\}) \cap \text{conv } C_{\rho,n} \subset T + K$  mit  $T \subset C_{\rho,n}$ . Dann gilt für große  $n$*

$$\begin{aligned} V\left(\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I\}) \cap \left(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp\right)\right) \\ \leq \text{card } T \cdot \left(V\left(Z_\rho(K, u_{\rho,n}) + \rho K/u_{\rho,n}^\perp\right) + c\right). \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $\epsilon$  hinreichend klein, so dass

$$\begin{aligned} h\left(\bigcap_{\mu \in I(\epsilon, \lambda)} A_{\mu,n}, K\right) V^{d-1}\left(A_{\lambda,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d/u_{\rho,n}^\perp\right) \\ < h(A_{\lambda,n}, K) V^{d-1}\left(A_{\lambda,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp\right) + c/2 \quad (3.11) \end{aligned}$$

gilt (siehe (3.8)). Nach Lemma 3.9 und anschließender Bemerkung können wir annehmen, dass es zu jedem  $\lambda \in [0, 1]$  ein Intervall  $I(\epsilon, \lambda)$  gibt mit  $\delta(A_{\lambda,n}, A_{\mu,n}) < \epsilon$  für alle  $\mu \in I(\epsilon, \lambda)$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Es gibt daher ein  $\tau(\epsilon)$  mit  $\delta(A_{\lambda,n}, A_{\mu,n}) < \epsilon$  für alle  $\lambda, \mu \in [0, 1]$  mit  $|\lambda \Leftrightarrow \mu| < \tau(\epsilon)$ . Wir zerlegen  $I$  in endlich viele Intervalle  $I_1, \dots, I_m$ , deren Länge nicht größer als  $\tau(\epsilon)$  ist. Für  $l = 1, \dots, m$  sei  $S(n, l, K)$  der an beiden Seiten um  $D(K)$  gekürzte „Zylinder“

$$\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I_l\}) \cap \text{conv } C_{\rho,n},$$

und sei  $T_l$  die Teilmenge von  $T$  mit  $(t_l + K) \cap S(n, l, K) \neq \emptyset$  für  $t_l \in T_l$ . Mit (3.8) und (3.7) gilt nun

$$\begin{aligned} \pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I_l\}) \cap (\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K) \\ \subset A_{\lambda,n} + \epsilon B^d/u_{\rho,n}^\perp + \{\mu y_n : \mu \in I(\epsilon, \lambda)\} \end{aligned}$$

und

$$\bigcap_{\mu \in I_l} A_{\mu,n} + \{\mu y_n : \mu \in I_l\} \subset \text{conv } C_{\rho,n},$$

also insbesondere auch

$$\bigcap_{\mu \in I_l} A_{\mu,n} + \{\mu y_n : \mu \in I_l\} \subset T_l + K.$$

Mit Lemma 3.8 und (3.11) folgt

$$\begin{aligned}
& V\left(S(n, l, K) + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right) \\
& \leq \text{card } T_l \cdot h\left(\bigcap_{\mu \in I_l} A_{\mu, n}, K\right) V^{d-1}\left(A_{\lambda, n} + \rho K/u_{\rho, n}^\perp + \epsilon B^d/u_{\rho, n}^\perp\right) + o(\text{card } T_l) \\
& \leq \text{card } T_l \cdot \left(h(A_{\lambda, n}, K) V^{d-1}\left(A_{\lambda, n} + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right) + c/2\right) \\
& \leq \text{card } T_l \cdot \left(V\left(Z_\rho(K, u_{\rho, n}) + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right) + c/2\right).
\end{aligned}$$

für große  $n$ . Dabei folgt die letzte Ungleichung aus

$$h(A_{\lambda, n}, K) V^{d-1}\left(A_{\lambda, n} + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right) \leq V\left(Z_\rho(K, u_{\rho, n}) + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right).$$

Da wir unsere Zylinder geeignet abgeschnitten haben, kann ein Translat aus  $T + K$  höchstens mit einem der  $S(n, l, K)$ ,  $l = 1, \dots, m$  gemeinsame Punkte haben. Damit folgt

$$\begin{aligned}
& V\left(\pi_{u_{\rho, n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I\}) \cap (\text{conv } C_{\rho, n} + \rho K/u_{\rho, n}^\perp)\right) \\
& = \sum_{j=1}^m V\left(S(n, j, K) + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right) + o(\text{card } T) \\
& \leq \text{card } T \cdot \left(V\left(Z_\rho(K, u_{\rho, n}) + \rho K/u_{\rho, n}^\perp\right) + c\right)
\end{aligned}$$

für große  $n$ . □

**Satz 3.11** *Sei  $\lambda \in (0, 1)$  beliebig, und die Folge der Durchmesserrichtungen  $\{u_{\rho, n}\}$  konvergiere mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\rho, n} = u$ . Dann ist  $u$  optimale Knochenrichtung, d.h.  $u \in V(K, \rho)$ . Weiter ist die Folge  $\{A_{\lambda, n}\}$  konvergent und  $A_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\lambda, n}$  ist optimaler Knochenquerschnitt in Richtung  $u$ , d.h. bis auf Translation gilt*

$$A_\lambda = K_{h(K, u, \rho), u}.$$

**Beweis:** Für beliebiges  $c > 0$  und genügend große  $n$  gilt nach Lemma 3.10

$$\begin{aligned}
& V\left(\pi_{u_{\rho, n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in [0, 1]\}) \cap (\text{conv } C_{\rho, n} + \rho K/u_{\rho, n}^\perp)\right) \\
& \leq n \cdot \left(V\left(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp\right) + c\right).
\end{aligned}$$

Ist  $u \notin V(K, \rho)$ , so gilt  $V\left(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp\right) < V\left(Z_\rho(K, v) + \rho K/v^\perp\right)$  für  $v \in V(K, \rho)$  und weiter  $V(\text{conv } C_{\rho, n} + \rho K) < V(\text{conv } Z_{\rho, n}(K, v) + \rho K)$  für große  $n$ . Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Optimalität von  $C_{\rho, n}$ .

Nun ist  $\{A_{\lambda,n}\}$  beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge  $\{A_{\lambda,n_k}\}$ . Statt  $\{A_{\lambda,n_k}\}$  schreiben wir aus praktischen Gründen wieder  $\{A_{\lambda,n}\}$ . Sei  $A_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\lambda,n}$ , und wir nehmen an, es gilt  $A_\lambda \neq K_{h(K,u,\rho),u}$ . Wir wählen nun  $\epsilon$  genügend klein, so dass für hinreichend große  $n$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & V\left(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp\right) \\ & \Leftrightarrow h\left(\bigcap_{\mu \in I(\epsilon, \lambda)} A_{\mu,n}, K\right) \cdot V^{d-1}\left(A_{\lambda,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d/u_{\rho,n}^\perp\right) \\ & \geq \frac{V\left(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp\right) \Leftrightarrow h(A_\lambda, K) \cdot V^{(d-1)}\left(A_\lambda + \rho K/u^\perp\right)}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

gilt. Man beachte dabei (3.10). Die rechte Seite der Ungleichung bezeichnen wir mit  $c' = c'(\rho, \lambda, K)$ .

Seien nun  $I_0 = I(\epsilon, \lambda) = [\alpha, \beta]$ ,  $I_1 = [0, \alpha]$  und  $I_2 = [\beta, 1]$  (ev. sind dies nur zwei Intervalle, falls nämlich  $\alpha = 0$  oder  $\beta = 1$  gilt). Sei  $T_0 \subset C_{\rho,n}$ , so dass die zugehörigen Translate von  $K$ ,  $T_0 + K$ , einen nichtleeren Schnitt mit dem an beiden Enden um  $D(K)$  gekürzten Zylinder

$$\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I_0\}) \cap \text{conv } C_{\rho,n}.$$

haben. Dann gilt mit Lemma 3.8 und (3.12)

$$\begin{aligned} & V\left(\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I_0\}) \cap \left(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp\right)\right) \\ & \leq \text{card } T_0 \cdot h\left(\bigcap_{\mu \in I_0} A_{\mu,n}, K\right) V^{d-1}\left(A_{\lambda,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp + \epsilon B^d/u_{\rho,n}^\perp\right) + o(\text{card } T_0) \\ & \leq \text{card } T_0 \cdot \left(V\left(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp\right) \Leftrightarrow c'/2\right) \end{aligned}$$

für genügend große  $n$ .

Mit Lemma 3.10 folgt nun insgesamt

$$\begin{aligned} & V(\text{conv } C_n + \rho K) \\ & = V\left(\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in [0, 1]\}) \cap \left(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp\right)\right) + o(n) \\ & = \sum_{j=0}^2 V\left(\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\{\mu y_n : \mu \in I_j\}) \cap \left(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp\right)\right) + o(n) \\ & \leq n \cdot \left(V\left(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp\right) + c \Leftrightarrow \frac{\text{card } T_0}{n} \cdot \frac{c'}{2}\right) \end{aligned}$$

für beliebiges  $c > 0$  und große  $n$ . Für hinreichend kleine  $c$  ist dann also wegen  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card } T_0}{n} > 0$

$$V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K) < V(\text{conv } Z_{\rho,n}(u, K) + \rho K),$$

für genügend große  $n$ , und wie oben haben wir einen Widerspruch zur Extremaleigenschaft von  $C_{\rho,n}$ .  $\square$

**Satz 3.12** Für strikt konvexes  $K \in \mathcal{K}_0^d$  und  $\rho \geq \rho(\delta_0, d, K)$  gilt

$$\vartheta(K, \rho) = \vartheta_Z(K, \rho).$$

**Beweis:** Sei  $u \in V(\rho, K)$ . Dann gilt nach Lemma 3.10 für  $c > 0$

$$V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K) \leq n \cdot \left( V \left( Z_\rho(u, K) + \rho K / u^\perp \right) + c \right).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)}{V(\text{conv } Z_{\rho,n}(K, u) + \rho K)} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)}{V(\text{conv } Z_{\rho,n}(K, u) + \rho K)} \leq 1 + \frac{c}{V(Z_\rho(K, u) + \rho \pi_{u^\perp}(K))} \end{aligned}$$

Mit  $c \rightarrow 0$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)}{V(\text{conv } Z_{\rho,n}(u, K) + \rho K)} = 1$$

und weiter

$$\begin{aligned} \vartheta(K, \rho) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, n, \rho) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n V(K)}{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n V(K)}{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K)}{V(\text{conv } Z_{\rho,n}(u, K) + \rho K)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n V(K)}{V(\text{conv } Z_{\rho,n}(u, K) + \rho K)} = \vartheta_Z(K, \rho) \end{aligned}$$

$\square$

**Satz 3.13** Seien  $K \in \mathcal{K}_0^d$  strikt konvex und  $\rho \geq \rho(\delta_0, d, K)$ . Weiter sei  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\rho,n}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{\rho,n}}{n} = h(K, u, \rho).$$

**Beweis:** Sei  $A_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\lambda,n}$  für  $\lambda \in (0, 1)$ . Nach Satz 3.11 gilt bis auf Translation  $A_\lambda = K_{h(K,u,\rho),u}$ . Sei weiter  $S = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda u + A_\lambda + \rho K/u^\perp)$ .

Wir betrachten nun eine Folge linearer Abbildungen  $A_n = \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{1}{D_n})$  bzgl. der Orthonormalbasen  $\{u_1, \dots, u_d = u_{\rho,n}\}$  (man erweitere  $u_{\rho,n}$  zu einer Orthonormalbasis). Es gilt  $A_n(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp) \Leftrightarrow \text{cl } S$  (Abschluß von  $S$ ) für  $n \rightarrow \infty$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{\rho,n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{\rho,n}}{n} \cdot \frac{V(Z_{\rho,n}(K, u) + \rho K/u^\perp)}{V(\text{conv } C_{\rho,n} + \rho K/u_{\rho,n}^\perp)} \\ &= \frac{V(Z_\rho(K, u) + \rho K/u^\perp)}{V(S)} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Cavalieri gilt zudem  $V(S) = V^{d-1}(K_{h(K,u,\rho),u} + \rho K/u^\perp)$  und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{\rho,n}}{n} = \frac{h(K, u, \rho) \cdot V^{d-1}(K_{h(K,u,\rho),u} + \rho K/u^\perp)}{V^{d-1}(K_{h(K,u,\rho),u} + \rho K/u^\perp)} = h(K, u, \rho).$$

□

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir nochmal den speziellen Fall  $K = B^d$ . Hier können wir o.E.  $u_{\rho,n} = e_d$  annehmen. Aus den letzten drei Sätzen folgt

**Satz 3.14** Für  $K = B^d$  und  $\rho \geq \rho(\delta_0, d, B^d)$  gilt mit  $r = \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{h(\rho, B^d)^2}{4}}$

(a) Für alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt bis auf Translation  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{\lambda,n} = r B^d / e_d^\perp$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{\rho,n}}{n} = h(\rho, B^d)$ .

(c)  $\vartheta(B^d, \rho) = \vartheta_Z(B^d, \rho) = \frac{\kappa_d}{\kappa_{d-1} h(\rho, B^d) (r + \rho)^{d-1}}$ .

## 4 Endliche Gitterüberdeckungen

### 4.1 Einführung

Wir führen zunächst parametrische Dichten für gitterförmige Überdeckungen ein.

