SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 18 • 2024**

Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik

Mit Beiträgen von

**R. Büchi | O. Ebbers | J. Franke-Reddig |
K. Richter & T. Reimers | S. Spies |
N. Strobach**

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 18 (2024)

Mit Beiträgen von:
Romain Büchi | Oliver Ebbers | Julia Franke-Reddig
Karin Richter & Toni Reimers | Susanne Spies | Niko Strobach

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 18 (2024)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2024

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Nachdem sich kürzlich einige prominente Besitzer von sogenannten ‘sozialen’ Netzwerken von aller Verantwortung absolviert haben, in diese ein auch nur halbwegs wirksames Sieb gegen kommunikativen Unrat einzufügen, unterbrechen wir – als kleines Zeichen des Protestes – im neuen Band der Siegener Beiträge erneut die Reihe der Vorworte, in denen wir das Motiv des Siebs in unterschiedlichsten historischen und philosophischen Kontexten aufgegriffen hatten. Betonen möchten wir gleichwohl, dass wir weiterhin versuchen werden, die Siegener Beiträge in einer Kombination von Liberalität in Bezug auf Positions-, Themen- und Stil-Palette, die auch Ungewohntes und Experimentelles akzeptiert, und Mut zu klaren und deutlichen Kriterien für die Qualität der Argumentation zu gestalten.

Als Auftakt des Bandes analysiert Romain Büchi einen für die gesamte Mathematik – zumindest in ihrer wissenschaftlichen Gestalt – zentralen Begriff: den Beweis. Dabei wird neben einer begrifflichen Präzisierung des Konzeptes sowohl nach seiner Verbindung zum philosophischen Fundamentalbegriff der Wahrheit gefragt als auch nach dem pragmatischen Nutzen des Beweisens (über die schlichte Bekräftigung des behaupteten Satzes hinaus). Der Autor kontrastiert die Entfaltung seiner eigenen Position u.a. mit Einsichten von Gottlob Frege und Ludwig Wittgenstein.

Oliver Ebbers widmet seinen Beitrag den mathematischen Leistungen des persischen Mathematikers Dschamschid Al-Kaschi. Wenn Ebbers sich vornimmt, eine Äußerung Cajoris, in der der Beitrag der islamischen Mathematik zur Mathematikgeschichte als gering dargestellt wird, exemplarisch zu widerlegen, so ist zwar zu hoffen, dass er bei heutigen Mathematikhistoriker*innen hier offene Türen einrennt, aber was ein breiteres Publikum betrifft, könnte diese Motivation durchaus noch gerechtfertigt sein. Eine ähnlich detaillierte Darstellung der mathematischen Leistungen wie die, die dann folgt, sucht man unseres Wissens in der bisher vorhandenen Sekundärliteratur vergeblich. Insbesondere hat Ebbers zur Darstellung von Al-Kaschis verschiedenen Verfahren ein beeindruckendes Pensum an komplizierten Berechnungen durchgeführt und im Vorbeigehen einzelne Rechenfehler in gängigen Ausgaben bzw. Darstellungen in der Literatur korrigiert oder im Blick auf die arabische Zahlschreibweise diskutiert. Damit man im Fall des fast schon atemberaubenden Verfahrens zum schriftlichen Ziehen der fünften Wurzel den einzelnen Schritten in einem ausführlich gerechneten Beispiel überhaupt folgen kann, hat uns der Verlag freundlicherweise eine Ausklappseite für dieses Beispiel ermöglicht, die man beim Lesen des allgemeinen Verfahrens "danebenlegen" kann. Ebenfalls erwähnt sei hier Ebbers' Vergleich zwischen Al-Kaschis Variante der Gelosia und dem heute üblichen schriftlichen Multiplikationsverfahren für eine zwanzigstellige Sexagesimalzahl; dies ist auch didaktisch interessant, weil zusätzlich sämtliche "im Sinn" zu behaltenden Zahlen explizit notiert werden.

Susanne Spies widmet sich in ihrem Beitrag einem Kernbegriff bzw. Phänomen (nicht nur) der Didaktik der Mathematik: der Anschauung. Sie vergleicht dazu die selten genauer betrachtete Konzeption des Siegerländer Pädagogen Adolph Diesterweg mit derjenigen Heinrich Pestalozzis, die im Gegensatz dazu in der fachdidaktischen Literatur als dauerhafter Referenzpunkt gilt. Für beide Autoren ist "Anschauung" ein Leitprinzip, gleichwohl zeigt die Autorin, dass trotz der Verwendung desselben Terminus die Konzeptionen deutliche Differenzen aufweisen, und dass somit das häufig wiederholte Narrativ von der Pestalozzi-Nachfolge Diesterswegs kaum haltbar ist.

Karin Richter und Toni Reimers gewähren einen Einblick in die noch unveröffentlichten Teile der Korrespondenz Georg Cantors. Hierzu wählen sie unter anderem eine Postkarte Hilberts an Cantor, die sich auf Königs Arbeit zum Wohlordnungssatz bezieht. Sie stellen dazu sowohl die zugehörigen Vorgänge auf dem Heidelberger Kongreß als auch Zermelos anschließenden Beweis des Satzes ausführlich dar. Zwar findet man dazu auch schon einiges in der Sekundärliteratur, doch erscheint dies hier durch Heranziehen der unveröffentlichten Quelle in einem neuen Licht.

Der Band schließt mit zwei Arbeiten, die dem Münsteraner Theologen, Logiker und Logikhistoriker Heinrich Scholz gewidmet sind. Im ersten dieser Beiträge ordnet Julia Franke-Reddig das Wirken des Historikers Scholz ein. Insbesondere untersucht sie sein – auch systematisch relevantes – Verhältnis zum Wiener Kreis, und sie gibt erste Einblicke in seine Rezeption der Wissenschaftslehre von Bernard Bolzano, der für Scholz neben Leibniz und Frege zu den zentralen Figuren der Entwicklung hin zu einer formalen Logik gehört. Die Analyse von Scholz' historischer Perspektive u.a. auf Bolzano kann wiederum zu einem tieferen Verständnis für seine geschichtsphilosophische Position führen. — Auch Niko Strobach kann unseren Band mit einer bisher unveröffentlichten Quelle bereichern, nämlich einem Brief von Scholz an Max Bense aus dem Jahr 1942. Die Bedeutung dieses Dokuments liegt darin, dass Scholz darin auf den Suizid von Felix Hausdorff eingeht. Strobach kontextualisiert die wenigen Zeilen, in denen dies geschieht, sehr eingehend und hat so eine lesenswerte Miniatur geschaffen.

Allen Autoren sei herzlich für ihre Beiträge gedankt. Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Hannes Wagener für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow, Michael Büdenbender und Stefan Pracht für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Über Beweis, Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik

Romain Büchi

Es ist nicht leicht, sich dem Beweisen philosophisch zu nähern, ohne sogleich in schwierige Aporien zu geraten, sei es über Wahrheit in der Mathematik, die besondere Gewissheit ihrer Sätze oder über den Beweisbegriff selbst. Wer aber verstehen will, was die Mathematik auszeichnet, wird nicht umhinkommen, mathematisches Beweisen näher zu untersuchen. Denn in den mitunter erstaunlichen Hervorbringungen dieser Tätigkeit zeigt sich der eigentümliche Charakter der Disziplin. Mathematische Beweise verleihen den Aussagen, die sie beweisen, eine Gewissheit, die ihresgleichen sucht und in anderen Disziplinen die nicht selten vergebliche Hoffnung nährt, Vergleichbares müsse auch auf ihrem Gebiet möglich sein. Doch so verlockend sich die damit verbundenen Verheissungen ausnehmen, über das Wesen mathematischer Gewissheit herrscht mehr Verwirrung als Einigkeit.

Gewichtige Stimmen halten es überhaupt für verfehlt, die Sätze der Mathematik unter eine eigene Gattung der Erkenntnis zu stellen. Wie in allen Wissenschaften seien die Prämissen und Konklusionen mathematischer Forschung, so gesichert und einleuchtend sie erscheinen mögen, im Prinzip revidierbar. Der Schein von Unbezweifelbarkeit, der gewisse Sätze umgibt, sei weder ihrem Gegenstand noch ihrer besonderen Begründungsweise geschuldet, sondern letztlich ihrer zentralen Stellung im derzeitigen Netz wissenschaftlicher Begriffe und Theorien.[1] Unter denen, die dagegen an der prinzipiellen Sonderstellung der Mathematik und an der besonderen Gewissheit ihrer Sätze festhalten wollen, herrscht indes tiefe Uneinigkeit. Die einen glauben, dass die Mathematik von idealen Sachverhalten handelt, die in einer abgetrennten Sphäre ihr zeitloses, mithin unveränderliches Fortbestehen fristen. Von den anderen Wissenschaften würde sich die Mathematik primär

[1] Für klassische Formulierungen der hier angedeuteten Positionen, vgl. Lakatos (1976) sowie Quine (1951) und Quine (1986).

durch die Natur ihres Gegenstands unterscheiden, nicht durch die Art und Weise, wie sie zu ihren Wahrheiten findet. Wie es dem menschlichen Verstand aber gelingen soll, sich Zugang zu diesem Himmelreich zu verschaffen und Gewissheit über seinen Aufbau zu erlangen, bleibt ein grosses Rätsel.[2] Von der Gegenseite wird zudem moniert, dass die Entkoppelung des Wahrheitsbegriffs von den zur Verfügung stehenden Mitteln der Wahrheitsfindung in die Irre führt. Dadurch werde man gezwungen, die Möglichkeit von Wahrheiten einzuräumen, für die unser beschränkter Intellekt ausserstande wäre, je einen Beweis zu geben.[3] Die Lösung kann gleichwohl nicht darin bestehen, die Wahrheit einer Aussage am Vorliegen eines Beweises festzumachen. Sonst müsste es ganz sinnlos erscheinen, unbewiesene Aussagen mathematischen Inhalts für wahrscheinlich wahr zu halten. Vermutungen aufzustellen, ist aber ein wesentlicher Bestandteil mathematischer Praxis und aus ihr nicht wegzudenken. Der Blick in diese Praxis offenbart ausserdem, dass Beweise nicht allein der Wahrheitsfindung dienen. Gerade wichtige Theoreme werden immer wieder aufs Neue bewiesen, etwa mit anderen Mitteln oder auf elegantere Weise. Offenbar erfüllt das Beweisen noch weitere epistemische Funktionen, die für das Fortschreiten der mathematischen Wissenschaft mindestens ebenso bedeutsam sind. Diese Einsicht verträgt sich allerdings nicht gut mit der Doktrin, wonach sich das Wesen mathematischer Beweise in ihrer formalen Gültigkeit erschöpfe, da einem Beweis durch seine Formalisierung typischerweise jene Eigenschaften genommen werden, die diese weitergehenden Funktionen erst möglich machten. So kommt es, dass selbst über die Frage, was einen mathematischen Beweis im Wesentlichen ausmacht, die Ansichten weit auseinandergehen.

Das gleich Folgende ist der Versuch, einen Überblick zu gewinnen, ohne sich zu weit in Probleme hineinziehen zu lassen, deren zufriedenstellende Behandlung hier nicht zu leisten ist. Behandelt werden vier zusammenhängende Fragen, jede in einem eigenen Abschnitt: *1. Was ist ein mathematischer Beweis? 2. Wie hängen in der Mathematik Beweis und Wahrheit zusammen? 3. Wozu dienen Beweise in der Mathematik? 4. Worin besteht die besondere Gewissheit mathematischer Sätze?* Jeder Abschnitt beginnt mit einem kursiv gesetzten Absatz, der die gestellte Frage in wenigen Worten beantwortet. Die gegebene Antwort wird daraufhin in Rückgriff auf ausgewählte Stellen aus neueren und älteren Quellen kommentiert.[4]

Mit der praktischen Wende in der Philosophie der Mathematik ist die Literatur

[2] Für eine einflussreiche und noch immer lesenswerte Besprechung platonistischer Tendenzen in der Mathematik, vgl. Bernays (1935); für einen aktuellen Überblick über platonistische Positionen in der Philosophie der Mathematik, vgl. Linnebo (2024).

[3] Siehe Anm. 40.

[4] Wer sich also einen raschen Überblick über den Inhalt des Papiers verschaffen möchte oder eine Zusammenfassung sucht, lese die zwei Seiten Einleitung und im Anschluss daran die kursiv gesetzten Absätze zu Beginn jedes Abschnitts.

über die Praxis des Beweisens und ihre tatsächlichen Erzeugnisse, d. s. zumeist nicht-formale Beweise, sprunghaft angewachsen.[5] Auf einen Teil dieser neueren Arbeiten wird im Folgenden auch verwiesen. Dennoch sollte nicht übersehen werden, dass sich die Philosophie seit ihren Anfängen, und besonders zu Beginn des 20. Jahrhunderts, mit der mathematischen Beweispraxis befasst hat. Über vieles, was uns heute wieder rätselhaft und schwierig erscheint, wurde schon einmal scharf nachgedacht. Es lohnt sich daher, auch bei älteren Vertretern oder Kritikern klassischer Positionen nachzulesen, was sie über das Beweisen, über Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik geschrieben haben. Wir werden uns vor allem bei Frege, Wittgenstein und Dummett bedienen.

1 Was ist ein mathematischer Beweis?

Beweisen ist eine Tätigkeit: ein von Regeln geleitetes Voranschreiten auf ein Ziel hin. Das Ziel – die zu beweisende Aussage – kann erreicht oder verfehlt werden. Gelingt es, den Beweisgang aus anerkannten Prämissen ohne Regelbrüche oder unerlaubte Sprünge ins Ziel zu bringen, liegt mit der bereinigten Aufzeichnung der ausgeführten Gedankenbewegungen ein Beweis der Aussage vor. Der Beweis selbst ist keine Bewegung, auch keine Aufführung oder performance*. Er ist, wie man sagen könnte, das Bild eines gelungenen Beweisgangs.*

Alan Robinson kritisiert zu Recht eine in der Logik verbreitete Sicht, die Beweise nur als syntaktische Gegenstände zu betrachten vermag, als starre Zeichenfolgen, in denen nichts vor sich geht, nichts geschieht. Diese Sichtweise blendet wesentliche Aspekte des Beweisens aus und versperrt, wenn sie die einzige Sichtweise bleibt, das Verständnis für die unterschiedlichen Funktionen, die Beweise im Dienst der Mathematik erfüllen:[6]

> If we confine our attention to proofs in this sense it is as though we only ever experience music in the form of the structured, silent, static scores written down by the composers in the traditional music notation. Studying these scores is of course important, but there is much more to music than descriptive diagrams. There is the entirely different, dynamic, active reality which is the living music. The musical score is just an abstraction from, or a description of, or even an algorithm for generating, the living music – one might almost say, it is a formalization of the music. The music itself is what happens when it is performed,

[5] Für eine aktuelle Bestandesaufnahme, vgl. Kap. VIII in Sriraman (2024).
[6] Robinson (2000, S. 281).

> either in the open and in public in the usual way, or in the private mental performances which some people can conjure up in their musical imaginations.

Beweise sind keine Ansammlungen bedeutungsloser Formen auf Papier, die gewissen syntaktischen Bedingungen genügen. Die Begriffe, die in ihnen vorkommen, sind lebendig durch ihren Gebrauch in der Mathematik.[7] Wenn Robinson aber den Beweis selbst – und nicht wie wir lediglich das Beweisen – als *performance* bestimmt, hat er die Abfolge mentaler Zustände im Sinn, die das individuelle Nachvollziehen eines Beweistextes aus der mathematischen Fachliteratur begleitet: gleichsam die innerlich aufgeführte Sinfonie. Der Beweis wäre demnach primär etwas Subjektives, das in der Fülle seiner partikulären Ausprägung privat bleiben muss: „The real proof is the series of cognitive events called for in the script. [...] As the proof proceeds so do the stages of the evolution of the (subjective) mental state of seeing that, and knowing why, the theorem is true".[8] Um den besonderen Charakter der mathematischen Gewissheit einzufangen, bedarf es aber (wie sich im vierten Abschnitt deutlicher zeigen wird) eines Begriffs, der von allem bloss subjektiv Zugänglichen befreit ist und die Mitteilbarkeit von Beweisen als wesentliches Merkmal enthält.[9] Insofern der mathematische Beweis seinem Wesen nach mitteilbar, mithin verständlich sein muss, lässt er sich durchaus mit anderem *vergleichen*, mit Geschichten etwa oder Musik.[10] Die wahre Herausforderung besteht jedoch darin, Beweise als Wesen *sui generis* zu begreifen. Ihre Einteilung unter eine übergeordnete Gattung kann hilfreich sein, aber nur, wenn diese als

[7] Eine lohnenswerte Frage, der hier nicht nachgegangen werden kann, ist die nach möglichen Anwendungen von Beweisen *ausserhalb* der Mathematik. Ein mathematischer Beweis kann für eine nicht (rein) mathematische Theorie natürlich insofern von Bedeutung sein, als er die Wahrheit eines Satzes zeigt, der in dieser Theorie Anwendung findet. Die Frage ist jedoch, ob auch der Beweis selbst, d. i. der Beweiskörper oder ein Bestandteil daraus, ausserhalb der Mathematik von Nutzen sein kann oder ob sich sein ganzes Leben quasi innerhalb der Mauern dieser einen Wissenschaft abspielt. Zu untersuchen wäre unter anderem, ob und, wenn ja, wie sich Beweise bei der Entwicklung von Algorithmen in den Computerwissenschaften als nützlich erwiesen haben. Vgl. dazu weiterführend Rota (1997, S. 189-192).

[8] Robinson (2000, S. 281).

[9] Die Vorstellung eines privaten „Beweises" ist mit der Vorstellung eines privaten Plans vergleichbar, wie sie Wittgenstein in den *Philosophische Untersuchungen* beschreibt: „Ich sage Einem, ich sei einen gewissen Weg gegangen, einem Plan gemäss, den ich zuvor angefertigt habe. Ich zeige ihm darauf diesen Plan, und er besteht aus Strichen auf einem Papier; aber ich kann nicht erklären, inwiefern diese Striche der Plan meiner Wanderung sind, dem Andern keine Regel sagen, wie der Plan zu deuten ist. Wohl aber bin ich jener Zeichnung mit allen charakteristischen Anzeichen des Kartenlesens nachgegangen. Ich könnte so eine Zeichnung einen ‚privaten' Plan nennen" § 653, S. 269.

[10] Nicht nur bei Robinson, auch an vielen Stellen in Wittgensteins Nachlass finden sich Vergleiche zwischen Musik und Mathematik. In einer Notiz aus den *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* zum Beispiel weist er auf die „*genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden) Übergangs in der Musik und in der Mathematik" (III.63, S. 192) hin. Vgl. auch I.171, S. 100-101; III.77, S. 203; VI.2, S. 304; VII.11, S. 370; VII.24, S. 390; VII.40, S. 407.

minimale Anforderung das Moment der Mitteilbarkeit besitzt, da andernfalls das Abgleiten in eine Art mathematischen Solipsismus droht. Aus diesem Grund eignet sich der Gattungsbegriff der (mentalen) Konstruktion, von dem der Intuitionismus Gebrauch macht, nur bedingt. Michael Dummett, der eine eigene Spielart des Intuitionismus vertritt, hat dies immer wieder hervorgehoben:[11]

> Intuitionists usually say that written proofs are only the imperfect representations of the corresponding mental constructions: but, unless we are to acquiesce in a purely solipsistic interpretation of the whole conception, they must be communicable, and, if communicable, to be communicated by means of language; there is therefore no justification for holding that their linguistic representations may, in certain cases, necessarily be imperfect. The important point is not that the mental construction is, as it were, in a different medium from the written proof, but, rather, that the written proof is a proof in the required sense only in virtue of its being couched in an interpreted language: the features which make it genuinely a proof of its conclusion, and effectively recognizable as such, are neither identifiable with nor isomorphic to any of its purely formal characteristics as a complex structure of written signs, but belong to it solely in virtue of the meanings of those signs.

Indem wir hier einen breit gefassten Bildbegriff dem der Konstruktion vorziehen und Beweise als Bilder zu verstehen versuchen, orientieren wir uns allerdings nicht an Dummett, sondern an Wittgenstein, der in einer seiner *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* festhält:[12]

> Der Beweis (das Beweisbild) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); und wir sind überzeugt, dass ein *so* geregeltes Vorgehen immer zu diesem Bild führt.

Wittgenstein weist in dieser und ähnlichen Bemerkungen zunächst darauf hin, dass ein Bild im gewöhnlichen Sinn des Worts, oder eine Reihe von solchen Bildern, auf uns wie ein Beweis wirken kann. Zur Veranschaulichung führt er Zeichnungen und einprägsame Figuren an, wie sie auch in didaktisch ausgerichteten Mathematikbüchern zu finden sind. Doch das ist nicht der Punkt. Kaum jemand

[11] Dummett (2000, S. 270). Vgl. auch Dummett (1973, S. 226).

[12] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.22, S. 159. Weitere Stellen, an denen Beweise als Bilder verstanden oder mit Bildern verglichen werden, sind I.25-41, S. 46-55; I.121-125, S. 84-86; I.138-141, S. 91-92; II.8-14, S. 127-129; II.42-46, S. 137-138; II.55-62, S. 140-142; III.1-2, S. 143; III.9-11, S. 149-151; III.21-25, S. 158-162; III.39-41, S. 170-172; IV.11-12, S. 229-230; IV.17-21, S. 233-235; IV.31-33, S. 239-242; IV.49, S. 249-250; V.10-11, S. 268-269; V.45, S. 297-298; V.51, S. 301; VI.2-5, S. 303-307; VII.9-10, S. 365-368; VII.70-72, S. 432-435.

würde bestreiten wollen, dass es geometrische Beweise gibt, oder dass bildliche Darstellungen helfen können, mathematische Aussagen zu verstehen und sich von ihrer Wahrheit zu überzeugen. Dass aber am Ausmass dieser Möglichkeit ein wesentlicher Aspekt mathematischer Beweise sichtbar wird, wodurch sie sich von anderen Begründungsweisen unterscheiden, dem Grad nach insbesondere von formalsprachlichen Ableitungen, wird oft übersehen, und am häufigsten von denen, die mit Grundlegungsabsichten auf die Mathematik blicken. Diese Feststellungen sind mit Dummetts Mitteilbarkeitsforderung nicht unverträglich, da der Gebrauch von bildlichen Darstellungen zu Beweiszwecken immer in eine umfassende Sprache eingebettet sein muss. Unsere Begriffswahl hat also neben der Abwendung der solipsistischen Gefahr den weiteren Vorteil, dass sich einfacher erklären lässt, wie neben Texten auch Bilder und Diagramme einen wesentlichen Beitrag an die Beweiskraft von Beweisen leisten können.[13]

Wittgensteins Kritik reicht indes tiefer. Ihr zufolge verhält es sich nicht nur so, dass Bilder mitunter als Beweise dienen können, sondern jeder Beweis, selbst der am wenigsten anschauliche, ist – insofern er die Kraft besitzt, etwas zu beweisen und uns zu überzeugen – gewissermassen ein Bild:[14]

> Der Beweis muss ein anschaulicher Vorgang sein.[15] [...] Ich möchte sagen, dass, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, [...] der *Beweis* zerstört ist. Und nicht in einer dummen und unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat. [...] Das heisst: Der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweiskräftig nur so lange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt. [...] Wir neigen zu dem Glauben, dass der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft hat, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- und Schlussgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als es die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlussgesetze ist. Die logische Gewissheit der Beweise – will ich sagen – reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewissheit.

Mathematisch zu überzeugen und Gewissheit zu verschaffen, vermag ein Beweis demnach nur kraft bestimmter Eigenschaften, die ihn als eine Art Bild ausweisen. Jeder Beweis – sei er nun besonders anschaulich und mit Figuren dargestellt

[13] Für eine systematische Untersuchung der bildlichen Aspekte symbolischer Notationen sowie der möglichen Rolle von Diagrammen und anderen Darstellungen in mathematischen Beweisen, vgl. Giaquinto (2007). Zwei Fallstudien bieten De Toffoli und Giardino (2014) und De Toffoli (2017). Weitere Beiträge sind in Giardino et al. (2022) enthalten.

[14] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.42-43, S. 173-175.

[15] Wir lesen hier mit der vorhin zitierten Bemerkung (III.22, S. 159): Der Beweis muss die *anschauliche Darstellung* eines Vorgangs sein.

oder rein sprachlich und ohne spezielle Notation – besitzt diese Eigenschaften, die Wittgenstein hier als geometrische bezeichnet. Dazu gehört insbesondere die Übersehbarkeit, mithin, dass sich beim Erfassen des Beweisbilds die Einsicht aufzwingt, es *müsse* sich so verhalten, wie dargestellt.[16] „Die Russellschen Zeichen" hingegen (d. s. logische Ableitungen in der Notation der *Principia Mathematica*) „hüllen die wichtigen Formen des Beweises gleichsam bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in viele Tücher gewickelt ist".[17] So betrachtet nehmen sich die Grundlegungsbemühungen des Logizismus geradezu verkehrt aus. Denn die Beweise, denen man in der mathematischen Praxis begegnet, stehen den lückenlosen und durchformalisierten Ableitungen der Logik hinsichtlich ihrer Beweiskraft in keiner Weise nach – im Gegenteil, mangelt es jenen in der Regel doch an Übersichtlichkeit (worauf wir weiter unten sowie im dritten Abschnitt zurückkommen werden).

Mit dem Aufkommen computergestützter Beweise hat sich inzwischen ein neues Formalisierungsstreben eingestellt, das von Vorstellungen begleitet wird, gegen die Wittgensteins Kritik ein heilsames Gegenmittel bietet, wenn man sich auf sie einlässt. Obwohl das axiomatische Denken und die verschiedenen Bemühungen um eine Grundlegung der Mathematik im letzten Jahrhundert die Art und Weise, wie die Disziplin praktiziert wird, beeinflusst haben, trennt nach wie vor ein weiter Graben die meisten Forschungsgebiete vom vermeintlichen Ideal formalisierter Beweisführung. Um diesen Graben wenigstens philosophisch zu überbrücken, wird mitunter vorgeschlagen, den lebendig aus der Praxis genommenen Beweis als eine grobe Skizze aufzufassen, die eine ihm entsprechende, jedoch vollständige formale Ableitung andeutet.[18] Dies ermöglicht es, in Anlehnung an die Definitionen formaler Gültigkeit aus der Logik einen Begriff zu definieren, mit dem sich scheinbar auch in mathematischen Kontexten scharf entscheiden lässt, was als ein strenger Beweis gilt, was nicht, und ebenso wann derselbe, wann zwei verschiedene Beweise vorliegen. Um festzustellen, ob zum Beispiel in verschiedenen Algebra-Lehrbüchern Varianten ein und desselben Beweises abgedruckt sind, müsste demnach durch Formalisieren geprüft werden, ob sie dieselbe Ableitung andeuten oder nicht. Doch angesichts der vielfachen Umformungen und Anpassungen, die das Formalisieren mathematischer Sätze und ihrer Beweise bekanntlich erfordert, erscheint die Annahme, dass diese Beziehung des Andeutens rechtseindeutig ausfallen müsse, über-

[16] Vgl. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.39, S. 170.

[17] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.25, S. 162

[18] Tatsächlich finden sich in der gegenwärtigen Literatur verschiedene Varianten dieses Standpunkts, die in Tanswell (2015, S. 296) unter der Bezeichnung ‚derivationist approach' versammelt werden. Eine einflussreiche Formulierung bietet Azzouni (2004), wobei hier die Auffassung nicht-formaler Beweise als Skizzen abgelehnt wird, vgl. S. 87-89. Avigad (2021, S. 7381) und Hamami (2022, S. 410) hingegen scheinen diese Auffassung zu akzeptieren.

aus zweifelhaft.[19] Auch will es nicht zur Heterogenität der Zählweisen und Identitätskriterien passen, die zur Anwendung kommen, wenn über mathematische Beweise gesprochen wird, etwa wenn es in einem mathematischen Lehrbuch oder einer historischen Darstellung der Zahlentheorie heisst, Landaus Beweis von Bertrands Vermutung sei im Wesentlichen identisch mit Tschebyschows ursprünglichem Beweis, wohingegen die Beweise des Primzahlsatzes von Erdős und Selberg trotz aller Übereinstimmung als zwei verschiedene gezählt werden. Der hier bevorzugte Bildbegriff lässt denn auch weitgehend offen, wie stark von den Einzelheiten des schriftlichen oder diagrammatischen Beweisens jeweils abstrahiert werden muss, um das Beweisbild zu fassen.[20]

Auf breitere Zustimmung als der Vorschlag des eindeutigen Andeutens stösst denn auch eine vorsichtigere Annahme, die zwar nicht mehr ohne Weiteres für Individuierungszwecke verwendet werden kann, aber dennoch eine Art Kriterium, oder wenigstens eine notwendige und hinreichende Bedingung, für die Korrektheit und Strenge mathematischer Beweise liefern soll. Nach dieser „standard view“ ist ein nicht-formaler Beweisversuch genau dann ein Beweis, mithin streng korrekt, wenn er in (mindestens) eine formal gültige Ableitung übersetzt werden kann.[21] Die Korrektheit mathematischer Beweise wäre demnach durch eine rein formale Gültigkeit verbürgt, die in Bezug auf ein gegebenes System von Grund- und Schlussgesetzen definiert ist. Dass hier jedoch ein Kriterium vorliegt, welches nicht bloss eine externe Eigenschaft mathematischer Beweise einfängt, sondern Aufschluss über ihr Wesen gibt, ist zweifelhaft.[22]

Einen ersten kritischen Hinweis gibt uns Dummett, wenn er im zweiten Teil der oben zitierten Passage bemerkt, dass der mathematische Beweis in der Regel nicht, oder zumindest nicht allein, aufgrund seiner formalen Beschaffenheit als solcher erkannt werden kann, sondern ein Verständnis der *Bedeutung* der in ihm vorkommenden Zeichen bedingt. Dieses Verständnis, meint Dummett weiter, setze die volle Beherrschung der Sprache voraus, worin der Beweis ausgedrückt ist: „We therefore have no reason to expect that any proof of some given statement will

[19] Für eine kritische Diskussion der Behauptung, wonach Beweise Ableitungen eindeutig anzeigen, vgl. Tanswell (2015, S. 301-307). Auch in Leitgeb (2009) wird darauf hingewiesen, wie kompliziert sich das Verhältnis zwischen formaler und nicht-formaler Beweisbarkeit gestaltet; dass überhaupt eine Beziehung besteht, die für eine begriffliche Klärung nicht-formaler Beweisbarkeit von Interesse sein könnte, müsse sich erst zeigen.

[20] Für eine kompakte Besprechung unterschiedlicher Identitätskriterien für Beweise, vgl. Dawson (2006, S. 272-275).

[21] Verschiedentlich formuliert und verteidigt wird diese Standardauffassung u. a. in Avigad (2021), Hamami (2022) und Tatton-Brown (2023).

[22] Einige der Einwände, die im Folgenden angeführt werden, wurden schon in Rav (2007), in Leitgeb (2009) und in Antonutti Marfori (2010) vorgebracht. Repliken darauf finden sich in Hamami (2022, S. 435-441).

be recognizable as such by any means that falls short of demanding a full understanding of the language in which the proof is expressed“.[23] Anders verhält es sich bei formalen Ableitungen, da in entscheidbaren Kalkülen ein rein mechanisches Verfahren existiert, mit dem sich entscheiden lässt, ob eine gegebene Formel tautologisch ist oder nicht. Und selbst in halb-entscheidbaren Kalkülen wie der Prädikatenlogik erster Stufe stehen noch Verfahren zur Erkennung von Tautologien und Kontradiktionen zur Verfügung. Für die Prüfung eines nicht-formalen Arguments können jene Algorithmen freilich erst dann angewendet werden, wenn dieses in ein formales übertragen wurde. Da die Übersetzungsleistung wiederum ein „volles Verständnis“ der Sprache voraussetzt, in der das nicht-formale Argument verfasst ist, bleibt Dummetts Einwand bestehen: Es gibt keinen Grund zur Annahme, wonach mathematische Beweise als solche erkannt werden können, ohne dass die Bedeutungen der in ihnen vorkommenden Zeichen verstanden werden müssten.[24]

Wer nun aber die mathematischen Begriffe versteht, die in einem Beweis vorkommen, ebenso die angeführten Prämissen und die Konklusion, und ausserdem die logische Struktur des Arguments übersieht, verfügt bereits über alles Nötige, um den Beweis selbst zu erfassen, mithin sich von ihm überzeugen zu lassen und als wahr anzuerkennen, was er beweist. Dafür braucht es keinen Umweg über die Gültigkeit einer formalen Ableitung, im Gegenteil, das wäre dem Verständnis zunächst hinderlich. Euklids uralter Beweis, dass keine endliche Menge natürlicher Zahlen alle Primzahlen enthalten kann, es also endlos viele davon geben muss, verfügt bereits über alle Eigenschaften, die einen strengen Beweis ausmachen und seiner Konklusion die nicht weiter steigerbare Gewissheit eines mathematischen Theorems verleihen. Dass es gewiss Wege gibt, ihn in ein formales System zu übertragen, und dass sich das Ergebnis dieser Übertragung als gültige Ableitung in diesem System erweisen würde, tut nichts zur Sache. Der ursprüngliche Beweis sorgt schon für sich selbst. Das Kriterium für sein Beweissein an die Existenz einer Eigenschaft zu binden, die ihn nur am Rande berührt, ist nicht dazu geeignet, ihn als Wesen *sui generis* zu begreifen. Es ist so, wie wenn man die hinreichende Steifigkeit einer Holzbrücke nicht an Eigenschaften, die an ihr selbst vorkommen, festmachte, sondern an denen einer ihr nachgebildeten Betonbrücke.

Dass sich zwischen mathematischen Theorien und logischen Formalismen ein Zu-

[23] Dummett (2000, S. 270).

[24] Zwar mag es sein, dass die Übersetzung nicht-formaler Beweise in formale Ableitungen routinemässig, d. h. durch die Anwendung entsprechender Algorithmen, erfolgen kann, wie in Hamami (2022, S. 428-433) ausführlich dargelegt wird. Doch sowohl die Entwicklung wie die fallgerechte Anwendung solcher Übersetzungsalgorithmen setzen wiederum das volle Verständnis der Ausgangssprache und damit Kenntnis der Bedeutung der darin vorkommenden Begriffe voraus.

sammenhang herstellen lässt, der es wert ist, untersucht zu werden, und der auch etwas über die Mathematik anzeigt, soll hier keinesfalls bestritten werden. Gleichwohl zielt das Kriterium, das die Standardauffassung liefert, an dem, was mathematische Beweise ihrem Wesen nach ausmacht, vorbei. Diesem Befund entspricht auch die Wirklichkeit der Praxis. Bis jetzt ist es den Mathematik Praktizierenden jedenfalls noch gut gelungen, sich der Korrektheit eines Beweisversuchs zu überzeugen, ohne Formalisierungen und Beweisassistenten zu Hilfe zu nehmen.[25] Nun ist nicht ausgeschlossen, dass neue Normen in der Zukunft die Praxis verschieben, sodass jenes Beweisideal, das sich an formalen Ableitungen orientiert und angeblich bereits heute den Standard[26] setzt, in eine Anforderung verwandelt würde. Ohne gezielte Gegenmassnahmen hätte eine solche Verschiebung indes den Verlust anderer epistemischer Ideale zur Folge, die für das Beweisen mindestens ebenso wichtig sind. Formale Ableitungen sind generell unübersichtlicher und weniger leicht verständlich als ihre nicht-formalen Verwandten. Da jede noch so triviale Annahme, jede noch so gängige Definition als separater Schritt in die Beweisführung aufgenommen werden muss und nur die vorgegebenen Schlussregeln zur Anwendung kommen dürfen, können formale Ableitungen von Sätzen, für die sich in Lehrbüchern kurze und prägnante Beweise finden, zehntausende Zeilen oder mehr umfassen.[27] Besonders wenn Menschen bei der Überprüfung solcher Ableitungen im Spiel sind, ist die Fehleranfälligkeit deutlich erhöht, was wiederum die Gewissheit der erreichten Konklusion infrage stellt. Doch nicht nur deshalb tangiert das Fehlen von Übersichtlichkeit die Gewissheit des Satzes, dessen Wahrheit es zu beweisen gilt. Es wird dadurch auch die begründende oder erklärende Funktion, die gute Beweise auszeichnet, zerstört (worauf wir im dritten Abschnitt zurückkommen werden). Denn worüber man sich keine Übersicht zu verschaffen vermag, wird man kein Verständnis und damit auch keine Gewissheit erlangen.

Beweise, wie sie in der mathematischen Praxis vorzufinden sind, enthalten denn auch nur in Ausnahmefällen schrittweise Ableitungen nach gegebenen Schlussregeln aus einer eindeutig festgelegten Menge von Axiomen. Die meisten Schlüsse, die darin zur Anwendung kommen, sind aus formallogischer Sicht mangelhaft,

[25] Dass die Standardauffassung es weitgehend versäumt, zu erklären, wie die strenge Korrektheit von Beweisen in der Praxis beurteilt wird und die für gewöhnlich hohe Übereinstimmung der Urteile zustande kommt, wird in Hamami (2022, S. 445) eingeräumt.

[26] Vgl. Avigad (2021, S. 7378) und Hamami (2022, S. 410). Wenn ein solches Beweisideal am Werk ist, dann betrifft es die zu erreichende Gewissheit, nicht primär die Art des Beweises. Formale Ableitungen erscheinen einigen deshalb als ideale Beweise, weil davon ausgegangen wird, dass sie eine absolute Beweiskraft besitzen und damit die höchsten Gewissheitsansprüche erfüllen.

[27] Zum Beispiel umfasst der erste mit einem Beweisassistenten überprüfte formale Beweis des Primzahlsatzes rund 30'000 Zeilen (oder 673 Seiten Skript). Atle Selberg dagegen reichten für seinen Beweis, nach dem sich die formale Ableitung richtet, weniger als 10 A4-Seiten. Für die beiden Beweise, vgl. Avigad, Donnelly et al. (2007, S. 8) und Selberg (1949). Zur Diskrepanz von Umfang und Aufwand, vgl. Avigad und Harrison (2014, S. 75).

da entweder enthymemisch, nur material gültig oder beides zugleich. Nach dem Kriterium aber, das die Korrektheit von Beweisen an formale Gültigkeit knüpft, dürften Enthymeme und nur material gültige Schlüsse – da die Gültigkeit der letzteren auch an der Bedeutung der darin vorkommenden Zeichen hängt – nicht in mathematischen Beweisen vorkommen, es sei denn, sie lassen sich im Rahmen eines anerkannten Axiomen- und Logiksystems zu formal gültigen Schlüssen vervollständigen. Dass dies immer möglich sein soll, ohne dass auf fragwürdige Axiome zurückgegriffen werden muss oder sich *ad hoc* Anpassungen am System aufzwingen, ist eine weitreichende Behauptung, die eine entsprechend robuste Begründung erfordert.[28]

Insbesondere müsste geklärt werden, welches System beim Beweisen in der Mathematik tatsächlich zur Anwendung bzw. dieser Anwendung am nächsten kommt. Bekanntlich herrscht in dieser Frage wenig Einigkeit, wie die Vielzahl ungleichwertiger Vorschläge, die seit dem ausgehenden 19. Jahrhundert vorgebracht wurden, bezeugt: Liefert die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom die geeignetste Grundlage, wie nicht wenige glauben, oder müsste Russells Typentheorie (bzw. die durch Ramsey vereinfachte Version derselben) wenigstens in Betracht gezogen werden? Braucht es überhaupt eine Prädikatenlogik zweiter Stufe oder muss, wie Quine meinte, die erste Stufe ausreichen?[29] Haben nur die intuitionistischen Gesetze Geltung oder die Gesamtheit der klassischen? Braucht es parakonsistente Logiken, um die Antinomien in den Griff zu bekommen, oder kann an *ex falso quodlibet* festgehalten werden? Steht womöglich ein Kalkül des natürlichen Schliessens dem mathematischen Denken am nächsten oder trotz allem ein axiomatischer? Usw. usf.

Als zu Beginn dieses Abschnitts das Beweisen als *regelgeleitetes* Voranschreiten charakterisiert wurde, sollte dies nicht implizieren, dass die Übersetzbarkeit in eine formal gültige Ableitung eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines mathematischen Beweises darstellt. Beabsichtigt war lediglich eine schwächere Forderung: dass Beweisversuche nur dann gelingen können, mithin korrekt sind, wenn sie nicht gegen anerkannte Regeln verstossen. Beim Beweisen müssen allerdings nicht nur logische Gesetze befolgt werden, sondern auch solche, die sich aus einer etablierten Technik ergeben, Rechenregeln zum Beispiel. Offenbar aber

[28] Für einen solchen Begründungsversuch, vgl. Hamami (2022, S. 433-434).

[29] Einem Beweis aus der zahlentheoretischen Praxis zum Beispiel, der von der vollständigen Induktion Gebrauch macht, lässt sich schlicht nicht entnehmen, ob er erststufig mit Hilfe des Induktionsschemas oder doch als Instanz des zweitstufigen Induktionsaxioms formalisiert werden soll, wie in Leitgeb (2009, S. 269) zu Recht bemerkt wird. Die logische Ordnung des formalen Systems, in das hinein formalisiert wird, sei durch das zu rekonstruierende Mathematikfragment unterbestimmt. Vgl. dazu das pragmatische Ausweichmanöver in Avigad (2021, S. 7378).

bleibt die Menge *dieser* Regeln weder über die Zeit noch über Gebietsgrenzen hinaus unverändert. Während die Entwicklung neuer Methoden das Regelrepertoire erweitert, können tradierte Techniken an Bedeutung verlieren, bis sie ganz aus dem Werkzeugkasten verschwunden sind; und auch zwischen den Gebieten, ja sogar zwischen verschiedenen Theorien aus demselben oder verwandten Gebieten lassen sich erhebliche Unterschiede ausmachen.[30] Die Menge der Regeln, die beim Beweisen angewandt werden dürfen oder beachtet werden müssen, ein für allemal und für die Mathematik insgesamt festsetzen zu wollen, wäre ein von Grund auf fehlgeleitetes Unterfangen. Vielmehr trifft zu, was Wittgenstein in einer anderen Bemerkung auf den Punkt bringt:[31]

> *Das* ist wahr daran, dass Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung. [...] Aber wie –, dreht sie sich in diesen Regeln *hin* und *her*? – Sie schafft immer neue und neue Regeln: baut immer neue Strassen des Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut.

2 Wie hängen in der Mathematik Beweis und Wahrheit zusammen?

Der mathematische Beweis zeigt, dass die Aussage, die er beweist, wahr sein muss. Jeder Versuch, eine Falschheit zu beweisen, ist daher zum Scheitern verurteilt. Beweisen lassen sich allein Wahrheiten. Führt der Beweisgang in eine offensichtliche Falschheit, insbesondere in eine Aussage der Form $\varphi \wedge \neg\varphi$, liegt damit kein Beweis für diese Aussage vor, sondern für die Negation der Annahme, von der das Beweisen ausging. Auch mit einer reductio ad absurdum kann nur Wahres bewiesen werden, wenn es gleich auf indirektem Weg geschieht. Bewiesene Aussagen können also unmöglich falsch sein. Hingegen ist es möglich zu beweisen, dass eine Aussage falsch ist, unter anderem über einen indirekten Beweis ihrer Negation. Die Aussage selbst ist dann nicht bewiesen, sondern widerlegt.

Dass ein bewiesener Satz nicht falsch sein kann, mag auf den ersten Blick als Begriffswahrheit der langweiligeren Art erscheinen. Dennoch fragt sich, welche begrifflichen Fäden sie zusammenhalten und ob vielleicht nicht doch ein Beweisbegriff

[30] Für Beispiele topik-spezifischer Schritte in Beweisen, vgl. Rav (1999, S. 21-27). Für weiterführende Betrachtungen über die Spannung zwischen Zwang und Freiheit, die das mathematische Beweisen beherrscht, vgl. Nickel (2010) und Nickel (2019).

[31] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I.165–166, S. 99.

denkbar wäre, durch den nicht ausgeschlossen wird, dass es für gewisse Falschheiten Beweise gibt.

Einen Weg zeichnet der Dialetheismus, demnach es wahre Aussagen gibt, deren Negation ebenfalls wahr ist.[32] Unter der Annahme, dass eine Aussage genau dann falsch ist, wenn ihre Negation wahr ist, wäre eine solche dialetheische Aussage sowohl wahr als auch falsch. Die Negation einer dialetheischen Aussage wäre ebenfalls sowohl wahr als auch falsch, wenn wie in der klassischen Aussagenlogik doppelte Negationen verschwinden. Für die intuitionistische Aussagenlogik gilt dies nicht, da dort das Schema $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ nicht tautologisch ist.[33]

Nehmen wir also an, ψ sei ein bewiesener Satz aus irgendeinem mathematischen Teilgebiet, mithin wahr nach unseren Bestimmungen. Nehmen wir ausserdem an, was der Dialetheismus erlaubt: dass $\neg\psi$ ebenfalls wahr ist. Dann liegt (unter der Annahme, dass die Falschheit eines Satzes mit der Wahrheit seiner Negation zusammenfällt) ein Beweis für einen Satz vor, der auch falsch ist. Wenn seine Negation, die ja wahr ist, nun ebenfalls bewiesen ist, dann liegt sogar ein Beweis für die Kontradiktion $\psi \wedge \neg\psi$ vor. Um zu verhindern, dass sich daraus die Beweisbarkeit aller möglichen Behauptungen ergibt, kann der Beweisbegriff an eine parakonsistente Logik geknüpft werden, sodass die Schlussweise des *ex falso quodlibet* nicht gilt. Und tatsächlich scheint dies ein gangbarer Weg, auf dem ein sinnvoller Beweisbegriff gebildet werden kann, nach dem es nicht ausgeschlossen ist, Falschheiten zu beweisen.[34]

---

[32]Für eine neuere Sammlung philosophischer Beiträge zum Dialetheismus, vgl. Priest, Beall et al. (2004).

[33]Nach den Gesetzen der klassischen Aussagenlogik gilt für beliebige Theorien Φ, dass eine Formel φ genau dann in Φ beweisbar ist ($\Phi \vdash \varphi$), wenn auch $\neg\neg\varphi$ in Φ beweisbar ist ($\Phi \vdash \neg\neg\varphi$). Nach den Gesetzen der intuitionistischen Logik dagegen gilt dieser Zusammenhang in die eine Richtung – wenn $\Phi \vdash \varphi$, dann $\Phi \vdash \neg\neg\varphi$ –, umgekehrt jedoch nicht. Unter der BHK-Interpretation (‚BHK' steht für Brouwer, Heyting, Kolmogorow) des intuitionistischen Systems wird dieser Unterschied wie folgt verständlich. Ich folge hier der Darstellung in Dalen (2004, S. 154-155): Angenommen, es gelte φ, d. h. es liege ein Beweis a für φ vor. Nehmen wir ausserdem hypothetisch an, dass ein Beweis b für $\neg\varphi$ vorliege. Dann können wir a und b so zusammensetzen, dass sich aus ihrer Zusammensetzung ein Widerspruch (nämlich $\varphi \wedge \neg\varphi$) ergibt. Mit Hilfe von a lässt sich also jeder Beweisversuch von $\neg\varphi$ in den „Beweis" eines Widerspruchs, in eine *reductio ad absurdum* verwandeln. Das heisst aber (gemäss BHK-Interpretation) nichts anderes, als dass die Negation von $\neg\varphi$ gilt, mithin ein Beweis für $\neg\neg\varphi$ vorliegt. Gehen wir umgekehrt von der Annahme aus, dass ein Beweis c für $\neg\neg\varphi$ vorliegt, gelangen wir nicht zur Folgerung, dass auch ein Beweis für φ vorliegt. Denn: Über den Beweis c wissen wir (gemäss BHK-Interpretation), dass sich mit ihm jeder Beweisversuch von $\neg\varphi$ in einen Widerspruch führen lässt. Wir wissen also, dass es keinen Beweis für $\neg\varphi$ geben kann. Da ein Beweis für $\neg\varphi$ eine Konstruktion wäre, die einen Beweis für φ in einen Widerspruch führte, können wir aus dem Vorliegen eines Beweises für $\neg\neg\varphi$ lediglich folgern, dass es keine Konstruktion geben kann, die einen Beweis für φ in einen Widerspruch führt. Damit aber liegt uns noch kein Beweis für φ vor. Kurzum: Wenn ein Beweis für φ vorliegt, dann auch einer für $\neg\neg\varphi$; wenn einer für $\neg\neg\varphi$, dann nicht zwingend auch für φ.

[34]Ein Standardwerk über parakonsistente Logik ist Priest, Routley et al. (1989), eines über in-

Obwohl die Beweisbarkeit falscher Sätze zugestanden wird, kann in dem eben skizzierten Fall die Wahrheit eines Satzes notwendige Bedingung seines Bewiesenseins bleiben. Denn selbst von der Kontradiktion $\psi \wedge \neg\psi$ würde man am ehesten annehmen, dass ihr sowohl Wahrheit als auch Falschheit zukommt, da ψ dialetheisch ist.[35] Anders stellt sich die Sachlage dar, wenn die Möglichkeit einer Aussage χ zugestanden wird, für die zwar ein Beweis vorliegt, die aber nicht wahr, sondern *nur* falsch ist (oder weder wahr noch falsch). In diesem zweiten Fall lässt sich die Verknüpfung von Wahrheit und Beweisbarkeit nicht aufrecht erhalten. Dass ein Satz wahr ist, wäre nicht mehr zuverlässig am Vorliegen eines Beweises erkennbar.

Durch unsere Bestimmungen, wonach nur Wahrheiten und keine Falschheiten bewiesen werden können, sind freilich beide Fälle ausgeschlossen, d. h. wir werden sie in dem, was folgt, nicht berücksichtigen. Im ersten Fall, der die Beweisbarkeit dialetheischer Aussagen vorsieht, geschieht dies lediglich der Einfachheit halber. Der zweite Fall dagegen wird deshalb ausgeschlossen, weil in ihm der enge begriffliche Zusammenhang zwischen mathematischer Wahrheit und Beweis aufgehoben ist. Wie das Beweisen da noch dem Sicherstellen dienen könnte, ist nicht zu sehen. Vielmehr fragt sich, ob in diesem Fall überhaupt festzustellen wäre, dass ein Satz wahr, eine Aussage falsch ist.

Als es zu Beginn dieses Abschnitts hiess, der Beweis zeige, dass der Satz, den er beweist, wahr sein muss, blieb offen, worin die Wahrheit des mathematischen Satzes besteht. Dies geschah nicht nur deshalb, weil man sich beim Versuch, diese Aporie zu beantworten, besonders leicht in Widersprüche verstrickt, sondern auch und vor allem, weil sich viele durch sie sogleich dazu veranlasst sehen, Annahmen über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände zu treffen. Die folgenden Betrachtungen bleiben jedoch auf das Beweisen ausgerichtet, ohne einen bestimmten metaphysischen Standpunkt einzunehmen oder *a priori* auszuschliessen.

Wer eine realistische Auffassung – einen mathematischen Platonismus – vertritt, wäre geneigt, die sicherstellende Funktion des Beweisens dahingehend zu beschreiben, dass an dem zu beweisenden Satz eine Eigenschaft nachgewiesen wird, die dieser losgelöst von jedem Beweis und allen Bedingungen der Möglichkeit menschlicher Erkenntnis ein für allemal besitzt: allein aufgrund seiner Übereinstimmung mit einer idealen Wirklichkeit mathematischer Gegenstände und Strukturen, die uns in Teilen, aber womöglich nicht vollständig zugänglich ist. Das entspricht zwar

konsistente Mathematik Mortensen (1995). Für eine Diskussion des Gebrauchs parakonsistenter Logiken im Umgang mit Antinomien, insbesondere mit der Antinomie des Lügners, vgl. Brendel (1992, Kap. 11).

[35] Vgl. indes Sainsbury (2004).

nicht der Beschreibung, die weiter unten (im vierten Abschnitt) von der sicherstellenden Funktion des Beweisens gegeben wird, wäre aber mit ihr nicht unverträglich. Und wenn wir für den Moment von der schwierigen Frage der Wahrheit von Axiomen absehen (auf die wir im nächsten Abschnitt kurz zurückkommen werden), gilt selbst für naive Platonisten, dass, wer die Wahrheit einer umstrittenen Aussage zeigen möchte, einen Beweis zu geben hat, und, wer die Wahrheit einer angeblich bewiesenen Aussage bezweifelt, bestreiten muss, dass ein Beweis vorliegt. Wo sie nicht offensichtlich (evident) ist, erkennen wir die Wahrheit mathematischer Sätze an ihrem Beweis; und wo kein Beweis vorliegt, darf ihre Wahrheit nicht behauptet, höchstens vermutet werden, ausser sie ist offensichtlich. (Um die Wahrheit von Sätzen zu erkennen, die keines Beweises bedürfen, weil ihre Wahrheit offensichtlich ist, reicht es mitunter die involvierten Definitionen zu verstehen oder eine Technik, etwa eine Rechenregel, zu erlernen, sodass die Korrektheit des Satzes überprüft werden kann.)

Wenn wir demnach von den Axiomen und den offensichtlichen Wahrheiten absehen, ist der Beweis das untrügliche Kennzeichen mathematischer Wahrheit. Müsste also die Antwort auf die offengelassene Aporie nicht einfach lauten, dass eine Aussage mathematischen Inhalts genau dann wahr ist, wenn ein Beweis für sie tatsächlich vorliegt? So jedenfalls sehen es die Intuitionisten. Dummett begründet dies in seiner philosophischen Apologie des Intuitionismus unter anderem mit bedeutungstheoretischen Überlegungen:[36]

> What we actually learn to do, when we learn some part of the language of mathematics, is to recognise, for each statement, what counts as

[36] Dummett (1973, S. 225). Dummetts Argument ist weitaus länger und komplexer, als dass es hier angemessen wiedergegeben werden könnte. Zu seinen Prämissen gehört unter anderem das Prinzip, wonach die Bedeutung einer Aussage durch ihren Gebrauch vollständig bestimmt sei, dass es also keinen versteckten Bedeutungsgehalt geben kann, der im Gebrauch nicht manifestierbar, mithin nicht mitteilbar wäre. Vgl. dazu Dummett (1973, S. 223-225).
In demselben Aufsatz skizziert Dummett ausserdem eine zweite Argumentationslinie für den Intuitionismus in der Mathematik (ab S. 226). Diese fällt gegenüber den bedeutungstheoretischen Betrachtungen, die sehr allgemein gehalten sind, insofern spezifischer aus, als sie den genuin mathematischen Charakter mathematischer Aussagen berücksichtigt. Ausgangspunkt dieser Argumentation ist die anti-realistische These, wonach sich mathematische Aussagen nicht auf eine objektive, unabhängig von uns existierende Wirklichkeit beziehen, sondern auf „creations of the human mind“, auf „objects of thought“ (S. 227-228). Letztlich aber führe diese Argumentation, wie Dummett zu zeigen versucht, in einen resoluten und, wie ich meine, nicht gerade ansprechenden Skeptizismus: „it must deny that there exists any proposition which is now true about what the result of a computation which has not yet been performed would be if it were to be performed“ (S. 247). Nicht nur deshalb erscheint mir die bedeutungstheoretische Argumentationslinie vielversprechender. Zu Recht rekonstruiert sie den *eigentlichen* Streitpunkt zwischen Platonismus und Intuitionismus als einen semantischen, betreffend die Wahrheitsbedingungen mathematischer Aussagen. So gesehen, erweist sich der metaphysische Dissens lediglich als ein Symptom der semantischen Differenz. Vgl. dazu Dummett (1963, S. 153-154) und Dummett (1978, S. xxvi-xxix).

> establishing that statement as true or as false. In the case of very simple statements, we learn some computation procedure which decides their truth or falsity: for more complex statements, we learn to recognise what is to be counted as a proof or a disproof of them. That is the practice of which we acquire a mastery: and it is in the mastery of that practice that our grasp of the meanings of the statements must consist. We must, therefore, replace the notion of truth, as the central notion of the theory of meaning for mathematical statements, by the notion of *proof*: a grasp of the meaning of a statement consists in a capacity to recognise a proof of it when one is presented to us [...].

Eine mathematische Aussage *verstehen*, ihre Bedeutung erfassen, heisst, einen Beweis oder eine Widerlegung für sie erkennen können. Eine Wahrheit, für die es keinen nachvollziehbaren Beweis geben kann, wären wir ausserstande zu verstehen, geschweige denn als wahr zu erkennen. Sie hätte für uns keine Bedeutung, wäre kein Stück Mathematik. Und obwohl wir durchaus in der Lage sind, Aussagen zu verstehen, die weder bewiesen noch widerlegt wurden, ist es doch erst und allein das Vorliegen eines Beweises oder einer Widerlegung, das ein Urteil über Wahrheit oder Falschheit erlaubt. Die Wahrheit einer Aussage hängt an nichts anderem als an ihrem Beweis.

Von diesem intuitionistischen Standpunkt aus erweist sich unsere anfängliche Bestimmung, wonach der mathematische Beweis die Wahrheit eines Satzes zeige, freilich als Tautologie. Wenn die Wahrheit einer Aussage mathematischen Inhalts darin besteht, dass ein Beweis für sie vorliegt, dann zeigt demzufolge der Beweis eines Satzes, dass ein Beweis für ihn vorliegt – gewiss. Tautologizität und Zirkularität sind jedoch nicht immer das Symptom schlechter Definitionen. Hier drücken sie die Ersetzung des Wahrheitsbegriffs auf dem Gebiet der Mathematik durch den des Beweises aus, sodass die zu tragende Last vollumfänglich auf letzteren abgewälzt wird. Die philosophisch wichtige Frage ist dann, was Beweise – ihre Korrektheit und Vollständigkeit – ausmacht, was sie von gescheiterten Beweisversuchen unterscheidet.

Gegen die intuitionistische Auffassung mathematischer Wahrheit spricht indes, dass sich ihr zufolge von bekanntlich unbewiesenen Aussagen nicht sinnvoll sagen lässt, man halte sie für wahr oder man vermute, sie seien wahr. Wer Wahrheit als das Vorliegen eines Beweises auffasst, ist gezwungen, Vermutungen, von denen man weiss, dass sie noch nie bewiesen wurden, für *nicht* wahr zu befinden. Überhaupt scheint es aus Sicht des Intuitionismus kaum sinnvoll, in der Mathematik Vermutungen anzustellen, d. h. unbewiesene Aussagen für wahr zu halten oder zu sagen, sie seien wahrscheinlich wahr – ausser man wollte damit die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringen, dass irgendwo ein Beweis für sie vorliegt, den man nicht kennt. Gerade aber für die Praxis des Beweisens sind Vermutungen über die Wahrheit und Falschheit noch unbewiesener Aussagen wichtig, ja vielmehr essenziell.[37] Sie geben dem Beweisbestreben eine Richtung vor und womöglich ein erreichbares Ziel. Als zum Beispiel Joseph Bertrand 1845 die Wahrheit der nach ihm benannten Vermutung postulierte, wonach zwischen jeder natürlichen Zahl und ihrem Zweifachen mindestens eine Primzahl liegt, tat er dies in der Annahme, dass ein Beweis für sie noch nie gelungen war, sich dies aber bald ändern könnte, zumal vieles, wenn auch noch nichts Zwingendes, für ihre Wahrheit sprach. Dadurch stellte er sie als ein lohnenswertes und wahrscheinlich erreichbares Beweisziel heraus. Historisch gesehen veranlasste dies tatsächlich ihren Beweis durch Pafnuti Tschebyschow und zeitigte darüber hinaus eine Reihe damit verwandter Ergebnisse.[38]

Dem Intuitionismus Zugeneigte könnten nun entgegenhalten, dass sich Vermutungen nicht auf die aktuale Wahrheit von Aussagen beziehen, sondern auf ihren zukünftigen Wahrheitswert. Wer eine Vermutung aufstellt, würde demnach nicht vermuten, dass eine bestimmte Aussage jetzt schon wahr ist, sondern ihr zusprechen, dass sie irgendwann wahr werden wird, sich mithin früher oder später ein Beweis finden lässt. Da Vermutungen aber nichts über den Zeitpunkt aussagen, an dem spätestens ein Beweis zu erwarten ist, müsste die betrachtete Zeitspanne grenzenlos sein, damit kein zufällig noch unverwirklichter Beweis unberücksichtigt bliebe. Bei der Eigenschaft, auf die sich Vermutungen gemäss dieser Auffassung beziehen, muss es sich folglich um eine modalisierte Variante dessen handeln, woran das intuitionistische Wahrheitskriterium geknüpft war. Vermutungen würden sich also nicht auf das zeitgebundene Vorliegen eines Beweises beziehen, sondern auf die Möglichkeit, eine Aussage zu beweisen: auf ihre Beweisbarkeit.[39]

Es fragt sich dann allerdings, ob diese modalisierte Eigenschaft dem Begriff der mathematischen Wahrheit ohnehin nicht besser entspricht als das ursprüngliche Wahrheitskriterium – d. i. das Vorliegen eines Beweises –, das dem Wirken historischer Kontingenz zu sehr unterworfen scheint. Müssten also Aussagen mathematischen Inhalts nicht vielmehr genau dann als wahr gelten, wenn sie bewiesen werden *können*, beweis*bar* sind? Nach diesem neuen Kriterium stellt es jedenfalls keinen

[37] Klassische Texte, in denen die Bedeutung des Vermutens für die mathematische Praxis behandelt wird, sind Pólya (1954/1968) und Lakatos (1976). Eine kurze, aber aufschlussreiche Erörterung findet sich in Tappenden (2008, S. 289-293).

[38] Vgl. dazu Narkiewicz (2000, S. 103-104, 115–118).

[39] Es ist bemerkenswert, dass Timothy Gowers in seiner kürzlich erschienenen Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsurteile, die mathematischen Vermutungen zugrunde liegen, u. a. zum Schluss kommt, dass sich ein solches Urteil nicht direkt auf die Wahrheit der betreffenden Aussage bezieht, sondern vielmehr die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringt, dass für sie ein Beweis existiert, vgl. Gowers (2023, S. 109).

Widerspruch mehr dar, Aussagen für wahr zu halten, von denen man weiss, dass sie noch unbewiesen sind. Inkonsistent wäre es lediglich, an ihrer Wahrheit und zugleich an ihrer Unbeweisbarkeit festzuhalten. Dass mathematische Wahrheiten beweisbar sein müssen, wäre Ausdruck einer begrifflichen Regel, was jedoch angemessen erscheint. Denn nichts spricht dafür, durch die Wahl unserer Begriffe die Möglichkeit offenzulassen, dass uns manche mathematische Wahrheit für immer verborgen bleiben muss – ausser ein platonistisches Vorurteil über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände würde uns dazu zwingen.[40]

Manche behaupten, darunter auch Dummett, dass die Festlegung auf die Beweisbarkeit einer Aussage als das Kriterium für ihre Wahrheit letztlich immer in einem Platonismus mündet.[41] Das sehe ich anders, gestehe aber zu, dass es nicht leicht fällt, eine passende Modalität zu bestimmen. Obwohl hier der Raum für eine sorgfältige Erörterung dieses Problems nicht ausreicht, möchte ich, bevor wir zum nächsten Abschnitt übergehen, doch Hinweise geben.

Um nicht sogleich in eine Art Platonismus zu fallen, darf die Beweisbarkeit einer Aussage natürlich nicht mit der Existenz eines entsprechenden Beweises – im klassischen, extensionalen Sinn von ‚existieren' – gleichgestellt werden. Denn dadurch würden die Beweise selbst zu idealen Gegenständen, die nicht alle für uns zugänglich sein müssten. Andererseits kann, wie sich bereits zeigte, die Beweisbarkeit einer Aussage nicht darin bestehen, dass ein Beweis für sie bereits vorliegt oder spätestens zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft nachgereicht wird. Die Schwierigkeit liegt also darin, einen Mittelweg zwischen den Extremen zu finden.[42]

Sich aus begrifflichen Gründen dazu gezwungen sehen, einer Vermutung Wahrheit abzusprechen, nur um sie gleichsam im nächsten Augenblick, da ein Beweis

[40] Dass platonistische Positionen typischerweise die Möglichkeit von für uns unerkennbaren, mithin unbeweisbaren Wahrheiten offenlassen, ist ein Einwand, den Dummett vorbringt, vgl. Dummett (1973, S. 224-225). Was für diese Möglichkeit sorgt, ist gleichwohl nicht unmittelbar die metaphysische Auffassung über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände, sondern ein Realismus in Bezug auf Wahrheitswerte, d. i. die These, wonach mathematische Aussagen eine Bedeutung und einen objektiven Wahrheitswert besitzen, wenn sie nur wohlgeformt sind – unabhängig davon, ob wir diesen Wahrheitswert jemals erkennen können.

[41] Vgl. Dummett (1963, S. 164): „The identification of mathematical truth with intuitive provability is thus not a possible constructivist standpoint, if ‚intuitive provability' is understood as meaning the *existence* of an intuitively correct proof in a sense weaker than that of our being in possession of such a proof". In späteren Schriften scheint Dummett jedoch die Möglichkeit eines Mittelwegs einzuräumen, vgl. Dummett (2000, S. 12).