**Definition 4.1** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $L \in \mathcal{L}(K)$ . Für  $\rho \in \mathbb{R}$  sei

$$\vartheta(K, L, n, \rho) = \min\{\vartheta(K, C, \rho) : C \in \mathcal{U}(K, L), \text{card } C = n\},$$
$$\vartheta(K, L, \rho) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, L, n, \rho).$$

Mit Ausnahme von Teil (d) lassen sich alle Aussagen von Proposition 1.9 auf den Gitterfall übertragen. Dünne Gitterüberdeckungen bzgl. parametrischer Dichten wurden in [BHW3] untersucht. Für ein Überdeckungsgitter  $L \in \mathcal{L}(K)$  wurden dort Konfigurationen  $C_n \subset L$  mit  $C_n = \text{conv } C_n \cap L$  betrachtet. Dabei zeigte sich, dass für  $\rho \leq \Leftrightarrow d$  und im Fall von zentralsymmetrischen Körpern für  $\rho \leq \Leftrightarrow 1$  volldimensionale Überdeckungskonfigurationen dünn sind. Wir möchten hier alle Überdeckungskonfigurationen im Sinne von Definition 1.5 zulassen. Zudem verstehen wir in diesem Kapitel unter einer dünnsten Gitteranordnung  $C_{\rho, n} \in \mathcal{U}(K, L)$  eine Konfiguration, die unter allen Überdeckungskonfigurationen  $C$  aus  $\mathcal{U}(K, L)$  mit  $G(C, L) \leq n$  optimal ist. D.h., für  $C_{\rho, n}$  gilt

$$\vartheta(K, C_{\rho, n}, \rho) = \min\{\vartheta(K, L, k, \rho) : k \leq n\}.$$

$C_{\rho, n}$  kann also durchaus weniger als  $n$  Punkte besitzen. Diese leichte Modifikation garantiert, dass  $V(\text{conv } C_{\rho, n} + \rho K)$  in  $n$  monoton wächst und gewisse Unregelmäßigkeiten, die sich aus zahlentheoretischen Problemen ergeben, vermieden werden.

Wir betrachten zunächst den ebenen Fall. Lassen wir bel. Gitter aus  $\mathcal{L}(K)$  zu, so stimmt das Problem der Bestimmung optimaler endlicher Überdeckungskonfigurationen mit dem Nicht-Gitter Fall überein. Dies folgt aus der Tatsache, dass jede endliche Punktmenge durch eine Folge von Gitterteilmengen approximiert werden kann. Daher beschränken wir uns auf eine

Teilmenge von  $\mathcal{L}(K)$ , die alle dünnen Überdeckungsgitter enthält, und für die wir eine vollständige Beschreibung der optimalen Überdeckungskonfigurationen angeben können. Dies geschieht zunächst für Überdeckungen bzgl. eines festen Gitters aus dieser Teilmenge. Im zweiten Teil des Abschnittes über ebene Überdeckungen betrachten wir dann optimale Überdeckungen bzgl. variabler Gitter aus der von uns betrachteten Teilmenge von  $\mathcal{L}(K)$ .

Für  $d \geq 2$  und  $K = B^d$  bestimmen wir die Menge aller Gitter aus  $\mathcal{L}(B^d)$ , für die die Wurst für große  $\rho$  und  $n$  optimal ist.

## 4.2 Ebene Gitterüberdeckungen

Im folgenden betrachten wir strikt konvexe Körper  $K \in \mathcal{K}_0^2$ .

Sei  $\mu(K, L)$  der *Überdeckungsradius* von  $K$  bzgl.  $L$ , d.h.  $\mu(K, L) = \min\{\sigma > 0 : \sigma K + L = E^d\}$ , und sei  $\lambda_1(K, L)$  das *erste sukzessive Minimum* von  $K$  bzgl.  $L$ , d.h.  $\lambda_1(K, L) = \min\{\lambda > 0 : \lambda K \cap L \neq \emptyset\}$ . Wir betrachten nun Überdeckungsgitter aus  $\mathcal{L}(K)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\mu(K, L) = 1$ ,
- (ii)  $\lambda_1(K, L) > 1$ .

Die Menge der Gitter mit (i) und (ii) bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}_1(K)$ .

### Bemerkungen:

- (1) Für beliebiges Gitter  $L \in \mathcal{L}(K)$  gilt mit  $\mu = \mu(K, L)$  und  $\lambda_1 = \lambda_1(K, L)$  die Ungleichung  $\mu^2 \Leftrightarrow (\mu \Leftrightarrow \lambda_1/2)^2 \geq \det L/V(K)$  (siehe [GL], Seite 125). Für  $\mu = 1$  und  $\lambda_1 \leq 1$  folgt  $V(K)/\det L \geq (\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1^2/4)^{-1} \geq 4/3$ . Wegen  $\vartheta(K) = \vartheta^*(K) \leq 2\pi/3\sqrt{3} \leq 1.21$  (siehe Kapitel 2) enthält  $\mathcal{L}_1(K)$  also das dünnste Überdeckungsgitter von  $K$ .
- (2) Aus Bedingung (ii) folgt für  $L \in \mathcal{L}_1(K)$  und  $C \in \mathcal{U}(K, L)$   $L \cap \text{conv } C = C$ . Also ist jeder Konfiguration  $C$  eindeutig ein Gitterpolygon  $P = \text{conv } C$  zugeordnet. Statt Überdeckungskonfigurationen  $C$  betrachten wir in der Ebene daher Gitterpolygone  $P$  mit der Eigenschaft  $P \subset P \cap L + K$  und nennen diese Polygone *Überdeckungspolygone*. In Kapitel 2 hatten wir die konvexe Hülle von zwei benachbarten Konfigurationspunkten auf dem Rand des Polygons  $\text{conv } C$  als Kante von  $\text{conv } C$  definiert. Hier möchten wir wieder, wie üblicherweise, die eindimensionalen Schnitte eines (konvexen) Polygons mit seinen Stützgeraden als Kanten bezeichnen.

Insbesondere läßt sich für ein Gitter  $L \in \mathcal{L}_1(K)$  der Knochen nicht als Gitterpolygon darstellen. Wir werden sehen, dass für diese Gitter die Wurst die Rolle des Knochens einnimmt.

Um Überdeckungspolygone zu charakterisieren, führen wir die folgenden Mengen ein.

**Definition 4.2** Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex und  $L \in \mathcal{L}(K)$ . Dann sei  $\mathcal{F}_s(K, L)$  die Menge der Richtungen

$$\mathcal{F}_s(K, L) = \{u \in L : K \cap (K + u) \neq \emptyset\}$$

und

$$\mathcal{F}_d(K, L) = \{u \in L : u = u_1 + u_2, u_1, u_2 \in \mathcal{F}_s(K, L) \\ \text{mit } \text{conv}\{0, u_1, u_1 + u_2\} \in \mathcal{U}(K, L)\}.$$

Ferner sei  $\mathcal{F}(K, L) = \mathcal{F}_s(K, L) \cup \mathcal{F}_d(K, L)$ .

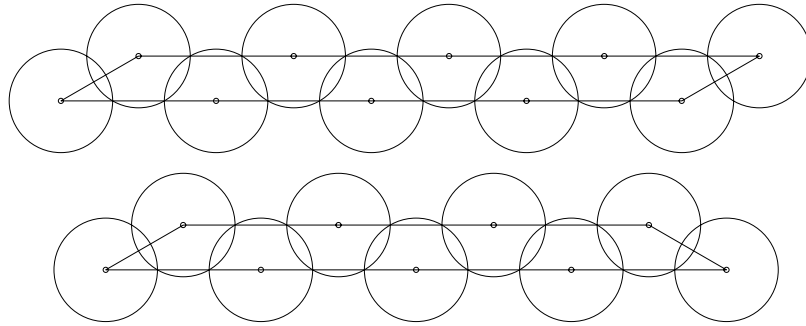


Abbildung 9:  $Q_4$  und  $Q'_4$  für  $K = B^2$  und das hexagonale Gitter.

### Bemerkungen:

- (1)  $\mathcal{F}_s(K, L) \neq \mathcal{F}(K, L)$  ist möglich, z.B. für  $K = B^2$  und das hexagonale Gitter.
- (2)  $\mathcal{F}(K, L)$  ist endlich.
- (3) Die zu  $\mathcal{F}_s(K, L)$  gehörigen Translate von  $K$  bezeichnen wir auch als Nachbarn von  $K$ . Die Dirichlet-Zelle  $D(0) = \{x \in E^2 : f_K(x) \leq f_K(x \Leftrightarrow u) \text{ für alle } u \in L\}$  von  $K$  bzgl.  $L$  in  $0$  ist ein Parallelogramm oder ein Sechseck (siehe [GL]), und  $L + D(0)$  ist eine Gitterpflasterung, d.h. Gitterpackung und Überdeckung zugleich. Da alle Nachbarn von  $D(0)$  auch Nachbarn von  $K$  sind, gibt es mindestens sechs Nachbarn von  $K$ .



- (4) Für  $u \in \mathcal{F}_s(K, L)$  ist  $S_n(K, L, u) = \text{conv}\{i \cdot u \mid i = 0, \dots, n \Leftrightarrow 1\}$  ein Überdeckungspolygon, und wir nennen ein solches Polygon Wurstpolygon oder einfach Wurst.  $\mathcal{F}_s(K, L)$  ist dann die Menge der zulässigen Wurstrichtungen.
- (5) Richtungen aus  $\mathcal{F}(K, L) \setminus \mathcal{F}_s(K, L)$  erlauben keine Wurst. Allerdings können wir für diese Richtungen ähnliche Polygone konstruieren: Sei  $u \in \mathcal{F}_d(K, L)$ ,  $u = u_1 + u_2$  mit  $u_1, u_2 \in \mathcal{F}_s(K, L)$ . Dann sind die Vierecke  $Q_k = \text{conv}\{0, u_1, u_1 + k(u_1 + u_2), k(u_1 + u_2)\}$  und  $Q'_k = \text{conv}\{0, u_1, u_1 + (k \Leftrightarrow 1)(u_1 + u_2), k(u_1 + u_2)\}$  für  $k = 1, 2, \dots$  aus  $\mathcal{U}(K, L)$ . Wir nennen diese Polygone Doppelwurstpolygone oder einfach Doppelwürste. Wegen  $\lambda_1(K, L) > 1$  enthalten  $Q_k$  und  $Q'_k$  keine Gitterpunkte im Inneren, und somit gilt  $\text{card}(L \cap Q_k) = 2(k + 1)$  und  $\text{card}(L \cap Q'_k) = 2k + 1$ .

**Lemma 4.3** *Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex und  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ . Gibt es einen Punkt der Ebene, der in drei Translaten von  $K$  enthalten ist, so liegt dieser Punkt auf dem Rand dieser Translate.*

**Bemerkung:** Das Lemma gilt nicht für bel.  $K$ : Sei  $K$  das Einheitsquadrat und  $L$  das Gitter mit Basis  $\{(1, 0), (1/2, 3/4)\}$ . Dann ist  $\mu(K, L) = 1$ ,  $\lambda_1(K, L) = \frac{3}{2}$  und der Punkt  $(1/2, 1/2)$  liegt auf dem Rand zweier Translate von  $K$  und im Inneren eines weiteren Translates von  $K$ .

**Beweis von Lemma 4.3:** Seien  $w_1, w_2 \in L$  und  $x \in K \cap (w_1 + K) \cap (w_2 + K)$ .

(1)  $x$  liege im Inneren der drei Translate. Dann gibt es ein  $r < 1$  mit  $0, w_1, w_2 \in x + rK$ . Sind  $w_1$  und  $w_2$  kollinear, so sei o.E.  $w_2 = 2w_1$ . Wegen  $x = 2w_1 + y$  mit  $y \in K$  folgt  $w_1 \in K$ , ein Widerspruch zu  $\lambda_1(K, L) > 1$ . Also sind  $0, w_1, w_2$  affin unabhängig. Nach einem Überdeckungskriterium (siehe [GL], Seite 281) ist daher  $L$  Überdeckungsgitter für  $rK$ . Es folgt  $\mu(K, L) = r\mu(rK, L) \leq r < 1$ , ein Widerspruch zu  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ .

(2) Liegt  $x$  im Inneren von zwei Translaten und auf dem Rand eines Translates, so gibt es Punkte dicht bei  $x$ , die zum Inneren aller drei Translate gehören, ein Widerspruch, wie in Fall (1) gesehen.

(3) Sei  $x$  im Inneren von  $K$  und in den Rändern von  $w_1 + K$  und  $w_2 + K$  enthalten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(a)  $(w_1 + \text{int } K) \cap (w_2 + \text{int } K) \neq \emptyset$ . Sei  $y$  aus dem Schnitt dieser Mengen. Dann erhält man mit Fall (1) wieder einen Widerspruch, denn die Punkte auf der Strecke  $[x, y]$ , die nah genug bei  $x$  liegen, gehören zum Inneren aller drei Translate.

(b)  $(w_1 + \text{int } K) \cap (w_2 + \text{int } K) = \emptyset$ . Dann gibt es eine Trenngerade von  $w_1 + K$  und  $w_2 + K$ . Da  $K$  strikt konvex ist, folgt  $(w_1 + K) \cap (w_2 + K) = \{x\}$ .

Aus der Symmetrie von  $K$  ergibt sich  $x = (w_1 + w_2)/2$ . Also ist  $2x \in L$  und  $x \in 2x + \text{int } K$ . Wie in Fall (2) führt dies zu einem Widerspruch.  $\square$

Für den nächsten Satz führen wir die folgende Menge ein: Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  und  $L \in \mathcal{L}(K)$ . Dann definieren wir für  $u \in L$

$$S(u) = S(K, L, u) = \{x \in E^2 : x \in u + K, x \notin v + \text{int } K \\ \text{für alle } v \in L \setminus \{u\}\}.$$

Nach Lemma 4.3 besteht der Rand von  $S(u)$  aus endlich vielen Bögen, die zu den Rändern verschiedener Translate von  $K$  gehören und sich höchstens in ihren Endpunkten auf dem Rand von  $K$  treffen.

Wir geben nun eine Charakterisierung der Überdeckungspolygone an.

**Satz 4.4** *Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex und  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ . Dann ist ein  $L$ -Polygon  $P$  ein Überdeckungspolygon, genau dann, wenn gilt:*

(i)  $\text{int } P = \emptyset$ , und  $P$  ist eine Wurst.

oder

(ii)  $\text{int } P \neq \emptyset$ , und alle Kanten von  $P$  sind parallel zu Vektoren aus  $\mathcal{F}(K, L)$ .

**Beweis:** (1) Sei  $P$  Überdeckungspolygon.

(i) Gilt  $\text{int } P = \emptyset$ , so ist  $P$  eine Strecke in Richtung  $u \in L$ . O.E. sei  $u$  primitiv. Wegen  $P \subset P \cap L + K$  gilt dann  $K \cap (K + u) \neq \emptyset$  und daher  $u \in \mathcal{F}_s(K, L)$ .