[42] Gegen die Möglichkeit eines solchen Mittelwegs könnte man eine Variante von Fitchs *Paradox of Knowability* ins Feld führen und zu zeigen versuchen, dass aus der Annahme, wonach jede wahre Aussage beweisbar ist (in Symbolen: $\forall\varphi(\varphi \rightarrow \diamond B\varphi)$), modallogisch folge, dass jede wahre Aussage bereits bewiesen wurde ($\forall\varphi(\varphi \rightarrow B\varphi)$)). Dummett und andere haben jedoch gezeigt, wie sich die paradoxe Konklusion intuitionistisch vermeiden lässt. Für eine Diskussion verschiedener Lösungsvorschläge, vgl. Murzi (2010).

für sie vorliegt, für wahr zu halten, mag verständlicherweise Unbehagen auslösen. Als Bertrand, um unser Beispiel wieder aufzunehmen, seine Vermutung äusserte, hatte sie sich in derart vielen Einzelfällen bereits bewahrheitet, dass alles für ihre Beweisbarkeit sprach. Wäre es nicht unangemessen, ihm vorzuwerfen, beim Postulieren ihrer Wahrheit eine Widersinnigkeit, einen begrifflichen Fehler begangen zu haben? Weitaus weniger problematisch ist es hingegen sich darauf festzulegen, dass eine mathematische Aussage zu einer Zeit, als die Theorie, der sie angehört, nicht einmal angedacht war, keine Bedeutung und damit auch keinen Wahrheitswert besass. Zu sagen, dass, bevor die Menschen zählen konnten, jene Aussage, die Bertrand viel später für wahr hielt, weder wahr noch falsch, sondern ganz und gar bedeutungslos war, erscheint der Sachlage durchaus angemessen.

Die Frage ist freilich, was es braucht – was für eine praktische und begriffliche Umgebung bereitstehen muss –, damit eine Aussage wie die von Bertrand über die Verteilung der Primzahlen Bedeutung erlangt, und ob damit sogleich auch ihr Wahrheitswert bestimmt ist. Hier scharfe Grenzen zu erwarten, wäre illusorisch und solche zu ziehen, kaum hilfreich. Dennoch könnte es sich, wie mir scheint, als lohnenswerte Aufgabe für die Philosophie der Mathematik erweisen, diese Fragen an einzelnen und zunächst einfacheren Beispielen aus der Geschichte zu untersuchen. Auf dem Gebiet der Arithmetik etwa wäre zu fragen, was die Voraussetzungen dafür sind, dass Vermutungen über die Wahrheit und Falschheit von Gleichungen, die das Ergebnis einfacher Additionen zwischen natürlichen Zahlen ausdrücken ($a + b = c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$), ernsthaft aufgestellt werden können. Um den Wahrheitswert von solchen Gleichungen festzustellen, scheinen auf den ersten Blick das Beherrschen einer adäquaten Notation und das Addierenkönnen auszureichen. Einen elaborierteren Begriff von den natürlichen Zahlen, der auch ihre Unendlichkeit enthielte, braucht es nicht.

Mit zunehmenden arithmetischen Fähigkeiten und entsprechendem Ausbau einer operationalen Notation lassen sich jedoch sehr rasch Prädikate bilden und Aussagen über ihre Extension formulieren, bei denen es zweifelhaft wird, dass sie ohne eine enorme und nicht vorauszusehende Weiterentwicklung ihrer begrifflichen Umgebung einen bestimmten Wahrheitswert besitzen. Das Prädikat $a^n + b^n = c^n$ zum Beispiel ist auf so einfache Weise aus elementaren Operationen zusammengestellt, dass für ein initiales Verständnis der Aussage, es treffe für beliebige natürliche Zahlen a, b, c ungleich 0 auf keine natürliche Zahl $n > 2$ zu, Kenntnisse aus der Schulzeit hinreichen. Aber wenngleich ein gewisses Verständnis für die Aussage – d. i. für den erst 1994 durch Andrew Wiles bewiesenen Grossen Fermatschen Satz – selbst Schulkindern zugestanden werden kann, überwiegt doch bei Weitem die kaum überbrückbare Distanz, welche die allermeisten unter uns von einem Nachvollzug eines Beweises, geschweige denn von dem Entwurf eines eigenen trennt.

Entsprechend wäre es zu einer Zeit, als das gesammelte arithmetische Wissen das heutige Schulwissen kaum überstieg, nicht sinnvoll, sondern lediglich ein glücklicher Treffer gewesen, die Wahrheit der Aussage zu vermuten. Die begriffliche Umgebung, um einen ernsthaften Beweisversuch zu wagen, der auch einen Fortschritt bedeutet und nicht sogleich in Ratlosigkeit geendet hätte, war schlichtweg nicht vorhanden. Ins Blaue hinein Vermutungen anzustellen, nur weil man über die syntaktischen Fähigkeiten dazu verfügt, entspricht nicht derjenigen Art des Vermutens, die sich in der Mathematik bewährt hat.

3 Wozu dienen Beweise in der Mathematik?

Ob eine Aussage nun bewiesen oder widerlegt werden soll – Beweise dienen dem Überzeugen. Indem der Beweis die notwendige Wahrheit einer Aussage zeigt, erzwingt er ihre Anerkennung als ein Satz der Mathematik und die Ablehnung ihrer Negation. Wer sich oder andere davon überzeugen möchte, eine Aussage als mathematische Wahrheit anzuerkennen oder sie abzulehnen, gibt typischerweise einen entsprechenden Beweis.

Der mathematische Beweis zeitigt auf eine ihm eigene Weise das Fürwahrhalten des Satzes, den er beweist. Anders als Befehle, Expertisen oder Offenbarungen kommt er ohne Autoritätsbezug aus. Auch muss man nicht, um das, was der Beweis zeigt, für wahr halten zu dürfen, darauf vertrauen, dass im Hintergrund fehlerfrei gearbeitet wurde, wie bei einem Rechner, der Zwischenschritte ausblendet und nur Ergebnisse anzeigt.[43] Ein Beweis muss in sich selbst all das offen und nachvollziehbar enthalten, was erforderlich ist, um in Subjekten mit hinreichendem Vorwissen und Können die gewünschte Wirkung zu erzielen. Wer ihn entworfen, wer ihn geprüft und für richtig befunden hat – all das ist für sein Wirken bloss zweitrangig. Der Beweis hat gewissermassen für sich selbst zu sorgen.

Selbstverständlich vermag kein Beweis losgelöst von allem andern für sich selbst zu sorgen. Nur innerhalb einer etablierten Praxis des Beweisens kann er seine Wirkung entfalten. Charakteristisch für die Wirkungsweise des mathematischen Beweises im Rahmen dieser Praxis ist, dass er überzeugt. Das Beweisbild ist, wie man sagen könnte, „ein Instrument des Überzeugens“.[44] Es soll nicht einfach dazu

[43] Bei Wittgenstein findet sich eine ähnliche Abgrenzung des Beweisens vom Rechnen. Das Bild des Beweisens ändere sich gänzlich, sobald es als blosses Rechnen, d. h. als schrittweises Transformieren von Zeichenfolgen, aufgefasst wird: „Die Zwischenstufen werden ein uninteressantes Nebenprodukt. (Wie im Innern des Automaten ein Geräusch, ehe er uns die Ware zuwirft.)“ *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII.8, S. 365.

[44] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII.72, S. 435.

bewegen, Sätze für wahr zu halten, sondern ihre notwendige Wahrheit überzeugend darlegen. Dafür müssen die Schritte, die das Bild zusammensetzen, einzeln – je für sich – nachvollziehbar sein. (Ausserdem müssen sie alle zulässig sein, d. h. sie dürfen keine unerlaubten Sprünge enthalten, keine logischen oder anderen etablierten Regeln verletzen und, wenn in ihnen neuartige Regeln zur Anwendung kommen, bedürfen diese der Rechtfertigung: siehe dazu den ersten Abschnitt.) Damit der Beweis zu überzeugen vermag, reicht dies jedoch nicht aus. Das Beweisbild muss *insgesamt* als stimmig wahrgenommen werden können: Es muss in seiner Gesamtheit übersehbar sein. Und dafür müssen nicht nur auf jeder Strukturebene die relevanten Zusammenhänge zwischen den Bestandteilen nachvollziehbar, es muss auch das Zusammenspiel der verschiedenen Ebenen erkennbar sein. Um nur einen simplen Fall anzuführen: Wenn die Oberflächenstruktur des Beweises einem *modus ponens*, also einem Schluss der Form $\varphi \to \psi, \varphi \models \psi$ entspricht, dann kann der Beweis nur überzeugen, wenn diese Form erkannt wird. Es genügt nicht, die Schritte, die zu $\varphi \to \psi$, und die Schritte, die zu φ führen, nachvollzogen zu haben; um ψ zu erreichen, bedarf es des Aufstiegs auf die nächsthöhere Ebene, auf der die Identität von φ mit dem Antezedens von $\varphi \to \psi$ ersichtlich wird. Ohne diese Feststellung wäre der *modus ponens* von ungültigen Schlussweisen, insbesondere von $\varphi \to \psi, \psi \models \varphi$, nicht zu unterscheiden.[45]

Selbst Frege, der in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* auf die „Lückenlosigkeit der Schlussketten“ eher als auf ihre Übersichtlichkeit bedacht war, stellte seinen begriffsschriftlichen Ableitungen eine Skizze des Beweisgangs voraus.[46] Diese Skizzen sollten das Verständnis der Beweise, ihren Nachvollzug, *erleichtern*, indem sie der Leserschaft helfen, die zum Teil seitenlangen und ohne Worte auskommenden Schlussketten zu übersehen. Daraus folgt indessen nicht, dass die begriffsschriftlichen Beweise selbst unübersehbar und unverständlich wären, im Gegenteil, zumal sie sich mehr oder weniger übersichtlich darstellen lassen. Unübersehbar wären „Beweise“, die überhaupt nicht übersichtlich dargestellt und auch nicht in eine

[45] Für die detaillierte Untersuchung eines echten und nicht trivialen Beispiels – Erdős’ Beweis des Satzes von Bertrand-Tschebyschow – verweise ich auf Robinson (2000, S. 283-291). Obgleich Robinson keine philosophischen, sondern eher psychologische Fragen zu beantworten sucht, gelingt es ihm gut, die Lemmata, aus denen Erdős’ Beweis zusammengesetzt ist, zu erläutern (u. a. mit Hilfe der Tabelle auf S. 285, die ein anschauliches Bild abgibt). Auch das Zusammenspiel der verschiedenen Strukturebenen, das dem Beweis Übersichtlichkeit und dadurch erklärende Kraft verleiht, wird aus seiner Beschreibung deutlich. (Auf den S. 285-289 wird das Zusammenspiel der Hauptlemmata, also sozusagen die Oberflächenstruktur beschrieben; auf den S. 289-291 wird dann die den Lemmata zugrundeliegende Idee skizziert.)

[46] „Die Beweise sind allein in den mit ‚Aufbau‘ überschriebenen Paragraphen enthalten, während die mit ‚Zerlegung‘ überschriebenen das Verständniss erleichtern sollen, indem sie vorläufig den Gang des Beweises in groben Umrissen vorzeichnen“ Frege (1893, S. V). Weiter hinten im Werk heisst es dann, diese Zerlegungen dienten „nur der Bequemlichkeit des Lesers [...]; sie könnten fehlen, ohne dem Beweise etwas von seiner Kraft zu nehmen“ Frege (1893, S. 70).

solche Darstellung übertragen, mithin von uns nicht nachvollzogen, nicht verstanden werden *könnten.*

Durch einen Beweis überzeugt werden kann freilich nur, wer ihn versteht, und als Beweis verstehen können wir ein Bild nur, wenn wir es übersehen. Ein Bild, das wir nicht übersehen, kann uns nicht als Instrument des Überzeugens dienen. Wer aber einen Beweis verstanden hat, *sollte* sich, sofern ein Beweis wirklich vorliegt, von der notwendigen Wahrheit des bewiesenen Satzes überzeugen lassen haben. Wittgenstein meint nun gerade darin das Wesentliche in der Erfordernis der Übersichtlichkeit zu erkennen:[47]

> Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozess, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, dass diese Zahl herauskommt, vermerken – welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? ich weiss nicht: ‚was herauskommen *soll*'.
> „Der Beweis muss übersehbar sein" heisst eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich im Beweis ergibt, nehmen wir nicht deshalb an, weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, dass es sich so ergeben *muss.*

Mathematische Beweise liefern keine Indizien oder gute Belege für die Wahrheit eines Satzes, verleihen ihr keine erhöhte Wahrscheinlichkeit. Auf diejenigen, die mit der Praxis des Beweisens vertraut sind und die nötigen Kenntnisse besitzen, üben Beweise einmal nachvollzogen einen Zwang aus. Nicht aber wie Befehle: Der Beweis gebietet nicht, den Satz, den er beweist, als notwendige Wahrheit anzuerkennen. Er zwingt insofern dazu, als er einen zwingenden Grund dafür gibt.

Mit dem Beweis eines Satzes lässt sich demnach nicht nur die Frage, ob die Aussage, die er beweist, wahr ist, beantworten, sondern auch eine Antwort auf die Frage geben, *weshalb* sie wahr sein muss (und damit auf die Frage, weshalb wir sie als notwendige Wahrheit anerkennen sollten). Von der sicherstellenden kann also eine *begründende* Funktion des Beweisens unterschieden werden, wenngleich beide eng miteinander verflochten sind. Frege schreibt dazu in seinen *Grundlagen der Arithmetik*:[48]

> Der Beweis hat eben nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes über jeden Zweifel zu erheben, sondern auch den, eine Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu gewähren. Nachdem

[47] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I.154, S. 95, III.39, S. 170.
[48] Frege (1884, S. 2).

> man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze. Je weiter man diese Untersuchungen fortsetzt, auf desto weniger Urwahrheiten führt man Alles zurück [...].

Diese Einsicht, die der Beweis gewährt, vermag ihre Überzeugungskraft in uns nur soweit zu entfalten, wie wir von den Wahrheiten, die der Beweis *nicht* beweist, sondern als gegeben annimmt, überzeugt sind. Und so mag es den Anschein haben, als müsse die Wahrheit der ganzen Mathematik letztlich auf einigen Urwahrheiten beruhen, „die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind“.[49]

Freges Unterfangen, die letzten Urwahrheiten der Arithmetik zu finden, war seinem „Wurzeltrieb“ geschuldet: dem Drang zu wissen, „worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens“[50] ihrer Sätze beruht. Dieser tiefste Grund, auf dem sich alles andere stützt, war indes mit arithmetischen Sätzen, selbst mit denen elementarster Art, keineswegs erreicht. Für die logizistischen Augen erwiesen sich sogar einfache Gleichungen wie $5 + 7 = 12$ als eines Beweises bedürftig. Jene Urwahrheiten, zu denen Frege und nach ihm Russell und Whitehead vorgestossen waren, konnten die Erwartungen jedoch nicht erfüllen: entweder, weil sich aus ihnen (wie aus Freges Grundgesetzen) ein Widerspruch ableiten liess, oder, weil ihnen (wie dem Axiom der Reduzierbarkeit bei Russell und Whitehead) das typische Merkmal der rein logischen Wahrheiten fehlte und für ihre Anerkennung als Axiome nichts anderes sprach, als dass aus ihnen ebenjene elementaren Wahrheiten, von denen man auch ohne logischen Unterbau längstens überzeugt war, bewiesen werden konnten.[51]

In Ermangelung eines Systems selbsteinleuchtender Grundsätze, aus dem sich erwiesenermassen alles Erwünschte, aber – verbürgt durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis – nicht alles Erdenkliche ableiten lässt, müssen wir lernen, mit der

[49] Frege (1884, S. 4).

[50] Frege (1893, S. XIII) und Frege (1884, S. 3).

[51] In Mancosu (2001, S. 104-105) wird Russell in der Frage, welche Kriterien bei der Wahl der Axiome zur Anwendung kommen dürfen, eine Form von „h-inductivism“ zugeschrieben: „the acceptance of axioms for a mathematical discipline might be motivated not by criteria of evidence and certainty but rather, like hypotheses in physics, by their success in deriving and systematizing a certain number of familiar consequences“ (S. 103). Hätte Russell aber diese Position nach der Fertigstellung der *Principia Mathematica* weiterhin vertreten, hätte er Wittgensteins Kritik am Axiom der Reduzierbarkeit entkräften können, zumal das Axiom durchaus erfolgreich Russells verzweigtes Typengebäude aufrecht erhält. In seiner Einleitung zur zweiten Ausgabe der *Principia* hält Russell jedoch fest: „One point in regard to which improvement is obviously desirable is the axiom of reducibility [...]. This axiom has purely pragmatic justification: it leads to the desired results, and to no others. But clearly it is not the sort of axiom with which we can rest content“ Whitehead und Russell (1925, S. xiv). Vgl. dazu Linsky (2011, S. 128-134).

Möglichkeit von Widersprüchen zu leben (wie in der inkonsistenten Mathematik, siehe Anm. 34), oder aber bestreiten, dass eine Theorie wie die Arithmetik mit ihren elementaren, ja nachgerade trivialen Wahrheiten überhaupt einer solchen Grundlegung bedarf.[52] Die zweite Option wählend könnte man sagen, einfache Gleichungen seien zwar auf gewisse Axiome rückführbar und insofern eines Beweises fähig, deswegen aber noch lange nicht eines solchen bedürftig. Wer aufrichtige Zweifel an einer als trivial geltenden Wahrheit hegt, erlerne zuerst die Technik, die dem Satz zugrunde liegt (zum Beispiel das Einmaleins bei Gleichungen wie ‚$5 + 7 = 12$'), oder studiere noch einmal die relevanten Definitionen (man denke hier an Sätze wie ‚Der grösste gemeinsame Teiler zweier Primzahlen ist die 1'). Sich auf solche Weise der Wahrheit einer Aussage zu vergewissern, ist gegenüber dem Beweisen nicht minderwertig, im Gegenteil, setzen doch Beweise das Beherrschen zahlreicher Techniken und die Kenntnis gängiger Definitionen und Lemmata voraus.

Indessen bleibt die begründende Funktion des Beweisens auch bestehen, wenn die Forderung nach einer axiomatischen Grundlegung der Mathematik fallengelassen wird. Einen Satz begründen, heisst dann nicht, ihn auf die ihm zugrundeliegenden Urwahrheiten zurückführen, sondern seinen Zusammenhang mit anderen, bereits sichergestellten Sätzen zeigen.[53] Offenbar zeigen verschiedene Beweise desselben Satzes verschiedene Zusammenhänge auf, sodass ein Satz, der auf unterschiedlichen Beweiswegen erreichbar ist, besser beleuchtet, verständlicher erscheint. Es liegt nun nahe anzunehmen, dass einem solchen Verständnisgewinn nachgestrebt wird, wenn bereits bewiesene Sätze stets aufs Neue bewiesen werden, bis letztlich ihr trivialer Wahrheitskern offenliegt. Dabei handelt es sich freilich um keinen Wurzeltrieb hin zu den Urwahrheiten, wie Frege ihn sich für die Mathematik gewünscht hätte, sondern um den Drang, Sichergestelltes in offensichtliche, von allem Rätselhaften geklärte und entsprechend vertraute Gewissheit zu verwandeln.

In der zeitgenössischen Literatur wird diese zweite Funktion des Beweisens, die vorhin als begründende charakterisiert wurde, oft unter dem Begriff der *mathematischen Erklärung* abgehandelt. Robinson zum Beispiel schreibt: „For the most part (although sometimes a proof may establish its result without affording an explanation why it holds) a proof does indeed seem to have two different roles: to be a proof-as-guarantee and to be a proof-as-explanation".[54] Da der Beweis

[52] Für eine aktuelle Besprechung pluralistischer Ansätze (Putnam, Wittgenstein) sowie grundlagenkritischer Positionen (Rav, Lakatos), vgl. Wagner (2019).

[53] Dieser Sichtweise entspricht am ehesten eine kohärentistische Wahrheitstheorie. Wie mir scheint, könnte sich eine solche Theorie nicht nur mit dem weiter oben (im zweiten Abschnitt) angedeuteten Wahrheitskriterium vertragen, sondern auch mit schwächeren Formen des (Neo-)Logizismus. Für Letzteres, vgl. Tennant (2017).

[54] Robinson (2000, S. 279).

eines Satzes auch eine mögliche Antwort auf die Frage gibt, weshalb er wahr sein muss, ist es nicht unzutreffend, von einer *erklärenden* Funktion des Beweisens zu sprechen. Gerade wenn die Frage nach den Grundlagen der Mathematik nicht im Vordergrund steht, liegt es nahe, eher als ein Erläutern oder Erklären zu charakterisieren, was Frege und anderen als ein Begründen erschien. Allerdings muss darauf geachtet werden, nicht Unterschiedliches zu vermengen. Wie es übersichtlichere und weniger übersichtliche, aber keine unübersehbaren Beweise gibt, so mag es Beweise von grösserer und solche von geringerer Erklärungskraft geben, aber keinen Beweis, der die Wahrheit des Satzes, den er beweist, in keiner Weise begründete, sondern gleichsam nur sagte: „Dieser Satz ist wahr, glaube mir!“ Wenn Robinson indes zugesteht, dass mancher Beweis seinen Satz als mathematische Wahrheit sicherstellt, ohne jedoch zu erklären, weshalb er wahr sei, dann hat er eine (steigerbare) *Eigenschaft* im Sinn, die gewisse Beweise besitzen, andere hingegen nicht – und nicht eine *Funktion*, die jeder Beweis *qua* Beweis erfüllt.[55]

Unbestreitbar scheint mir jedenfalls die Feststellung, dass durch Beweise nicht nur neue Wahrheiten erschlossen werden, sondern auch das Verständnis dieser Wahrheiten eine Erweiterung, mitunter eine Vertiefung erfährt. Eine Behauptung, deren Beweis wir nachvollziehen konnten, verstehen wir insofern besser, als wir einen Weg kennen, der sie mit anderen Wahrheiten unauflöslich verknüpft und auf dem wir jederzeit zwischen ihnen hin und her wandeln können. Bei einer noch unbewiesenen Aussage dagegen ist nicht ohne Weiteres auszuschliessen, dass dereinst ein Weg von ihr aus in den Widerspruch führen, sie sich mithin als notwendige Falschheit erweisen wird. Gleichwohl wäre es falsch zu sagen, dass erst der Beweis einer Aussage uns erlaubt, sie zu verstehen. Denn wir verstehen gewiss auch widerlegte Aussagen. Und um überhaupt etwas beweisen zu können, müssen wir Unbewiesenes verstehen, zumal das Verstehen einer mathematischen Aussage – das

[55] Tatsächlich ist die Unterscheidung von Beweisen, die erklären, und solchen, die nicht erklären, ein wiederkehrender Topos in der Geschichte der Mathematik, wenngleich nur wenig Übereinstimmung darüber herrscht, wie die Unterscheidung zu ziehen ist. In Mancosu (2001) findet sich der Versuch, die Unterscheidung an drei verschiedenen Beweisen des Satzes von Pythagoras zu illustrieren (S. 98-100) und aus Bemerkungen anderer Autoren zu rekonstruieren (S. 101-108). Wegen der Mehrdeutigkeit des Ausdrucks ‚Erklärung', und auch weil es von individuellem Vorwissen und Können abhängt, ob ein Beweis erklärend wirken kann oder nicht, scheint sich am Ende der Bestandsaufnahme eher die Frage aufzudrängen, ob hier nicht vielmehr verschiedene Unterscheidungen zusammengeworfen werden. Als Paradebeispiele nicht-erklärender Beweise werden in Rota (1997) Verifizierungen angeführt, d. s. Beweise durch Auflistung und Prüfung aller möglichen Fälle. Obwohl das Verlangen, die Gründe für die Wahrheit eines Satzes zu kennen, mit seiner blossen Verifizierung gewiss nicht immer zu befriedigen ist, wäre es, wie mir scheint, falsch zu verneinen, dass mit der Auflistung und Prüfung aller möglichen Fälle ein Verständnisgewinn, etwa in Form einer Übersicht, einhergeht. Ausserdem braucht es ja noch den Nachweis, dass die Auflistung vollständig ist – dass wirklich alle Fälle berücksichtigt wurden –, was zur Begründung des so gewonnenen Satzes durchaus beiträgt.

Erfassen ihrer Bedeutung – darin besteht, einen Beweis oder eine Widerlegung für sie erkennen zu können (wie sich im zweiten Abschnitt zeigte).

Fassen wir das Wichtigste zusammen. *Dass* ein Satz wahr sein muss, zeigt der mathematische Beweis, indem er einen Weg beschreibt, *wie* man ausgehend von anerkannten Wahrheiten zu dieser Einsicht gelangt. Er gibt eine Anleitung, wie wir uns selbst von der Wahrheit dieses Satzes überzeugen können. Nicht selten indes kommt es vor, dass der Weg, welcher historisch als erster beschritten wurde, schwierig, abwegig oder zufällig erscheint, sodass sein Nachvollzug Probleme bereitet und man sich zwar überzeugen liess, mithin um die Wahrheit des Satzes weiss, die Gründe dafür aber nicht klar angeben kann, da man nicht gut genug versteht, weshalb der Satz wahr ist. Immer neue Beweise desselben Satzes können nun – indem sie etwa kürzere oder begrifflich einfachere Wege anzeigen und uns triftigere Gründe geben, den Satz für wahr zu halten – dazu beitragen, diesen immer besser zu verstehen. Da mit der Zeit stets neue und kürzere Wege aus diversen Richtungen kommend das begriffliche Terrain überziehen, das den Satz umgibt, wird dieser immer näher an wohlbekannte und leicht einzusehende Wahrheiten gerückt – wird er immer vertrauter –, bis sich schliesslich seine eigene Wahrheit, sich der Satz selbst trivial ausnimmt.

Das Verstehen mathematischer Sätze erschöpft sich folglich nicht im Wissen um Satzbedeutungen und Wahrheit. Wer einen „tiefen“ Satz wie etwa den Primzahlsatz wirklich verstehen möchte, wird sich nicht mit dem erstbesten Beweis zufrieden geben. Der Ausdruck ‚verstehen‘ kann hier freilich nur vage gebraucht werden, denn Beweise können durchaus verschiedene Weisen des Verstehens befördern und dies in unterschiedlichen Ausmassen.

4 Worin besteht die besondere Gewissheit mathematischer Sätze?

Der mathematische Beweis hebt aus den bezweifelbaren Aussagen eine heraus, um sie als Satz sicherzustellen, ihr diejenige Gewissheit zu verleihen, die sie in den Rang eines Theorems erhebt. Die Gewissheit, von der hier die Rede ist, bezeichnet nicht primär eine psychische Verfasstheit, sondern eine besondere Stellung innerhalb (wie auch ausserhalb) der Mathematik, die der Beweis dem Satz, den er beweist, durch seine Beweiskraft verschafft. Zu dieser Stellung gehört, dass, wenn ein Beweis einer Aussage vorliegt und als Beweis dieser Aussage anerkannt wird, an ihr kein (vernünftiger) Zweifel mehr möglich ist. Der mathematische Satz ist dem Zweifel entzogen. Aufgrund seiner Stellung darf er ohne Weiteres als Lemma, *d. h. als Hilfssatz, in anderen Beweisen verwendet werden. Oder vielleicht treffender: Dass er ohne Weiteres als Lemma verwendet wird, zeigt seine allgemeine Anerkennung als ein Satz der Mathematik, seine besondere Gewissheit.*

Die Quellen für diese Darstellung des Zusammenhangs von Beweis und Gewissheit sind in Wittgensteins späterer Philosophie zu finden, vornehmlich in den in *Über Gewissheit* versammelten Bemerkungen. Obwohl das Hauptaugenmerk dieser Sammlung nicht auf der besonderen Gewissheit des mathematischen Satzes liegt, kommt sie doch an mehreren Stellen zur Sprache, oft zu Vergleichszwecken, sodass sich am Ende ein facettenreiches Bild ergibt.[56] In einer dieser Bemerkungen wird die Sonderstellung mathematischer Sätze zwar mit anderen Begriffen und Metaphern beschrieben als hier, der Sache nach gleichwohl ganz ähnlich wie vorhin:[57]

> Dem mathematischen Satz ist gleichsam offiziell der Stempel der Unbestreitbarkeit aufgedrückt worden. D. h.: ‚Streitet euch um andre Dinge; *das* steht fest, ist eine Angel, um die sich euer Streit drehen kann'.

Zwei Bemerkungen später[58] heisst es dann, die Sätze der Mathematik seien Petrefakten: derart versteinert also, dass sie – wie sich die Welt der Tatsachen um sie herum auch verändert – keinen Wandel ihres Wahrheitswerts von wahr zu falsch zulassen. Dieses Feststehen, diese Unbeweglichkeit des mathematischen Satzes unterscheidet ihn von anderen Gewissheiten wie etwa der, dass meine Initialen R. B. lauten oder ich nie auf dem Mars war. Denn nicht nur könnten zukünftige Entwicklungen Sätze wie diese falsch werden lassen, solchen Gewissheiten kommt innerhalb ihrer Gebrauchsumgebung nicht dieselbe offizielle Stellung zu wie einem Theorem innerhalb der Mathematik.[59] Worin aber besteht diese besondere Stellung des mathematischen Satzes und wie wird sie ihm verliehen?

Zweifel oder Uneinigkeiten über die Wahrheit von Behauptungen werden in der Mathematik durch Beweise ausgeräumt. Wer den „Streit" um eine Aussage für sich entscheiden möchte, liefere einen Beweis, der die anderen überzeugt. Damit aber

[56] Vgl. Wittgenstein, *Über Gewissheit*, S. 127-30, 143, 186, 209, 233, 251–253. Vgl. auch Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.39, S. 170.

[57] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 655, S. 252.

[58] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 657, S. 253.

[59] Vgl. für Teile dieser Lesart Schulte (2005, S. 64): „[Wittgenstein] does not wish to say that there is no real difference between mathematical propositions, for instance, and certain empirical ones that are regarded as ‚*incontrovertible*' (OC 657). He says that mathematical propositions have, ‚as it were officially, been given the stamp of incontestability' (OC 655). They might be called ‚fossilized' (OC 657), whereas a proposition like ‚I am called J.S.' should, even though it is correctly regarded as incontrovertible, not be so called. These two types of propositions have something in common, namely their apparent incontestability, but they play importantly different roles. One type is *officially* exempted from doubt; the other one does not do any official job at all" (‚OC' steht für ‚On Certainty', den englischen Titel der Textsammlung, die Zahlen für die Nummer der Bemerkung, aus der zitiert wird).

der Streit entschieden, mithin die Aussage oder ihre Negation bewiesen werden kann, müssen andere Aussagen als unbestrittene und unumstössliche Wahrheiten anerkannt werden und zwar von allen Beteiligten. Die Angelfunktion mathematischer Sätze zeigt sich denn auch in ihrer allgemein akzeptierten Verwendung als Lemmata zur Entscheidung offener Streitfragen (d. h. in Beweisen für andere Sätze). Für diese Verwendung ist es unerlässlich, dass der Stempel, der die Unbestreitbarkeit anzeigt, nach aussen hin als ein offizielles, durch die mathematische Gemeinschaft beglaubigtes Kennzeichen erkennbar ist und nicht bloss das Zeichen eines subjektiven Urteils. Ist ein Streit einmal beigelegt, eine Aussage anerkanntermassen bewiesen, wird ihr, um zukünftige Fragen zu entscheiden, derselbe offizielle Stempel aufgedrückt. Dadurch ist die Aussage als mathematischer Satz gekennzeichnet und dem Zweifel entzogen. Wer dann noch ihre Gewissheit bezweifeln möchte, muss zeigen, dass der Versuch, der als ihr Beweis anerkannt wurde, in Wahrheit scheitert und keinen Beweis für sie darstellt.

Obgleich die Gewissheit bewiesener Behauptungen mit Gemütszuständen bestimmter Subjekte in einer gewissen Beziehung steht – der Beweis soll ja überzeugen und als solcher möglichst von allen anerkannt werden –, korreliert sie durchaus nicht immer mit diesen. Das Nachvollziehen eines Beweises durch ein geeignetes Subjekt mag zwar oft „völlige Überzeugung, die Abwesenheit jedes Zweifels“ und mithin *subjektive* Gewissheit über die Wahrheit des bewiesenen Satzes bewirken.[60] Doch der Versuch, einen Beweis nachzuvollziehen, kann freilich scheitern, sodass das Subjekt keine Gewissheit erlangt oder sogar irrtümlicherweise den Beweis anstelle des Nachvollzugs für gescheitert und den Satz für womöglich falsch befindet. Umgekehrt kommt es vor, dass ein erfolgloser Beweisversuch (d. i. etwas, was die Kriterien an einen Beweis *nicht* erfüllt) fälschlicherweise für ein Beweis gehalten wird, sodass sich subjektive Gewissheit über die Wahrheit einer unbewiesenen Aussage, womöglich eine Falschheit, einstellt.

Die Gewissheit des mathematischen Satzes ist also keine subjektive, verbürgt etwa durch eine besonders klare und deutliche Einsicht (um ein Kriterium aus der Tradition aufzugreifen). Sie ist, wie man geneigt sein könnte zu sagen, *objektiv.* Was heisst das aber, etwas sei objektiv gewiss? Dass im Gegensatz zur subjektiven Gewissheit „ein Irrtum nicht möglich ist“.[61] Und ein weiterer wichtiger Unterschied, auf den Wittgenstein hinweist, ist der, dass sich über objektive Gewissheit – „darüber, ob etwas gewiss *ist*“[62] – streiten lässt. Tatsächlich geschieht es öfter, als man vielleicht meinen könnte, dass mit mathematischen Argumenten darüber gestritten wird, ob es sich bei dem vorgeschlagenen Versuch, eine Aussage zu beweisen, um

[60] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 194, S. 159.
[61] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 194, S. 159.
[62] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 273, S. 173.

einen Beweis handelt oder nicht. Hingegen erschiene es aus mathematischer Sicht vollkommen belanglos, andere von der *eigenen* Gewissheit (davon, dass man sich eines bewiesenen Satzes wirklich gewiss genug sei) überzeugen zu wollen. Wittgensteins Hinweise deuten also in die richtige Richtung, beleuchten aber noch zu wenig den Zusammenhang zwischen der Überzeugung Einzelner und der Gewissheit des mathematischen Satzes. Die Betrachtung zweier entgegengesetzter Szenarien hilft uns weiter.

Es ist nicht undenkbar, dass der Beweis einer Behauptung, obwohl er irgendwo auf Papier tatsächlich existiert, fast allen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft unbekannt geblieben ist, oder dass sie diesem fälschlicherweise das Beweissein absprechen. Die Situation überblickend, würde man in solchen Fällen sagen, dass der Behauptung die für die Mathematik typische Gewissheit fehlt, auch wenn man sich selbst durch den Nachvollzug des Beweises von ihrer Wahrheit überzeugen und jeden Zweifel beseitigen konnte. Einzelne mögen die Behauptung zwar zu Recht für eine Gewissheit halten, aber weil zu wenige ihren Beweis kennen oder sich von ihm überzeugen liessen, ermangelt es ihr insgesamt doch des offiziellen Stempels, der sie als mathematischen Satz auszeichnete. Umgekehrt kann es vorkommen, dass eine unbewiesene, ja sogar unbeweisbare Aussage von sehr vielen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft für bewiesen gehalten wird. Wer um die Fehlerhaftigkeit des vorgeschlagenen Beweisversuchs wüsste, würde gleichwohl sagen wollen, dass die Aussage keine Gewissheit darstellt und sie fälschlicherweise in den Rang eines mathematischen Satzes erhoben wurde, selbst wenn die Anzahl derer, die ihr diesen Rang zusprechen, überwältigend ist.

Offenbar liegt eine Spannung in und zwischen diesen Feststellungen. Es macht den Anschein, als seien verschiedene Kriterien am Werk, wenn über die Gewissheit mathematischer Behauptungen geurteilt wird. Um diese Spannungen aufzulösen, gilt es daher zwei Sachlagen zu unterscheiden und ihren Zusammenhang zu untersuchen:

(i) das Vorliegen eines Beweises für eine Behauptung, d. h. eines Texts, Diagramms oder anderer Darstellungen, worin ihre notwendige Wahrheit gezeigt wird;

(ii) die breite Anerkennung einer Behauptung als mathematischen Satz, d. h. insbesondere die Akzeptanz ihrer Verwendung als Lemma in Beweisen, Definitionen etc.

Normalerweise folgt auf den Beweis einer Behauptung, nach dessen Prüfung durch geeignete Mitglieder der mathematischen Gemeinschaft, bald ihre breite Anerkennung als ein neuer Satz der Mathematik. In der Regel zieht also das Eintreten der ersten Sachlage mehr oder weniger zeitnah das der zweiten nach sich.

Die vorherigen Betrachtungen haben jedoch gezeigt – und die folgenden Beispiele aus der Mathematikgeschichte werden es bestätigen – dass es durchaus Ausnahmen zum normalen Ablauf geben kann. Sollte Fermat einen Beweis für den nach ihm benannten Grossen Satz entgegen aller Wahrscheinlichkeit tatsächlich besessen haben, dann erfüllte dieser Satz vor 1994 die erste, nicht aber die zweite Bedingung. In der gleichen, vielleicht nicht ganz so unwahrscheinlichen Lage könnte sich zurzeit die ABC-Vermutung befinden. Womöglich liegt hier aber auch der Fall eines privaten oder esoterischen „Beweises“ vor.[63] Das Vier-Farben-Theorem dagegen erfüllte elf Jahre lang nur die zweite Bedingung. Obwohl Alfred Kempes Beweisversuch von 1879 für korrekt befunden wurde und auf breite Anerkennung stiess, konnte Percy Heawood in einem 1890 veröffentlichten Papier zeigen, dass Kempes Versuch fehlerhaft, die Vermutung mithin nicht bewiesen war.[64]

In Anbetracht solcher Beispiele liegt es nahe, das Kriterium für mathematische Gewissheit an der Erfüllung *beider* Bedingungen festzumachen: dem Vorliegen eines Beweises und der breiten Anerkennung als Satz der Mathematik infolge dieses Beweises. Bewiesene Behauptungen sind demnach erst mit ihrer breiten Anerkennung in Stein gemeisselt; breite Anerkennung allein aber reicht nicht aus, ihr muss ein Beweis zugrunde liegen, damit sich mathematische Gewissheit einstellt. Doch woher wissen wir, dass sich die mathematische Gemeinschaft in Bezug auf die erste Bedingung jeweils nicht irrt und in Wahrheit bloss ein fehlerhafter Beweisversuch vorliegt? Die Antwort auf diese Frage ist freilich, dass sie sich manchmal irrt, wie dies zum Beispiel beim Vier-Farben-Theorem zwischen 1879 und 1890 der Fall war. Dies eröffnet jedoch nicht die Möglichkeit, dass sich alle immer geirrt haben und sich eines Tages herausstellt, dass niemandem je ein richtiger Beweis gelungen ist und also alle mathematischen Sätze, die man für bewiesen hielt, in Wahrheit ihres Beweises noch harren.

Gedankenspiele wie diese entspringen der konfusen Vorstellung eines Beweisbegriffs, der – obschon wir seine Anwendungskriterien zu beherrschen glauben – unseren bisherigen Gebrauch übersteigt. Dem steht die tatsächliche Anwendung des Begriffs innerhalb einer Praxis des Beweisens entgegen, die sich in vieler Hinsicht bewährt hat. Eine der Annahmen, die dieser Praxis zugrunde liegt, ja sie in der Form, wie sie gelebt wird, überhaupt erst ermöglicht, ist die, dass sich die breite Anerkennung eines mathematischen Satzes im Regelfall aus dem prüfenden Nachvollzug eines entsprechenden Beweises ergibt und nur in seltenen und – das ist der ausschlaggebende Punkt – korrigierbaren Fällen infolge eines mangelhaften Versuchs.

[63] Vgl. Castelvecchi (2020).
[64] Vgl. Wilson (2014, Kap. 5-7).

Von dem radikalen Zweifel, der einer philosophischen Behandlung bedarf, lässt sich also ein pragmatischer Zweifel unterscheiden, der seine Berechtigung im Wissen um die punktuelle Fehlbarkeit der mathematischen Gemeinschaft hat. Ein Weg, pragmatische Zweifel auszuräumen, besteht darin, immer neue und, wenn möglich, immer klarere, einfachere, übersichtlichere Beweise für die fragliche Aussage zu geben, bis die Möglichkeit, dass sich alle vorgelegten Versuche als fehlerhaft erweisen, praktisch ausgeschlossen werden kann und auch in den letzten Zweiflern die unerschütterliche Gewissheit darüber herangereift ist, dass es sich um eine Wahrheit handelt. Man könnte daher annehmen, dass vielfaches Beweisen desselben Satzes hauptsächlich dem Bestreben geschuldet sei, die Erfüllung der ersten der obigen Bedingungen, d. i. das tatsächliche Vorliegen eines Beweises, sicherzustellen. Der Blick in die Mathematikgeschichte zeigt jedoch, dass dies nicht zutrifft. So wurden zum Beispiel die immer neuen Bemühungen, den Primzahlsatz zu beweisen, auch dann noch fortgesetzt, als es an den vorliegenden Beweisen längst nichts mehr zu bezweifeln gab und sich die Aussage selbst zu einem anerkannten und als solchen verwendeten Satz verfestigt hatte. Offenbar ging es hier nicht darum, letzte Zweifel an der Gewissheit des Satzes zu beseitigen, sondern womöglich darum, ein tieferes Verständnis zu erlangen (wie im dritten Abschnitt bereits angedeutet wurde).

Eine zweite Annahme, die der mathematischen Beweispraxis zugrunde liegt (und die auch bereits im dritten Abschnitt erwähnt wurde), ist die, dass Beweise in der Regel überzeugen: dass also, nachdem ein Beweis vorgelegt wurde, dieser nicht nur die nötige Verbreitung findet und einer Prüfung unterzogen wird, sondern die Schlüsselpersonen der jeweiligen Disziplin von der Wahrheit der bewiesenen Behauptung auch überzeugt. Wäre dem nicht so, könnte die Mathematik nicht sein, was sie ist – wäre sie vielleicht der Philosophie ähnlicher. Unter diese zweite Grundannahme fällt nun auch die Forderung der Mitteilbarkeit und Nachvollziehbarkeit von Beweisen (auf die im ersten Abschnitt hingewiesen wurde). Denn, was nur einem Subjekt oder einem esoterischen Kreis von Eingeweihten verständlich bleiben muss, hätte zur Praxis des Beweisens nichts beizutragen.

Literatur

Antonutti Marfori, Marianna (2010). „Informal Proofs and Mathematical Rigour“. In: *Studia Logica* 96.2, S. 261–272.

Avigad, Jeremy (2021). „Reliability of Mathematical Inference“. In: *Synthese* 198, S. 7377–7399.

Avigad, Jeremy, Kevin Donnelly et al. (2007). „A Formally Verified Proof of the Prime Number Theorem“. In: *ACM Transactions on Computational Logic* 9.1, 2:1–2:23.

Avigad, Jeremy und John Harrison (2014). „Formally Verified Mathematics“. In: *Communications of the ACM* 57.4, S. 66–75.

Azzouni, Jody (2004). „The Derivation-Indicator View of Mathematical Practice“. In: *Philosophia Mathematica* 12.2, S. 81–106.

Bernays, Paul (1935). „Sur le platonisme dans les mathématiques“. In: *L'Enseignement Mathématique* 34, S. 52–69.

Brendel, Elke (1992). *Die Wahrheit über den Lügner. Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners.* Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

Castelvecchi, Davide (2020). „Maths Proof That Rocked Number Theory Will Be Published“. In: *Nature* 580, S. 177.

Dalen, Dirk van (2004). *Logic and Structure.* 4. Aufl. Berlin: Springer, 2004.

Dawson, John W. (2006). „Why Do Mathematicians Re-prove Theorems?“ In: *Philosophia Mathematica* 14.3, S. 269–286.

De Toffoli, Silvia (2017). „'Chasing' the Diagram – The Use of Visualizations in Algebraic Reasoning“. In: *The Review of Symbolic Logic* 10.1, S. 158–186.

De Toffoli, Silvia und Valeria Giardino (2014). „Forms and Roles of Diagrams in Knot Theory“. In: *Erkenntnis* 79.4, S. 829–842.

Dummett, Michael (1963). „Realism“. In: London: Duckworth, 1963, S. 145–165.

– (1973). „The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic“. In: London: Duckworth, 1973, S. 215–247.

– (1978). *Truth and Other Enigmas.* London: Duckworth, 1978.

– (2000). *Elements of Intuitionism.* 2. Aufl. Oxford: Oxford University Press, 2000.

Frege, Gottlob (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Koebner, 1884.

– (1893). *Grundgesetze der Arithmetik.* Bd. 1. Jena: Hermann Pohle, 1893.

Giaquinto, Marcus (2007). *Visual Thinking in Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 2007.

Giardino, Valeria et al., Hrsg. (2022). *Diagrammatic Representation and Inference.* Cham: Springer, 2022.

Gowers, Timothy (2023). „What Makes Mathematicians Believe Unproved Mathematical Statements?“ In: *Annals of Mathematics and Philosophy* 1.1, S. 57–110.

Hamami, Yacin (2022). „Mathematical Rigor and Proof“. In: *The Review of Symbolic Logic* 15.2, S. 409–449.

Lakatos, Imre (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Leitgeb, Hannes (2009). „On Formal and Informal Provability“. In: *New Waves in Philosophy of Mathematics*. Hrsg. von Otávio Bueno und Øystein Linnebo. Basingstoke: Palgrave, 2009, S. 263–299.

Linnebo, Øystein (2024). „Platonism in the Philosophy of Mathematics“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2024 Edition. Hrsg. von Edward N. Zalta. 2024.

Linsky, Bernard (2011). *The Evolution of Principia Mathematica: Bertrand Russell's Manuscripts and Notes for the Second Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Mancosu, Paolo (2001). „Mathematical Explanation: Problems and Prospects“. In: *Topoi* 20, S. 97–117.

Mortensen, Chris (1995). *Inconsistent Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, 1995.

Murzi, Julien (2010). „Knowability and Bivalence: Intuitionistic Solutions to the Paradox of Knowability“. In: *Philosophical Studies* 149.2, S. 269–281.

Narkiewicz, Wladyslaw (2000). *The Development of Prime Number Theory*. New York: Springer, 2000.

Nickel, Gregor (2010). „Proof: Some Notes on a Phenomenon between Freedom and Enforcement“. In: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. Hrsg. von Benedikt Löwe und Thomas Müller. London: College Publications, 2010, S. 281–291.

– (2019). „Aspects of Freedom in Mathematical Proof“. In: *ZDM Mathematics Education* 51, S. 845–856.

Pólya, George (1954/1968). *Mathematics and Plausible Reasoning, vol. I-II*. Princeton (NJ): Princeton University Press, 1954/1968.

Priest, Graham, Jeffrey C. Beall und Bradley Armour-Garb, Hrsg. (2004). *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*. Oxford: Oxford University Press, 2004.

Priest, Graham, Richard Routley und Jean Norman, Hrsg. (1989). *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. München: Philosophia Verlag, 1989.

Quine, Willard V. O. (1951). „Two Dogmas of Empiricism“. In: *The Philosophical Review* 60.1, S. 20–43.

– (1986). „Reply to Charles Parsons“. In: *The Philosophy of W. V. Quine*. Hrsg. von Lewis Edwin Hahn und Paul Arthur Schilpp. La Salle (IL): Open Court, 1986, S. 396–403.

Rav, Yehuda (1999). „Why Do We Prove Theorems?“ In: *Philosophia Mathematica* 7.3, S. 5–41.

– (2007). „A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices“. In: *Philosophia Mathematica* 15.3, S. 291–320.

Robinson, John A. (2000). „Proof = Guarantee + Explanation“. In: *Intellectics and Computational Logic*. Hrsg. von Steffen Hölldobler. Dordrecht: Springer, 2000, S. 277–294.

Rota, Gian-Carlo (1997). „The Phenomenology of Mathematical Proof“. In: *Synthese* 111.2, S. 183–196.

Sainsbury, Richard M. (2004). „Option Negation and Dialetheias“. In: *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*. Hrsg. von Graham Priest, Jeffrey C. Beall und Bradley Armour-Garb. Oxford: Oxford University Press, 2004, S. 85–92.

Schulte, Joachim (2005). „Within a System“. In: *Readings of Wittgenstein's On Certainty*. Hrsg. von Danièle Moyal-Sharrock und William H. Brenner. London: Palgrave, 2005, S. 59–75.

Selberg, Atle (1949). „An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem“. In: *Annals of Mathematics* 50.2, S. 305–313.

Sriraman, Bharath, Hrsg. (2024). *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*. Cham: Springer, 2024.

Tanswell, Fenner (2015). „A Problem with the Dependence of Informal Proofs on Formal Proofs“. In: *Philosophia Mathematica* 23.3, S. 295–310.

Tappenden, Jamie (2008). „Mathematical Concepts: Fruitfulness and Naturalness“. In: *The Philosophy of Mathematical Practice*. Hrsg. von Paolo Mancosu. Oxford: Oxford University Press, 2008, S. 276–301.

Tatton-Brown, Oliver (2023). „Rigour and Proof“. In: *The Review of Symbolic Logic* 16.2, S. 480–508.

Tennant, Neil (2017). „Logicism and Neologicism“. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2017 Edition. Hrsg. von Edward N. Zalta. 2017.

Wagner, Roy (2019). „Does Mathematics Need Foundations?“ In: *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*. Hrsg. von Stefania Centrone, Deborah Kant und Deniz Sarikaya. Cham: Springer, 2019, S. 381–396.

Whitehead, Alfred North und Bertrand Russell (1925). *Principia Mathematica*. 2. Aufl. Bd. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1925.

Wilson, Robin J. (2014). *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*. revised color edition. Princeton: Princeton University Press, 2014.

Wittgenstein, Ludwig (1984a). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Hrsg. von G. E. M. Anscombe, Rush Rhees und G. H. von Wright. Bd. 6. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1984.

– (1984b). *Über Gewissheit*. Hrsg. von G. E. M. Anscombe. Bd. 8. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1984.

– (2003). *Philosophische Untersuchungen*. Hrsg. von Joachim Schulte. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 2003.

Das mathematische Lebenswerk von Ghiyath ad-Din Dschamschid bin Masʿud bin Muhammad al-Kaschi

Oliver Ebbers

1 Einleitung

> "The Mohammedans have added but little to the knowledge in mathematics which they received. They now and then explored a small region to which the path had been previously pointed out, but they were quite incapable of discovering new fields."
>
> (Cajori, 1893, S. 101)

Diese These, die auch mit dieser Arbeit widerlegt werden soll, verdeutlicht das noch bis in die 1930er Jahre vorherrschende eurozentrische Bild von der Mathematik. Die Europäer - genauer: die Griechen - als Entdecker der Mathematik, die Inder als Entwickler derselben, die islamischen Mathematiker als unproduktive Nutznießer und dann wieder die Europäer, die die Mathematik vollenden. Die wohlwollende Betrachtung der Inder geht dabei nicht nur auf ihre mathematischen Leistungen, sondern auch auf die ihnen zugeschriebene arische Abstammung zurück (Schubring, 2021).

Die Mathematik ist im Islam eine Notwendigkeit, denn der Koran enthält Vorschriften zur Erbteilung, welche die Anwendung der Bruchrechnung erfordern, ebenso wie die Vorschrift, die Gebete in Richtung der Kaaba abzuhalten, was wiederum Berechnungen des Standorts der Kaaba sowie die Berechnung des eigenen Standorts mithilfe der Astronomie und damit insbesondere der Trigonometrie erforderlich macht (Zirker, 2013).

Die Blütezeit der islamischen Mathematik umfasst den Zeitraum von ca. 750 bis 1450. Dass man von der islamischen und nicht der arabischen Mathematik spricht, liegt an der Vielzahl der Regionen, Kulturen (wobei die Araber in den Regionen außerhalb der arabischen Halbinsel eine Minderheit waren) und Sprachen, die unter diesem Begriff zusammengefasst werden und deren Gemeinsamkeit in der von den arabischen Eroberern eingeführten Religion des Islam lag (Berggren, 2011).

Diese Blütezeit beginnt mit dem Kalifen al-Mansur, welcher die Hauptstadt des Reiches in das neu erbaute Bagdad verlegte und diese in der folgenden Zeit zu einem Zentrum für die Wissenschaft entwickelte (Wußing, 2008). In eben dieser Stadt forschte einer der ersten großen Mathematiker der islamischen Blütezeit, Abu Dschaʿfar Muhammad ibn Musa al- Chwārizmī (ca. 780 - ca. 850). Die Blütezeit erlebte viele weitere Mathematiker, wie z.B. Abu r-Raihan Muhammad b. Ahmad al-Bīrūnī (973 – 1048), Ghiyāth ad-Din Abū al-Fatḥ ʿUmar ibn Ibrāhīm Nīsābūrī, besser bekannt als Omar Khayyām (1048 – 1131) und – der letzte große Mathematiker in der Blütezeit des Islams – Ghiyath ad-Din Dschamschid bin Masʿud bin Muhammad al-Tabib al-Kaschi (im Folgenden auch kurz: al-Kaschi) (ca. 1380–1429) (Grattan-Guinness, 1997).

Da die islamischen Mathematiker vornehmlich mit Sexagesimalzahlen gearbeitet haben, und auch al-Kaschi keine Ausnahme bildet, soll im Folgenden zunächst auf das System der Sexagesimalzahlen eingegangen werden. Danach folgt eine kurze Biographie al-Kaschis und daran anschließend werden seine herausragendsten mathematischen Leistungen im Detail vorgestellt. Ein Fazit soll diese Arbeit dann abschließen.

2 Das System der Sexagesimalzahlen

Die sexagesimalen Zahlen sind ein Zahlensystem mit Basis 60, das als Additionssystem erstmalig bei den Sumerern (ca. 3300 v.Chr.) nachgewiesen werden konnte (Ifrah, 1987). So wie das Dezimalsystem nur die Zeichen 0 bis 9 benötigt, so verwendet das Sexagesimalsystem die Zeichen 0 bis 59. Es sei im Folgenden a eine Zahl von 0 bis 59. Die ganzen Zahlen $a \cdot 60^0$ bezeichnet al-Kaschi als Grad, wobei er den Grad als einen dreihundertsechzigstel Teil des Kreisumfangs definiert. Er benennt $a \cdot 60^1$ als einmal Erhöhtes, $a \cdot 60^2$ als zweimal Erhöhtes, usw. Al-Kaschi verwendet die unter den zeitgenössischen Astronomen gebräuchlichen Bezeichnungen Minuten für $a \cdot 60^{-1}$, Sekunden für $a \cdot 60^{-2}$, Terzen für $a \cdot 60^{-3}$, usw.

Für die Sexagesimalzahlen soll im Weiteren die übliche Schreibweise verwendet werden: Grad und Minuten werden durch ein Semikolon getrennt, die restlichen Stellen werden durch Kommata getrennt.

Der Vorteil des Rechnens mit Sexagesimalzahlen liegt zum einen in der Zahl 60, welche mit 12 Teilern eine hochzusammengesetzte Zahl ist. Dies ermöglicht eine einfache Bruchrechnung mit Sexagesimalzahlen und erlaubt Händlern ein einfaches Aufteilen von größeren Warenmengen. Zum anderen ist die Basis 60 geeignet, um Zeiten und Winkel zu berechnen, was sie besonders für Astronomen nützlich macht. So hat eine Stunde 60 Minuten, eine Minute 60 Sekunden; ein Kreis hat 6 mal 60 Grad, ein gleichseitiges Dreieck hat drei Winkel mit je 60 Grad, usw.

Der größte Nachteil des Sexagesimalsystems liegt in der komplizierteren Handhabung bei Multiplikationen und Divisionen. So genügt im Dezimalsystem eine Multiplikationstabelle mit den Zeilen/Spalten von 1 bis 10, also 100 Felder, um eine beliebige Multiplikationsaufgabe mit ganzen Zahlen zu lösen. Im Sexagesimalsystem werden Zeilen/Spalten von 1 bis 60, also 3600 Felder benötigt.

Während islamische Mathematiker wie al-Biruni und Ali ibn Ahmad Al-Nasawi (ca. 1010 - ca. 1075) zur Multiplikation von Sexagesimalzahlen diese in Dezimalzahlen in ihrer kleinsten Einheit umrechneten (das sogenannte „Ausbreiten“), dann die Multiplikation durchführten und das Ergebnis wieder in Sexagesimalzahlen verwandelten (das „Erhöhen“) – also z.B. $1,2;3 \cdot 3,2;1 \;\hat{=}\; 3.723 \cdot 10.921$ Minuten = 40.658.883 Minuten $\hat{=}\; 3,8,14,8;3$ — rechnete Al-Kaschi das Ergebnis direkt mithilfe einer Sexagesimalen Multiplikationstafel und –tabelle aus (Luckey, 1951).

Der Einfluss des Sexagesimalsystems findet sich auch bei den damaligen Definitionen des Sinus wieder. Im Gegensatz zur heute üblichen Definition, die den Sinus eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck als Verhältnis der Länge der Gegenkathete des Winkels zur Länge der Hypotenuse betrachtet, benutzten die islamischen Mathematiker für den Sinus die Streckenlängen in einem Kreis mit dem Radius 60 (Strick, 2020). Im Folgenden soll der so definierte Sinus mit Sin abgekürzt werden, sodass sich die Beziehung $\mathrm{Sin}(\alpha) = 60 \cdot \sin(\alpha)$, bzw. $\mathrm{Sin}(\alpha)/60 = \sin(\alpha)$ ergibt.

3 Zur Person Dschamschid Al-Kaschi

Ghiyath ad-Din Dschamschid bin Mas‘ud bin Muhammad al-Tabib al-Kaschi war der letzte große islamische Mathematiker der Blütezeit des Islam. Sein Geburtsname ist dabei Dschamschid, der Namensbestandteil „bin“ bedeutet „Sohn von“ und Mas’ud ist der Name seines Vaters, Muhammad der Name seines Großvaters. Ghiyath bedeutet „Retter“ oder auch „Hilfe“, ad-Din bedeutet „der Religion“. Al-Tabib bedeutet Arzt und gibt seine Berufsbezeichnung an, welche er vor Aufnahme seiner mathematischen Tätigkeit ausübte.

Wie der Namensteil al-Kaschi bereits andeutet, wurde al-Kaschi (übersetzt: Der Kaschaner) ca. 1380 (das genaue Datum seiner Geburt ist nicht überliefert) in Kaschan, im heutigen Iran, südlich von Teheran, geboren. Vieles aus dem Leben von al-Kaschi ist nicht überliefert und das erste zeitlich gesicherte Ereignis, ist eine Mondfinsternis, welche er am 2. Juni 1406 in seiner Heimatstadt Kashan beobachtete und in seinem Werk Zij-i Khaqani (siehe Auflistung seiner Werke unten) festhielt.

Er verstarb am 22. Juni 1429 (Youschkevitch & Rosenfeld, 1973) in Samarkand, im heutigen Usbekistan, wo er bis zuletzt seiner Arbeit als Astronom in Diensten des Herrschers der Stadt, Mīrzā Muhammad Tāraghay bin Shāhrukh, besser bekannt unter dem Namen Ulugh Beg (1394 - 1449), nachging.

Wie sein Name bereits vermittelt, war Ulugh Beg der Sohn des Herrschers Schah Ruch (1377 – 1447), welcher wiederum ein Sohn von Khan Timur (1336 – 1405) war, dem Begründer des Timuridenreiches. Al-Kaschi war zuerst am Hofe von Schah Ruch in Herat, heute eine Stadt im Westen Afghanistans, tätig. Zwischen 1417 und 1421 wurde er von Ulugh Beg als Forscher und als Lehrer an die neu gegründete Hochschule berufen (Bagheri, 1997). Während seiner Zeit an der Hochschule in Samarkand schuf er seine größten und bekanntesten Werke (Aydin & Hammoudi, 2019), denen im Folgenden jeweils ein eigenes Kapitel gewidmet ist.

Vieles aus seinem Leben ist nicht überliefert, aber dank zweier Briefe, die er an seinen Vater geschrieben hat, lassen sich einige Fakten rekonstruieren. So muss sein Vater ein gewisses Verständnis für Astronomie und Mathematik besessen haben, da al-Kaschi Lösungen zu Problemen dieser Art, neben seinen vielen Erfolgen, ausführlich beschreibt. Für seinen Arbeitgeber, Ulugh Beg, hat al-Kaschi nur lobende Worte übrig – und nicht nur aus Höflichkeit, wie er selbst schreibt. Er erwähnt die vielen Sprachen, die Ulugh Beg beherrscht (Arabisch, Persisch, Türkisch, Mongolisch und ein wenig Chinesisch), sein ausgezeichnetes Gedächtnis und seine hohen mathematischen Fähigkeiten. Darüber hinaus beschreibt al-Kaschi ausführlich seinen Alltag in Samarkand und speziell seine Arbeit am Observatorium, an dessen Konstruktion er beteiligt war. Aus den Briefen wird klar, dass er sich in Samarkand wohlgefühlt hat und eine produktive Zeit hatte (Bagheri, 1997).

So erstellte er im Jahre 1424 *Al-risala al-muhitiyya* (übersetzt: *Lehrbrief über den Kreisumfang*, von al-Kaschi selbst wird der Lehrbrief im Schlüssel aufgeführt mit dem übersetzten Titel*: Lehrbrief über den Umfang, betreffend das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang* (Luckey, 1951)), in dem er mithilfe eines 805.306.368-Ecks den Wert für 2π im Sexagesimalsystem auf 9 Nachkommastellen und anschließend auf 17 Dezimalstellen genau berechnet.

Ca. 1424-1427 entstand *Risala al-Watar wa'l Jaib* (übersetzt: *Lehrbrief von der Sehne und dem Sinus*; von al-Kaschi selbst wird der Lehrbrief im Schlüssel aufgeführt mit dem übersetzten Titel: *Lehrbrief von der Sehne und dem Sinus, betreffend die Bestimmung dieser beiden für den dritten Teil eines Bogens von gegebener Sehne oder gegebenen Sinus* (Luckey, 1951)), in welchem er den Sinus von 1° im Sexagesimalsystem auf 9 Stellen genau berechnet (Azarian, 2015). *Der Lehrbrief von der Sehne und dem Sinus* selbst ist nicht erhalten geblieben, jedoch existieren Kommentare zu diesem Lehrbrief, die von al-Kaschis Kollegen und Nachfolgern verfasst wurden, weshalb uns al-Kaschis Vorgehen in dem Lehrbrief überliefert ist.

1427 schließlich vollendete er *Miftah al-Hisab* (übersetzt: *Der Schlüssel zum Rechnen*) - ein Lehrbuch zur Arithmetik, Geometrie und Algebra.

Seine weiteren Werke umfassen unter anderem:

- *Sullam Al-Sama* (1407), das erste bekannte Werk al-Kaschis, das sich mit den Entfernungen und Größen der Planeten befasst (Aydin & Hammoudi, 2019).

- *Zij-i Khaqani* (1414), eine Abhandlung zur Astronomie. Zij ist das persische Wort für eine Sammlung von astronomischen Tabellen, Khaqani bedeutet, dass sie dem herrschenden Khan gewidmet sind. Es ist unklar, ob mit dem herrschenden Khan Ulugh Begs Vater, Schah Ruch, oder Ulugh Beg selbst gemeint ist (als Statthalter von Samarkand). Es wird aber angenommen, dass Al-Kaschi diese Abhandlung mindestens auch Ulugh Beg widmet, einige Jahre bevor er in dessen Dienste trat (Aydin & Hammoudi, 2019). Die Abhandlung enthält Sinus- und Tangenstabellen, die mittels iterativer Berechnungen die Werte für 0° bis 90°, 1‘ bis 60‘ auf 4 Sexagesimalstellen genau zur Verfügung stellen. Diese Tabellen wurden in ihrer Genauigkeit ca. 40 Jahre später von den Tabellen in der Abhandlung *Zij-i Ulugh Beg* übertroffen, welche auf 5 Sexagesimalstellen genau waren und an deren Erstellung al-Kaschi mitwirkte (Hamadanizadeh, 1980).

- *Risala dar Sharh-i Alat-i Rasad* (1416), eine kurze und genaue Beschreibung von acht astronomischen Werkzeugen, geschrieben für Sultan Iskandar (Aydin & Hammoudi, 2019).
- *Nuzha Al-Hadaiq* (erstellt 1416, editiert in 1426), eine Abhandlung in der er ein selbst geschaffenes Instrument zur Berechnung von planetaren Konjunktionen und ihren Koordinaten beschreibt (Aydin & Hammoudi, 2019).
- *akht-i Asturlab* (Datum unbekannt), eine Anleitung zum Bau eines Astrolabiums, ein scheibenförmiges Gerät zur Bestimmung der eigenen geographischen Koordinaten mithilfe der Sterne und der Sonne (Bradley, 2019).
- *Risala fı Ma'rifa Samt al-Qibla min Daira Hindiyya Ma'rufa* (Datum unbekannt), eine Abhandlung zur Bestimmung der Qibla, der Gebetsrichtung zur Kaaba im Islam (Aydin & Hammoudi, 2019).

4 Miftah al-Hisab

Bei dem *Miftah al-Hisab* (übersetzt: „Der Schlüssel zum Rechnen“, oder kurz: Der Schlüssel) handelt es sich um ein Lehrbuch, das sich in drei Themengebiete unterteilen lässt: Arithmetik, Geometrie und Algebra. Der Schlüssel ist dabei ein anwendungsorientiertes Werk; Beweise für seine Formeln und Berechnungen gibt al-Kaschi nicht an (Aydin & Hammoudi, 2019). Al-Kaschi selbst erläutert zu Beginn des Schlüssels den Ursprung und Zweck desselben: Immer wieder von erfahrenen und talentierten Mathematikern nach Lösungen für Probleme gefragt – entweder als Test seiner Fähigkeiten oder aber aus einer praktischen Notwendigkeit heraus – hielt al-Kaschi seine Lösungsmethoden in einem Buch fest. Er liefert seine Ergebnisse in Tabellenform für Ingenieure und bietet Lösungen für mathematisch Interessierte.