(ii) Sei nun  $\text{int } P \neq \emptyset$ . Angenommen,  $P$  hat eine zu einem primitiven Gittervektor  $u \in L \setminus \mathcal{F}(K, L)$  parallele Kante. Sei  $e$  die konvexe Hülle zweier Gitterpunkte dieser Kante, die keinen weiteren Gitterpunkt enthält. Also  $e = \text{conv}\{v_1, v_2\}$ ,  $v_1, v_2 \in L$ , und  $v_2 \Leftrightarrow v_1 = u$ . Sei  $g = \text{aff}(e)$  und  $f = e \setminus ((v_1 + K) \cup (v_2 + K))$ . Dann ist  $f \neq \emptyset$ , und  $f$  hat nichtleeren Schnitt mit gewissen Translate von  $K$ . Wegen  $\lambda_1(K, L) > 1$  liegen die Mittelpunkte dieser Translate in verschiedenen, zu  $g$  parallelen Gittergeraden, und da  $K$  strikt konvex ist, haben die Schnitte mit  $f$  unterschiedliche Längen.  $P$  ist Überdeckungspolygon, also wird  $f$  aus Symmetriegründen jeweils von Translate von  $K$  auf beiden Seiten von  $g$  überdeckt, und die Schnitte der Translate mit  $f$  können sich wegen Lemma 4.3 nicht überlappen. Beide Überdeckungen ergeben daher eine Zerlegung von  $f$  in Intervalle mit unterschiedlichen Längen, und diese Zerlegungen sind symmetrisch bzgl. des Mittelpunktes von  $f$  (oder  $e$ ). Bestehen die Zerlegungen aus mehr als einem Intervall, so gibt es einen Intervallendpunkt einer Zerlegung, der im Inneren eines Intervalls der anderen Zerlegung liegt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Lemma 4.3. Also wird  $e$  durch  $v_1 + K$ ,  $v_2 + K$  und genau ein weiteres Translat  $v_3 + K$

überdeckt. Nun gibt es Punkte  $x_1, x_2 \in e$  mit  $x_1 \in (v_1 + K) \cap (v_3 + K)$  und  $x_2 \in (v_2 + K) \cap (v_3 + K)$ . Weiter ist  $(v_3 \Leftrightarrow v_1), (v_3 \Leftrightarrow v_2) \in \mathcal{F}_s(K, L)$  und so  $x_3 = (v_1 + v_3)/2 \in (v_1 + K) \cap (v_3 + K)$  und  $x_4 = (v_2 + v_3)/2 \in (v_2 + K) \cap (v_3 + K)$ . Aus  $\text{conv}\{v_1, x_1, x_3\} \subset v_1 + K$ ,  $\text{conv}\{v_2, x_2, x_4\} \subset v_2 + K$  und  $\text{conv}\{v_3, x_3, x_1, x_2, x_4\} \subset v_3 + K$  folgt  $u \in \mathcal{F}_d(K, L)$ , ein Widerspruch zu unserer Annahme  $u \in L \setminus \mathcal{F}(K, L)$ .

(2) (i) Die Wurst in (i) ist nach Definition ein Überdeckungspolygon.

(ii) In Fall (ii) gibt es für  $w \in L \setminus P$  eine Kante von  $P$ , so dass die affine Hülle  $g$  dieser Kante  $w$  und  $P$  trennt. Enthält  $w + K$  innere Punkte von  $P$ , so schneidet  $w + K$  die Gerade  $g$  in einer Strecke. Nach Lemma 4.3 gibt es dann ein weiteres Translat  $w' + K$  auf der  $w$  gegenüberliegenden Seite, welches  $g$  in genau dieser Strecke schneidet. Dann gilt  $w + K \cap \text{int} P \subset w' + \text{int} K$  und weiter  $S(w) \cap \text{int} P = \emptyset$  für alle  $w \in L \setminus P$ . Sind  $w_1, w_2 \in L \setminus P$ , so ist der Rand von  $(w_1 + K) \cap (w_2 + K)$  in  $\text{bd} S(w_1) \cup \text{bd} S(w_2)$  enthalten. Also gilt  $(w_1 + K) \cap (w_2 + K) \cap \text{int} P = \emptyset$ . Nach Lemma 4.3 kann man nun die Ebene in Gebiete aufteilen, die genau durch ein Translat oder genau durch zwei Translate überdeckt werden. Daher wird  $\text{int} P$  und wegen der Kompaktheit von  $K$  auch  $P$  durch die Translate  $w + K$  mit  $w \in P$  überdeckt.  $\square$

Sei nun  $L^*$  das zu  $L$  polare Gitter. Zu einem primitiven Vektor  $u \in L$  gibt es einen zu  $u$  orthogonalen Vektor  $u^* \in L^*$  mit  $\|u^*\| = \|u\|/\det L$  (siehe [GL]). Wir definieren

$$\begin{aligned} h_s &:= h_s(K, L) = \max\{h_K(u^*) : u \in \mathcal{F}_s(K, L)\}, \\ h_m &:= h_m(K, L) = \max\{h_K(u^*) : u \in \mathcal{F}(K, L)\}. \end{aligned}$$

**Lemma 4.5**  $2h_s(K, L) \geq h_m(K, L)$ .

**Beweis:** Sei  $u \in \mathcal{F}(K, L)$  mit  $h_K(u^*) = h_m$ . Ist  $u \in \mathcal{F}_s(K, L)$ , so gilt sogar  $h_s = h_m$ . Sei daher  $u \in \mathcal{F}(K, L) \setminus \mathcal{F}_s(K, L)$ . Dann ist  $u = u_1 + u_2$  mit  $u_1, u_2 \in \mathcal{F}_s(K, L)$ . Da  $(\cdot)^*$  die Verknüpfung einer Drehung mit Winkel  $\pi/2$  und einer Dilatation mit Faktor  $(\det L)^{-1}$  ist, folgt  $u^* = (u_1 + u_2)^* = u_1^* + u_2^*$  und so  $h_m = h_K(u^*) \leq h_K(u_1^*) + h_K(u_2^*) \leq 2h_s$ .  $\square$

**Definition 4.6** Für  $L \in \mathcal{L}_1(K)$  sei  $\mathcal{F}(K, L) = \{u_1, \dots, u_r\}$  und

$$c_i = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \rho h_K(u_i^*), \quad i = 1, \dots, r.$$

Dann heißt  $W(L, K, \rho) = \{x \in E^2 : u_i^* x \leq c_i, i = 1, \dots, r\}$  Wulff–shape bzgl.  $K$  und  $L$  zum Parameter  $\rho$ .

**Bemerkungen:**

- (1) Für  $\rho < \frac{1}{2h_m}$  ist  $W(L, K, \rho) \neq \emptyset$ .
- (2) Wulff-shapes spielen in der Kristallographie eine wichtige Rolle. Für Packungen wurden Wulff-shapes in [BB], [S] und [W2] untersucht.

Im folgenden betrachten wir Überdeckungspolygone  $P_n$  mit Kanten  $e_1, \dots, e_r$  in Richtungen  $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{F}(K, L)$  und mit  $G(P_n, L) \leq n$ . Für  $i = 1, \dots, r$  seien  $f_i = k_i \|u_i\|$  die zugehörigen Kantenlängen. Nach einem Satz von Pick (vgl. [Pi]) gilt für das Volumen von  $P_n$

$$\begin{aligned} V(P_n) &= (G(P_n, L) \Leftrightarrow 1) \det L \Leftrightarrow \det L/2 \cdot G(\text{bd } P_n, L) \\ &= (G(P_n, L) \Leftrightarrow 1) \det L \Leftrightarrow \det L/2 \cdot \sum_{i=1}^r k_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Mit (2.4) und  $\|u_i^*\| = \|u_i\|/\det L$  gilt weiter für das gemischte Volumen  $V(P_n, K)$

$$V(P_n, K) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r f_i h_K(u_i^*/\|u_i^*\|) = \det L/2 \sum_{i=1}^r k_i h_K(u_i^*). \quad (4.2)$$

Aus den letzten beiden Identitäten und mit dem Polynom in (1.1) erhalten wir für den äußeren Parallelkörper ( $\rho \geq 0$ )  $P_n + \rho K$

$$\begin{aligned} V(P_n + \rho K) &= V(P_n) + 2\rho V(P_n, K) + \rho^2 V(K) \\ &= (G(P_n, L) \Leftrightarrow 1) \det L + \det L \sum_{i=1}^r k_i (\rho h_K(u_i^*) \Leftrightarrow 1/2) + \rho^2 V(K). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für negative  $\rho$  ist  $P_n + \rho K$  der Schnitt von Halbebenen, deren Stützgeraden parallel zu den Kanten von  $P_n$  verlaufen und zu diesen die Abstände  $|\rho| h_K(v_1), \dots, |\rho| h_K(v_r)$  besitzen. Die Streifen  $e_i + |\rho| h_K(v_i) \cdot \text{conv}\{0, \Leftrightarrow v_i\}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , können sich überlappen oder, wenn  $P_n$  spitze Winkel hat, Punkte außerhalb von  $P_n$  besitzen. Wir möchten die Fläche dieser Mengen in einer Ecke abschätzen. Dazu sei  $\alpha$  der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten  $e_i, e_j$ . Die oben beschriebene Fläche ist dann höchstens

$$(|\rho| h_K(v_i) + |\rho| h_K(v_j))^2 / 2 \sin(\alpha) \leq 2\rho^2 D(K)^2 / \sin(\alpha).$$

$\alpha$  ist der Winkel zwischen zwei Vektoren  $u_1, u_2 \in \mathcal{F}(K, L)$ , und daher gilt  $\|u_1\| \|u_2\| \sin(\alpha) \geq \det L$ . Aus  $\lambda_1(K, L) > 1$  folgt  $\det L \geq \Delta(K)$ . Zusammen mit  $\|u_1\|, \|u_2\| \leq 2D(K)$  führt dies zu  $\sin(\alpha) \geq \Delta(K)/(4D(K)^2)$ . Für

das Gesamtvolumen der Streifen gilt  $|\rho| \sum_{i=1}^r f_i h_K(v_i) = 2|\rho|V(P_n, K)$ , also erhalten wir für ein beliebiges Überdeckungspolygon  $P_n$

$$\begin{aligned} V(P_n + \rho K) &= V(P_n) + 2\rho V(P_n, K) + \rho^2 c \\ &= (G(P_n, L) \Leftrightarrow 1) \det L + \det L \sum_{i=1}^r k_i (\rho h_K(u_i^*) \Leftrightarrow 1/2) + \rho^2 c. \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit  $0 \leq c \leq A$ , wobei  $A$  eine Konstante ist, die nur von  $K$  abhängt. Mit  $A \geq V(K)$  gilt (4.4) also auch für nichtnegative  $\rho$ .

**Lemma 4.7** *Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex und  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ . Für  $\rho < 1/(2h_m(K, L))$  sei weiter  $W = W(L, K, \rho)$ . Dann gibt es eine Folge  $\{W_n\}$  von Überdeckungspolygonen mit  $G(W_n, L) \leq n$  und*

$$V(W_n + \rho K) \geq (n \Leftrightarrow 1) \det L \Leftrightarrow 2\sqrt{\det L \cdot V(W)} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

**Beweis:** Sei  $\alpha_n$  minimal mit  $G(\alpha_n W, L) \geq n$ . Dann gibt es ein  $\alpha > 0$  mit  $V((\alpha_n \Leftrightarrow \alpha)W) \leq n \cdot \det L$  und weiter

$$\alpha_n \leq \sqrt{n \det L / V(W)} + o(\sqrt{n}). \quad (4.5)$$

Zu den Kanten von  $\alpha_n W$  gibt es parallele Gittergeraden in einem zu  $\alpha_n W$  beschränkten Abstand, so dass der Schnitt  $Q_n$  der zugehörigen Halbebenen ein zentralsymmetrisches Gitterpolygon darstellt. Mit  $G(Q_n, L) \cdot \det L \leq V((\alpha_n + \beta)W)$  für ein  $\beta > 0$  und (4.5) folgt  $G(Q_n, L) \leq n + c\sqrt{n}$  für eine Konstante  $c > 0$ .