Dass seine Methoden, wie er selbst schreibt, die besten und effizientesten sind, wird glaubhafter, wenn man bedenkt, dass sein Buch noch bis ins 17. Jahrhundert das Standardwerk in Algebra und Arithmetik an den persischen Madaris (Lehreinrichtungen für Religions- und Naturwissenschaften) gewesen sein soll (Berggren, 2011).

Er vollendete *Miftah al-Hisab* im Jahre 1427, zwei Jahre vor seinem Tod. Im Buch verweist er auf andere seiner Arbeiten, z.B. auf den *Lehrbrief über den Kreisumfang* und gibt auch einen Ausblick auf Werke, die noch folgen sollen - so kündigt er z.B. in der fünften Abhandlung zur Algebra ein Werk an, dass sich mit dem Lösen von Gleichungen mit vierter Potenz beschäftigen soll.

Die Quelle für die folgenden Unterkapitel stellt die englische Übersetzung des *Miftah al-Hisab* durch die Autoren Nuh Aydin und Lakhdar Hammoudi aus dem Jahr 2019 (Arithmetik), sowie durch die Autoren Nuh Aydin, Lakhdar Hammoudi und Ghada Bakbouk aus dem Jahr 2020 (Geometrie und Algebra) dar. Diese benutzten als Grundlage für die Übersetzung das Manuskript *Nuruosmaniye 2967* aus dem Jahr 1450, das in der Nuruosmaniye Bibliothek in Istanbul eingesehen werden kann und nach Meinung der Autoren die älteste verfügbare Abschrift des Originalmanuskripts ist (Aydin & Hammoudi, 2019).

4.1 Die erste, zweite und dritte Abhandlung: Arithmetik

In der ersten Abhandlung geht al-Kaschi auf die natürlichen Zahlen mit indischen Ziffern ein, erläutert die Grundrechenarten mit diesen Zahlen (siehe weiter unten Unterkapitel „Die Grundrechenarten"), sowie das Halbieren und Verdoppeln. Er erklärt, wie Wurzeln beliebigen Grades gezogen werden können (siehe weiter unten Unterkapitel „Das schriftliche Verfahren zum Ziehen der zweiten, fünften und n-ten Wurzel"), und er geht kurz auf die 9er-Probe zur Fehlerfindung ein.

Eine Einführung in das System der indischen Ziffern, inklusive der Null, sowie Erläuterungen zu den schriftlichen Grundrechenarten finden sich in einer kürzeren Form bereits im ersten bekannten Lehrbuch der islamischen Mathematiker (Ḫwārizmī & Folkerts, 1997), dem um 825 entstandenen Werk von al-Chwārizmī, das nur in der lateinischen Fassung erhalten geblieben ist (Gericke, 1984).

Die zweite Abhandlung dreht sich um Bruchrechnung (Definition, Grundrechenarten, Wurzeln, Finden gemeinsamer Nenner, . . .), wobei bemerkenswert ist, dass er nicht nur, wie damals üblich, Brüche im Sexagesimalsystem verwendet, sondern hauptsächlich Brüche im Dezimalsystem. Dass er die Dezimalbrüche derart systematisch behandelt, macht ihn freilich noch nicht zum Erfinder derselben, denn bereits im zehnten Jahrhundert wurden Dezimalbrüche von Abu al-Hasan Ahmad ibn Ibrajim al-Uqlidisi verwendet, der sie vermutlich auch als erster im arabischen Raum eingeführt hat (Saidan, 1978). Dezimalbrüche wurden in derartiger Form in Europa allerdings erst im 16. Jahrhundert von Simon Stevin eingeführt. Vor der Wiederentdeckung von *Miftah al-Hisab* und der Beschreibung der darin enthaltenen Ausführungen zu Dezimalbrüchen durch Paul Luckey, wurde die Erfindung fälschlicherweise Simon Stevin zugeschrieben (O'Connor & Robertson, 1999).

Die dritte Abhandlung hat die Arithmetik der Astronomie zum Thema. Sie ähnelt der ersten Abhandlung dahingehend, dass die Grundrechenarten und Wurzeln behandelt werden, aber im für Astronomen nützlicheren Sexagesimalsystem (zur

Begründung sei auf das Kapitel „Das System der Sexagesimalzahlen“ verwiesen). Zudem wird im ersten Kapitel nicht erneut auf die natürlichen Zahlen eingegangen, sondern auf die Namen der Einheiten, welche die Astronomen verwenden sowie die Abdschad Zahlzeichen. Diese ordnen jedem Buchstaben des arabischen Alphabets (insgesamt 28 Buchstaben) ein Zahlzeichen zu.

Jeweils die Einer (1 - 9), die Zehner (10, 20,...), die Hunderter (100, 200,...) und die Zahl Eintausend (1000) erhalten solch ein Zeichen. Die übrigen Zahlen werden aus diesen Zeichen gebildet.

Er erläutert zudem die verwendeten Einheiten: Ein Kreis wird in 360 Grad bzw. in 12 Zeichen (in der Übersetzung: „sign“, von „astrological sign“; im Originaltext: burj [wörtlich: Turm]) alle 30 Grad eingeteilt wird. Jedes Grad besteht aus 60 Minuten, jede Minute aus 60 Sekunden usw.

Es folgen die Grundrechenarten im Sexagesimalsystem, die analog zu der ersten Abhandlung über Tabellen gelöst werden. Er schließt die dritte Abhandlung mit einer Anleitung zum Umrechnen von Sexagesimalzahlen in indische Zahlen (Dezimalzahlen) - und umgekehrt - für ganze Zahlen und Brüche.

Im Folgenden soll das Vorgehen al-Kaschis bei den Grundrechenarten anhand von Beispielen und das Vorgehen von al-Kaschi beim Wurzelziehen sowohl allgemein als auch an Beispielen näher betrachtet werden.

Grundrechenarten

Die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division geht al-Kaschi alle mittels Tabellen an.

Das Additionsverfahren, das er benutzt (siehe Tabelle 1), wurde in dieser Art schon 600 Jahre zuvor von al-Chwārizmī festgehalten (Ḫwārizm & Folkerts, 1997) und es wird nahezu identisch auch heute noch an Grundschulen gelehrt.

Die Zahlen, die wir addieren möchten	9 8 4 5 1 4 2 3 7 9 0 6
Die Summe	1 9 1 7 4

Tabelle 1: Übersetzung des Beispiels zum Additionsverfahren: 9845+1423+7906. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 41)

Das Gleiche gilt für das Subtraktionsverfahren. Der einzige Unterschied zum heutigen Verfahren ist die angegebene Reihenfolge von Subtrahend und Minuend, die Berechnung ist aber die gleiche (siehe Tabelle 2).

Subtrahend	7 0 3 6
Minuend	9 8 5 7 9 2
Differenz	9 7 8 7 5 6

Tabelle 2: Übersetzung des Beispiels zum Subtraktionsverfahren: 985792-7036. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 43)

Zur Multiplikation gibt al-Kaschi mehrere Alternativen vor. Das erste Verfahren, das er beschreibt, ist die Multiplikationstafel / das Multiplikationsgitter.

Die früheste Erwähnung der Gittermethode in der islamischen Mathematik findet sich bei Ibn al-Banna' al-Marrakushi (1256-1321) in seinem Werk *Talkhīṣ a'māl al-ḥisāb* (Ende des 13. Jh.), und sie wurde zuvor bereits in einem Kommentar zum Buch *Lilavati* (12. Jh.) vom indischen Mathematiker Bhaskaracharya (1114-1185) erwähnt (Chabert & Barbin, 1999). Der Erfinder des Multiplikationsgitters ist al-Kaschi also nicht, wohl aber derjenige, der auf die Idee kam, das bekannte Gitter um 45° zu drehen, was die Addition der einzelnen Produkte intuitiver gestaltet, denn die Drehung erlaubt das Summieren von oben nach unten, statt diagonal, wie bei der Gittermethode bis dato üblich (siehe Tabelle 3).

Das Multiplikationsverfahren mithilfe einer Multiplikationstafel mag auf den ersten Blick ungewohnt erscheinen, durchläuft aber die gleichen Schritte wie beim heute üblichen Multiplikationsverfahren, bei dem Multiplikator und Multiplikand nebeneinander aufgeschrieben werden. Zu Beginn der Multiplikation mittels Multiplikationstafel (auch Multiplikationsgitter genannt), in der Form ohne Drehung um 45° heutzutage auch unter dem Namen Gelosia-Methode bekannt, schreibt man als erstes den Multiplikator von mittig links diagonal nach mittig oben und den Multiplikanden von mittig oben diagonal nach mittig rechts auf. Es werden Linien im 90° Winkel zwischen den einzelnen Zahlen gezogen, sodass sich das charakteristische Gitter bildet. Da al-Kaschis Gitter um 45° gedreht ist, können nun noch senkrechte Linien gezogen werden, die die einzelnen Kästchen halbieren und das Zusammenrechnen später erleichtern. Nun werden dort, wo sich die einzelnen Stellen der beiden Faktoren treffen, diese miteinander multipliziert. Die Produkte werden notiert, wobei ein eventuell auftretender Überschuss im Stellenwertsystem direkt in den linken Teil des Kästchens geschrieben wird. Die einzelnen Produkte werden anhand ihrer Stelle addiert, wobei die senkrechten Linien jeweils vorgeben, welche Produkte zusammenaddiert werden müssen. In der untersten Zeile stehen die Überschusszahlen, die „Zahlen im Sinn“, die bei der Addition anfallen.

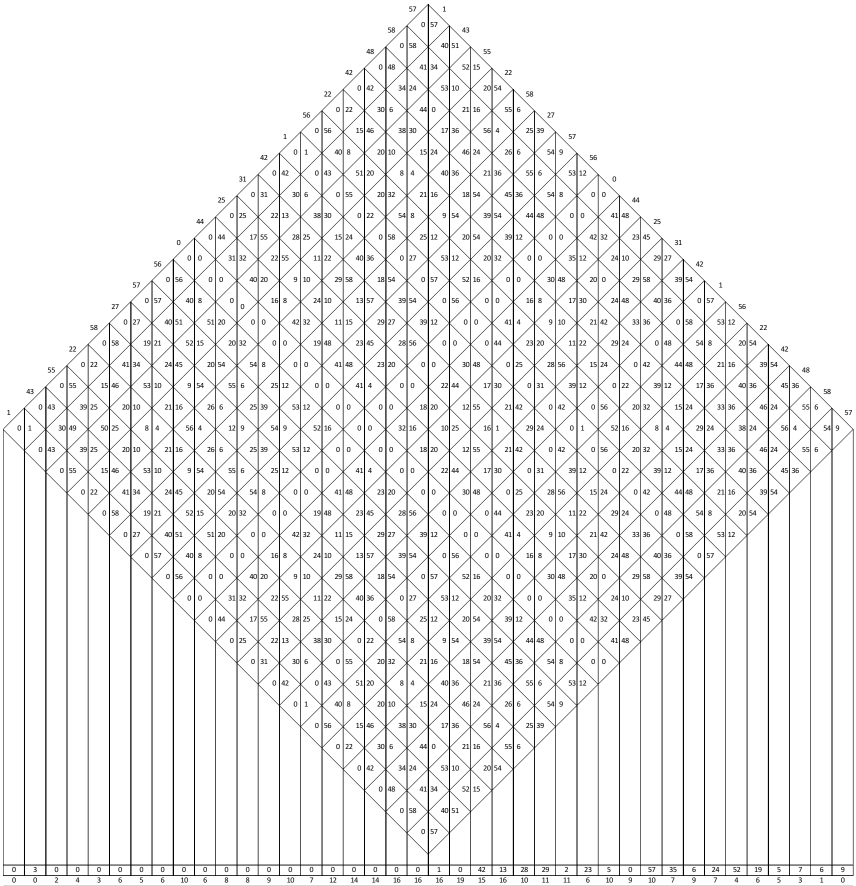


Tabelle 3: Multiplikationstafel für das Quadrat der Sexagesimalzahl 1,43,55,22,58,27,57,56,0,44,25,31,42,1,56,22,42,48,58,57. Quelle: Eigene Darstellung

So wie Grundschüler heute die einzelnen Produkte der Zahlen 1 bis 9 in einer Multiplikationstabelle nachschlagen können, so konnten die Mathematiker damals die Produkte der Zahlen 1 bis 59 in einer Tabelle ablesen und direkt in der Tafel eintragen.

1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57	*	1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57
																				1	38	43	36	49	32	34	2	12	42	12	15	6	55	50	33	34	40	32	0	9
																			1	40	27	32	12	31	2	0	8	42	56	40	38	37	52	29	57	23	20	59	6	
																		1	23	8	18	22	46	22	20	48	35	32	25	21	37	33	6	10	15	11	9	36		
																	1	12	44	46	4	55	34	33	12	31	5	52	11	25	21	27	53	58	17	15	54			
																0	38	6	18	25	26	15	14	32	16	17	21	37	24	42	40	19	41	57	36	54				
															1	36	59	41	26	34	6	4	16	41	27	49	35	13	48	37	11	57	43	1	12					
														0	1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57						
													1	12	44	46	4	55	34	33	12	31	5	52	11	25	21	27	53	58	17	15	54							
												0	53	41	36	52	12	26	55	56	22	57	11	22	43	0	7	44	7	18	27	27								
											0	43	18	4	34	21	39	8	20	18	30	38	12	30	48	29	27	50	24	33	45									
										1	16	12	36	50	52	30	29	4	32	34	43	14	49	25	20	39	23	55	13	48										
									0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0											
								1	36	59	41	26	34	6	4	16	41	27	49	35	13	48	37	11	57	43	1	12												
							1	38	43	36	49	32	34	2	12	42	12	15	6	55	50	33	34	40	32	0	9													
						0	46	45	55	20	18	35	4	12	19	59	29	15	54	52	22	13	16	2	31	39														
					1	40	27	32	12	31	2	0	8	42	56	40	38	37	52	29	57	23	20	59	6															
				0	38	6	18	25	26	15	14	32	16	17	21	37	24	42	40	19	41	57	36	54																
			1	35	15	46	3	35	38	6	20	40	43	24	3	31	46	40	49	14	54	2	15																	
		1	14	28	41	27	54	2	31	8	31	50	17	43	7	23	24	16	41	6	14	51																		
	0	1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57																			
	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	42	13	28	29	2	23	5	0	57	35	6	24	52	19	5	7	6	9

																					1	41	52	21	55	26	55	53	0	42	24	30	39	1	53	21	40	46	56	54
																				1	42	53	22	56	27	56	54	0	42	24	30	40	1	54	21	41	47	56	55	
																			1	35	44	18	46	22	46	44	0	35	20	25	33	1	45	18	34	39	47	45		
																		1	30	38	16	40	19	40	39	0	31	17	22	29	1	39	15	29	34	41	39			
																	0	16	20	8	21	10	21	20	0	16	9	11	15	0	20	8	15	17	21	20				
																1	40	51	21	54	26	54	52	0	41	23	29	39	1	52	21	39	45	55	53					
															0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						
														1	30	38	16	40	19	40	39	0	31	17	22	29	1	39	15	29	34	41	39							
													0	22	28	11	30	14	29	28	0	22	13	16	21	1	29	11	22	25	30	29								
												0	18	23	9	24	11	24	23	0	18	10	13	17	0	23	9	17	20	24	23									
											1	32	40	16	42	20	42	41	0	32	18	23	30	1	41	16	31	35	43	41										
										0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0											
									1	40	51	21	54	26	54	52	0	41	23	29	39	1	52	21	39	45	55	53												
								1	41	52	21	55	26	55	53	0	42	24	30	39	1	53	21	40	46	56	54													
							0	19	24	10	26	12	26	25	0	19	11	14	18	0	25	10	19	22	26	25														
						1	42	53	22	56	27	56	54	0	42	24	30	40	1	54	21	41	47	56	55															
					0	16	20	8	21	10	21	20	0	16	9	11	15	0	20	8	15	17	21	20																
				1	40	50	21	53	25	53	51	0	40	23	29	38	1	51	20	39	44	54	52																	
			1	31	39	16	41	20	41	40	0	31	18	22	30	1	40	16	30	35	42	40																		
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																			

Tabelle 4: Quadrat der Sexagesimalzahl 1,43,55,22,58,27,57,56,0,44,25,31,42,1,56, 22,42,48,58,57 mit der heute üblichen schriftlichen Multiplikation gelöst. Quelle: Eigene Darstellung

Die Vorteile einer solchen Tafel liegen in der Übersichtlichkeit und in der Ausführlichkeit der Tafel. Dank der Gitterstruktur muss sich der Rechnende weder Gedanken über den Stellenwert von Ziffern machen noch unterhalb welcher Ziffer sie eingetragen werden müssen. Außerdem müssen bei der Multiplikation der Faktoren keine Überschusszahlen gemerkt werden, sondern die Zahl wird mitsamt der nächsten Stelle hingeschrieben. Wo also im heutigen Verfahren der Rechner sich bei der Multiplikation der Dezimalzahlen $28 \cdot 18$ bei den Faktoren $8 \cdot 8$ die 4 notieren und die 6 „im Sinn“ merken müsste, könnte er sie bei einer Multiplikationstafel direkt in die jeweiligen Felder eintragen. Dieser Vorteil wird insbesondere im Sexagesimalsystem deutlich, wo die Zahl „im Sinn“ von 1 bis 58 (das größtmögliche Produkt, das bei einer Tafel vorkommen kann, beträgt $59;0 \cdot 59;0 = 58,1;0$) reichen kann, und wo bei einer größeren Zahl eine entsprechend hohe Anzahl dieser Überschusszahlen leicht zu einem Rechenfehler führen kann.

In Tabelle 4 ist die Berechnung der gleichen Quadratzahl wie in Tabelle 3 mit der modernen Multiplikationsmethode abgebildet. Unterhalb der Multiplikation stehen dabei die „Zahlen im Sinn“, die bei der Multiplikation anfallen und die man im Kopf zum jeweils nächsten Produkt dazurechnen muss.

Der Nachteil der Gittermethode liegt im höheren Aufwand, der bei der Erstellung zu leisten ist. Insbesondere, wenn die Linien gerade sein sollen, um die korrekte Stelle in der Multiplikation zu gewährleisten. Bei längeren Zahlen ist das Ziehen von Hilfslinien allerdings auch bei der heute üblichen schriftlichen Multiplikation angeraten.

Al-Kaschi gibt als Alternative zur Gittermethode auch eine Anleitung zum Aufbau ohne Hilfslinien an und erläutert die zweite Methode, bei der er die Produkte der einzelnen Ziffern immer mit einer Stelle übersprungen hinschreibt. Als Beispiel gibt er $456 \cdot 2783$ an und erhält das Tabelle 5 zu entnehmende Ergebni. Die erste Zeile enthält $6 \cdot 3$ und $6 \cdot 7$, darunter finden sich die übersprungenen Stelle $6 \cdot 8$ und $6 \cdot 2$ entsprechend um eine Stelle nach links verschoben usw. Das Vorgehen ähnelt bereits dem heute gebräuchlichen Verfahren und erfordert ebenfalls kein Merken von Überschusszahlen bei den einzelnen Produkten.

			4	2	1	8
		1	2	4	8	
		3	5	1	5	
	1	0	4	0		
	2	8	1	2		
	8	3	2			
1	2	6	9	0	4	8

Tabelle 5: Berechnung von $456 \cdot 2783$ *mit Hilfe der zweiten Multiplikationsmethode. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 59)*

Bei größeren Zahlen rät er dazu, eine Tabelle mit dem Vielfachen dieser Zahl anzulegen, indem die Zahl immer wieder zu sich selbst und der daraus resultierenden

Summe addiert wird. Die entsprechenden Produkte der Zahl mit den Faktoren 1-9 sind dieser Tabelle zu entnehmen und zu addieren.

Bei der Division gibt al-Kaschi drei Vorgehensweisen an. Die ersten beiden unterscheidet er dabei in jeweils zwei verschiedene Fälle, denen aber die gleichen Berechnungen zugrunde liegen.

Der erste Fall						
			7	5	0	7
3	5	6	5	9	0	8
2	8					
	7					
	4	9				
	2	7				
		3	5			
	2	4	0			
	2	3	5			
			5			
			2	5		
			3	4		
			2	8		
				6		
				4	9	
				1	1	
					3	5
					8	3
				4	7	5
			4	7	5	
		4	7	5		
	4	7	5			

Der zweite Fall						
			7	5	0	7
3	5	6	5	9	0	8
2	8					
	7					
	4	9				
	2	7				
		3	5			
		4	0			
2	4	0	9	0	8	
2	3	5				
		5				
		2	5			
		3	4			
	3	4	0	8		
3	4	0	8			
2	8					
	6					
	4	9				
	1	1				
		3	5			
		8	3			
	4	7	5			

Tabelle 6: Übersetzung des Beispiels zum Divisionsverfahren: 3565908/475, erster und zweiter Fall. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 69)

Bei der ersten Vorgehensweise und dem ersten Fall beginnt man damit, den Dividenden in der zweiten Zeile aufzuschreiben und in Gruppen aus zwei Ziffern zu zerlegen, beginnend links. Unter die zweite Ziffer von links schreibt man weiter unten den Divisor hin. Nun wird überlegt, mit welcher größten Zahl die einzelnen

Ziffern des Divisors multipliziert werden, sodass die einzelnen Ergebnisse vom Dividenden subtrahiert werden können. Der Divisor wird dann um eine Stelle nach rechts verschoben und es wird erneut überlegt, welches die größtmögliche Zahl für die Multiplikation ist. Diese Schritte werden wiederholt, bis die Differenz der Subtraktion vom Dividenden und dem Vielfachen des Divisors kleiner ist als der Divisor. Die Vorgehensweise soll am Beispiel 3565908 / 475 verdeutlicht werden. Als erstes wird der Dividend 35 65 90 8 hingeschrieben und in 2er Gruppen zerlegt. Der Divisor 475 wird unten so hingeschrieben, dass die erste Ziffer des Divisors unter der ersten Zweiergruppe der Ziffern des Dividenden steht, also die 4 unter der 35. Die größtmögliche Zahl für die Multiplikation mit dem Divisor scheint auf den ersten Blick 8 zu sein, damit wäre aber der Minuend mit 36 kleiner als der Subtrahend des Produkts von $8 \cdot 7$. Die gesuchte Zahl ist also die 7, welche man oberhalb des Dividenden hinschreibt. Multipliziert mit 4 ergibt sie 28, diese schreibt man unterhalb der 35 und zieht einen Strich darunter, um zu verdeutlichen, dass man diese Zahlen bereits verwendet hat. Die Differenz ist 7 und mit der Ziffer 6 vom Dividenden oben wird sie zu 76. Davon zieht man das Produkt von $7 \cdot 7 = 49$ ab, das man mit der letzten Ziffer, der 9, oberhalb der 7 aufschreibt. Die Differenz ist 27, ergänzt um die Ziffer 5 von oben, von der man auf gleiche Weise das Produkt von $5 \cdot 5 = 25$ abzieht und man erhält 240. Der Divisor wird um eine Stelle nach rechts verschoben, oberhalb des ersten Divisors aufgeschrieben und man sieht, dass die Zahl 240 über der Ziffer 7 des neu aufgeschriebenen Divisors endet. Gesucht ist also der Faktor, mit welchem die Zahl 47 multipliziert die genannten Anforderungen erfüllt. Dies ist für die Zahl 5 der Fall. Es ergibt sich das Produkt 235, welches man unterhalb der Zahl 240 positioniert. Die Differenz ist 5 und mit der 9 von oben erhält man 59 von welchem man $5 \cdot 5 = 25$ abzieht, die Differenz 34 wird unterhalb hingeschrieben. Alle Ziffern des Divisors sind benutzt worden und man bewegt den Divisor erneut um eine Stelle nach rechts und schreibt ihn oberhalb des alten Divisors hin. Die Zahl 34 schließt mit der Ziffer 7 des Divisors ab und man müsste also einen Faktor für 47 finden. Da $47 > 34$ und nur natürliche Zahlen als Faktoren erlaubt sind, nimmt man den Faktor 0 und bewegt den Divisor erneut eine Stelle nach rechts. Nun schließt die Zahl 34 mit der Ziffer 4 des Divisors ab. Der gesuchte Faktor ist die Zahl 7 und mit den Schritten analog zum ersten Ziffernpaar erhält man den Rest 83, der kleiner ist als der Divisor 475. Das Ergebnis ist also $7507 + \frac{83}{475}$. Beim zweiten Fall wird der Divisor unten nicht bewegt, nur einmal hingeschrieben und jedes Mal, wenn alle Ziffern des Divisors einmal mit dem gesuchten Faktor multipliziert wurden, wird ein Querstrich gezogen und die verbleibenden Zahlen des Dividenden werden um eine Stelle nach links verschoben hingeschrieben. Dann beginnt man wieder mit der Suche nach dem größtmöglichen Faktor, welcher die Bedingungen wie beim ersten Fall erfüllt. Das Hinschreiben der Produkte der Ziffern des Divisors und des

Quotienten ist dabei eine Variante, die al-Kaschi für Anfänger empfiehlt. Er gibt aber auch eine Variante an, bei der man nur die Differenz hinschreibt.

Die zweite von al-Kaschi genannte Vorgehensweise ähnelt stark dem heute noch an der Grundschule gelehrten Verfahren, das von den auszuführenden Schritten her in ähnlicher Form auch schon von al-Chwārizmī beschrieben wurde (Ḫwārizmī & Folkerts, 1997). Es werden beim Dividenden direkt so viele Ziffern wie nötig benutzt, um ein Vielfaches (Faktor 1-9) des Divisors, den al-Kaschi wieder unten notiert, davon abziehen zu können (siehe Tabelle 7). Auch hier unterscheidet al-Kaschi wieder zwei Fälle, bei denen analog zu den Fällen bei der ersten Vorgehensweise einmal der Divisor unten bewegt wird und einmal die jeweilige Differenz ergänzt um die Ziffern des Dividenden.

			7	5	0	7
3	5	6	5	9	0	8
3	3	2	5			
	2	4				
	2	3	7	5		
			3	4		
			3	3	2	5
					8	3
				4	7	5
			4	7	5	
		4	7	5		
	4	7	5			

Tabelle 7: Beispiel zur zweiten Methode, 2. Fall, Division: 3565908/475. Eigene Darstellung

Die dritte Vorgehensweise, welche er beschreibt, ist eher eine Ergänzung zur zweiten. Al-Kaschi rät für große Divisoren bzw. bei einer großen Differenz zwischen Divisor und Dividenden, analog dem Multiplikationsverfahren eine Tabelle mit dem Vielfachen des Divisors anzulegen, indem der Divisor immer wieder zu sich selbst addiert wird. Danach erfolgt ein Vorgehen, das analog zur zweiten Methode durchgeführt wird.

Das Schriftliche Verfahren zum Ziehen der zweiten, fünften und n-ten Wurzel

Al-Kaschi beginnt das fünfte Kapitel der ersten Abhandlung mit der Erläuterung der Begrifflichkeiten. Im gesamten fünften Kapitel der zweiten Abhandlung verwendet er Dezimalzahlen und folglich sind auch die folgenden Zahlen im Dezimalsystem, falls nicht vorher deutlich beschrieben. Jede Zahl wird mit sich selbst multipliziert, dann mit dem Produkt daraus, wieder mit dem Produkt daraus usw. Er benennt für die Zahl a die Produkte wie folgt:

$$\begin{aligned}
&a \cdot 1 := \textit{Wurzel}\\
&a \cdot a := \textit{arab. mal (übersetzt Vieh) /Quadrat}\\
&a \cdot a \cdot a := \textit{gewürfelt /kubisch /Würfel}\\
&a \cdot a \cdot a \cdot a := \textit{Quadrat-Quadrat}\\
&a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a := \textit{Quadrat-Würfel}\\
&a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a := \textit{Würfel-Würfel}\\
&\textit{usw.}
\end{aligned} \tag{1}$$

Er bezeichnet a als Wurzel, da es die entsprechende Wurzel aus den Produkten mit sich selbst ist. So führt er es als (Quadrat-) Wurzel aus $a \cdot a$ und als Kubikwurzel aus $a \cdot a \cdot a$ auf. Er erkennt also, dass gilt:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt[2]{a \cdot a} \text{ und}\\
a &= \sqrt[3]{a \cdot a \cdot a}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Die Exponenten definiert er additiv, nicht multiplikativ. So wäre z.B. Quadrat-Würfel-Würfel gleich $a^{2+3+3} = a^8 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Er unterteilt die Potenzen in zwei Gruppen: die perfekten (in der Übersetzung: perfect; im Originaltext: muntaq [hörbar]) und die nicht perfekten (in der Übersetzung: imperfect; im Originaltext: asamm [taub]) Potenzen. Die perfekten Potenzen sind solche, deren Wurzeln eine Natürliche Zahl ergeben.

Er erkennt bei den verschiedenen Wurzeln einen gleichmäßigen Zyklus aus perfekten und nicht perfekten Potenzen. Bei den Quadratwurzeln befinden sich die perfekten Potenzen an der Stelle 1^2, 10^2, 100^2 usw. Entsprechend teilt er den Radikanden in 2er Gruppen ein, beginnend rechts. Bei einer Kubikwurzel sind die perfekten Potenzen an den Stellen 1^3, 10^3, 100^3, usw. Zur Berechnung einer kubischen Wurzel (Würfel) würde er den Radikanden also in 3er-, zur Berechnung von Quadrat-Quadrat in 4er-, Quadrat-Würfel in 5er-Gruppen einteilen und so fort.

Das schriftliche Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel Für die Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl B bestehend aus den Ziffern $b_n b_{n-1} \ldots b_3 b_2 b_1$ und unter der Annahme, dass bei einer ungeraden Anzahl von Ziffern $b_n = 0$ gesetzt wird, würde er B also wie folgt in Ziffernpaare zerlegen:

$$B = b_n b_{n-1} \cdot 10^{n-2} + b_{n-2} b_{n-3} \cdot 10^{n-4} + ... + b_2 b_1 \cdot 10^{n-n}. \tag{3}$$

Die Potenzen von 10 erwähnt er dabei nicht, was aufgrund des Stellenwertsystems durch die Tabellenform, mit der er arbeitet, auch nicht notwendig ist. Der Vollständigkeit halber wird im Folgenden auch weiterhin die jeweilige 10er-Potenz mit angegeben.

Der nächste Schritt seines Verfahrens ist nun, eine Zahl a_1 zu finden, sodass gilt: $a_1^2 \leqslant b_n b_{n-1}$. Da $b_n b_{n-1} \leqslant 99$, ist $a_1 \leqslant 9$ und a_1 ist die erste gesuchte Ziffer der Wurzel $a_1 a_2 ... a_{\frac{n}{2}}$. Nun bildet er die Differenz aus der Zahl B und dem Quadrat von $a_1 \cdot 10^{n-2}$:

$$\begin{multline} B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2}\right)^2 = \\ \left(b_n b_{n-1} - a_1^2\right) \cdot 10^{n-2} + b_{n-2} b_{n-3} \cdot 10^{n-4} + ... + b_2 b_1 \cdot 10^{n-n} \end{multline} \tag{4}$$

und ermittelt die nächste Ziffer der Wurzel, indem er die größtmögliche Zahl a_2 sucht, für die die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-4}\right)^2 \geqslant 0. \tag{5}$$

Um a_2 zu bestimmen nutzt er die binomische Formel, ohne diese explizit zu formulieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} &B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-4}\right)^2 \\ =&B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2}\right)^2 + \left(2 \cdot a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-4}\right) a_2 \cdot 10^{n-4} \end{aligned} \tag{6}$$

und da $B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2}\right)^2$ bereits bekannt ist, braucht al-Kaschi lediglich die Zahl a_1 zu verdoppeln und a_2 möglichst groß zu wählen, sodass noch gilt:

$$B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2}\right)^2 \geqslant \left(2 \cdot a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-4}\right) a_2 \cdot 10^{n-4}. \tag{7}$$

Die gleiche Vorgehensweise wird nun auf die restlichen Ziffern der Wurzel angewendet. Für die nächste Stelle a_3 würde er entsprechend

$$\begin{aligned} B - \left(a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-4}\right)^2 \\ \geqslant \left[2 \cdot \left(a_1 \cdot 10^{n-2} + a_2 \cdot 10^{n-4}\right) + a_3 \cdot 10^{n-6}\right] a_3 \cdot 10^{n-6} \end{aligned} \tag{8}$$

abschätzen, dann das gleiche für a_4 und so fort, bis alle Stellen berechnet sind.