Sei zunächst  $W$  kein Parallelogramm. Dann gibt es eine Kante  $e$  von  $Q_n$ , so dass die affinen Hüllen der benachbarten Kanten einen Kegel aufspannen, der  $Q_n$  enthält. Wir können  $Q_n$  so konstruieren, dass sich die beiden den Kegel aufspannenden Geraden in einem Gitterpunkt treffen, und ohne Einschränkung sei dies 0. Der Kegel ist die positive Hülle eines Gitterdreiecks  $T$  mit einer Kante  $e'$  parallel zu  $e$ . Nach einem Satz von Ehrhart (siehe [Eh]) gilt  $G(kT, L) = ak^2 + bk + 1$  für geeignete ganze Zahlen  $a, b$  und  $k = 0, 1, \dots$ . Mit  $p = G(e', L) \Leftrightarrow 1$  gilt für  $e = k e'$   $G(e, L) = p \cdot k + 1$ . Ersetzen wir nun die Stützgerade  $\text{aff}(e)$  durch  $\text{aff}((k \Leftrightarrow 1)e')$ , so wächst die Anzahl der Gitterpunkte von  $Q_n$  um

$$\begin{aligned} d(k) &= G(kT, L) \Leftrightarrow G((k \Leftrightarrow 1)T, L) \Leftrightarrow (pk + 1) + (p(k \Leftrightarrow 1) + 1) \\ &= (2k \Leftrightarrow 1)a + b \Leftrightarrow p. \end{aligned}$$

$Q_n$  ist zentralsymmetrisch, daher können wir andererseits den umgekehrten Prozeß für  $(\Leftrightarrow e)$  durchführen und  $d(k + 1)$  Gitterpunkte ausschließen. Bei

$q$ -maliger Wiederholung entsteht auf diese Art und Weise ein Gitterpolygon mit

$$G(Q_n, L) + (d(k) + \dots + d(k \Leftrightarrow q + 1)) \Leftrightarrow (d(k + 1) + \dots + d(k + q))$$

Gitterpunkten. Wegen  $d(k \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow d(k + r + 1) = \Leftrightarrow 2a(2r + 1)$  nimmt die Anzahl der Gitterpunkte dabei um  $2a \sum_{r=0}^{q-1} (2r + 1) = 2aq^2$  ab. Nach Satz 4.4 ist das Polygon ein Überdeckungspolygon. Mit  $W_n$  bezeichnen wir nun das Polygon, dass wir erhalten, wenn wir  $q$  so wählen, dass

$$G(Q_n, L) \Leftrightarrow 2aq^2 \leq n < G(Q_n, L) \Leftrightarrow 2a(q \Leftrightarrow 1)^2$$

gilt. Wegen  $2a(q \Leftrightarrow 1)^2 \leq c\sqrt{n}$  folgt

$$G(W_n, L) \geq n \Leftrightarrow 2a(q^2 \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow 1)^2) = n \Leftrightarrow O(n^{\frac{1}{4}}). \quad (4.6)$$

Ist  $W$  ein Parallelogramm, so gibt es eine Wurstrichtung  $u$ , die nicht als Kante von  $W$  vorkommt (siehe Bemerkung (3) zu Definition 4.2). Also können wir von einer Ecke ausgehend Gitterpunkte in Richtung  $u$  wegschneiden. Führen wir dies  $q$ -mal durch, so folgt aus dem Satz von Ehrhart, dass  $d(q) = aq^2 + bq + 1$  Gitterpunkte wegfallen. Wie oben wählen wir nun  $q$  so, dass  $G(Q_n, L) \Leftrightarrow d(q) \leq n < G(Q_n, L) \Leftrightarrow d(q \Leftrightarrow 1)$  gilt. Es folgt  $q = O(n^{\frac{1}{4}})$ , und damit erhalten wir auch hier ein Überdeckungspolygon  $W_n$ , dass die Ungleichung in (4.6) erfüllt.

Nach Definition gilt nun  $\alpha_n^{-1} W_n \rightarrow W$  und weiter mit (4.5)

$$V(W_n, W) = \alpha_n V(W, W) + o(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} \det L V(W) + o(\sqrt{n}). \quad (4.7)$$

Seien  $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{F}(K, L)$  die Kantenrichtungen von  $W_n$ , und für diese Richtungen sei  $c_i$  wie in Definition 4.6. Für  $\rho < 1/2h_m$  gilt  $c_i > 0$  und  $h_W(u_i^*/\|u_i^*\|) \leq c_i/\|u_i^*\|$ . In der letzten Ungleichung gilt Gleichheit, falls  $W$  eine Kante in Richtung  $u_i$  besitzt. Da dies für die Kanten von  $W_n$  bis auf möglicherweise eine Ausnahmekante der Länge  $o(\sqrt{n})$  gilt, folgt mit  $\|u_i^*\| = \|u_i\|/\det L$  und (4.2)

$$V(W_n, W) = 1/2 \sum_{i=1}^r f_i h_W(u_i^*/\|u_i^*\|) = \det L / 2 \sum_{i=1}^r k_i c_i + o(\sqrt{n}). \quad (4.8)$$

Die Behauptung ergibt sich nun mit (4.4) für  $W_n$ , (4.6) und (4.7).  $\square$

Für den folgenden Satz benötigen wir die *kritische Determinante*  $\Delta(K)$  von  $K$ . Die ist definiert durch

$$\Delta(K) = \min\{\det L \mid \lambda_1(K, L) \geq 1\}.$$

Für weitere Informationen über die kritische Determinante verweisen wir auf [GL].

**Satz 4.8** Für festes Gitter  $L \in \mathcal{L}_1(K)$  mit  $2h_s > h_m$  und  $h_s \neq h_m$  sei  $P_{\rho,n} = \text{conv } C_{\rho,n}$  ein optimales Überdeckungspolygon. Dann gilt

- (a) Für  $\rho > \frac{1}{2(2h_s - h_m)}$  und große  $n$  ist  $P_{\rho,n}$  eine Wurst in Richtung  $u \in \mathcal{F}_s(K, L)$  mit  $h_s = h_K(u^*)$ .
- (b) Für  $\frac{1}{2h_m} < \rho < \frac{1}{2(2h_s - h_m)}$  und große  $n$  ist  $P_{\rho,n}$  eine Doppelwurst in Richtung  $u \in \mathcal{F}(K, L) \setminus \mathcal{F}_s(K, L)$  mit  $h_m = h_K(u^*)$ .
- (c) Für  $\rho < \frac{1}{2h_m}$  konvergiert die durch den Faktor  $R(W(K, L, \rho))/R(P_{\rho,n})$  normierte Folge  $(P_{\rho,n})$  gegen  $W(L, K, \rho)$ .

Ist  $h_s = h_m$ , so entfällt (b), und die Wurst ist optimal für alle  $\rho > \frac{1}{2h_m}$ . Für  $2h_s = h_m$  entfällt (a), d.h. die Doppelwurst ist optimal für alle  $\rho > \frac{1}{2h_m}$ .

**Beweis:** Sei  $2h_s > h_m$  und  $h_s \neq h_m$ . Wir betrachten zunächst ein festes  $\rho \geq 1/(2h_m)$ . Sei  $P_n$  ein Überdeckungspolygon mit Kanten in Richtungen  $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{F}(K, L)$  und mit  $G(P_n, L) = m \leq n$ . Für  $i = 1, \dots, r$  seien  $f_i = k_i \|u_i\|$  die zugehörigen Kantenlängen. Nach (4.3) gilt

$$\begin{aligned} V(P_n + \rho K) &= (m \Leftrightarrow 1) \det L \\ &\quad + \det L \sum_{i=1}^r k_i (\rho h_K(u_i^*) \Leftrightarrow 1/2) + \rho^2 V(K). \end{aligned}$$

Für festes  $n$  müssen wir also

$$f(P_n) = (m \Leftrightarrow 1) + \sum_{i=1}^r k_i (\rho h_K(u_i) \Leftrightarrow 1/2)$$

maximieren. Für eine optimale Wurst  $S_n^o$ , also eine Wurst in einer zu  $h_s$  korrespondierenden Richtung gilt

$$f(S_n^o) = (2\rho h_s)(n \Leftrightarrow 1), \quad (4.9)$$

und für eine optimale Doppelwurst  $D_n^o$  in einer zu  $h_m$  korrespondierenden Richtung haben wir

$$f(D_n^o) = (n \Leftrightarrow 1) + (n \Leftrightarrow 2)(\rho h_m \Leftrightarrow 1/2) + c \quad (4.10)$$

mit einer Konstanten  $c \geq \Leftrightarrow 1$ . Wir nehmen an,  $P_n$  ist weder eine Wurst noch eine Doppelwurst. Liegt  $P_n$  in der konvexen Hülle zweier benachbarter

Gittergeraden mit Richtungsvektor  $u \in \mathcal{F}(K, L)$ , so folgt  $u \in \mathcal{F}_s(K, L)$ , denn ansonsten wäre  $P_n$  eine Doppelwurst. Für  $u \in \mathcal{F}_s(K, L)$  gilt aber wegen  $h_s \neq h_m$   $f(P_n) < f(D_n^o)$  für hinreichend große  $n$ .  $D_n^o$  ist somit optimal unter diesen 2-dimensionalen Polygonen. Ansonsten enthält  $P_n$   $i$  Gitterpunkte im Inneren mit  $i \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . In diesem Fall gilt  $f(P_n) \leq (n \Leftrightarrow 1) + (n \Leftrightarrow i)(\rho h_m \Leftrightarrow 1/2) < f(D_n^o)$  für große  $n$ . Also ist für  $\rho \geq 1/(2h_m)$  und große  $n$  die Doppelwurst optimal unter allen Überdeckungspolygonen der Dimension 2. Ein Vergleich von (4.9) und (4.10) bestätigt die Aussagen der Teile (a) und (b).

Für festes  $\rho < \frac{1}{2h_m}$  und  $W = W(L, K, \rho)$  gilt wie in (4.8) (siehe Lemma 4.7)  $V(P_n, W) \leq \det L/2 \sum_{i=1}^r k_i c_i$  mit  $c_i$  wie in Definition 4.6. Mit (4.4) folgt

$$V(P_n + \rho K) \leq (m \Leftrightarrow 1) \det L \Leftrightarrow 2V(P_n, W) + \rho^2 c. \quad (4.11)$$

Damit, und mit Lemma 4.7 ergibt sich für das optimale Überdeckungspolygon  $P_{\rho, n}$

$$G(P_{\rho, n}, L) \det L \Leftrightarrow 2V(P_{\rho, n}, W) \geq n \det L \Leftrightarrow 2\sqrt{\det L \cdot V(W)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

Es folgt  $V(P_{\rho, n}, W) \leq \sqrt{n \det L V(W)} + o(\sqrt{n})$  und  $G(P_{\rho, n}, L) = n \Leftrightarrow o(n)$ . Damit erhalten wir für den Umfang  $F(P_{\rho, n})$  von  $P_{\rho, n}$   $F(P_{\rho, n}) = O(\sqrt{n})$  und weiter  $\sum_{i=1}^r k_i = O(\sqrt{n})$ . Mit Pick's Identität (4.1) schließen wir

$$V(P_{\rho, n}) = n \cdot \det L + o(n), \quad (4.12)$$

und mit Minkowski's Ungleichung (siehe [Sch]) ergibt sich daher  $V(P_{\rho, n}, W) \geq \sqrt{V(P_{\rho, n}) V(W)} = \sqrt{n \det L V(W)} + o(\sqrt{n})$ . Insgesamt gilt also

$$V(P_{\rho, n}, W) = \sqrt{n \det L V(W)} + o(\sqrt{n}). \quad (4.13)$$

Wir betrachten nun die Folge  $P_{\rho, n}/R(P_{\rho, n})$ . Nach dem Auswahlssatz von Blaschke (siehe [Sch]) gibt es eine konvergente Teilfolge  $P_{\rho, n_\nu}/R(P_{\rho, n_\nu})$ . Sei  $P_\rho$  ihr Grenzwert. Dann gilt  $V(P_{\rho, n_\nu})/R(P_{\rho, n_\nu})^2 \rightarrow V(P_\rho)$  und mit (4.12) erhalten wir

$$R(P_{\rho, n_\nu}) = \sqrt{V(P_{\rho, n_\nu})/V(P_\rho)} + o(\sqrt{n_\nu}) = \sqrt{n_\nu \det L/V(P_\rho)} + o(\sqrt{n_\nu}).$$

Zusammen mit (4.13) und der Homogenität und Stetigkeit der gemischten Volumina folgt

$$V(W, P_\rho) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{V(W, P_{\rho, n_\nu})}{R(P_{\rho, n_\nu})} = \sqrt{V(W) \cdot V(P_\rho)},$$



also gilt Gleichheit in Minkowski's Ungleichung. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn  $P_\rho$  und  $W$  homothetisch sind, d.h.  $P_\rho = \lambda W + t$  gilt für ein  $t \in E^2$  und  $\lambda > 0$ . Wegen  $R(P_\rho) = 1$  folgt  $P_\rho = W/R(W)$ , und damit Teil (c).

Für  $2h_s = h_m$  oder  $h_s = h_m$  führt ein Vergleich von (4.9) und (4.10) zu der behaupteten Aussage.  $\square$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts betrachten wir optimale Überdeckungen bzgl. variabler Gitter aus  $\mathcal{L}_1(K)$ . Wir möchten also Konfigurationen  $C_{\rho,n}^*$  mit

$$\vartheta(K, C_{\rho,n}^*, \rho) = \min_{L \in \mathcal{L}_1(K)} \{\vartheta(K, C_{\rho,n}, \rho) : C_{\rho,n} \text{ ist optimal in } \mathcal{U}(K, L)\}$$

bestimmen. Für optimale Polygone  $P_{\rho,n}^* = \text{conv } C_{\rho,n}^*$  geben wir eine zu Satz 4.8 analoge Aussage an. Dabei spielen auch wieder Würste und Doppelwürste eine wichtige Rolle. Um für große  $n$  die optimale Wurst bzw. Doppelwurst zu bestimmen, müssen wir den Koeffizienten von  $n$  maximieren. Sei also (siehe auch Kapitel 3)

$$\begin{aligned} s_m = s_m(2, K) &= \max \left\{ \frac{2V_1(K/u^\perp)}{f_K(u)} : u \in S^{d-1} \right\} \\ &= \max \{V_1(K/u^\perp) \cdot \|u\| : u \in \text{bd}(2K)\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Man kann jedem  $u \in \text{bd}(2K)$  ein  $K$  einbeschriebenes Parallelogramm  $Q_u$  mit  $V(Q_u) = 1/2 V_1(K/u^\perp) \cdot \|u\|$  zuordnen (man wähle als Eckpunkte des Parallelogramms die Schnittpunkte  $\text{bd } K \cap \text{lin}(u)$  und die Punkte in  $\text{bd } K$ , die bei der Projektion auf  $u^\perp$  auf die Enden von  $K/u^\perp$  abgebildet werden). Also gilt  $s_m = 2q(K)$ . Ist  $Q \subset K$  ein Parallelogramm mit  $V(Q) = q(K)$ , so ist das Gitter  $L$ , welches  $Q$  als Fundamentalzelle besitzt, ein Überdeckungsgitter von  $K$  mit  $\mu(K, L) = 1$ . Da  $K$  strikt konvex ist, gilt auch  $\lambda_1(K, L) > 1$  und weiter  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ . Es gibt also eine zu  $s_m$  korrespondierende Wurstkonfiguration in  $\mathcal{L}_1(K)$ . Zur Bestimmung der optimalen Doppelwurst definieren wir nun, motiviert durch (4.4) und (4.10),

$$\text{ds}(\rho) = \sup_{L \in \mathcal{L}_1(K)} (\rho h_m(K, L) + 1/2) \det L. \quad (4.15)$$

Im Gegensatz zu  $s_m$  hängt der maximale Koeffizient von  $n$  einer Doppelwurst von  $\rho$  ab. Da er schwer zu berechnen ist, geben wir nun zunächst einige Abschätzungen für  $\text{ds}(\rho)$  an. Dazu sei  $\delta^*(K)$  die *Dichte einer dichtesten Gitterpackung* von  $K$ . Es gilt  $\delta^*(K) = V(K)/\Delta(2K) = V(K)/4\Delta(K)$  mit der kritischen Determinante  $\Delta(K)$  von  $K$ . (siehe auch [GL]).

**Lemma 4.9** *Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex und  $\rho \geq 0$ . Dann gilt*

$$(a) \text{ ds } (\rho) \geq 3/4 s_m \rho + 3/8 V(K)/\delta^*(K).$$

(b) Es gibt ein  $\alpha < 1$  mit  $h_m(K, L) \det L \leq \alpha s_m(K)$  für alle  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ .

**Beweis:** (a) Sei  $v \in S^{d-1}$  eine Richtung, in der  $s_m$  angenommen wird. Weiter sei  $2l$  die Länge des Schnittes von  $K$  mit  $g = \text{lin}(v)$  und  $h = 1/2V^1(K/g^\perp)$ . Dann gilt  $s_m = 4hl$ . Nun gibt es einen Punkt  $a \in \text{bd } K$  mit  $a + lv \in \text{bd } K$ . Sei  $u = 3lv$  und  $u' = a + 2lv$ , und sei  $L$  das Gitter mit Basis  $\{u, u'\}$ . Ist  $h'$  der Abstand zwischen  $a$  und  $g$ , so gilt  $\det L = 3lh'$ . Sei  $H$  das Sechseck  $\text{conv}\{\pm a, \pm(a + lv), \pm lv\}$ .  $H$  ist ein  $K$  einbeschriebenes, affin reguläres Sechseck. Da  $\Delta(K)$  ein Drittel der Fläche des minimalen  $K$  einbeschriebenen affin regulären Sechsecks ist (siehe [GL], Seite 243 mit Druckfehler in Satz 1), folgt  $\det L = V(H) \geq 3\Delta(K) = 3/4V(K)/\delta^*(K)$ .  $L$  ist Überdeckungsgitter von  $H$  und damit auch von  $K$ , also ist  $\mu(K, L) \leq 1$ . Weiter ist  $lv$  in mindestens drei Translaten von  $K$  enthalten, liegt nach Lemma 4.3 also auf dem Rand dieser Translate. Damit gilt  $\mu(K, L) = 1$ . Die Wahl von  $a$  garantiert zudem  $\lambda_1(K, L) \geq 1$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $K$  ein Parallelogramm ist. Da  $K$  jedoch strikt konvex ist, gilt  $\lambda_1(K, L) > 1$  und so  $L \in \mathcal{L}_1(K)$ . Mit  $h_m(K, L) \geq h_K(u^*) = h \|u\|/\det L = h/h'$  ergibt sich insgesamt

$$\text{ds } (\rho) \geq 3\rho lh + 1/2 \det L = 3/4 s_m \rho + 3/8 V(K)/\delta^*(K).$$

(b) Sei  $h_0 = \Delta(K)/(2D(K)) > 0$ . Für eine Gerade  $g$  durch den Mittelpunkt von  $K$  und eine zu  $g$  parallele Gerade  $g'$  mit Abstand  $h_0$  betrachten wir den Quotienten  $(V^1(g \cap K) + V^1(g' \cap K))/(2V^1(g \cap K))$ . Es gibt eine Gerade, so dass der maximale Wert  $\alpha$  des Quotienten angenommen wird. Da  $K$  strikt konvex ist, gilt  $\alpha < 1$ .

Sei nun  $L \in \mathcal{L}_1(K)$  und  $u \in \mathcal{F}(K, L)$ . Weiter sei  $\{u, u'\}$  eine Basis von  $L$  und  $h'$  der Abstand von  $u'$  zu  $\text{lin}(u)$ , so dass  $\det L = \|u\| h'$  gilt. Wegen  $\lambda_1(K, L) > 1$  ist  $\det L \geq \Delta(K)$  und zusammen mit  $\|u\| \leq 2D(K)$  erhalten wir  $h' \geq h_0$ . Nun wird die Strecke  $\text{conv}\{0, u\}$  von  $K$ ,  $u + K$  und einem dritten Translat mit Abstand  $\geq h_0$  zu  $\text{lin}(u)$  überdeckt. Aus der Definition von  $\alpha$  folgt daher  $\|u\| \leq 2\alpha V^1(K \cap \text{lin}(u))$ . Damit ergibt sich  $h_K(u^*) \det L = 1/2 V^1(K/u^\perp) \|u\| \leq V^1(K/u^\perp) \alpha V^1(K \cap \text{lin}(u)) \leq \alpha s_m$ , und Teil (b) ist bewiesen.  $\square$

**Satz 4.10** Sei  $K \in \mathcal{K}_0^2$  strikt konvex, und sei  $L_0$  ein dünnstes Überdeckungsgitter von  $K$ . Dann gibt es Parameter  $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$ , so dass das optimale Überdeckungspolygon  $P_{\rho, n}^*$  bzgl. variabler Gitter aus  $\mathcal{L}_1(K)$

(a) für  $\rho > \rho_2$  und große  $n$  eine Wurst darstellt.

(b) für  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  und große  $n$  eine Doppelwurst darstellt.

(c) für  $\rho < \frac{1}{2h_m}$  gegen  $W(L_0, K, \rho)$  konvergiert, falls die Folge  $(P_{\rho,n}^*)$  durch den Faktor  $R(W(L_0, K, \rho))/R(P_{\rho,n}^*)$  normiert wird.

**Beweis:** Sei  $L_0$  das dünnste Überdeckungsgitter für  $K$ . Dann definieren wir  $\rho_1 = \inf\{\rho : ds(\rho) \geq \det L_0\} > 0$  und  $\rho_2 = \sup\{\rho : ds(\rho) \geq s_m \rho\}$ . Aus Lemma 4.9 folgt  $ds(\rho) \leq \alpha s_m \rho + \det L_0/2$ . Für  $s_m \rho \leq ds(\rho)$  bedeutet dies  $\rho \leq \det L_0/(2s_m(1 \Leftrightarrow \alpha))$  und insbesondere  $\rho_2 \leq \det L_0/(2s_m(1 \Leftrightarrow \alpha)) < \infty$ . Für  $\rho = \det L_0/s_m$ , also  $s_m \rho = \det L_0$ , gilt mit  $V(K) \geq \det L$  und Lemma 4.9  $ds(\det L_0/s_m) \geq 3/4 \det L_0 + 3/8 \det L_0 > \det L_0$ . Aus der Stetigkeit von  $ds$  ergibt sich daher  $\rho_1 < \det L_0/s_m < \rho_2$ .

Da  $ds$  monoton wachsend ist und für  $\lambda > 1$   $ds(\lambda \rho) < \lambda ds(\rho)$  gilt, ist das Maximum von  $\{\det L_0, s_m \rho, ds(\rho)\}$  gegeben durch  $\det L_0$  für  $\rho < \rho_1$ ,  $ds(\rho)$  für  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  und  $s_m \rho$  für  $\rho > \rho_2$ .

Für ein Überdeckungspolygon  $P_n$  bzgl. eines festen Gitters  $L \in \mathcal{L}_1(K)$  mit  $G(P_n, L) \leq n$  folgt nun aus (4.4), (4.9) und (4.10) für beliebiges  $\rho \in \mathbb{R}$

$$V(P_n + \rho K) \leq \max\{1, 2\rho h_s(K, L), (\rho h_m(K, L) + 1/2)\} \cdot \det L \cdot n + O(1).$$

Also gilt

$$V(P_n + \rho K) \leq \max\{\det L_0, s_m \rho, ds(\rho)\} \cdot n + O(1) \quad (4.16)$$

für ein beliebiges Polygon  $P_n = \text{conv } C_n$  mit  $C_n \in \bigcup_{L \in \mathcal{L}_1(K)} \mathcal{U}(K, L)$  und  $\text{card } C_n \leq n$ . Sei nun  $P_{\rho,n}^*$  ein optimales Überdeckungspolygon bzgl. variabler Gitter aus  $\mathcal{L}_1(K)$ , d.h.  $P_{\rho,n}^* = \text{conv } C_{\rho,n}^*$  mit  $C_{\rho,n}^* \subset L_{\rho,n}$  für ein Gitter  $L_{\rho,n} \in \mathcal{L}_1(K)$ . Für  $\rho > \rho_2$  ist  $s_m \rho$  das Maximum in (4.16). Da man für Überdeckungspolygone der Dimension 2 die rechte Seite in (4.16) durch  $\max\{\det L_0, ds(\rho)\} \cdot n + O(1)$  ersetzen kann, muss  $P_{\rho,n}^*$  für diese  $\rho$  und große  $n$  eine Wurst sein, womit Teil (a) bewiesen ist. Für  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  ist  $ds(\rho)$  das Maximum in (4.16). Also kann  $P_{\rho,n}^*$  keine Wurst sein. Gilt  $\rho h_m(K, L_{\rho,n}) \Leftrightarrow 1/2 \leq 0$ , so ist  $V(P_{\rho,n}^* + \rho K) \leq n \det L_{\rho,n} + O(1) \leq n \det L_0 + O(1) < n \cdot ds(\rho)$  für genügend große  $n$ , im Widerspruch zur Definition von  $P_{\rho,n}^*$ . Also gilt  $\rho h_m(K, L_{\rho,n}) \Leftrightarrow 1/2 > 0$ . Für solche  $\rho$  sind nach Satz 4.8 aber nur Doppelwurst oder Wurst optimal, und da  $P_{\rho,n}^*$  in  $L_{\rho,n}$  optimal ist, folgt Teil (b).

Sei nun  $\rho < \rho_1$ . Dann ist nach Definition von  $ds(\rho)$  und wegen  $ds(\rho) < \det L_0$   $\rho < 1/(2h_m(K, L_0))$ . Aus der Optimalität von  $P_{\rho,n}^*$  ergibt sich mit Lemma 4.7

$$V(P_{\rho,n}^* + \rho K) \geq n \det L_0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\det L_0 V(W(L_0, K, \rho))} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}). \quad (4.17)$$

Gilt  $\rho \geq 1/(2h_m(K, L_{\rho,n}))$ , so ist  $V(P_{\rho,n}^* + \rho K) \leq \text{nds}(\rho) + O(1)$ , ein Widerspruch zu (4.17) für große  $n$ . Also  $\rho < 1/(2h_m(K, L_{\rho,n}))$  für große  $n$ . Wie in (4.11) folgt

$$V(P_{\rho,n}^* + \rho K) \leq n \det L_{\rho,n} \Leftrightarrow 2V(P_{\rho,n}^*, W(L_{\rho,n}, K, \rho)) + o(\sqrt{n}). \quad (4.18)$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen schliessen wir mit  $\det L_{\rho,n} \leq \det L_0$

$$V(P_{\rho,n}^*, W(L_{\rho,n}, K, \rho)) \leq \sqrt{\det L_0 V(W(L_0, K, \rho))} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}). \quad (4.19)$$

Wegen  $\lambda_1(K, L_{\rho,n}) > 1$  und  $\det L_{\rho,n} \leq \det L_0$  folgt aus dem Auswahlssatz von Mahler (siehe [GL]), dass  $L_{\rho,n}$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Mit den Ungleichungen (4.17) und (4.18) ergibt sich sogar  $L_{\rho,n} \rightarrow L_0$ . Eine Folge von konvergenten Wurstrichtungen aus  $\mathcal{F}(K, L_{\rho,n})$  konvergiert gegen eine Wurstrichtung aus  $\mathcal{F}(K, L_0)$ . Das gilt auch für Doppelwurstrichtungen. Also ist jeder Häufungspunkt von  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(K, L_{\rho,n})$  in  $\mathcal{F}(K, L_0)$  enthalten. Sei nun  $A_n$  eine Folge linearer Abbildungen, die  $L_{\rho,n}$  auf  $L_0$  abbilden. Dann konvergiert  $A_n$  gegen die Identität, und für große  $n$  gilt  $A_n \mathcal{F}(K, L_{\rho,n}) \subset \mathcal{F}(K, L_0)$ . Nach Definition des Wulff-shapes gilt daher  $W(L_0, K, \rho) \subset (1 + \epsilon_n)W(L_{\rho,n}, K, \rho)$  mit  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . Mit (4.19) erhalten wir

$$V(P_{\rho,n}^*, W(L_0, K, \rho)) \leq \sqrt{\det L_0 V(W(L_0, K, \rho))} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}).$$

Wegen  $V(P_{\rho,n}^* + \rho K) \leq n \det L_0 + O(1)$  und (4.17) gilt ferner  $V(P_{\rho,n}^*) = n \det L_0 + o(n)$ . Wie schon in Satz 4.8 gesehen genügt dies, um die Konvergenz  $P_{\rho,n}^*/R(P_{\rho,n}^*) \rightarrow W(L_0, K, \rho)/R(W(L_0, K, \rho))$  nachzuweisen.

### 4.3 Gitterförmige Kugelüberdeckungen

In diesem Abschnitt betrachten wir für beliebige Dimensionen  $d \geq 2$  Gitterüberdeckungen für die Kugel  $B^d$ . In diesem Fall ist es nicht einfach, die Existenz eines Gitters  $L$  mit  $\mu(B^d, L) = 1 < \lambda_1(B^d, L)$  nachzuweisen. Gibt es ein solches Gitter  $L$ , so ist  $2L + B^d$  eine Packung, und für die Dichte  $\delta^*(B^d)$  einer dichtesten Gitterpackung folgt

$$\delta^*(B^d) \geq \frac{\kappa_d}{\det(2L)} \geq 2^{-d} \vartheta^*(B^d) \geq 2^{-d}.$$

Bis auf eine Konstante ist dies der Satz von Minkowski–Hlawka (siehe [GL]), und somit scheint  $\mathcal{L}_1(B^d) \neq \emptyset$  schwierig zu beweisen zu sein. Man muss

Gitter finden, die zugleich gute Überdeckungsgitter und gute Packungsgitter darstellen. Mit solchen Problemen beschäftigte sich Butler in [Bu]. Sogar die Existenz einer Gitterüberdeckung mit  $L \setminus \{0\} + B^d \neq E^d$  ist ein offenes Problem.