Sofern die Berechnung einen Rest liefert, wendet er ein Verfahren an, das man heute als lineare Interpolation bezeichnet. Er geht dabei wie folgt vor:

Sei a die Wurzel, x das ganzzahlige Ergebnis und R der Rest. Al-Kaschi weiß, dass sein ganzzahliges Ergebnis quadriert kleiner ist als der Radikand, da er einen Rest erhalten hat. Es gilt also:

$$a^2 - x^2 = R \Rightarrow a > x \text{ und } (x+1)^2 > a^2. \tag{9}$$

Der genaue Wert von a liegt also zwischen x und $x + 1$ und mit dem Rest ergibt sich für eine lineare Interpolation:

$$a \approx x + \frac{R}{(x+1)^2 - x^2} = x + \frac{R}{2x+1}. \tag{10}$$

Die Wurzelfunktion ist zwar nicht linear, jedoch liefert die lineare Interpolation bei der Betrachtung von kleinen Intervallen gute Näherungswerte (Strick, 2020).

Das vorgestellte Verfahren soll im Folgenden einmal am Beispiel $\sqrt[2]{331781}$ (siehe Tabelle 8), das so auch von al-Kaschi in der Abhandlung benutzt wird, mit Zahlen erläutert werden.

Zunächst schreibt al-Kaschi den Radikanden oben hin und unterteilt die Ziffern in 2er-Gruppen, beginnend rechts. Er zerlegt die Zahl 331781 also in $33 \cdot 100^2 + 17 \cdot 10^2 + 81 \cdot 1^2$. Gesucht ist nun die größte Zahl, deren Quadrat noch kleiner als die Zahl bestehend aus den ersten beiden Ziffern des Radikanden ist. Für die Zahl 33 ist das nächstkleinere Quadrat einer natürlichen Zahl die Zahl 25 und die gesuchte Zahl ist somit die 5. Die gefundene Zahl wird oberhalb und unterhalb der rechten Ziffer der zugehörigen 2er-Gruppe notiert. Die gefundene Zahl wird nun zur unten eingetragenen Zahl addiert und das Ergebnis oberhalb der unten notierten Zahl um eine Stelle nach rechts verschoben aufgeschrieben. Also $5 + 5 = 10$ und diese 10 um eine Stelle nach rechts verschoben. So landet die Zehnerstelle oberhalb der 5. Für die nächste Stelle der Wurzel muss nun gelten: $(100 + x) \cdot x \leqslant 817$. Man erkennt schnell, dass $x = 8$ zu groß ist und $x = 7$ passt. Die 7 wird neben der 10 eingetragen und oberhalb der zugehörigen 2er-Gruppe, der 17, als Ergebnis notiert. Er berechnet dann 7-mal den einen Hunderter, zieht dies von den 8 Hundertern ab und erhält 1 Hunderter als Ergebnis. Zusammen mit der 2er-Gruppe 17 erhält er den Minuenden 117 und aus $7 \cdot 7$ erhält er den Subtrahenden 49. Die Differenz ist 68 und er notiert sie unterhalb der 49. Zuletzt addiert er die 7 zu den 107 unten, erhält 114 und schreibt diese um eine Stelle nach rechts verschoben oberhalb der 107 hin. Gesucht ist nun die größte natürliche Zahl x, für die gilt: $(1140 + x) \cdot x \leqslant 6881$. Man sieht, dass die Zahlen 5 oder 6 in Frage kommen und durch Ausprobieren erhält man: $(1140 + 6) \cdot 6 = 6876 < 6881$. Die dritte gesuchte Zahl ist also die Zahl 6, die in der Spalte der letzten 2er Gruppe oberhalb des Radikanden und unten neben der 114 notiert wird. Al-Kaschi zieht nun wieder die Hunderter, Zehner und Einer getrennt vom Rest des Radikanden ab und zwar jeweils das 6-fache. Also 68 Hunderter minus 6-mal 11 Hunderter, 28 Zehner minus 6-mal 4 Zehner und 41 Einer minus 6-mal 6 Einer.

5		7		6	
3	3	1	7	8	1
2	5				
	8				
	7				
	1				
		4	9		
		6	8		
		6	6		
			2		
			2	4	
				4	
				3	6
					5
		1	1	4	6
	1	0	7		
	5				

Tabelle 8: Schriftliches Ziehen der Quadratwurzel aus der Zahl 331781. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 85)

Dass die Vorgehensweise des getrennten Subtrahierens von Hundertern / Zehnern / Einern unvorteilhaft ist – ein unnötiger Mehraufwand durch die Trennung - hat auch al-Kaschi erkannt und die Methode zu einem späteren Zeitpunkt überarbeitet (siehe Tabelle 9). Die verkürzte und übersichtlichere Vorgehensweise ist die in

Tabelle 9 zu findende, die er so auch im Anschluss an sein Verfahren in Miftah al-Hisab dem Leser präsentiert.

5		7		6	
3	3	1	7	8	1
2	5				
	8				
	7	4	9		
		6	8		
		6	8	7	6
					5
		1	1	4	6
	1	0	7		
	5				

Tabelle 9: Überarbeitete Methode zum schriftlichen Wurzelziehen am Beispiel der Quadratwurzel aus der Zahl 331781. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 87)

Als Rest bleiben 5 Einer übrig. Dieser Rest ist nicht perfekt. Er wird geteilt durch das Doppelte des Radikanden und vermehrt um 1 dem Ergebnis hinzugefügt. Im vorliegenden Beispiel wäre das Endergebnis also: $576 + \frac{5}{576 \cdot 2+1} = 576 + \frac{5}{1153} = 576{,}004336513...$

Ein auf 9 Nachkommastellen genauer Wert der Wurzel von 331781 beträgt $576{,}004340261\ldots$. Es liegt also eine Abweichung von weniger als 0,000007% vor, was eine hohe Genauigkeit von al-Kaschis Verfahren nahelegt.

Das schriftliche Verfahren zur Berechnung der fünften Wurzel Ein Beispiel, welches das Ziehen der 5. Wurzel aus der Zahl 44.240.899.506.197 behandelt - übernommen aus *Miftah al-Hisab* (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 103) - findet sich am Ende dieses Kapitels. Im Folgenden soll das allgemeine Ziehen der fünften Wurzel erläutert werden - ein Abgleich mit dem genannten Beispiel ist beim Nachvollziehen der einzelnen Schritte mindestens hilfreich. Die Grundidee hinter dem Verfahren ist die gleiche wie bei der quadratischen Wurzel und soll im anschließenden Kapitel, *Das schriftliche Verfahren zur Berechnung der n-ten Wurzel*, näher erläutert werden.

Das Ziehen der Quadrat-Würfel Wurzel, also der fünften Wurzel, beginnt zunächst wie das Ziehen der Quadratwurzel. Man beginnt, indem man den Radikanden hinschreibt und, da der Zyklus der perfekten Potenzen bei Quadrat-Würfel fünf beträgt, die Ziffern in 5er-Gruppen einteilt, beginnend rechts. Analog zur Quadratwurzel wählt man die Anzahl der Ziffern n von B so, dass sie ganzzahlig durch 5 teilbar sind, indem man nach Bedarf $b_n, ..., b_{n-3}$ gleich 0 setzt. Somit kann der Radikand wie folgt in 5er-Gruppen zerlegt werden:

$$B = b_n b_{n-1} b_{n-2} b_{n-3} b_{n-4} \cdot 10^{n-5} + ... + b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 \cdot 10^{n-n}. \tag{11}$$

Darunter benötigt man mehrere abgetrennte Bereiche, für jeden Grad der Wurzel einen. Der oberste Bereich ist für Quadrat-Würfel (fünfte Potenz), der darunter für die Quadrat-Quadrat (vierte Potenz) usw. bis man in den untersten Bereich für die Wurzel (erste Potenz) gelangt. Direkt unter dem Radikanden, unterhalb der linken Ziffern-Gruppe, notiert man die höchste 5. Potenz, für die noch gilt:

$$a_1^5 \leqslant b_n b_{n-1} b_{n-2} b_{n-3} b_{n-4} \tag{12}$$

und zieht die Differenz darunter.

Mit a_1 erhält man die erste Ziffer der Wurzel. Diese schreibt man in die erste Spalte oberhalb der ersten 5er-Gruppe und in die unterste Zeile, den Wurzelbereich, unterhalb von b_{n-4}. Die Zahl wird nun mit sich selbst multipliziert in die jeweils unterste Zeile des Quadratbereichs, das Ergebnis mit sich selbst multipliziert in den Würfelbereich und das Ergebnis mit sich selbst multipliziert in den Quadrat-Quadratbereich geschrieben. Der nächste Schritt ist das Verdoppeln von a_1, was man oberhalb von a_1 einträgt. Das Ergebnis wird mit a_1 multipliziert und oberhalb von a_1^2 im Quadratbereich notiert. Die beiden Zahlen im Quadratbereich werden addiert und oberhalb im selben Bereich aufgeschrieben. Im Quadratbereich stehen nun also von oben nach unten gesehen die Werte für $2a_1 \cdot a_1 + a_1^2 = 3a_1^2$, $2a_1 \cdot a_1 = 2a_1^2$ und a_1^2.

$3a_1^2$ wird mit a_1 multipliziert und in den Würfelbereich oberhalb von a_1^3 notiert. Beide Zahlen werden addiert und darüber aufgeschrieben. Im Würfelbereich stehen nun also von oben nach unten die Werte für $4a_1^3$, $3a_1^3$ und a_1^3.

$4a_1^3$ wird mit a_1 multipliziert und das Produkt in den Bereich für Quadrat-Quadrat oberhalb von a_1^4 eingetragen. Die beiden Werte werden addiert und im gleichen Bereich darüber eingetragen, sodass bei Quadrat-Quadrat nun von oben nach unten gelesen steht: $5a_1^4, 4a_1^4$ und a_1^4.

Nun schreibt man das 3-fache von a_1 oberhalb des Doppelten im Wurzelbereich hin. Dieser Wert wird mit a_1 multipliziert und das Ergebnis, wieder $3a_1^2$, oberhalb von $3a_1^2$ im Quadratbereich notiert. Beide Werte werden addiert und die Summe, $6a_1^2$, im selben Bereich darüber aufgeschrieben.

Diese Summe wird, mit a_1 multipliziert, im Würfelbereich direkt über dem Wert für $4a_1^3$ notiert und die Summe aus den beiden Zahlen wird darüber aufgeschrieben. Danach wird das 4-fache von a_1 über das 3-fache im Wurzelbereich geschrieben und mit a_1 multipliziert oberhalb der im vorherigen Schritt berechneten Summe im Quadratbereich notiert. Beides wird aufsummiert und das Ergebnis, $6a_1^2 + 4a_1^2$, darüber aufgeschrieben.

Zuletzt schreibt man den Wert für das 5-fache von a_1 oberhalb des 4-fachen in den Wurzelbereich.

Von dem Quadrat-Quadratbereich bis zum Wurzelbereich, von oben nach unten gelesen, stehen in der Tabelle nun also die folgenden Werte (Komma als Trennzeichen von Zeilen, Semikolon als Trennzeichen von Bereichen):

$$5a_1^4, 4a_1^4, a_1^4; 10a_1^3, 6a_1^3, 4a_1^3, 3a_1^3, a_1^3; 10a_1^2, 4a_1^2, 6a_1^2, 3a_1^2, 3a_1^2, 2a_1^2, a_1^2;$$
$$5a_1, 4a_1, 3a_1, 2a_1, a_1.$$

Die auftretenden Koeffizienten der Potenzen von a_1 – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 – entsprechen, teilweise in Summe, den Binomialkoeffizienten der sechsten Zeile, von oben gesehen, im Pascal‘schen Dreieck. Diese Koeffizienten werden für die schnelle Umformung von Binomen wie z.B. $(a_1+a_2)^5 = a_1^5+5a_1^4a_2+10a_1^3a_2^2+10a_1^2a_2^3+5a_1a_2^4+a_2^5$ benötigt.

Das Dreieck, das sich aus den Binomialkoeffizienten bildet, war den islamischen Mathematikern spätestens seit dem 11. Jh. bekannt und wurde unter anderem von Abu al-Karaji (ca. 950 – ca. 1030) beschrieben. Das entsprechende Werk von al-Karaji ist nicht überliefert, aber in seiner Abhandlung *al-Bahir* nimmt As-Samaw'al ibn Yahya al-Maghribī (ca.1130 – ca. 1180) darauf Bezug und beschreibt unter anderem ein Verfahren zum Finden von Nullstellen, das heute unter dem Begriff Horner-Schema bekannt ist. Sowohl das Binomialkoeffizienten-Dreieck, als auch das Verfahren zum Finden von Nullstellen wird von al-Kaschi bei seinem Vorgehen eingesetzt.

Al-Kaschi hat zwar alle Werte für den nächsten Schritt berechnet, diese sind aber noch nicht an der richtigen Stelle im Stellenwertsystem, das die Tabelle abbildet. Entsprechend versetzt man nun den Wert für $5a_1$ im Wurzelbereich um vier Stellen nach rechts und eine nach oben, wodurch er sich unterhalb der nächsten

Zyklusgruppe befindet; $10a_1^2$ im Quadratbereich wird um 3 Stellen nach rechts verschoben und eine darüber, $10a_1^3$ im Würfelbereich um zwei Stellen nach rechts und eine darüber und $5a_1^4$ wird im Quadrat-Quadratbereich um eine Stelle nach rechts und eine darüber verschoben. Damit sind alle Vorbereitungen für das Bestimmen der nächsten Ziffer der Wurzel abgeschlossen.

Al-Kaschi benötigt nun aber nicht das Ergebnis von $(a_1 + a_2)^5$. Zum einen, weil er von dem Radikanden B ja bereits $a_1^5 \cdot 10^{n-5}$ abgezogen hat und zum anderen, weil er berücksichtigen muss, dass die gesuchten Werte unterschiedliche Stellenwerte haben. Er sucht nun also die größtmögliche Zahl a_2 im einstelligen Zahlenbereich für die gilt:

$$5a_1^4a_2 \cdot 10^{n-6} + 10a_1^3a_2^2 \cdot 10^{n-7} + 10a_1^2a_2^3 \cdot 10^{n-8} + 5a_1a_2^4 \cdot 10^{n-9} + a_2^5 \cdot 10^{n-10} \leqslant B - a_1^5 \cdot 10^{n-5}. \quad (13)$$

Dies lässt sich mittels Horner-Schema wie folgt ausdrücken:

$$\left(\left(\left(\left(5a_1 \cdot 10^{n-9} + a_2 \cdot 10^{n-10}\right) a_2 + 10a_1^2 \cdot 10^{n-8}\right) a_2 + 10a_1^3 \cdot 10^{n-7}\right) a_2 + 5a_1^4 \cdot 10^{n-6}\right)a_2 \leqslant B - a_1^5 \cdot 10^{n-5}. \quad (14)$$

Durch Ausprobieren lässt sich nun die größtmögliche einstellige Zahl a_2 finden, die die Ungleichung noch erfüllt. Falls keine solche Zahl gefunden werden kann, da die Ungleichung bereits für $a_2 = 1$ ungültig ist, setzt man $a_2 = 0$.

Den für a_2 gefundenen Wert schreibt man in die Spalte der zweiten 5er-Gruppe von Ziffern des Radikanden einmal ganz oben in die Zeile des Ergebnisses und ganz unten im Wurzelbereich neben den Wert von $5a_1$. Wenn man alles richtig gemacht hat, dann steht der Wert von a_2 im Wurzelbereich in der gleichen Spalte wie b_{n-9}.

Um nun die nächste Ziffer der Wurzel, a_3, zu berechnen, multipliziert man die Zahl, die man aus $5a_1$ und a_2 in der Tabelle gebildet hat - also die Zahl $5a_1 \cdot 10^{n-9} + a_2 \cdot 10^{n-10}$, wenn man sie mit dem entsprechenden Stellenwert notiert – mit a_2 und schreibt diesen Wert, $5a_1a_2 \cdot 10^{n-9} + a_2^2 \cdot 10^{n-10}$, oberhalb der $10a_1^2 \cdot 10^{n-8}$ im Quadratbereich hin. Die letzte Ziffer dieser Zahl schließt wieder mit der Ziffer b_{n-9} ab. Die beiden Zahlen im Quadratbereich werden addiert und die Summe - $10a_1^2 \cdot 10^{n-8} + 5a_1a_2 \cdot 10^{n-9} + a_2^2 \cdot 10^{n-10}$ - darüber notiert. Diese Zahl wird, mit a_2 multipliziert, im Würfelbereich oberhalb von $10a_1^3 \cdot 10^{n-7}$ hingeschrieben. Die beiden Zahlen im Würfelbereich werden addiert und die Summe - $10a_1^3 \cdot 10^{n-7} + 10a_1^2a_2 \cdot 10^{n-8} + 5a_1a_2^2 \cdot 10^{n-9} + a_2^3 \cdot 10^{n-10}$ - wird oberhalb davon im Würfelbereich notiert. Diese Summe, mit a_2 multipliziert, schreibt man oberhalb von $5a_1^4 \cdot 10^{n-6}$ in den Quadrat-Quadratbereich und addiert beide Zahlen. Auf diese Weise erhält man die Summe $5a_1^4 \cdot 10^{n-6} + 10a_1^3a_2 \cdot 10^{n-7} + 10a_1^2a_2^2 \cdot 10^{n-8} + 5a_1a_2^3 \cdot 10^{n-9} + a_2^4 \cdot 10^{n-10}$, die mit a_2 multipliziert wird und das Produkt daraus wird unterhalb der Differenz aus $B - a_1^5 \cdot 10^{n-5} =: B_1$ hingeschrieben. Wird dieses Produkt nun von B_1 abgezogen, so erhält man:

$$\begin{aligned} B_1 - (5a_1^4 \cdot 10^{n-6} + 10a_1^3a_2 \cdot 10^{n-7} + 10a_1^2a_2^2 \cdot 10^{n-8} + 5a_1a_2^3 \cdot 10^{n-9} \\ + a_2^4 \cdot 10^{n-10}) \cdot a_2 = B - (a_1 \cdot 10 + a_2)^5 \cdot 10^{n-10} =: B_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Die nächsten Schritte erfolgen analog zum Vorgehen bei der ersten Zyklusspalte und dienen, wie bei der Hinführung zu (14) dazu, die benötigten Werte für die Ungleichung

$$\begin{aligned} \Big(((5\,[a_1 \cdot 10 + a_2] \cdot 10^{n-14} + a_3 \cdot 10^{n-15})a_3 + 10\,[a_1 \cdot 10 + a_2]^2 \cdot 10^{n-13})a_3 \\ +10\,[a_1 \cdot 10 + a_2]^3 \cdot 10^{n-12}\big)a_3 + 5\left[a_1 \cdot 10^{n-9} + a_2 \cdot 10^{n-10}\right]^4 \Big)a_3 \leqslant B_2 \end{aligned} \tag{16}$$

zu finden. So wie in (14) ausgenutzt wurde, dass bei dem Term $(x + y)^5$ mit bekanntem x der Wert für y mittels Horner-Schema bestimmt werden kann, so wird es auch bei (16) für den Term $([x + y] + z)^5$ mit bekanntem x und y genutzt. Entsprechend werden in (14) lediglich a_2 durch a_3 und a_1 durch $a_1 \cdot 10 + a_2$ ersetzt und, da in der Tabelle der nächste Zyklus betrachtet wird, um 5 Stellen nach rechts verschoben, also geteilt durch 10^5, um (16) zu erhalten.

Im Würfelbereich wird zu den $5a_1 \cdot 10^{n-9} + a_2 \cdot 10^{n-10}$ viermal $a_2 \cdot 10^{10-n}$ addiert und das Ergebnis jeweils darüber notiert. Von oben nach unten gelesen stehen dort also die Werte für $5a_1 \cdot 10^{n-9} + 5a_2 \cdot 10^{n-10}$; $5a_1 \cdot 10^{n-9} + 4a_2 \cdot 10^{n-10}$; $5a_1 \cdot 10^{n-9} + 3a_2 \cdot 10^{n-10}$; $5a_1 \cdot 10^{n-9} + 2a_2 \cdot 10^{n-10}$; $5a_1 \cdot 10^{n-9} + a_2 \cdot 10^{n-10}$.

Im Quadratbereich wird nun das a_2-fache der untersten Zeile des Wurzelbereichs zu den $10a_1^2 \cdot 10^{n-8}$ addiert und dem Ergebnis das a_2-fache der vorletzten Zeile des Wurzelbereichs darüber notiert usw. bis man das a_2-fache der vierten Zeile von unten des Wurzelbereichs hinzuaddiert hat. Auf diese Weise erhält man in der obersten Zeile des Quadratbereichs den Wert

$$10a_1^2 \cdot 10^{n-8} + 20a_1a_2 \cdot 10^{n-9} + 10a_2^2 \cdot 10^{n-10} = 10\,[a_1 \cdot 10 + a_2]^2 \cdot 10^{n-10}.$$

Im Würfelbereich werden nacheinander die nächsten unteren um a_2 vervielfachten Werte der Summen aus dem Quadratbereich hinzugerechnet und nach jedem Wert die Summe darüber gezogen. Zu der Summe $10a_1^3 \cdot 10^{n-7} + 10a_1^2a_2 \cdot 10^{n-8} + 5a_1a_2^2 \cdot 10^{n-9} + a_2^3 \cdot 10^{n-10}$ wird also zunächst $10a_1^2a_2 \cdot 10^{n-8} + 10a_1a_2^2 \cdot 10^{n-9} + 3a_2^3 \cdot 10^{n-10}$

hinzuaddiert und man erhält $10a_1^3 \cdot 10^{n-7} + 20a_1^2 a_2 \cdot 10^{n-8} + 15a_1 a_2^2 \cdot 10^{n-9} + 4a_2^3 \cdot 10^{n-10}$. Als nächstes addiert man $10a_1^2 a_2 \cdot 10^{n-8} + 15a_1 a_2^2 \cdot 10^{n-9} + 6a_2^3 \cdot 10^{n-10}$ hinzu und erhält $10a_1^3 \cdot 10^{n-7} + 20a_1^2 a_2 \cdot 10^{n-8} + 30a_1 a_2^2 \cdot 10^{n-9} + 10a_2^3 \cdot 10^{n-10} = 10\left[a_1 \cdot 10 + a_2\right]^3 \cdot 10^{n-10}$.

Zuletzt wird der benötigte Quadrat-Quadrat Wert berechnet. Im Quadrat-Quadratbereich steht bereits die Summe $5a_1^4 \cdot 10^{n-6} + 10a_1^3 a_2 \cdot 10^{n-7} + 10a_1^2 a_2^2 \cdot 10^{n-8} + 5a_1 a_2^3 \cdot 10^{n-9} + a_2^4 \cdot 10^{n-10}$. Zu dieser addiert man die vorletzte Summe aus dem Würfelbereich, vervielfacht um a_2. Es wird also $10a_1^3 a_2 \cdot 10^{n-7} + 20a_1^2 a_2^2 \cdot 10^{n-8} + 15a_1 a_2^3 \cdot 10^{n-9} + 4a_2^4 \cdot 10^{n-10}$ hinzugerechnet. Die Summe - $5a_1^4 \cdot 10^{n-6} + 20a_1^3 a_2 \cdot 10^{n-7} + 30a_1^2 a_2^2 \cdot 10^{n-8} + 20a_1 a_2^3 \cdot 10^{n-9} + 5a_2^4 \cdot 10^{n-10} = 5\left[a_1 \cdot 10 + a_2\right]^4 \cdot 10^{n-10}$ - wird darüber notiert.

Der letzte Schritt besteht im Verschieben der momentan obersten Zahl jedes Bereichs um 4 Stellen (Wurzel), 3 Stellen (Quadrat), 2 Stellen (Würfel) und 1 Stelle (Quadrat-Quadrat) nach rechts. Auf diese Weise hat man alle Zahlen erhalten, die in der Abschätzung (16) benutzt werden, mit Ausnahme von a_3. Dieses wird nun durch Ausprobieren, analog zu dem Vorgehen für a_2 gefunden.

Das gesamte Vorgehen wird nun so lange wiederholt, bis man alle n/5 Stellen der Wurzel gefunden hat.

In der letzten Spalte des perfekten Zyklus, also unterhalb der letzten Stelle der Wurzel, entsteht je nach Radikand bei der Berechnung von B_l mit $l = \frac{n}{5} - 1$ ein nicht perfekter Rest R, also eine Zahl, für die keine natürliche Zahl c gefunden werden kann, sodass gelten würde: $R = c^5$. Einen solchen Rest benutzt al-Kaschi analog zum gefundenen Rest bei der Quadratwurzel, indem er erneut mit linearer Interpolation eine Näherung bestimmt.

Bei der fünften Wurzel rechnet er die jeweils oberste Zeile der Bereiche von Wurzel bis Quadrat-Quadrat zusammen, addiert die Zahl 1 und teilt den Rest durch diese Summe. Mit a für den genauen Wert der Wurzel und x dem berechneten Wert $x = a_1 a_2 ... a_{\frac{n}{5}}$, versucht er wie bei der Quadratwurzel zu bestimmen, wo R auf der Strecke zwischen x und $x + 1$ „liegt", nur dass er diesmal Quadrat-Würfel statt Quadrat hat. Die Rechnung für die Wurzel mit Rest lautet also wie folgt:

$$a \approx x + \frac{R}{(x+1)^5 - x^5} = x + \frac{R}{5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x^1 + 1}. \tag{17}$$

Die Werte für $5x^4$, $10x^3$, $10x^2$ und $5x$ sind aber gerade das, was in der obersten Zeile eines jeden Bereichs steht und müssen daher nur noch addiert werden.

Auf der Ausklappseite finden sich zwei Tabellen, die beide auf dem von al-Kaschi im *Miftah al-Hisab* aufgeführten Beispiel, $\sqrt[5]{44240899506197}$, also $n = 15$, beruhen. Tabelle 10 ist dabei eine exakte Kopie der Tabelle auf Seite 103, die eine Übersetzung des Manuskripts darstellt. Tabelle 11 ist eine korrigierte und ins Deutsche übersetzte Version von Tabelle 10. Die rot gekennzeichneten Fehler / Auslassungen sind von den Übersetzern aus dem Manuskript übernommen, die grün markierten Fehler von ihnen selbst gemacht worden. Da al-Kaschi zu den richtigen Endergebnissen in den Bereichen kommt, ist anzunehmen, dass es sich im Manuskript um Abschreibungsfehler handelt. Eine mögliche Erklärung für das recht häufige Vertauschen von 7 und 8 durch die Übersetzer ist die Ähnlichkeit dieser Ziffern in der arabischen Schrift. So wird die 7 durch ٧ und die 8 durch ٨ dargestellt. Zusätzlich wurde in der korrigierten Version (siehe Tabelle 11) die platzsparende Variante durch die vollständige Darstellungsweise ersetzt, wie sie al-Kaschi wohl mit endloser Tinte und unbegrenztem Papier umgesetzt hätte.

Im Folgenden soll das Vorgehen zum Ziehen der fünften Wurzel nicht am Beispiel erläutert werden, da eine Beschreibung des Vorgehens zu genau diesem Beispiel sich bei J. L. Berggren: Mathematik im mittelalterlichen Islam (Berggren, 2011) findet [Anm.: In Abb. 2.26 auf Seite 65 müsste es korrekt heißen: $24213502 = D'$ und auf Seite 66 fehlt ein $\times$ zwischen der 5 und der 10^4 bei g(c).].

Row of the output	5				3					6				
Row of the number which is square-cube	4	4	2	4	0	8	9	9	5	0	6	1	9	7
	3	1	2	5										
	1	2	9	9										
	1	0	5	6	9	5	4	9	3					
		2	4	2	1	3	5	0	2					
		2	4	2	1	3	5	0	2	0	6	1	7	6
													2	1
Second of the number which is row of square-square			4	1	2	6	9	4	9	5	8	0	8	0
					9	1	3	6	5	9	0	3	8	4
			4	0	3	5	5	8	3	6	7	6	9	6
					9	0	3	4	3	1	7	6	9	6
			3	9	4	5	2	4	0	5				
		3	9	4	5	2	4	0	5					
			4	2	2	0	5	7	4					
		3	5	2	3	1	8	3	1					
			3	9	8	1	8	3	1					
		3	1	2	5									
	3	1	2	5										
	2	5	0	0										
		6	2	5										
Third of the number which is row of the cube					1	5	3	9	9	0	6	5	6	0
							1	7	1	4	1	4	9	6
					1	5	2	2	7	6	5	0	6	4
							1	7	0	4	5	4	4	
					1	5	0	5	7	1	9	6	1	
							1	6	9	4	9	6	1	
					1	4	8	8	7	7	0			
			1	4	8	8	7	7	0					
					8	1	9	1	2					
			1	4	0	6	6	5	8					
					8	9	5	8	1					
			1	3	2	2	2	7	7					
					7	7	2	7	7					
			1	2	5	0								
	1	2	5	0										
		7	5	0										
		5	0	0										
		3	7	5										
		1	2	5										
Fourth of the number which is row of the square					2	8	0	9	0					
							7	8	6					
					2	7	3	0	4					
							7	7	7					
					2	6	5	2	7					
							7	6	8					
					2	5	7	5	9					
							7	5	9					
					2	5	0							
								2	8	7	2	9	6	0
		2	5	0						1	6	0	4	4
								2	7	5	6	9	1	6
		1	0	0						1	6	0	0	7
		1	5	0				2	7	4	0	9	0	7
			7	5						1	5	9	7	2
			7	5				2	8	2	4	9	3	6
			5	0						1	5	9	3	6
			2	5				2	8	0	9	0		
Row of the root											2	6	8	0
			2	5					5					
			2	0							2	6	7	4
							2	6	2					8
			1	5										
			1	0					9				6	2
									6					
				5			2	5	3		2	6	5	6

Tabelle 10: Ziehen der 5. Wurzel aus der Zahl 44.240.899.506.197, fehlerhaftes Beispiel, übernommen aus Miftah al-Hisab. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 103)

Ergebnis	5					3					6				
Zeile / Bereich des Quadrat-Würfels	0	4	4	2	4	0	8	9	9	5	0	6	1	9	7
		3	1	2	5										
		1	2	9	9										
		1	0	5	6	9	5	4	9	3					
			2	4	2	1	3	5	0	2					
			2	4	2	1	3	5	0	2	0	6	1	7	6
														2	1
Zeile / Bereich des Quadrat-Quadrats				4	1	2	6	9	4	9	5	8	0	8	0
						9	1	3	6	5	9	0	3	8	4
				4	0	3	5	5	8	3	6	7	6	9	6
						9	0	3	4	3	1	7	6	9	6
				3	9	4	5	2	4	0	5				
			3	9	4	5	2	4	0	5					
				4	2	2	0	5	7	4					
			3	5	2	3	1	8	3	1					
				3	9	8	1	8	3	1					
			3	1	2	5									
		3	1	2	5										
		2	5	0	0										
			6	2	5										
Zeile / Bereich des Würfels						1	5	3	9	9	0	6	5	6	0
								1	7	1	4	1	4	9	6
						1	5	2	2	7	6	5	0	6	4
								1	7	0	4	5	4	4	8
						1	5	0	5	7	1	9	6	1	6
								1	6	9	4	9	6	1	6
						1	4	8	8	7	7	0			
				1	4	8	8	7	7	0					
						8	1	9	1	2					
				1	4	0	6	8	5	8					
						7	9	5	8	1					
				1	3	2	7	2	7	7					
						7	7	2	7	7					
				1	2	5	0								
		1	2	5	0										
			7	5	0										
			5	0	0										
			3	7	5										
			1	2	5										
Zeile / Bereich des Quadrats									2	8	7	2	9	6	0
											1	6	0	4	4
									2	8	5	6	9	1	6
											1	6	0	0	8
									2	8	4	0	9	0	8
											1	5	9	7	2
									2	8	2	4	9	3	6
											1	5	9	3	6
									2	8	0	9	0		
						2	8	0	9	0					
								7	8	6					
						2	7	3	0	4					
								7	7	7					
						2	6	5	2	7					
								7	6	8					
						2	5	7	5	9					
								7	5	9					
						2	5	0							
			2	5	0										
			1	0	0										
			1	5	0										
				7	5										
				7	5										
				5	0										
				2	5										
Zeile / Bereich der Wurzel												2	6	8	0
												2	6	7	4
												2	6	6	8
												2	6	6	2
												2	6	5	6
								2	6	5					
								2	6	2					
								2	5	9					
								2	5	6					
								2	5	3					
				2	5										
				2	0										
				1	5										
				1	0										
					5										

Tabelle 11: Beispiel aus Tabelle 10, korrigiert und übersetzt.