Wie in der Ebene bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}_s(B^d, L)$  die Menge der zulässigen Wurstrichtungen für  $B^d$ . Für  $u \in \mathcal{F}_s(B^d, L)$  verstehen wir hier unter einer Wurst  $S_n(B^d, L, u)$  wieder eine Konfiguration aus  $\mathcal{U}(B^d, L)$ , die aus den Punkten  $i \cdot u$ ,  $i = 0, \dots, n \Leftrightarrow 1$  besteht (siehe zum Vergleich Abschnitt 4.2). Wir geben hier eine Charakterisierung der Gitter an, bei denen für große  $\rho$  und  $n$  Wurstkongfigurationen optimal sind. Es wird sich zeigen, dass für die Gitter aus  $\mathcal{L}(B^d)$  mit  $\lambda_1(B^d, L) > 1$  für große  $\rho$  und  $n$  die Wurst immer optimal ist.

Im folgenden benötigen wir bestimmte Teilmengen von  $\mathcal{F}_s(B^d, L)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_o(B^d, L) &= \{u \in \mathcal{F}_s(B^d, L) : \|u\| \geq \|v\| \text{ for all } v \in \mathcal{F}_s(B^d, L)\}, \\ \mathcal{F}_k(B^d, L) &= \mathcal{F}_s(B^d, L) \setminus \mathcal{F}_o(B^d, L).\end{aligned}$$

Für  $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  sei  $w_l = \|u\|$ . Weiter sei  $w_k = \max\{\|u\| : u \in \mathcal{F}_k(B^d, L)\}$ .

Für eine optimale Konfiguration sei wieder  $D_{\rho, n} = D(\text{conv } C_{\rho, n})$ . Da der Durchmesser angenommen wird, gibt es eine Richtung  $u_{\rho, n}$  und ein  $x_{\rho, n}$  mit  $x_{\rho, n}, x_{\rho, n} + D_{\rho, n} u_{\rho, n} \in C_{\rho, n} \cap L$ . O.E. sei  $x_{\rho, n} = 0$  und  $y_{\rho, n} = D_{\rho, n} u_{\rho, n}$  für alle  $\rho \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner sei wieder  $R_{\rho, n} = R(\text{conv } C_{\rho, n} / u_{\rho, n}^\perp)$ . In einem ersten Schritt zeigen wir nun, dass optimale Überdeckungskonfigurationen für große  $\rho$  und  $n$  fast eindimensional sind und der Durchmesser dieser Konfigurationen nicht zu kurz ist im Vergleich zu der Länge von Wurstkongfigurationen.

**Lemma 4.11** *Sei  $L \in \mathcal{L}(B^d)$ . Dann gibt es Konstanten  $c_0, c_1, c_2$ , die nur von  $d$  und  $L$  abhängen, und einen Parameter  $\rho_0 = \rho_0(d, L) \geq 1$  mit*

$$(i) \quad R_{\rho, n} \leq c_0,$$

$$(ii) \quad D_{\rho, n} \geq n w_l \Leftrightarrow \frac{c_1 n}{\rho} \Leftrightarrow c_2$$

für alle  $\rho \geq \rho_0$ .

**Bemerkung:** Für beliebige Überdeckungen haben wir die Aussage bereits in Kapitel 3 für beliebige  $K \in \mathcal{K}^d$  bewiesen (Satz 3.1). Wir möchten hier Teil (i) und (ii) zusammen beweisen, und geben daher Teile des Beweises von Satz 3.1 einfach noch mal mit an.

**Beweis von Lemma 4.11:** Für das Steiner–Polynom für den äußeren Parallelkörper  $\text{conv } C_{\rho, n} + \rho B^d$  gilt

$$V(\text{conv } C_{\rho, n} + \rho B^d) = \sum_{i=0}^d V_i(\text{conv } C_{\rho, n}) \kappa_{d-i} \rho^{d-i}.$$

Auf der anderen Seite haben wir für  $v \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$

$$V(\text{conv } S_n(B^d, L, v) + \rho B^d) = \kappa_d \rho^d + (n \Leftrightarrow 1) w_l \kappa_{d-1} \rho^{d-1}.$$

Da  $C_{\rho, n}$  optimal ist, folgt

$$(n \Leftrightarrow 1) w_l \leq V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) + \sum_{i=2}^d V_i(\text{conv } C_{\rho, n}) \cdot \frac{\kappa_{d-i}}{\kappa_{d-1}} \rho^{1-i}.$$

Aus Cauchy's Integral Darstellung für die inneren Volumina (siehe [Sch]) folgt nun  $V_i(\text{conv } C_{\rho, n}) \leq n \cdot V_i(B^d)$ , also existiert eine Konstante  $c$  mit

$$(n \Leftrightarrow 1) w_l \leq V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) + \frac{nc}{\rho} \quad \text{für } \rho \geq 1. \quad (4.20)$$

Nun gibt es einen Zylinder  $Z_{\rho, n}$  mit Radius  $R_{\rho, n}$  und Länge  $D_{\rho, n}$ , der  $\text{conv } C_{\rho, n}$  enthält. Damit gilt  $V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) \leq V_1(Z_{\rho, n}) = D_{\rho, n} + R_{\rho, n} \cdot V_1(B^d)$  und weiter

$$(n \Leftrightarrow 1) w_l \leq D_{\rho, n} + R_{\rho, n} \cdot V_1(B^d) + \frac{nc}{\rho}, \quad \rho \geq 1 \quad (4.21)$$

$\text{conv } C_{\rho, n}$  enthält ein Dreieck mit Länge  $D_{\rho, n}$  und Höhe  $R_{\rho, n}$ , und mit Cauchy's Integral Darstellung und der Monotonie der inneren Volumina ergibt sich

$$D_{\rho, n} \cdot R_{\rho, n} / 2 \leq V_2(\text{conv } C_{\rho, n}) \leq n \cdot V_2(B^d). \quad (4.22)$$

$V_1$  ist bis auf einen Faktor die mittlere Breite. Damit folgt aus (4.20)  $D_{\rho, n} \geq c' V_1(\text{conv } C_{\rho, n}) \geq c'' n$  mit  $c'' > 0$  für  $\rho \geq \rho_0(d, L) \geq 1$ . Zusammen mit (4.22) zeigt dies, dass  $R_{\rho, n}$  beschränkt ist, und damit gilt (i). (ii) folgt nun sofort aus (i) und (4.21).  $\square$

Als nächstes geben wir eine obere Schranke für den Durchmesser von Überdeckungskonfigurationen mit  $n$  Elementen an. Für  $u \in S^{d-1}$  sei dazu  $s_u = \max\{u \cdot v \mid v \in \mathcal{F}_s(B^d, L)\}$ .

**Lemma 4.12** *Sei  $C_n \in \mathcal{U}(B^d, L)$  mit  $\text{card } C_n \leq n$ , und sei  $u \in S^{d-1}$  eine Richtung, in der  $D(\text{conv } C_n)$  erreicht wird. Dann gilt*

$$D(\text{conv } C_n) \leq (n \Leftrightarrow 1) \cdot s_u.$$

**Beweis:** O.E. sei  $0 \in C_n$ , und sei  $y \in C_n$  mit  $\|y\| = D(\text{conv } C_n)$ . Die Strecke  $\text{conv } \{0, y\}$  wird von einer Folge von Translaten  $t_1 + B^d, \dots, t_m + B^d$

mit  $t_i \in C_n$ ,  $t_1 = 0$  und  $t_m = y$  überdeckt, so dass  $(t_{i+1} + B^d) \cap (t_i + B^d) \neq \emptyset$  bzw.  $t_{i+1} \Leftrightarrow t_i \in \mathcal{F}_s(B^d, L)$  gilt. Mit  $u = y/\|y\|$  folgt

$$D(\text{conv } C_n) = \|y\| = u \cdot \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} \Leftrightarrow t_i) \leq (m \Leftrightarrow 1) s_u \leq (n \Leftrightarrow 1) s_u.$$

□

Für das nächste Lemma benötigen wir weitere Notationen.

Sei  $r = (1 \Leftrightarrow w_l^2/4)^{\frac{1}{2}}$ . Für  $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  überdeckt  $S_n(B^d, L, u) + B^d$  einen Zylinder mit Radius  $r$ . Ferner sei

$$\eta = \min_{u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)} \min\{\text{dist}(v, \text{lin}(u)) : v \in L \setminus \text{lin}(u)\}.$$

**Lemma 4.13** *Sei  $L \in \mathcal{L}(B^d)$  mit  $\eta > r$ . Dann wird der Durchmesser von  $\text{conv } C_{\rho, n}$  für große  $\rho$  und  $n$  in einer Richtung  $v/\|v\|$  mit  $v \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  angenommen.*

**Beweis:** Mit  $u_{\rho, n} = \frac{y_{\rho, n}}{\|y_{\rho, n}\|}$  folgt aus Lemma 4.11 und Lemma 4.12

$$n s_{u_{\rho, n}} \geq D_{\rho, n} \geq n w_l \Leftrightarrow \frac{c_1 n}{\rho} \Leftrightarrow c_2. \quad (4.23)$$

Für genügend große  $\rho$  ist  $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_{u_{\rho, n}} > w_k$ , also gilt  $s_{u_{\rho, n}} = u_{\rho, n} \cdot v$  mit  $v \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  für große  $\rho$  und  $n$ . Sei  $\Pi_{\rho, n}$  die Länge der Projektion von  $\text{conv } \{0, y_{\rho, n}\}$  auf  $\text{lin}(v)$ . Dann gilt

$$\Pi_{\rho, n} = D_{\rho, n} \cdot \cos(\angle(u_{\rho, n}, v)) = D_{\rho, n} \frac{u_{\rho, n} \cdot v}{\|v\|} = D_{\rho, n} \frac{s_{u_{\rho, n}}}{w_l},$$

und mit (4.23) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho, n} &\geq \left(1 \Leftrightarrow \frac{c_1}{\rho w_l} \Leftrightarrow \frac{c_2}{w_l n}\right)^2 \cdot n w_l \geq \left(1 \Leftrightarrow \frac{2c_1}{\rho w_l} \Leftrightarrow \frac{2c_2}{w_l n}\right) \cdot n w_l \\ &= n w_l \Leftrightarrow \frac{2c_1 n}{\rho} \Leftrightarrow 2c_2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Wie in Lemma 4.12 seien  $t_1, \dots, t_m \in C_{\rho, n}$  mit  $m = m_{\rho, n} \leq n$ ,  $\text{conv } \{0, y_{\rho, n}\} \subset \cup_{i=1}^m (t_i + B^d)$ ,  $t_1 = 0$ ,  $t_m = y_{\rho, n}$  und  $t_{i+1} \Leftrightarrow t_i \in \mathcal{F}_s(B^d, L)$ . Wir können  $t_1, \dots, t_m$  in Teilmengen

$$\{0, t_1, \dots, t_{s_1}\}, \{t_{s_1+1}, \dots, t_{s_2}\}, \dots, \{t_{s_q+1}, \dots, t_{s_{q+1}} = y_{\rho, n}\}$$

zerlegen, so dass  $S_j = \text{conv}\{t_{s_j+1}, \dots, t_{s_{j+1}}\}$  für  $j = 0, \dots, q = q_{\rho, n}$  (mit  $s_0 + 1 = 0$ ) eine zu  $v$  parallele Strecke darstellt, und  $t_{s_j+1} \Leftrightarrow t_{s_j}$  nicht parallel zu  $v$  ist,  $j = 1, \dots, q$ . Weiter sei  $l_j$  die Länge von  $S_j$ ,  $j = 0, \dots, q$ . Das Lemma ist bewiesen, wenn wir die Annahme  $q \geq 1$  zu einem Widerspruch führen. Wir geben zunächst eine obere Schranke für  $q$  an.

Ist  $w = \max\left\{\frac{v}{\|v\|} \cdot z \mid z \in \mathcal{F}_s(B^d, L), z \neq v\right\}$ , so folgt  $w < w_l$  und weiter

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho, n} &= \left( \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} \Leftrightarrow t_i) \right) \cdot \frac{v}{\|v\|} \leq (m \Leftrightarrow q) w_l + q w \\ &\leq n w_l \Leftrightarrow q(w_l \Leftrightarrow w). \end{aligned}$$

Damit und mit (4.24) erhalten wir daher Konstanten  $c_3, c_4$  mit

$$q \leq \frac{c_3 n}{\rho} + c_4. \quad (4.25)$$

Sei nun  $\Delta_j$  das Dreieck  $\text{conv}(S_j \cup \{t_{s_{j+1}+1}\})$ . Nach Definition von  $\eta$  enthält  $\Delta_j$  ein Rechteck  $Q_j$  mit einer Seite  $S'_j$  der Länge  $l'_j + w = \frac{r}{\eta} l_j$ , die in  $S_j$  enthalten ist, und mit Höhe  $r$ . Sei  $l$  die Anzahl der Strecken  $\text{conv}\{t_{i+1}, t_i\}$  auf  $S'_j$  mit Länge  $w_l$ , und sei  $k$  die Anzahl dieser Strecken mit Länge  $\leq w_k$ . Es gilt  $(l+2)w_l + k w_k \geq l'_j$ .

Ist  $\|t_{i+1} \Leftrightarrow t_i\| = w_l$ , dann haben  $t_{i+1} + B^d$  und  $t_i + B^d$  einen gemeinsamen Randpunkt auf der zu  $S'_j$  parallelen Seite  $S''_j$ . Dieser liegt im Inneren von  $T_j = \text{conv}(Q_j \cup \{t_{s_{j+1}+1}\})$ , also wird ein weiterer Punkt aus  $C_{\rho, n} \setminus \{t_{s_j+1}, \dots, t_{s_{j+1}}\}$  zur Überdeckung von  $T_j$  benötigt. Wegen  $w_l > 1$  enthält ein Translat  $x + B^d$  höchstens zwei solcher Punkte. Wir benötigen also mindestens  $n_j = \frac{3}{2}l + k$  Translate, um  $T_j$  zu überdecken. Sei  $\tilde{w} = \min\{\frac{w_l}{3}, w_l \Leftrightarrow w_k\} > 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} l'_j \Leftrightarrow 2w_l &\leq l w_l + k w_k = \left(\frac{3}{2}l + k\right) w_l \Leftrightarrow \frac{3}{2}l \left(\frac{w_l}{3}\right) \Leftrightarrow k(w_l \Leftrightarrow w_k) \\ &\leq \left(\frac{3}{2}l + k\right) \cdot (w_l \Leftrightarrow \tilde{w}) = n_j (w_l \Leftrightarrow \tilde{w}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Um  $S_j \setminus S'_j$  zu überdecken, benötigen wir ferner mindestens  $n'_j = \frac{l_j - l'_j}{w_l}$  Translate. Insgesamt ist also  $n \geq \sum_{j=0}^q (n_j + n'_j \Leftrightarrow c')$  mit einer Konstante  $c'$ . Mit  $c = c' + (2w_l + w)/(w_l \Leftrightarrow \tilde{w}) \Leftrightarrow w/w_l$  und (4.26) ergibt sich für  $n$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} n &\geq \sum_{j=0}^q \left( \frac{l'_j}{w_l \Leftrightarrow \tilde{w}} \Leftrightarrow \frac{2w_l}{w_l \Leftrightarrow \tilde{w}} + \frac{l_j \Leftrightarrow l'_j}{w_l} \right) \Leftrightarrow c'(q+1) \\ &= \left( \frac{r}{\eta} \cdot \frac{1}{w_l \Leftrightarrow \tilde{w}} + \left(1 \Leftrightarrow \frac{r}{\eta}\right) \cdot \frac{1}{w_l} \right) \cdot \sum_{j=0}^q l_j \Leftrightarrow c(q+1) \\ &\geq \frac{1}{w'} P_{\rho, n} \Leftrightarrow \left(c + \frac{w}{w'}\right) (q+1) \end{aligned}$$



mit  $w' < w_l$ . Es folgt

$$\Pi_{\rho,n} \leq w' n + (c w' + w)(q + 1).$$

Zusammen mit (4.24), (4.25) und Division durch  $n$  erhalten wir

$$w_l \Leftrightarrow \frac{2c_1}{\rho} \Leftrightarrow \frac{2c_2}{n} \leq w' + (c w' + w)' \left( \frac{c_3}{\rho} + \frac{c_4 + 1}{n} \right).$$

Für genügend große  $\rho$  und  $n$  ist dies jedoch ein Widerspruch zu  $w' < w_l$ .  $\square$

**Satz 4.14** *Sei  $L \in \mathcal{L}(B^d)$ . Für große  $\rho$  und  $n$  ist  $C_{\rho,n}$  genau dann eine Wurstkongfiguration, wenn  $\eta > r$  gilt.*

**Beweis:** Sei zunächst  $\eta > r$ . Nach Lemma 4.13 existiert für große  $\rho$  und  $n$  ein  $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  mit  $\text{lin}(u) = \text{lin}(y_{\rho,n})$ . Wir nehmen an, für beliebig große  $\rho$  und  $n$  ist  $C_{\rho,n}$  keine Wurst. Für diese  $\rho$  und  $n$  gibt es ein  $q_{\rho,n} \in C_{\rho,n}$  mit  $q_{\rho,n} \notin \text{lin}(u)$ . Dann gilt  $\text{dist}(q_{\rho,n}, \text{lin}(u)) \geq \eta$ . Sei  $\Delta = \text{conv}\{0, q_{\rho,n}, y_{\rho,n}\}$ .  $\Delta$  enthält ein Rechteck mit Länge  $r/\eta D_{\rho,n}$  und Höhe  $r$ . Wie im Beweis von Lemma 4.13 mit  $\Delta$  und  $D_{\rho,n}$  anstatt von  $\Delta_j$  und  $l_j$  erhalten wir

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{r}{\eta} \cdot \frac{1}{w_l \Leftrightarrow \tilde{w}} \cdot D_{\rho,n} + \left(1 \Leftrightarrow \frac{r}{\eta}\right) \cdot \frac{1}{w_l} \cdot D_{\rho,n} \Leftrightarrow c \\ &= \left(\frac{r}{\eta} \cdot \frac{1}{w_l \Leftrightarrow \tilde{w}} + \left(1 \Leftrightarrow \frac{r}{\eta}\right) \cdot \frac{1}{w_l}\right) \cdot D_{\rho,n} \Leftrightarrow c \geq \frac{1}{w'} \cdot D_{\rho,n} \Leftrightarrow c \end{aligned}$$

mit  $w' < w_l$ . Mit Lemma 4.11 folgt  $w_l \Leftrightarrow \frac{c_1}{\rho} \Leftrightarrow \frac{c_2}{n} \leq w' + \frac{c}{n}$ , ein Widerspruch für große  $\rho$  und  $n$ .

Für  $\eta \leq r$  seien  $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  und  $v \in L \cap B^d$  mit  $\text{dist}(v, \text{lin}(u)) = \eta$ . Sei  $C_n = \{x_1, \dots, x_{n-4}, x_a, x_b, x_c, x_d\}$  mit  $x_i = (i \Leftrightarrow 1)u$ ,  $i = 1, \dots, n \Leftrightarrow 4$ , und  $x_a = v$ ,  $x_b = \Leftrightarrow v$ ,  $x_c = (n \Leftrightarrow 5)u + v$  und  $x_d = (n \Leftrightarrow 5)u \Leftrightarrow v$ . Dann ist  $C_n \in \mathcal{U}(B^d, L)$  (2-dimensionale Knochenkongfiguration) mit  $\text{card } C_n = n$ , und  $\text{conv } C_n$  ist ein Parallelogramm mit Länge  $(n \Leftrightarrow 5)w_l$  und Höhe  $\eta$ . Es gilt

$$\begin{aligned} V(\text{conv } C_n + \rho B^d) &= \rho^d \kappa_d + \rho^{d-1} V_1(\text{conv } C_n) \kappa_{d-1} + \rho^{d-2} V_2(\text{conv } C_n) \kappa_{d-2} \\ &\geq \rho^d \kappa_d + \rho^{d-1} (n \Leftrightarrow 5) w_l \kappa_{d-1} + \rho^{d-2} (n \Leftrightarrow 5) w_l \eta \kappa_{d-2} \\ &> \rho^d \kappa_d + \rho^{d-1} (n \Leftrightarrow 1) w_l \kappa_{d-1} = V(\text{conv } S_n(B^d, L, u) + \rho B^d) \end{aligned}$$

für genügend große  $n$ .  $\square$

**Bemerkungen:**

- (1)  $C_n$  aus dem Beweis von Satz 4.14 hat die Gestalt eines Knochens. Wie für beliebige Überdeckungen (s. [BHW]) spielen Knochenkonfigurationen also auch bei Gitterüberdeckungen eine wichtige Rolle.
- (2) Satz 4.14 gilt auch, wenn man ausschließlich Gitterkonfigurationen  $C_n \subset L$  mit  $C_n = \text{conv } C_n \cap L$  zuläßt. Im Beweis von Satz 4.14 muß man einfach nur für  $\eta \leq r$  die Knochenkonfigurationen  $C_n$  durch z.B. die Konfiguration  $\{x_1, \dots, x_{n-1}, v\}$  mit  $x_i = (i \Leftrightarrow 1)u$  ersetzen. Natürlich hätte man diese Konfiguration auch schon im Beweis von Satz 4.14 verwenden können, sie ist allerdings „schlechter“ als die Knochenkonfiguration.

Eine optimale Wurst enthält natürlich  $n$  Gitterpunkte. Wir berechnen daher noch die parametrischen Dichten.

**Korollar 4.15** *Sei  $L \in \mathcal{L}(B^d)$  mit  $\eta > r$ . Dann gilt für große  $\rho$  und  $n$*

$$\vartheta(B^d, L, n, \rho) = \frac{n\kappa_d}{\kappa_d \rho^d + (n \Leftrightarrow 1) w_l \kappa_{d-1} \rho^{d-1}} \quad (4.27)$$

und

$$\vartheta(B^d, L, \rho) = \frac{\kappa_d}{w_l \kappa_{d-1} \rho^{d-1}}. \quad (4.28)$$

BEWEIS: Nach Satz 4.14 gilt für  $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$

$$\vartheta(B^d, L, n, \rho) = \vartheta(B^d, L, S_n(B^d, L, u), \rho)$$

für große  $\rho$  und  $n$ .

Mit  $V(\text{conv } S_n(B^d, L, u) + \rho B^d) = \kappa_d \rho^d + (n \Leftrightarrow 1) w_l \kappa_{d-1} \rho^{d-1}$  folgt (4.27), und damit erhält man (4.28) durch Grenzübergang.  $\square$

In der Ebene haben wir Überdeckungsgitter  $L$  mit  $\lambda_1(K, L) > 1$  betrachtet. Für  $K = B^d$  ist für solche Gitter für große  $\rho$  und  $n$  die Wurst optimal.

**Korollar 4.16** *Für  $L \in \mathcal{L}(B^d)$  mit  $\lambda_1(B^d, L) > 1$  ist  $C_{\rho, n}$  für große  $\rho$  und  $n$  eine Wurstkonfiguration.*

BEWEIS: Sei  $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$  beliebig.  $\text{lin}(u) \cap L + B^d$  überdeckt einen (unendlichen) Zylinder mit Radius  $r = \left(1 \Leftrightarrow \frac{w_l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Wegen  $\lambda_1(B^d, L) > 1$  enthält dieser Zylinder abgesehen von den Gitterpunkten auf  $\text{lin}(u)$  keine weiteren Punkte aus  $L$ . Also gilt  $\eta > r$ , und mit Satz 4.14 folgt die Behauptung.  $\square$

## Literatur

- [ABB] *V. Arhelger, U. Betke und K. Böröczky, Jr.:* Large finite lattice packings, submitted.
- [Bam] *R.P. Bambah:* On lattice coverings by spheres, Proc. Nat. Inst. Sci. India A 20, 25–52 (1954).
- [BR] *R.P. Bambah und C.A. Rogers:* Covering the plane with convex sets, J. London Math. Soc. 27, 304–314 (1952).
- [BRZ] *R.P. Bambah, C.A. Rogers und H. Zassenhaus:* On coverings with convex domains, Acta Arith. 9, 191–207 (1964).
- [BW] *R.P. Bambah und A.C. Woods:* On plane coverings with convex domains, Mathematika 18, 91–97 (1971).
- [Bar] *E.S. Barnes:* The covering of space by spheres, Canad. J. Math. 8, 293–304, (1956).
- [Be] *A. S. Besicovitch:* Measures of asymmetry of convex curves, J. London Math. Soc. 23 (1948), 237–240.
- [BB] *U. Betke und K. Böröczky, Jr.:* Large lattice packings and the Wulff shape, Mathematika, to appear.
- [BH1] *U. Betke und M. Henk:* Finite packings of spheres, Discrete. Comput. Geom., 19, 197–227 (1998).
- [BH2] *U. Betke und M. Henk:* Estimating sizes of a convex body by successive diameters and widths, Mathematika, 39, (1992), 247–257.

- [BHW1] *U. Betke, M. Henk und J.M. Wills: Finite and infinite packings, Journal für reine und angewandte Mathematik, Walter de Gruyter, Berlin · New York 1994.*
- [BHW2] *U. Betke, M. Henk und J.M. Wills: Sausages are good packings, Discrete and Computational Geometry, 13 (1995), 297–311.*
- [BHW3] *U. Betke, M. Henk und J.M. Wills: A new approach to covering, Mathematika, 42 (1995), 251–263.*
- [BM] *U. Betke und M. Meyer: Finite parametric covering densities for large parameter, in preparation.*
- [BeW] *U. Betke und J.M. Wills: Diophantine approximation of convex bodies, Manuscript.*
- [BF] *T. Bonnesen und W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin, 1934.*
- [BI] *E.M. Bronshtein and L.D. Ivanov: The approximation of convex sets by polyhedra, Sibirsk. Mat. Zh. 16, 1110–1112 [Siberian Math. J. 16, 852–853].*
- [Bu] *G.J. Butler: Simultaneous packing and covering in Euclidean space, Proc. London Mat. Soc., (3) 25 (1972), 721–735.*
- [CS] *J.H. Conway und N.J.A. Sloane: Sphere packings, Lattices and Groups, Springer–Verlag, Berlin, New York 1989.*
- [Do] *C.H. Dowker: On minimum circumscribed polygons, Bull. Amer. Math. Soc. 50, (1944), 120–122.*
- [Du] *R.M. Dudley: Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries, J. Approx. Theory 10, 227–236. Corrigendum: 26 (1979) 192–193.*
- [Eg] *H.G. Eggleston: Convexity (Cambridge Univ. Press, Cambridge), 1969.*
- [Eh] *E. Ehrhart: Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire, J. Reine Angew. Math. 226, 1–29; 227, 25–49.*
- [Fa] *I. Fary: Sur la densité des réseaux de domaines convexes, Bull. Soc. Math. France 178 (1950), 152–161.*

- [FejG] *G. Fejes Tóth*: Finite coverings by translates of centrally symmetric convex domains, *Discrete Comput. Geom.* 2 (1987), 353–363.
- [FGW] *G. Fejes Tóth, P. Gritzmann* und *J.M. Wills*: Finite sphere packing and sphere covering, *Discrete Comput. Geom.* 4 (1989), 19–40.
- [FK] *G. Fejes–Tóth* und *W. Kuperberg*: Packing and covering with convex sets, Ch 3.3, *Handbook of convex geometry*, edited by P.M. Gruber and J.M. Wills, (North–Holland, Amsterdam, 1993).
- [FejL1] *L. Fejes Tóth*: Research Problem 13, *Periodica Math. Hung.*, 6 (1975), 197–199.
- [FejL2] *L. Fejes Tóth*: Some packing and covering theorems, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 12(A) (1950), 62–67.
- [Few] *L. Few*: Covering Space by spheres, *Mathematika*, 3 (1956), 136–139.
- [Gri] *P. Gritzmann*: Finite Packungen und Überdeckungen, Habilitationsschrift, Universität Siegen 1984.
- [GW1] *P. Gritzmann* und *J.M. Wills*: On two finite covering problems of Bambah, Rogers, Woods and Zassenhaus, *Monatsh. Math.* 99, 279–296.
- [GW2] *P. Gritzmann* und *J.M. Wills*: Finite packing and covering, *Studia Sci. Math. Hungar.* 21, 149–162.
- [GW3] *P. Gritzmann* und *J.M. Wills*: Finite packing and covering, Ch 3.4, *Handbook of convex geometry*, edited by P.M. Gruber and J.M. Wills, (North–Holland, Amsterdam, 1993).
- [Gro] *H. Groemer*: Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum, *Math. Z.* 81 (1963), 260–278.
- [GL] *P.M. Gruber* und *C.G. Lekkerkerker*: *Geometry of Numbers*, North Holland, Amsterdam 1987.
- [Grü] *B. Grünbaum*: *Convex Polytopes*, (Wiley, London), 1967.