Das schriftliche Verfahren zur Berechnung der n-ten Wurzel Die zugrundeliegende Idee beim schriftlichen Wurzelziehen nach al-Kaschi ist dabei stets die gleiche und sie lässt sich auf beliebig große Zahlen mit k Ziffern und für n-te Wurzeln übertragen. Der Radikand B einer n-ten Wurzel – bei Bedarf mit vorangestelltem Nullen um eine Teilbarkeit der Anzahl der Ziffern von B durch n zu gewährleisten – lässt sich wie folgt aufschreiben:

$$B = \left(\sum_{i=1}^{\frac{k}{n}} a_i \cdot 10^{\frac{k-i\cdot n}{n}} \right)^n = a_1^n \cdot 10^{k-n} + ... + a_i^n + R \tag{18}$$

wobei k die Anzahl der Ziffern von B, R ein eventuell vorhandener Rest mit $R < a_i^n$ ist und die Umformung mit Hilfe der n+1-ten Reihe des Pascal'schen Dreiecks gelingt. Man sucht nun die größtmögliche Zahl a_1 für die gilt: $a_1^n \cdot 10^{k-n} \leqslant B$. Danach lässt sich mit der Abschätzung

$$\left(a_1 \cdot 10^{\frac{k-n}{n}} + a_2 \cdot 10^{\frac{k-2n}{n}} \right)^n \leqslant B \tag{19}$$

und unter Zuhilfenahme des Horner-Schemas a_2 bestimmen.

Diese Abschätzung gelingt, da $\binom{n}{1} a_1^{n-1} \cdot 10^{\frac{k-n}{n}} \cdot a_2 \cdot 10^{\frac{k-2n}{n}}$ den Großteil von $B - a_1^n \cdot 10^{\frac{k-n}{n}}$ ausmacht und man somit $a_2 \cdot 10^{\frac{k-2n}{n}}$ näherungsweise durch $(B - a_1^n)/\left(\binom{n}{1} a_1^{n-1} \cdot 10^{\frac{k-n}{n}}\right)$ bestimmen kann. Auf dieselbe Weise lassen sich danach alle a_i aus

$$\left(\sum_{l=1}^{i-1} \left(a_l \cdot 10^{\frac{k-l\cdot n}{n}} \right) + a_i \cdot 10^{\frac{k-i\cdot n}{n}} \right)^n \leqslant B \tag{20}$$

berechnen.

Al-Kaschis Vorgehen lässt sich also auf n-te Wurzeln übertragen, man benötigt dann eine Tabelle mit n Bereichen (plus Zeile für das Ergebnis) und, da die Größe der Binomialkoeffizienten schnell wächst, entsprechend viel Platz bei größeren Werten für n.

Das schriftliche Verfahren zum Wurzelziehen bei Sexagesimalzahlen Im fünften Kapitel der dritten Abhandlung erläutert al-Kaschi das Wurzelziehen bei Sexagesimalzahlen. Das Vorgehen unterscheidet sich kaum vom Wurzelziehen bei

Dezimalzahlen und soll deshalb hier nur an einem einfachen Beispiel aus der dritten Abhandlung demonstriert werden, um die Unterschiede zum Wurzelziehen bei Dezimalzahlen herauszuarbeiten. Ein umfangreicheres Beispiel zum Ziehen der 6. Wurzel aus einer Sexagesimalzahl findet sich im Anhang. Das Beispiel - die Quadratwurzel aus der Zahl 10,9,49;20 - (siehe Tabelle 12) wurde vom Englischen ins Deutsche übersetzt und aus *Miftah al-Hisab* übernommen. Lediglich der den Übersetzern unterlaufene Fehler bei der Grad-Stelle wurde korrigiert – aus 19 wurde 49 gemacht (grün markiert), wie es auch in Abschad-Zeichen im Manuskript zu finden ist.

Zweite Methode

	Minuten	Grad		Einmal Erhöht	
	20	49	9	10	
			36	9	
			33		
	1	16	33		
	59	33			
40	6	55	32		
20	53	23			
	40	19			
		41	48		
			24		

Erste Methode

Minuten		Grad		Einmal Erhöht	
40		41		24	
		20	49	9	10
				36	9
				33	
			48	32	
			1	1	
		1	18		
		19	33		
		40	32		
	40	39			
		14			
	20	24			
40	26				
20	53	23			
40	22	19			
		41	48		
				24	

Tabelle 12: Wurzelziehen bei Sexagesimalzahlen am übersetzten und korrigierten Beispiel: Quadratwurzel von 10,9,49;20. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 215)

Abgesehen von der Verwendung von Sexagesimalzahlen, dürfte der größte Unterschied das Notieren von rechts nach links sein. Ganz rechts und unterhalb des Ergebnisses steht die höchste Stelle, im Beispiel in Tabelle 5 ist das 10 dreimal erhöht, also $10 \cdot 60^3$. Links daneben steht das zweimal Erhöhte, gefolgt von dem einmal Erhöhten und den Grad.

Al-Kaschi bietet wieder einmal mehrere Herangehensweisen an. Bei der ausführlicher dargelegten ersten Methode zieht er die einzelnen Produkte aus der letzten Zahl der unteren Zeilen mit den Zahlen der jeweiligen Zeile einzeln vom Radikanden ab. Bei der zweiten Methode zieht er das komplette Produkt direkt ab. So ist im Beispiel in Tabelle 5 der Subtrahend $32,48$ aus $41 \cdot 48$ hervorgegangen und analog $18,1$ aus $41 \cdot 41$. Bei der zweiten Methode wird dafür nur ein Subtrahend benötigt, da direkt $41 \cdot 48,41 = 33,16,1$ berechnet wird. Die weiteren Berechnungen erfolgen analog zum Wurzelziehen mit Dezimalzahlen.

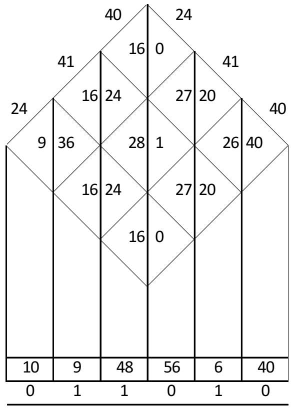


Tabelle 13: Probe zur Quadratwurzel: Multiplikationsgitter für die Quadratzahl 24,41,40. Quelle: Eigene Darstellung

Es bleibt ein Rest in Höhe von 23,53,20 Sekunden [Anm.: In der Übersetzung fälschlicherweise als 23;53,20 Sekunden geschrieben], was 23;53,20 Grad entspricht. Dies zur Quadratzahl von 24,41;40 Grad (10,9,48,56;6,40 Grad, siehe Tabelle 12) addiert, ergibt wieder den Radikanden. Das Ergebnis ist also korrekt. Al-Kaschi gibt, nachdem er das Beispiel beschrieben hat, noch einen Verweis auf seine *Abhandlung zum Kreisumfang*, in der er, wie er schreibt, viele dieser Quadratwurzeln aus großen Zahlen mithilfe ungewöhnlicher Tricks gezogen hat. Ein Teil der Berechnungstabellen zu diesen Wurzeln findet sich im Kapitel „Ein Verfahren zur Berechnung von Pi auf 17 Dezimalstellen genau“ sowie im Anhang dieser Arbeit.

Das Vorgehen – a_1 finden, quadriert abziehen, aus der Differenz a_2 bestimmen usw. – ist identisch zum Verfahren bei Dezimalzahlen und bedarf somit keiner erneuten Erklärung.

4.2 Die vierte Abhandlung: Geometrie

Die vierte Abhandlung besteht aus einer Einleitung, in der al-Kaschi Definitionen für die Grundbegriffe der Geometrie gibt: Elemente wie der Punkt, die Arten von Winkeln, etc. Es folgen 9 Kapitel, in denen al-Kaschi Formeln für die Berechnung der Fläche von Drei-, Vier- und von Vielecken angibt, sowie für die Fläche von Kreisen und anderen geometrischen Figuren, die nicht unter die vorher genannten fallen. Darüber hinaus liefert er Lösungen für die Bestimmung der Oberfläche von runden Objekten (Zylinder, etc.), dem Volumen von Körpern, sowohl aus Längenmaßen als auch aus dem Gewicht. Am Schluss steht ein Unterkapitel über die Maße von Gebäuden und Gebäudeteilen (Spitzbögen, Muqarnas – auch Stalaktitnische genannt - usw.) (Aydin, Hammoudi, & Bakbouk, 2020).

Vieles von dem, was al-Kaschi in der vierten Abhandlung beschreibt, ist natürlich schon seit der Antike bekannt, teilweise auch schon seit der Frühzeit. So finden sich geometrische Aufgabenstellungen mit Musterlösungen bereits auf dem *Papyrus Moskau 4676* (ca. 1850 v.Chr.) (Clagett, 1999). Die Beschreibung von geometrischen Elementen und ihre Zusammenhänge wurden ebenfalls schon in früheren Werken systematisch festgehalten – so z.B. im Werk *Elemente* von Euklid (ca. 3. Jhd. vor Chr.), dessen Sätze al-Kaschi bei seinen geometrischen Herleitungen benutzt (siehe das Kapitel „Iteratives Verfahren zur Bestimmung von Sinus 1°“) (Euclides & Thaer, 2015). Es ist demnach die umfangreiche Zusammenführung von Formeln, Lösungsmethoden (häufig mit alternativen Ansätzen), Beispielen und Skizzen, die *Miftah al-Hisab* als Lehrbuch auszeichnet.

Kosinussatz

Bei den Berechnungen zum Flächeninhalt von Dreiecken, die er für unterschiedliche Fälle und mit unterschiedlichen Methoden und Beispielen angibt, gelangt er auch zu einem Fall, bei dem zwei Seiten und der Winkel zwischen diesen Seiten bekannt ist. Da es im Arabischen keine Großbuchstaben gibt, werden im Folgenden die Punkte mit Kleinbuchstaben bezeichnet. a ist also der Punkt a, ab ist die Strecke $\overline{AB}$, usw. Der Lösungsweg, den er beschreibt, ist der folgende [eckige Klammern enthalten die heute übliche Notation]:

Er benennt die Seiten als ab [c], bc [a] und ac [b], wobei ab und bc bekannt sind. Den Winkel zwischen diesen beiden Seiten bezeichnet er mit b [β]. Er beschreibt seine Rechnung wie folgt:

$$ac = \sqrt{\left(bc - ab \cdot \frac{\text{Sin}(90^\circ - b)}{60}\right)^2 + \left(ab \cdot \frac{\text{Sin}(b)}{60}\right)^2}. \tag{21}$$

In moderner Notation würde man diesen Term folgendermaßen aufschreiben:

$$b = \sqrt{(a - c\sin(90^\circ - \beta))^2 + (c\sin(\beta))^2}. \tag{22}$$

Dies ist aber nichts anderes als:

$$b^2 = (a - c\cos(\beta))^2 + (c\sin(\beta))^2\,, \tag{23}$$

was ausmultipliziert

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \tag{24}$$

ergibt – den Kosinussatz.

Damit hat al-Kaschi als Erster den Kosinussatz explizit zur Triangulation beschrieben. Aus diesem Grund ist der Kosinussatz in Frankreich heute noch als „Théorème d'Al-Kaschi" bekannt (Strick, 2020). Die geometrische Herleitung ist deutlich älter und geht auf Euklids *Elemente* zurück, in dem Euklid im zweiten Buch, Proposition 12 und 13, die geometrische Herleitung für stumpf- und spitzwinklige Dreiecke beschreibt (Euclides & Thaer, 2015).

4.3 Die fünfte Abhandlung: Algebra

Die fünfte Abhandlung besteht aus vier Kapiteln und trägt die Überschrift „Über das Herausziehen [engl. extracting] von Unbekannten". Das erste Kapitel teilt al-Kaschi in zehn Unterkapitel ein und widmet diese dem Rechnen mit Termen mit einer unbekannten Größe (er benutzt das arab. Wort shai, übersetzt: Ding). Darin enthalten ist auch eine Tabelle, die die Multiplikation und Division von Potenzen erleichtern soll. So lassen sich darin Größen wie die zweite Potenz multipliziert mit der dritten Potenz gleich der fünften Potenz ablesen – oder al-Kaschis Lesart: Quadrat · Würfel ergibt Quadrat-Würfel. (Aydin, Hammoudi, & Bakbouk, 2020).

Vieles von dem, was al-Kaschi in diesen Unterkapiteln aufführt, wurde so auch bereits von früheren islamischen Mathematikern beschrieben – am bekanntesten dürfte der Namensursprung der Algebra selbst sein: Abu Dschaʿfar Muhammad ibn Musa al-Chwārizmī (ca.780 – ca. 850) mit seinem Werk *al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-ʾl-muqābala*, in dem er Äquivalenzumformungen von Termen mit Unbekannten beschreibt, die die Umformung eines Terms auf einen von sechs Typen quadratischer Gleichungen ermöglichen (al-Chuwarazmi & Karpinski, 1915). Darüber hinaus geht al-Kaschi auf das Lösen der sechs Terme ein und gibt einen Ausblick auf ein geplantes Buch von ihm, in dem er, „so Gott will", neben den ihm bekannten 25 möglichen Problemstellungen der kubischen Terme noch auf 70 weitere Problemstellungen bis zur vierten Potenz hoch eingehen will. Dieses Buch ist bedauerlicherweise nie erschienen.

Das zweite Kapitel handelt vom Regula falsi-Verfahren, einer Methode, bei der mittels linearer Interpolation aus zwei Fehlern der korrekte Wert berechnet wird.

Im dritten Kapitel führt al-Kaschi 50 (Rechen-) Regeln auf, die bei der Bestimmung von Unbekannten helfen sollen. So finden sich dort beispielsweise Rechenregeln wie die 15. Regel:

Die Summe von aufeinanderfolgenden Potenzen mit gleicher Basis bis zu einer Potenz n lässt sich berechnen, indem man von dem Produkt der letzten Potenz mit der ersten Potenz die erste Potenz abzieht und das Ergebnis durch die erste Potenz verringert um 1 teilt. Als moderne Formel ausgedrückt sähe diese Regel wie folgt aus:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{aa^n - a}{a - 1} \tag{25}$$

Die Rechenregeln reichen dabei von Bruchregeln, über Verhältnisregeln bis hin zur binomischen Formel und bieten dem Anwender eine Vielzahl an Werkzeugen zum Umformen und berechnen von Termen an.

Das vierte Kapitel ist ein Fundus an Beispielaufgaben in Textform mit jeweiligen Musterlösungen. Die Aufgaben orientieren sich an der damaligen Lebenswirklichkeit der Anwenderinnen und Anwender und reichen von Wirtschafts- über Erbrechtsaufgaben bis hin zu einem Kapitel, das algebraische und geometrische Problemstellungen verknüpft. Jeweils ein Beispiel aus diesen 3 Unterkapiteln soll hier kurz vorgestellt werden.

Beispiele aus den Unterkapiteln zur Algebra

1. Unterkapitel (Wirtschaftsaufgaben) 18. Beispiel (Aydin, Hammoudi, & Bakbouk, 2020, S. 171 ff): 3 Gegenstände lassen sich in unterschiedlicher Anzahl für

1 Dinar erwerben (10 vom Ersten, 15 vom Zweiten, 30 vom Dritten). Es soll eine gleichgroße Menge der Gegenstände für insgesamt 1 Dinar erworben werden.

Lösungswege: Al-Kaschi führt zwei Lösungswege auf. Beim ersten sucht er die kleinste Zahl, die durch alle 3 (10, 15 und 30) teilbar ist und findet 60 (und im Anschluss auch noch 30). Er teilt die 60 durch jede der Zahlen und erhält 6, 4 und 2. Die Summe daraus ist 12 und die jeweiligen Divisoren geteilt durch 12 ergibt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$. Diese Anteile mit der Anzahl multipliziert ergibt jeweils 5, was der Lösung der Aufgabe entspricht.

$$
\begin{aligned}
&T_1 \cdot 10 = T_2 \cdot 15 = T_3 \cdot 30 \text{ und } T_1 + T_2 + T_3 = 1[D] \\
&T_1 := x \\
&T_2 = \frac{2}{3}x \\
&\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{15}{10} \\
&T_3 = 1[D] - x - \frac{2}{3}x \\
&10T_1 = 10x \\
&15T_2 = 10x \\
&30T_3 = 30[D] - 50x \\
&\Rightarrow 30[D] = 50x + 10x \\
&\Rightarrow 30[D] = 60x \\
&\Rightarrow x = \frac{1}{2}[D] = T_1 \\
&\Rightarrow T_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}[D] = \frac{1}{3}[D] \\
&\Rightarrow T_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}[D] = \frac{1}{6}[D]
\end{aligned}
$$

Abbildung 1: Al-Kaschis Berechnungen zum 18. Bsp., zweiter Lösungsweg, in moderner Notation. Quelle: Eigene Darstellung

Beim zweiten Lösungsweg beschreibt er das Problem anhand einer Gleichung mit einer Unbekannten/einem Ding. Er teilt den Dinar in 3 Teile, sodass der erste Teil mit 10 multipliziert gleich dem zweiten Teil mit 15 multipliziert gleich dem dritten Teil mit 30 multipliziert ergibt. Er benennt den ersten Teil als Ding und beschreibt dann mehrere Gleichungen, die in moderner Notation wie in Abbildung 1 dargestellt aussehen würden (das D in eckigen Klammern steht dabei für die Währungseinheit Dinar). Die Lösungen für T_1, T_2, T_3 in die erste Zeile eingesetzt ergibt wieder die gesuchte Menge, nämlich 5.

Zusätzlich gibt er die Lösungen in tabellarischer Form an.

2. Unterkapitel (Erbrechtsaufgaben) 7. Beispiel (Aydin, Hammoudi, & Bakbouk, 2020, S. 241 ff): Ein Mann hat 3 Söhne und vermacht jemandem außerhalb der Familie einen Teil in der Höhe, die auch einem Sohn zustehen würde und einer weiteren Person die Wurzel des Drittels dessen, was übrigbleibt. Der Wert des Anwesens wird benötigt und al-Kaschi setzt dieses mit 1000 Dinar an.

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
E_1 = T \\
\sqrt{\frac{1}{3}\left(1000[D]-3T\right)} = E_2 = x \\
\Rightarrow \frac{1}{3}\left(1000[D]-3T\right) = x^2 \\
\Rightarrow 3T = 1000[D]-3x^2 \\
\Rightarrow 333\frac{1}{3}[D]-x^2 = 1T \\
E_1 + E_2 + 3T = 1333\frac{1}{3}[D]+x-4x^2 = 1000[D] \\
\Rightarrow 333\frac{1}{3}[D]+x = 4x^2 \\
\Rightarrow 83\frac{1}{3}[D]+\frac{1}{4}x = x^2 \\
\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{64} \\
83\frac{1}{3}[D]+\frac{1}{64} = 83\frac{67}{192} \approx 83+\frac{3489}{10000} \\
\sqrt{83+\frac{3489}{10000}} \approx 9+\frac{1295}{10000} \\
\Rightarrow 9+\frac{1295}{10000}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 9+\frac{2545}{10000} = x = E_2 \\
1000[D]-E_2 = 990+\frac{7455}{10000} \\
\dfrac{990+\frac{7455}{10000}}{4} = 247+\frac{6864}{10000} = T = E_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Abbildung 2: Al-Kaschis Berechnungen zum 7. Bsp. in moderner Notation. Quelle: Eigene Darstellung

Lösungsweg: Al-Kaschi beschreibt eine Aufteilung der Erbmasse in 3 gleichgroße Teile T für die Söhne und in Erbanteile E_1 und E_2 (in der englischen Übersetzung: „will“) für die Männer, die kein Teil der Familie sind. Den zweiten Erbanteil E_2 bezeichnet er als Ding, also das Gesuchte. Er stellt dann Gleichungen auf, die in moderner Notation wie in Abbildung 2 geschrieben werden können. Zum Schluss beschreibt er einen Weg, um die Wurzel aus der quadratischen Gleichung zu ziehen.

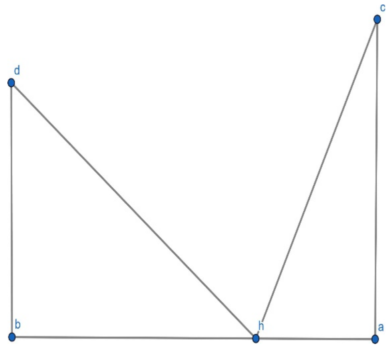


Abbildung 3: Skizze zur Aufgabenstellung aus Beispiel 4. Quelle: In Anlehnung an Miftah al-Hisab (Aydin, Hammoudi, & Bakbouk, 2020, S. 251), erstellt mit GeoGebra online

3. Unterkapitel (Verknüpfung von Algebra und Geometrie) 4. Beispiel (Aydin, Hammoudi, & Bakbouk, 2020, S. 251 ff): Es seien in Abbildung 3 ac und bd zwei geradegewachsene Palmen mit Wurzeln auf gleicher, aber einer unterschiedlichen Höhe: Die höhere Palme ac ist 25 Cubits (Armlängen) und die kleinere Palme bd ist 20 Cubits hoch. Zwischen diesen Palmen fließt ein Fluss und liegt ein Teich, die Palmen haben einen Abstand von 60 Cubits. Auf jeder Palme sitzt ein Vogel und beide sehen gleichzeitig einen Fisch im Teich und fliegen in einer geraden Linie zum selben Zeitpunkt im gleichen Tempo zu diesem Fisch hin und treffen zeitgleich bei dem Fisch ein. Ihr Treffpunkt, also die Position des Fisches, sei mit h gekennzeichnet.

Die Aufgabenstellung lautet: Wie weit sind die Vögel geflogen und wie viele Meter Boden haben sie überflogen.

Lösungsweg: Zunächst trifft al-Kaschi die Feststellung, dass die Vögel die gleiche Flugstrecke hatten, also $ch = dh$ gelten muss. Die Strecke bh bezeichnet er als Ding, also das Gesuchte/die Unbekannte. Er rechnet, in moderner Notation geschrieben, wie in Abbildung 4 notiert.

Die Herleitung von $120x = 3825$, also was in der eckigen Klammer steht, wird von ihm nicht beschrieben und wurde zum besseren Verständnis eingefügt.

$$
\begin{aligned}
&bh := x\\
&bh^2 = x^2\\
&bd^2 = 20^2 = 400\\
&bh^2 + bd^2 = x^2 + 400\\
&ah = 60 - x\\
&ah^2 = 3600 + x^2 - 120x \text{ und}\\
&120x = 3825\\
&\begin{bmatrix} \text{da } ah^2 = ch^2 - ac^2 \text{ und } ch^2 = bd^2 + bh^2 \text{, also}\\ x^2 + 400 - 625 = x^2 - 120x + 3600 \Rightarrow 120x = 3825 \end{bmatrix}\\
&\Rightarrow x = 31 + \frac{7}{8}\\
&\Rightarrow ah = 60 - \left(31 + \frac{8}{7}\right) = 28 + \frac{1}{8}\\
&\Rightarrow ch = dh = \sqrt{x^2 + 20^2} = \sqrt{1016 + \frac{1}{64} + 400} \approx 37 + \frac{23}{100}
\end{aligned}
$$

Abbildung 4: Al-Kaschis Berechnungen zum 4. Bsp. in moderner Notation. Quelle: Eigene Darstellung

5 Iteratives Verfahren zur Bestimmung von sin 1°

Wie in der Einleitung erläutert, ist die genaue Astronomie von enormer Bedeutung für den Islam. Und ein Kernstück der Astronomie ist die Trigonometrie, mit deren Hilfe z.B. für jede Stadt die exakten Koordinaten berechnet werden können. Für die Berechnungen wurden, wie heute auch noch gebräuchlich, Tabellen benutzt, in denen zu einem gegebenen Winkel α der zugehörige Chordwert aufgelistet war. Später wurden diese durch den entsprechenden Sinuswert ersetzt. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{chord}(\alpha) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ und}\\
\text{Chord}(\alpha) &= 2 \cdot \text{Sin}\left(\frac{\alpha}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

wobei sowohl Chord, als auch Sin ihre Basis im Sexagesimalsystem haben und sin im Dezimalsystem. Um eine hohe Genauigkeit der Berechnungen zu gewährleisten, müssen entsprechend auch die verwendeten Werte für Chord / Sinus möglichst exakt sein. Einen genauen Wert für sin 1° zu finden, war schon seit Claudius Ptolemäus (ca. 100 – 160 n.Chr.) eine Herausforderung für die Astronomen. Ptolemäus berechnete $\text{chord}\,(2°)\,[= 2 \cdot \sin\,(1°)] \approx 2;5,40$ (Toomer, 1998), was für $\sin(1°)$ eine Genauigkeit von 5 Nachkommastellen im Dezimalsystem bedeutet: $\frac{2;5,40}{2,0;0} \mathrel{\hat{=}} 0,017453...$ Auf Ptolemäus Theorem zu einem Sehnenviereck baut al-

Kaschi seine Kubische Gleichung auf, bevor er diese mit einem Iterationsverfahren - mit einer theoretisch beliebig hohen Genauigkeit - löst. Al-Kaschis Vorgehen findet heute noch unter dem Namen Fixpunktiteration Anwendung. Iterationsverfahren waren zu al-Kaschis Zeit keine Neuheit, denn ein Iterationsverfahren wurde schon von den Babyloniern verwendet, um Näherungen für die Quadratwurzel einer reellen Zahl zu finden. Es ist auch unter dem Namen Heron-Verfahren bekannt, so benannt nach Heron von Alexandria (genaue Daten unbekannt, wahrscheinlich 1. Jh. n.Chr.) (Brown, 1999). Eine Neuerung gegenüber diesem Verfahren ist, dass mit al-Kaschis Verfahren eine beliebig genaue Näherung für eine kubische Gleichung bestimmt werden kann.

Die Quelle für dieses Kapitel bildet *A Study of Risala al-Watar wa'l Jaib ("The Treatise on the Chord and Sine")* von Mohammad K. Azarian (2015), wobei sich dieser auf die in Persisch verfassten Berechnungen des Sinus von 1° in *Kashanı nameh*, einer Monografie über al-Kaschi, von A. Qurbani stützt, der wiederum seine Hauptquelle bei N. al-Birjandis Text *Sharh-i Zaıj-i Ulugh Beg* hat. Al-Birjandi war ein Schüler von Al-Kaschi und beschreibt in seinem Text al-Kaschis Vorgehensweise bei der Berechnung von Sinus 1°.

Al-Kaschi beginnt mit einem Halbkreis mit Radius $1,0;0$ in Sexagesimalschreibweise (also ein Radius von 60 im Dezimalsystem) - die in diesem Kapitel folgenden Zahlen sind alle in Sexagesimalschreibweise, sofern nicht deutlich anders kenntlich gemacht - dessen Zentrum sei der Punkt f, die Schnittpunkte des Durchmessers mit dem Halbkreis seien die Punkte a und e und es seien b, c und d die Punkte auf dem Halbkreis (siehe Abbildung 5) für die gilt:

$$ab = bc = \text{ cd } = \text{chord}\,(2^\circ)\,. \tag{27}$$

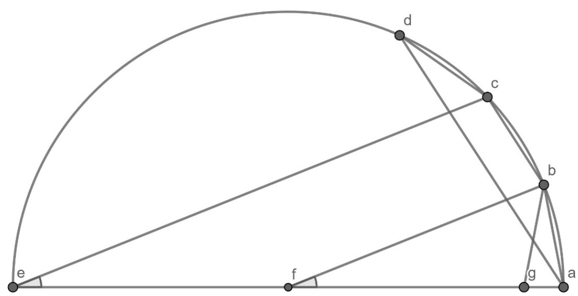


Abbildung 5: Konstruktion zur Beweisidee. Quelle: In Anlehnung an (Azarian, 2015, S. 236), erstellt mit GeoGebra online

abcd ist also ein Sehnenviereck. Al-Kaschi kann nun den Satz von Ptolemäus einsetzen, der für ein solches Sehnenviereck besagt, dass gilt:

$$ab \cdot cd + bc \cdot ad = ac \cdot bd. \tag{28}$$

Da $ab = bc = cd = \text{Chord}\,(2^\circ)$, folgt somit:

$$ab^2 + bc \cdot ad = ac^2 \tag{29}$$

und

$$ad = \text{Chord}\,(6^\circ) = 2 \cdot \sin\,(3^\circ)\,. \tag{30}$$

Da $\text{Sin}\,(3^\circ) = \sin\,(18^\circ - 15^\circ)$ beliebig genau mittels Verfahren bestimmt werden kann, deren größte Schwierigkeit das Ziehen einer Quadratwurzel ist (Aaboe, 1954) und al-Kaschi diese Verfahren bekannt waren, verwendet Al-Kaschi für ad den Wert $6;16,49,7,59,8,56,29,40$. Er bezeichnet

$$x := ab = bc = cd \tag{31}$$

und mit (31) und (30) in (29) eingesetzt gelangt er zu der Gleichung

$$x^2 + x \cdot \text{Chord}\,(6^\circ) = ac^2 \tag{32}$$

Indem er auf dem Durchmesser den Punkt G so wählt, dass gilt: $ec = eg$, erhält er die zwei ähnlichen Dreiecke abg und abf (abf ist ein gleichschenkliges Dreieck, da die Punkte a und b vom Punkt f die gleiche Entfernung haben [Radius r_{60}] und abg ist ein gleichschenkliges Dreieck, da a und g die gleiche Entfernung zum Punkt b haben [Radius $r_B = ba$] und es gilt:

$$\frac{ab}{ag} = \frac{af}{ab}, \text{ also } ag = \frac{ab^2}{1,0;0}. \tag{33}$$

Da der Durchmesser, ae, zweimal den Radius $1,0;0$ – also $2;0 \cdot 1,0;0 = 2,0;0$ – beträgt, folgert al-Kaschi:

$$ge = ae - ag = 2,0;0 - \frac{ab^2}{1,0;0} \tag{34}$$

und erhält durch das rechtwinklige Dreieck ACE in Verbindung mit dem Satz von

Pythagoras, sowie den identischen Strecken $GE = EG = EC$ (laut Annahme):

$$ac^2 = ae^2 - ec^2 = (2,0;0)^2 - \left(2,0;0 - \frac{ab^2}{1,0;0}\right)^2. \tag{35}$$

Er löst die Klammer auf und erhält:

$$\begin{aligned} ac^2 &= (2,0;0)^2 - (2,0;0)^2 + \frac{2;0 \cdot 2,0;0}{1,0;0} \cdot ab^2 - \left(\frac{ab^2}{1,0;0}\right)^2 \\ &= 4;0 \cdot ab^2 - \left(\frac{ab^2}{1,0;0}\right)^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Er benutzt (31) und erhält die Gleichung:

$$cx^2 + x(\mathrm{Chord}(6^\circ)) = 4x^2 - \frac{x^4}{1,0,0;0}, \tag{37}$$

welche er umformt, indem er x^2 abzieht und durch x teilt, zu:

$$\mathrm{Chord}(6^\circ) = 3x - \frac{x^3}{1,0,0;0}. \tag{38}$$

Aus dieser Gleichung erhält er durch Umformungen seine berühmte kubische Gleichung:

$$x = \frac{x^3 + 1,0,0;0 \cdot \mathrm{Chord}(6^\circ)}{3 \cdot 1,0,0;0}. \tag{39}$$

Er definiert $b' := 3 \cdot 1,0,0;0$ und $a' := 1,0,0;0 \cdot \mathrm{Chord}(6^\circ)$ und erhält, indem er für Chord (6°) den bekannten Wert $6;16,49,7,59,8,56,29,40$ einsetzt, für a' den Wert $6,16,49;7,59,8,56,29,40$ (Chord (6°) zweimal erhöht) und die Gleichung

$$\mathrm{Chord}(2^\circ) = x = \frac{a' + x^3}{b'}. \tag{40}$$

Al-Kaschi stellt x als Summe der einzelnen Sexagesimalglieder von x dar, also

$$x = s_1 + s_2 + s_3 + ... \tag{41}$$

und bezeichnet für $i = 1,2,3,\dots$ mit x_i die bis zur i-ten Sexagesimalstelle verwendeten Summenglieder von x. Also z.B.: $x_1 = s_1; x_2 = s_1 + s_2$; usw.