- [Ha] *H. Hadwiger*: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg 1957.
- [He] *M. Henk*: Finite and infinite packings, Habilitationsschrift, Universität Siegen 1995.
- [Hla] *E. Hlawka*: Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, Monatsh. Math. 53, 81–131 (1949).
- [Ju] *H. Jung*: Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt, J. reine angew. Math. 123, 241–257 (1901).
- [Ke] *R. Kershner*: The number of circles covering a set, Amer. J. Math. 61, 665–71.
- [Mc1] *P. McMullen*: Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes, Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 78, (1975), 247–261.
- [Mc2] *P. McMullen* Inequalities between Intrinsic Volumes, Monatsh. Math. 111, (1991), 47–53.
- [MS] *M. Meyer* und *U. Schnell*: On finite lattice coverings, submitted.
- [Pi] *G. Pick*: Geometrisches zur Zahlenlehre, Lotus Prag, 1899, 311–319.
- [Ro1] *C. A. Rogers*: Packing and Covering, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
- [Ro2] *C. A. Rogers*: The closest packing of convex two-dimensional domains, Acta math. 86, (1951), 309–321.
- [Sa] *E. Sas*: Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen, Compositio Math. 6 (1939), 468–470.
- [Sch] *R. Schneider*: Convex Bodies — the Brunn–Minkowski theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [S] *U. Schnell*: Periodic sphere packings and the Wulff-shape, Beitr. z. Algebra u. Geometrie, 40 (1999), No. 1, 125–140.
- [W1] *J.M. Wills*: Research problem 33, Period. Math. Hungar. 14, 189–191, (1983).

- [W2] *J.M. Wills*: Lattice packings of spheres and the Wulff–shape, *Mathematika* 86 (1996), 229–236.
- [Zi] *G.M. Ziegler*: *Lectures on Polytopes*, Springer–Verlag, 1995.

## Notationen

Im folgenden sind die im Text auftretenden Symbole, die Seitenzahl ihres ersten Auftretens und ihre Bedeutung aufgelistet.

$E^d$	10	der $d$ -dimensionale Euklidische Raum
$x \cdot y$	10	Skalarprodukt der Vektoren $x$ und $y$
$\ \cdot\ $	10	die Euklidische Norm
$B^d$	10	$d$ -dimensionale Einheitskugel
$\kappa_d$	10	Volumen der Einheitskugel im $E^d$
$\text{bd } M$	10	Rand der Menge $M$
$S^{d-1}$	10	Rand der $d$ -dimensionalen Einheitskugel
$\mathcal{K}^d$	10	Menge der konvexen Körper im $E^d$
$\mathcal{K}_0^d$	10	Menge der zentralsymmetrischen konvexen Körper im $E^d$
$\text{aff } M$	10	affine Hülle von $M$
$\text{lin } M$	10	lineare Hülle von $M$
$\dim M$	10	Dimension von $M$
$M^\perp$	10	das orthogonale Komplement von $\text{lin } M$
$\text{card } M$	10	Kardinalität von $M$
$\text{conv } M$	10	konvexe Hülle von $M$
$\text{int } M$	10	das Innere einer Menge $M$
$P + Q$	10	Minkowski-Summe der Mengen $P, Q \subset E^d$
$\alpha P$	10	die um $\alpha$ dilatierte Menge $P$
$(K, C)$	11	Überdeckung einer Menge $B \subset C + K$
$V(M)$	11	Volumen der Menge $M$
$V^k(M)$	11	Volumen der $k$ -dimensionalen Menge $M$ bzgl. $\text{aff } M$
$\vartheta(K, C)$	12	unendliche Dichte der Überdeckung $(K, C)$
$\vartheta(K)$	12	Dichte einer dünnsten Überdeckung des $E^d$ durch $K$



$\mathcal{U}(K)$	13	Menge aller endlichen Überdeckungskonfigurationen bzgl. $K$
$\mathcal{U}(K, n)$	13	Menge aller Überdeckungskonfigurationen bzgl. $K$ mit Kardinalität $n$
$L$	14	Gitter
$\det L$	14	Determinante des Gitters $L$
$L^*$	14	das zu $L$ polare Gitter
$G(M, L)$	15	Anzahl der Gitterpunkte von $L$ in $M$
$\mathcal{L}(K)$	15	Menge aller Überdeckungsgitter von $K$
$\vartheta^*(K)$	15	Dichte einer dünnsten Gitterüberdeckung durch $K$
$\mathcal{U}(K, L)$	16	Menge aller endlichen Überdeckungskonfigurationen bzgl. $K$ im Gitter $L$
$\vartheta(K)$	15	Überdeckungskonstante des konvexen Körpers $K$
$\vartheta(K, C, \rho)$	16	parametrische Dichte der Überdeckungskonfiguration $C$ von $K$ bzgl. $\rho$
$\vartheta(K, n, \rho)$	16	Dichte einer dünnsten Überdeckungskonfiguration von $K$ bzgl. des Maßes $\vartheta(K, C, \rho)$
$\vartheta(K, \rho)$	16	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, n, \rho)$
$V(M, K; i)$	17	$i$ -tes gemischte Volumen von $M$ und $K$
$V_i(K)$	18	$i$ -tes innere Volumen von $K$
$f_K$	19	Distanzfunktion von $K$
$\pi_H(M), M/H$	19	Orthogonalprojektion von $M$ auf $H$
$\pi_H^u(M)$	19	Projektion von $M$ auf $H$ in Richtung $u$ .
$Z(K, u, h)$	19	Zylinder in Richtung $u$ der Länge $h$
$K_{h,u}$	19	die Menge $(K \cap (K + h u))/u^\perp$
$Z_n(K, u, h)$	19	dem Zylinder $Z(K, u, h)$ zugeordnete Knochenkonfiguration
$h(K, u, \rho)$	21	optimale Knochenhöhe in Richtung $u$ bzgl. $K$ und $\rho$
$Z_\rho(K, u)$	21	der Zylinder $Z(K, u, h(K, u, \rho))$
$Z_{\rho,n}(K, u)$	21	die Knochenkonfiguration $Z_n(K, u, h(K, u, \rho))$
$V(K, \rho)$	22	Menge der optimalen Knochenrichtungen bzgl. $K$ und $\rho$
$Z_{\rho,n}(K)$	22	optimale Knochenkonfiguration
$\vartheta_Z(K, \rho)$	22	Dichte einer dünnsten, unendlichen Knochenkonfiguration bzgl. $K$ und $\rho$
$S_n(K, u)$	23	Wurstkonfiguration bzgl. $K$ in Richtung $u$
$S_n(K)$	23	optimale Wurstkonfiguration bzgl. $K$
$\vartheta_S(K, \rho)$	24	Dichte einer dünnsten, unendlichen Wurstkonfiguration bzgl. $K$ und $\rho$
$h(K)$	26	Fläche des größten in $K$ enthaltenen Sechsecks

$K(x)$	26	$x + K$
$H(C)$	27	$\text{card}(C \cap \text{bd conv } C)$ für $C \in \mathcal{U}(K)$
$[x_1, \dots, x_k]$	28	Jordan–Polygon mit den geordneten Ecken $x_1, \dots, x_k$
$[x, y], \overline{xy}$	28	die Strecke $\text{conv}\{x, y\}$
$D(c)$	28	Dirichlet–Zelle eines konvexen Körpers $K$ in $c$
$V$	29	Eckenmenge aller Dirichlet–Zellen
$E$	29	Seitenmenge aller Dirichlet–Zellen
$E_n$	29	Kantenmenge von $\text{conv } C_n$ mit $C_n \in \mathcal{U}(K, n)$
$T(v)$	29	Delauney Polygon
$Q(a, b)$	29	der langen Kante $[a, b]$ zugeordnetes Polygon
$\Delta_i, \Delta_i^*$	30	Dreiecke aus $Q(a, b)$
$\mathcal{F}_{a,b}$	30	Familie der Dreiecke $\Delta_i, \Delta_i^*$
$\mathcal{F}(C_n)$	32	Familie der Polygone $T(v)$ und $Q(a, b)$
$T(C_n)$	34	Anzahl der Dreiecke in der Triangulierung von $\text{conv } C_n$
$q(K)$	35	Fläche des größten in $K$ enthaltenen Vierecks
$h_K$	36	Stützfunktion von $K$
$D(K)$	36	Durchmesser von $K$
$d(K)$	36	Dicke von $K$
$r_k(K)$	40	$k$ –dimensionaler Inkugelradius von $K$
$r(K)$	41	Inkugelradius von $K$
$R(K)$	41	Umkugelradius von $K$
$C_{\rho,n}$	41	optimale Überdeckungskonfiguration der Kardinalität $n$
$u_{\rho,n}$	41	Durchmesserrichtung von $\text{conv } C_{\rho,n}$
$D_{\rho,n}$	41	Durchmesser von $\text{conv } C_{\rho,n}$
$R_{\rho,n}$	41	Umkugelradius von $\text{conv } C_{\rho,n}/u_{\rho,n}^\perp$
$s_m(d, K)$	41	$\max\{2V^{d-1}(K/u^\perp)/f_K(u) : u \in S^{d-1}\}$
$S_A$	44	unendlicher Streifen mit Basis $A$
$S_{A,l}$	44	Orthogonalzylinder mit Basis $A$ und Länge $l$
$S_{A,l,\epsilon}$	44	der an beiden Seiten um $\epsilon$ gekürzte Zylinder $S_{A,l}$
$\mathcal{K}(u)$	44	Familie der konvexen, kompakten Mengen in $u^\perp$
$h(A, K)$	44	$\max\{h \geq 0 : A \subset K_{h,u} + t \text{ für ein } t \in E^d\}$
$A_{\lambda,n}$	47	die Menge $(\pi_{u_{\rho,n}}^{-1}(\lambda y_n) \cap \text{conv } C_{\rho,n})/u^\perp$
$M_\mu$	48	innerer Parallelkörper von $M$ bzgl. aff $M$
$\vartheta(K, L, n, \rho)$	54	$\min\{\vartheta(K, C, \rho) : C \in \mathcal{U}(K, L), \text{card } C = n\}$
$\vartheta(K, L, \rho)$	54	$\liminf_{n \rightarrow \infty} \vartheta(K, L, n, \rho)$
$\mu(K, L)$	55	Überdeckungsradius von $K$ bzgl. $L$
$\lambda_1(K, L)$	55	erste sukzessive Minimum von $K$ bzgl. $L$

$\mathcal{L}_1(K)$	55	Menge der ebenen Überdeckungsgitter mit $\mu(K, L) = 1$ und $\lambda_1(K, L) > 1$
$\mathcal{F}_s(K, L)$	56	Menge der Wurstrichtungen eines Gitters $L$
$\mathcal{F}_d(K, L)$	56	Menge der Doppelwurstrichtungen eines Gitters $L$
$\mathcal{F}(K, L)$	56	die Menge $\mathcal{F}_s(K, L) \cup \mathcal{F}_d(K, L)$
$S_n(K, L, u)$	57	Wurstpolygon bzw. Wurstkongfiguration des Gitters $L$
$h_s, h_s(K, L)$	59	$\max\{h_K(u^*) : u \in \mathcal{F}_s(K, L)\}$
$h_m, h_m(K, L)$	59	$\max\{h_K(u^*) : u \in \mathcal{F}(K, L)\}$
$W(L, K, \rho)$	59	Wulff–shape bzgl. $K$ und $L$ zum Parameter $\rho$
$\Delta(K)$	62	kritische Determinante von $K$
$P_{\rho, n}$	63	optimales Überdeckungspolygon bzgl. eines festen Gitters aus $\mathcal{L}_1(K)$
$C_{\rho, n}^*$	65	optimale Überdeckungskongfiguration bzgl. variabler Gitter aus $\mathcal{L}_1(K)$
$P_{\rho, n}^*$	65	optimales Überdeckungspolygon bzgl. variabler Gitter aus $\mathcal{L}_1(K)$
$s_m$	65	$s_m(2, K)$
$ds(\rho)$	65	$\sup_{L \in \mathcal{L}_1(K)} (\rho h_m(K, L) + 1/2) \det L$
$\delta^*(K)$	65	Dichte einer dichtesten Gitterpackung von $K$
$\mathcal{F}_o(B^d, L)$	69	Menge der optimalen Wurstrichtungen bzgl. $B^d$ und $L$
$\mathcal{F}_k(B^d, L)$	69	die Menge $\mathcal{F}_s(B^d, L) \setminus \mathcal{F}_o(B^d, L)$
$w_l$	69	$\ u\ $ für $u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)$
$w_k$	69	$\max\{\ u\  : u \in \mathcal{F}_k(B^d, L)\}$
$s_u$	70	$\max\{u \cdot v : v \in \mathcal{F}_s(B^d, L)\}$
$r$	71	$(1 \Leftrightarrow w_l^2/4)^{\frac{1}{2}}$
$\eta$	71	$\min_{u \in \mathcal{F}_o(B^d, L)} \min\{\text{dist}(v, \text{lin}(u)) : v \in L \setminus \text{lin}(u)\}$