Er gelangt zu dem Schluss, dass, da in einem Kreis mit Radius $1,0;0$ die Werte für $x = \mathit{Chord}(2^\circ)$ und x^3 sehr klein sein müssen und der Wert für $\frac{x^3}{3,0,0;0}$ somit noch sehr viel kleiner sein muss, $s_1 \approx \frac{a'}{b'}$ eine geeignete Näherung darstellt. Tatsächlich nimmt er für s_1 nur den ganzzahligen Teil von $\frac{a'}{b'}$ und erhält somit

$$\begin{aligned}\frac{a'}{b'} &= \frac{6,0,0;0 + 16,0;0 + 49;0 + ... + 0;0,0,0,0,0,40}{3,0,0;0} \\ &= 2;0 + \frac{16,0;0 + 49;0 + ... + 0;0,0,0,0,0,40}{3,0,0;0},\end{aligned} \tag{42}$$

die erste Sexagesimalstelle von x, also $s_1 = 2;0 = x_1$. Diesen Wert setzt al-Kaschi nun in Gleichung (40) ein, nutzt die Darstellung der Sexagesimalglieder durch Summen aus (41) und erhält

$$x = \frac{a' + x_1^3}{b'} = 2;0 + s_2 + ..., \tag{43}$$

also

$$\begin{aligned}s_2 + s_3 + ... &= \frac{a' + 2;0^3}{b'} - 2;0 = \frac{a' - 2;0 \cdot b' + 8;0}{b'} \\ &= \frac{(6,0,0;0 + 16,0;0 + ...) - 2;0 \cdot 3,0,0;0 + 8;0}{3,0,0;0} \\ &= \frac{16,0;0 + ...0;0,0,0,0,0,40 + 8;0}{3,0,0;0} \\ &= \frac{15,0;0}{3,0,0;0} + \frac{1,0;0 + ... + 0;0,0,0,0,0,40 + 8;0}{3,0,0;0} \\ &= \frac{5}{1,0;0} + \frac{1,0;0 + ... + 0;0,0,0,0,0,40 + 8;0}{3,0,0;0} \\ &= 0;5 + \frac{1,0;0 + ... + 0;0,0,0,0,0,40 + 8;0}{3,0,0;0}.\end{aligned} \tag{44}$$

s_2 ist also gleich $0;5$ und somit $x_2 = 2;5$. Dieses Ergebnis setzt er auf die gleiche Weise wie bei (43) in (40) ein und erhält

$$\begin{aligned}x = \frac{a' + x_2^3}{b'} &= 2;0 + 0;5 + s_3 + s_4 + ..., \text{ also} \\ s_3 + s_4 + ... &= \frac{a' + (2;0 + 0;5)^3}{b'} - 2;0 - 0;5 \\ &= \frac{a' - (2;0 + 0;5) \cdot b' + (2;0 + 0;5)^3}{b'}\end{aligned} \tag{45}$$

und mittels Umformungen analog zu (42) erhält er aus (44) und (45)

$$\begin{aligned} s_3 + s_4 + ... &= \frac{1,0;0 + 49;0 + ... + 8;0 + 2;5}{3,0,0;0} \\ &= \frac{1,57;0}{3,0,0;0} + \frac{0;0,0,7 + ... + 2;5}{3,0,0;0} \\ &= 0;0,39 + \frac{0;0,0,7 + ... + 2;5}{3,0,0;0}. \end{aligned} \tag{46}$$

s_3 ist also gleich 0;0,39 und somit $x_3 = 2;0 + 0;5 + 0;0,39$.

Al-Kaschi führt diese Iterationsschritte unter Nutzung des Algorithmus

$$x_{n+1} = \frac{a' + x_n^3}{b'} \tag{47}$$

für $n \geqslant 3$ bis $n = 9$ aus und erhält

$$\text{chord}(2^\circ) = 2;5,39,26,22,29,28,32,52,33. \tag{48}$$

Da gilt: $\frac{\text{Chord}(2^\circ)}{2} = \text{Sin}(1^\circ)$ und $\frac{\text{Sin}(1^\circ)}{60} = \sin(1^\circ)$, dividiert Al-Kaschi sein Ergebnis durch 2 und erhält

$$\text{Sin}(1^\circ) = 1;2,49,43,11,14,44,16,26,17. \tag{49}$$

Dieser Wert ist auf 10 Sexagesimalstellen korrekt (der auf 11 Sexagesimalstellen genaue Wert für Sin (1°) beträgt 1;2,49,43,11,14,44,16,26,18,28,49... - berechnet mit Wolfram Alpha unter Anleitung des Kapitels zur Umrechnung von Dezimalzahlen in Sexagesimalzahlen aus dem „Schlüssel"). Er teilt diesen Wert durch 60, um den Sin in sin umzurechnen, wandelt dann die Sexagesimalzahl in eine Dezimalzahl um und gelangt zu dem Ergebnis

$$\sin(1^\circ) = 0,017452406437283510 3712. \tag{50}$$

Dieser Wert ist auf 17 Dezimalstellen hinter dem Komma korrekt (ein auf 20 Nachkommastellen genauer Wert für sin (1°) beträgt 0,01745240643728351281 9...).

6 Ein Verfahren zur Berechnung von Pi auf siebzehn Dezimalstellen genau

Die Kreiszahl Pi (3,141 592 653 589 793 238 ...), klassischerweise definiert als Verhältnis vom Umfang zum Durchmesser eines Kreises mit $\pi = \frac{U}{d}$, also $\pi = \frac{U}{2}$ in einem Einheitskreis, wurde als Zahl vermutlich erstmals im Papyrus Rhind (ca. 16. Jahrhundert v.Chr.) mit dem Näherungswert $3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{256}{81} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,160493827...$ angegeben (Vogel, 1958). Die Idee hinter der Berechnung ist allerdings nicht die Bestimmung des Umfangs, sondern es wird versucht, eine Näherung für die Fläche eines Kreises durch ein unregelmäßiges Achteck zu finden.

Dieser Wert wurde vermutlich erst durch Archimedes (ca. 287 – ca. 212 v.Chr.) um ca. 250 v.Chr. übertroffen, welcher die Zahl auf zwei Nachkommastellen genau berechnen konnte. Zudem gab Archimedes ein Verfahren zur beliebig genauen Bestimmung von Pi an: Ein Kreis wird mit einem regelmäßigen Vieleck um- und einbeschrieben [im Folgenden handelt es sich, wenn der Begriff „Vieleck/e" benutzt wird, stets um gleichmäßige Vielecke]. Archimedes selbst beginnt mit einem Einheitskreis und zwei gleichmäßigen Sechsecken, welche dem Kreis um- und eingeschrieben werden. Den Umfang dieser Sechsecke, die den Kreis begrenzen, kann er mithilfe einer Einteilung in Dreiecke und durch Gebrauch des Satzes von Pythagoras berechnen und erhält für Pi die Grenzen $\frac{U_{\text{inneres Sechseck}}}{2} < \pi < \frac{U_{\text{äußeres Sechseck}}}{2}$, also $3 < \pi < 3,464101615$. Durch die wiederholte Verdopplung der Seiten gelangt er bei einem Sechsundneunzigeck schließlich zu den Grenzen $3,1408450 < \pi < 3,1428571$ (Arndt & Haenel, 2000).

Mit einem ähnlichen Verfahren, dem Einschreiben eines 3072-seitigen Vielecks, gelang es Liu Hui (ca. 225 – ca. 295) die Zahl Pi auf 5 Nachkommastellen korrekt zu berechnen (Arndt & Haenel, 2000). Übertroffen wurde er durch Zu Chongzhi (429 – 500), der mithilfe des Algorithmus von Liu Hui und unter Nutzung eines 24.576-seitigen Vielecks Pi auf 6 Nachkommastellen genau berechnen konnte (Martzloff, 2006).

Diese Leistung wurde vermutlich erst über 900 Jahre später durch al-Kaschi übertroffen, welcher die Zahl Pi auf sechzehn Dezimalstellen hinter dem Komma genau berechnet hat. Dazu nutzt er, ähnlich wie seine mathematischen Vorgänger, ein eingeschriebenes Vieleck, das er mit 805.306.368 Seiten bestimmt. Er wählte diese Anzahl, damit bei einem Kreis, dessen Durchmesser dem sechshunderttausendfachen Durchmesser der Erde entspricht (al-Kaschi geht davon aus, dass dies die Größe des Universums ist), die Abweichung vom berechneten zum tatsächlichen Wert nicht größer ist als die Breite eines Pferdehaares (ca. 0,7mm) (Strick, 2020).

Den folgenden Erläuterungen liegt die übersetzte und kommentierte Ausgabe von *ar-Risala al-muhitiya*, des *Lehrbriefs über den Kreisumfang*, von Paul Luckey zugrunde (Luckey & Kāšī, 1953).

Ähnlich wie bei der Bestimmung des Sinus von 1° beginnt al-Kaschi mit einer geometrischen Hinführung, in welcher er die benötigten Schritte beweist, bevor er das eigentliche Problem mittels Berechnungen löst.

Er beweist zunächst geometrisch, dass bei einem Halbkreis die Summe des Radius und jeder Sehne des Bogens, die kleiner als die Hälfte des Umfangs ist, multipliziert mit dem halben Durchmesser, also Radius, gleich dem Quadrat der Sehne, welche aus dem Bogen der ersten Sehne ergänzt zum Halbkreis ist. Oder als Gleichung formuliert, gilt für die Strecken in Halbkreis in Abbildung 6

$$ad^2 = (ab + ag) \cdot ah \tag{51}$$

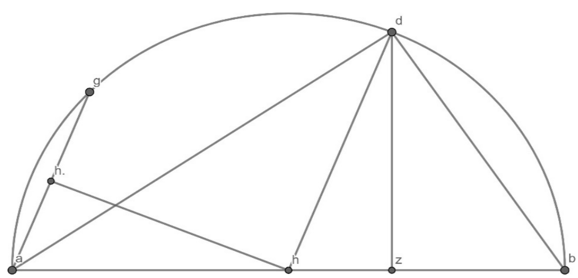


Abbildung 6: 1. Figur zur Beweisidee des Hilfssatzes. Quelle: In Anlehnung an Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāšī, 1953, S. 4), erstellt mit GeoGebra online

Zum Aufbau: ab ist der Durchmesser, auch mit d bezeichnet, h der Mittelpunkt von ab, ag ist eine beliebige Sehne des Halbkreises, d halbiert den Bogen gb, z ist das Lot von d gefällt auf ab.

Zunächst nutzt er die Ähnlichkeit der Dreiecke adz und bdz zum Dreieck abd (8. Lehrsatz, sechstes Buch der Elemente des Euklid) aus, um festzustellen, dass die Verhältnisse $ab : ad = ad : az$ gelten. Er verwendet dann den 19. Lehrsatz, siebtes Buch der Elemente des Euklid, um $ab \cdot az = ad^2$ zu bestimmen und fällt das Lot von h auf ag um so die Mitte von ag zu erhalten (3. Lehrsatz, drittes Buch der Elemente des Euklid), welche er als $h.$ bezeichnet. Er nutzt, dass gilt $\measuredangle bag = \measuredangle bhd = 2\measuredangle bad$ und folgert, dass $\measuredangle hah. = \measuredangle dhz$ gilt und somit die Dreiecke

$ah.h$ und hzd einander gleichen (rechte Winkel bei $h.$ und z, $\measuredangle hah. = \measuredangle dhz$, $ah = hd$ und somit $hz = ah. = \frac{1}{2}ag$). Daraus folgt:

$$ad^2 = az \cdot ab = \left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ag\right) ab = (ab + ag)\,\frac{ab}{2} = (ab + ag)\,ah. \qquad (52)$$

Sind die Sehne ag, sowie der Durchmesser bekannt, so lässt sich also mittels dieses Hilfssatzes die Sehne ad berechnen, welche den Kreisbogen zwischen b und g teilt. Den Hilfssatz erneut auf ad angewendet und man erhält wieder die Strecke zwischen a und der Hälfte des Kreisbogens, diesmal des Kreisbogens zwischen d und b, usw. (siehe Abbildung 7).

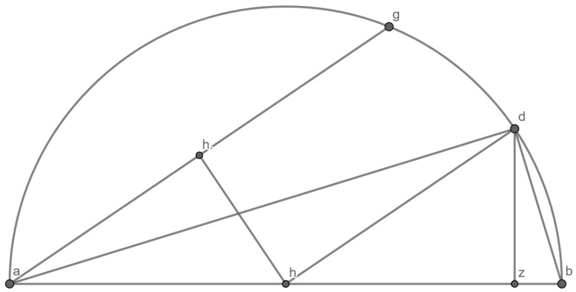


Abbildung 7: 2. Figur zur Beweisidee des Hilfssatzes. Quelle: In Anlehnung an Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 4), erstellt mit GeoGebra online

Er konkretisiert nun seinen Hilfssatz aus (51) für einen Kreis mit Durchmesser $2, 0; 0$:

$$(ag + 2, 0; 0) \cdot 1, 0; 0 = ad^2. \qquad (53)$$

Al-Kaschi setzt nun diesen Hilfssatz ein, um im nächsten Abschnitt seines Lehrbriefes den Umfang eines einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecks mit beliebiger Seitenanzahl $2^i \cdot 3$,für $i = 2, ..., n$ zu bestimmen.

Er beginnt dabei mit der Konstruktion eines einbeschriebenen Sechsecks (15. Lehrsatz, viertes Buch der Elemente des Euklid), sodass die Sehne ag eine Seite dieses Sechsecks bildet (siehe Abbildung 8).

Durch den Hilfssatz wird, da bei einem Sechseck $ag = ah$ gilt, ad bekannt, daraus az, $ah.$ und beliebig viele weitere Hälftelungen des Kreisbogens gb. Er nutzt den „Satz der Braut“, wie er den Satz des Pythagoras bezeichnet, um die Sehnen, die von b ausgehen ($bd/bz/\ldots$) berechnen zu können, denn da $ad/az/\ldots$ durch den

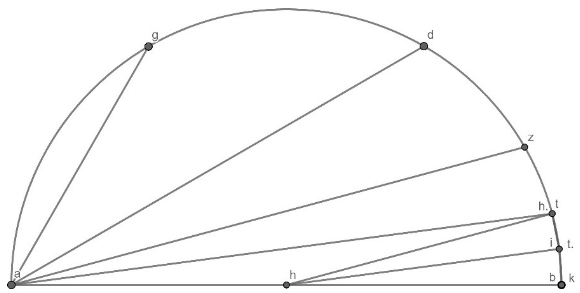


Abbildung 8: Beweisskizze zur Bestimmung der Sehnen ausgehend von b. Quelle: In Anlehnung an Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 4), erstellt mit GeoGebra online

Hilfssatz aus (53) bekannt sind und $\measuredangle adb = \measuredangle azb = ... = 90°$ (Satz des Thales), gilt die Gleichung:

$$ab^2 - ad^2 = bd^2 \tag{54}$$

und analog auch für die anderen Sehnen, die von b ausgehen. So erhält er bg^2, bd^2, bz^2, usw. Von b zieht er die Sehne nach h. und hälftet diese durch die Strecke von h nach t., wobei letzteres die Mitte des Kreisbogens $bh.$ ist. Den Schnittpunkt von $bh.$ und $ht.$ bezeichnet er mit i. Er legt auf $t.h$ in $t.$ Tangenten nach t und nach k an und erhält auf diese Weise die ersten Seiten eines, zu dem einbeschriebenen Vieleck parallelen, somit ähnlichen umbeschriebenen Vielecks.

Er folgert: So wie die Dreiecke $hh.i$ und hib gleich sind, so sind auch die Dreiecke $htt.$ und $ht.k$ gleich und zu den ersten beiden ähnlich. Im Folgenden nutzt al-Kaschi mehrfach die Strahlensätze ohne diese explizit zu nennen: Das Verhältnis der Seiten hi zu $ht.$ (Mittelpunkt des Kreises bis zu einer Ecke des einbeschriebenen Vielecks und der zugehörigen Ecke des umbeschriebenen Vielecks) ist gleich dem Verhältnis der Seiten bi zu $t.k$ (jeweils Eckpunkte der beiden Vielecke) und gleich dem Verhältnis der Seiten $bh.$ zu kt (jeweils eine Seite des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Vielecks). Der Abstand der Eckpunkte der umbeschriebenen und einbeschriebenen Vielecke (al-Kaschi bezeichnet ihn als Überschuss des Hintergliedes über das Vorderglied), also $it.$, ist im Verhältnis zum Abstand des Mittelpunkts des Kreises bis zum entsprechenden Eckpunkt des einbeschriebenen Vielecks - zu $it.$ ist das die Strecke hi – gleich dem Verhältnis der Sehne bh. zu dem Überschuss von kt über $bh.$ Damit hat al-Kaschi die benötigten Verhältnisse um aus der Sehne $bh.$ und dem halben Durchmesser hi die Seiten des einbeschriebenen und die des umbeschriebenen Vielecks zu bestimmen. Um die Seite $bh.$ zu

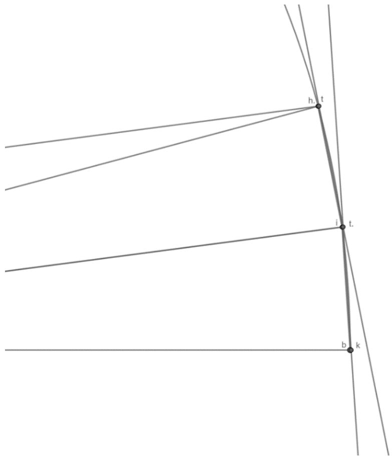


Abbildung 9: Teilausschnitt der konstruierten Figur mit Tangenten an t. durch k und t, die auf den Seiten der Vielecke liegen. Quelle: Eigene Darstellung, erstellt mit GeoGebra online

bestimmen, benötigt er aber die Ergänzungssehne zu dieser Seite, diese ist gegeben durch ah. Diese Ergänzungssehne erhält al-Kaschi durch wiederholte Anwendung des Hilfssatzes (53), also indem er den Kreisbogen gb hälftelt, das Kreisbogenstück wieder hälftelt, usw.

Al-Kaschi beginnt mit einem eingeschriebenen Dreieck in einem Kreis mit dem Durchmesser $d = 2, 0; 0$. Er wählt

$$ag = \frac{d}{2} = 1, 0; 0 =: c_0 \tag{55}$$

als Ergänzungssehne und erhält mit

$$\frac{d}{2}\sqrt{c_0 + d} = 1, 0; 0 \cdot \sqrt{3, 0; 0} =: s_0 \tag{56}$$

die Sehne von b ausgehend, die eine Seite des Dreiecks ist.

Um den Umfang des einbeschriebenen Vielecks zu berechnen benötigt er die Länge der hinreichend kleinen Seite s_i, wobei i der Anzahl der notwendigen Hälftelungen des Kreisbogenstücks gb entspricht.

Es stellt sich nun die Frage, wie viele dieser Hälftelungen, er benötigt. Für welche Zahl i ist s_i hinreichend klein und was bedeutet hinreichend klein in diesem

Zusammenhang?

Wie zuvor erwähnt, wählte al-Kaschi ein Vieleck mit $1, 2, 8, 16, 12, 48; 0$ Seiten, als Dezimalzahl geschrieben: 805.306.368 [Anmerkung: In der vorliegenden Quelle von Luckey (Luckey & Kāsī, 1953) berechnet dieser entweder aus $n = 3 \cdot 2^{28}$ oder transformiert die Sexagesimalzahl fälschlicherweise als die Dezimalzahl 800.335.168 (Luckey & Kāsī, 1953, S. 54), bzw. übernimmt er sie aus der Abschrift des arabischen Originaltexts, in der genau diese Zahl in arabischen Zahlzeichen ٨٠٠٣٣٥١٦٨ angegeben wird (Luckey & Kāsī, 1953, S. 83). Welche Dezimalzahl von al-Kaschi berechnet wurde, lässt sich nicht mit Sicherheit sagen, die Zahl auf Seite 83 legt jedoch den Schluss nahe, dass es die falsche Dezimalzahl war.]. Zu dieser Anzahl gelangt er, nachdem er zunächst einmal feststellt, dass ein Kreis mit dem 600.000-fachen Durchmesser der Erde, auch einen entsprechend 600.000-fachen Umfang der Erde besitzt.

Dieser Umfang geteilt durch 360 ergibt ein Grad des Umfangs (1.666 2/3 Erdumfänge); ein Grad geteilt durch 60 ist eine Gradminute des Umfangs (27 ¾ Erdumfänge); usw. So teilt er immer wieder durch 60, bis er eine Länge hat, welche geringer ist als die Dicke eines Pferdehaares ($\approx 0,7mm$). Dies ist bei einer Gradoktave des Umfangs (ca. 4/5 eines Pferdehaares) der Fall. Damit ist die Vorgabe für die beiden Vielecke, dass die Differenz der Umfänge dieser Vielecke geringer sein muss als eine Gradoktave, also eine Oktave von einem Grad des Umfangs. So kann im Anschluss gewährleistet werden, dass die Differenz des berechneten zum eigentlichen Umfang geringer ausfällt als die Dicke eines Pferdehaares. Mit ε für die Differenz der Umfänge der Vielecke soll also gelten:

$$\begin{aligned}\varepsilon &< \frac{1 \text{ Oktave}}{360 \text{ Grad}} = \frac{0;0,0,0,0,0,0,0,1}{6,0;0} = 0;0,0,0,0,0,0,0,0,0,10 \\ &= 10 \cdot 60^{-10} \approx \frac{4}{5} \text{ eines Pferdehaares.}\end{aligned} \tag{57}$$

Mit U_e für den Umfang des einbeschriebenen Vielecks, U_u dem Umfang des umbeschriebenen Vielecks und mit U_k für den Umfang des Kreises soll also gelten:

$$\begin{aligned}U_e < U_k < U_u \text{ und} \\ U_u - U_e < \varepsilon \\ \Rightarrow U_u - U_k < \varepsilon \text{ und } U_k - U_e < \varepsilon.\end{aligned} \tag{58}$$

Um nun die entsprechende Seitenzahl der beiden Vielecke zu bestimmen, wird unter Rückgriff auf die geometrische Herleitung zu Beginn eine Voraussetzung für das Vieleck formuliert.

Er beschreibt, dass die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{2} : U > \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}, \text{ also} \\ \frac{3}{\pi} > 1 - \frac{1}{21} \end{aligned} \tag{59}$$

gilt.

Sei nun $bh.$ die hinreichend kleine Vieleckseite s_i, so gilt, da $1 - \frac{1}{21} < \frac{3}{\pi}$:

$$\varepsilon < (kt - bh.) : bh. = it. : hi < 10 \cdot 60^{-10} \left(1 - \frac{1}{21}\right). \tag{60}$$

Da für eine hinreichend kleine Vieleckseite gilt:

$$hi = ht. - it. = \frac{d}{2} - it. \approx 1,0;0 = 60^1 \tag{61}$$

folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} it. < 10 \cdot 60^{-9} \cdot \frac{20}{21} \text{ und es gilt} \\ it. < 8 \cdot 60^{-9} = \text{ 8 Nonen.} \end{aligned} \tag{62}$$

Abschließend nutzt al-Kaschi die Abschätzung:

$$\begin{aligned} s_i^2 < 4 \cdot 60^1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 60^{-9} = 60^{-7} + 4 \cdot 60^{-8} \text{ und} \\ \sqrt{60^{-7} + 4 \cdot 60^{-8}} = 8 \text{ Quarten} > 7 \text{ Quarten} = 7 \cdot 60^{-4} = s_i \end{aligned} \tag{63}$$

Al-Kaschi muss also so lange die Drittel des Umfangs halbieren, bis ein Teil davon kleiner als 7 Quarten ist. Die Anzahl dieser Halbierungen entspricht der gesuchten Zahl i.

Dies gelingt ihm mithilfe der Tabelle 14. Mit jeder Halbierung des Drittels des Umfangs verdoppelt sich die Seitenanzahl. Da er mit einem Dreieck beginnt, also $i = 0$, bei dem jedes Teilstück des Kreisbogens 120 Grad (Teile) umfasst, hat er nach der ersten Hälftelung ein Sechseck mit Teilstücken des Kreisbogens in Höhe von je 60 Teilen, nach einer weiteren ein Zwölfeck mit 30 Teilen, usw. Rechnerisch kann das für die Seitenzahl n und das Bogenstück b wie folgt erfasst werden:

$$\begin{aligned} &n = 3 \cdot 2^i, \\ &b = \frac{120^\circ}{2^i}, \text{ unter der Nebenbedingung:} \\ &\frac{120^\circ}{2^i} < 7 \text{ Quarten.} \end{aligned} \tag{64}$$

Wiederholte Verdopplung der Seitenzahl, beginnend mit dem Dreieck								Wiederholte Hälftung des Drittels des Umfangs													
Zahl	fünfmal Erhöhtes	viermal Erhöhtes	dreimal Erhöhtes	zweimal Erhöhtes	einmal Erhöhtes	Seiten		Teile	Minuten	Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen
0						3		120													
1						6		60													
2						12		30													
3						24		15													
4						48		7	30												
5					1	36		3	45												
6					3	12		1	52	30											
7					6	24		0	56	15											
8					12	48			28	7	30										
9					25	36			14	3	45										
10					51	12			7	1	52	30									
11				1	42	24			3	30	56	15									
12				3	24	48			1	45	28	7	30								
13				6	49	36			0	52	44	3	45								
14				13	39	12				26	22	1	52	30							
15				27	18	24				13	11	0	56	15							
16				54	36	48				6	35	30	28	7	30						
17			1	49	13	36				3	17	45	14	3	45						
18			3	38	27	12				1	38	52	37	1	52	30					
19			7	16	54	24				0	49	26	18	30	56	15					
20			14	33	48	48					24	43	9	15	28	7	30				
21			29	7	37	36					12	21	34	37	44	3	45				
22			58	15	15	12					3	10	47	18	52	1	52	30			
23		1	56	30	30	24					6	5	23	39	26	0	56	15			
24		3	53	1	0	48					3	32	41	49	43	0	28	7	30		
25		7	46	2	1	36					1	46	20	54	51	30	17	3	45		
26		15	32	4	3	12					0	23	10	27	25	45	7	1	52	30	
27		31	4	8	6	24						11	35	13	42	52	33	30	56	15	
28	1	2	8	16	12	48						5	47	36	51	26	16	45	28	7	30

Tabelle 14: Bestimmung der benötigten Seitenzahl des Vielecks. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 7)

Wie man der Tabelle 14 entnehmen kann, werden die 7 Quarten erstmals für $i = 28$

unterschritten – also im Sexagesimalsystem bei einem 1,2,8,16,12,48;0-Eck.

Für den Umfang des einbeschriebenen Vielecks gilt: Anzahl der Seiten mal die Länge einer Seite. Oder als Formel ausgedrückt:

$$U_e = 3 \cdot 2^i \cdot s_i \tag{65}$$

mit s_i als die Sehne des 2^i-ten Teils des Bogens.

Mit $ag = 1,0;0 =: c_0$ gilt:

$$\begin{aligned} c_i^2 = (d + c_{i-1}) \cdot \frac{d}{2} = (2,0;0 + c_{i-1}) \cdot \text{1,0;0 mit i = 1, ... , 28 , also} \\ c_i = \sqrt{(2,0;0 + c_{i-1}) \cdot 1,0;0}. \end{aligned} \tag{66}$$

Es folgt mit dem Satz des Pythagoras für die Seite zur Ergänzungssehne c_{28}:

$$\begin{aligned} s_{28}^2 = d^2 - c_{28}^2 = (d - c_{27}) \cdot \frac{d}{2} = (2,0;0 - c_{27}) \cdot 1,0;0 \text{ und} \\ s_{28} = \sqrt{2,0;0^2 - c_{28}^2} = \sqrt{(2,0;0 - c_{27}) \cdot 1,0;0}. \end{aligned} \tag{67}$$

Dann erfolgen die eigentlichen Berechnungen, welche al-Kaschi, wie für ihn typisch, in Tabellenform festgehalten hat.

Um eine bessere Übersichtlichkeit zu erhalten, soll an dieser Stelle nur auf die erste und die achtundzwanzigste Berechnung näher eingegangen werden.

Für eine detailliertere Beschreibung von al-Kaschis Vorgehen in diesen Tabellen sei an dieser Stelle auf das vorangegangene Kapitel „Miftah al-Hisab“, Unterkapitel „Die erste, zweite und dritte Abhandlung: Arithmetik“ verwiesen, in welchem erläutert wird, wie al-Kaschi mittels dieser Tabellen Wurzeln beliebigen Grades ziehen konnte – sowohl mit Dezimal-, als auch mit Sexagesimalzahlen. Im Folgenden soll daher nur kurz auf die Unterschiede zu seinen Wurzelberechnungen aus dem „Schlüssel“ eingegangen werden.

Jede der Berechnungstabellen folgt dabei dem gleichen Aufbau und stellt eine verkürzte Form der Wurzeltabellen dar, die im vorherigen Kapitel behandelt wurden.

Erste Berechnung
Sie ergibt die Sehne des Drittels des Umfangs, d. i. die Sehne der Ergänzung des Sechstels (des Umfangs)

Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen
1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25

31 Dezimen
42 Undezimen
1 Duodezime
56 Tredezimen
22 Quattuordezimen
42 Quindezimen
48 Sexdezimen
58 Septendezimen
57 Oktodezimen
richtig

Waage	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen	
	3	0	0																			
	1																					
	2										1	49	48	49	59	43	34	47	7	9	35	
(47)	1	56	49								1	47	23	13	44	24	53	51	52	45	54	
		3	11									2	25	36	15	18	40	55	14	23	41	
(18)		3	9	40	25							2	25	29	32	9	51	9	6	25	2	
			1	19	35									6	43	8	49	46	7	58	39	
(2)			1	16	12	28	4							3	27	50	45	56	55	55	52	
				3	22	31	56							3	15	18	3	49	12	2	47	
54				3	20	55	3	28	4					3	13	59	22	53	8	12	8	
					1	36	52	31	56						1	18	40	56	3	50	39	
11					1	33	31	50	40	24	9				1	16	12	36	50	52	30	
						3	20	41	15	35	51					2	28	19	12	58	9	
6						3	17	27	13	39	4	12	9			2	25	29	32	9	51	
							3	14	1	56	46	47	51				2	49	40	48	17	
24							3	13	59	22	53	8	11	16	16		2	46	16	36	46	
								0	2	33	53	39	39	43	44			3	24	11	31	
																		3	20	55	4	
																			3	16	27	
36									2	32	25	13	41	45	0	58	8	32	16			
										1	28	25	57	58	43	1	51	27	44			
13										1	26	36	9	8	43	18	16	40	36	50	25	
											1	49	48	49	59	43	34	47	7	9	35	
43											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	25	
33										3	27	50	45	56	55	55	52	0	44			
									3	27	50	45	56	55	55	52	0					
51								3	27	50	45	56	55	54	56				3	27	50	45
56							3	27	50	45	56	54	57					3	27	50	45	56
31						3	27	50	45	56	27						3	27	50	45	56	55
5					3	27	50	44	58							3	27	50	45	56	55	55
43				3	27	50	22								3	27	50	45	56	55	55	52
25			3	26	55									3	27	50	45	56	55	55	52	1
(45)		2	43										3	27	50	45	56	55	55	52	1	28
	1											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	50

Tabelle 15: Erste Berechnung: Die Quadratwurzel von 3,0,0;0. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 12)

Zu jeder seiner Berechnungen liefert al-Kaschi im Anschluss eine Probe, in welcher er die erhaltene Zahl quadriert, um zu überprüfen, ob der Radikand dabei herauskommt.

Die Kopfzeile gibt in Worten an, was berechnet wird; darunter befindet sich das Ergebnis der Berechnung; unter dem Ergebnis folgt die eigentliche Berechnung. Bei der „Waage“ handelt es sich um ein weiteres Kontrollinstrument. Der Wert der Waage entspricht der modulo 59 reduzierten Quersumme der ersten rechts neben der Waage-Spalte stehenden Zahlengruppe. So ist z.B. in der ersten Berechnungstabelle der erste Waage-Wert gegeben durch: $(1 + 56 + 49) = 106 \equiv 47 \mod 59$.

Da es sich bei $1, 56, 59; 0$ um das 43-fache der Zahl $2, 43; 0$ handelt, ist der zugehörige Waage-Wert unten die Zahl $45; 0$, die sich aus $163 \equiv 45 \mod 59$ ergibt. Um die 59-er-Probe zu bestehen muss nun gelten: $(43; 0 \cdot 45; 0) \equiv 47; 0 \mod 59$, was der Fall ist ($43; 0 \cdot 45; 0 = 32, 15; 0$ und die Quersumme von $32, 15; 0$ ist 47).

Die verkürzte Form äußert sich in der Dreiecksform oben rechts und unten rechts. Diese beiden Blöcke würden in einer vollständigen Berechnungstabelle zwischen den beiden Blöcken oben links und unten links stehen.

Er beginnt seine Berechnungen mit dem Ziehen der Wurzel aus 3,0,0;0 (Der Durchmesser d [Seite ab] mit einer Länge von 2,0;0 + Seite des Sechsecks [bh.] mit einer Länge von 1,0;0 und um 1 „erhöht“, also multipliziert mit 1,0;0, dem halben Durchmesser $\frac{d}{2}$). Als Formel geschrieben berechnet er also:

$$c_1 = \sqrt{(2, 0; 0 + c_0) \cdot 1{,}0{;}0} = \sqrt{(2, 0; 0 + 1, 0; 0) \cdot 1{,}0{;}0} = \sqrt{3, 0, 0; 0} \tag{68}$$

Er erhält bei seiner Berechnung einen Rest in Höhe von 3 Sexdezimen, 16 Septendezimen und 27 Oktodezimen. Um es als eine Dezimalzahl auszudrücken, müsste man also rechnen: $3 \cdot 60^{-16} + 16 \cdot 60^{-17} + 27 \cdot 60^{-18}$, was einer Dezimalzahl mit 27 Nullen hinter dem Komma entspricht und die eindrucksvolle Genauigkeit von al-Kaschis Berechnungen verdeutlicht.

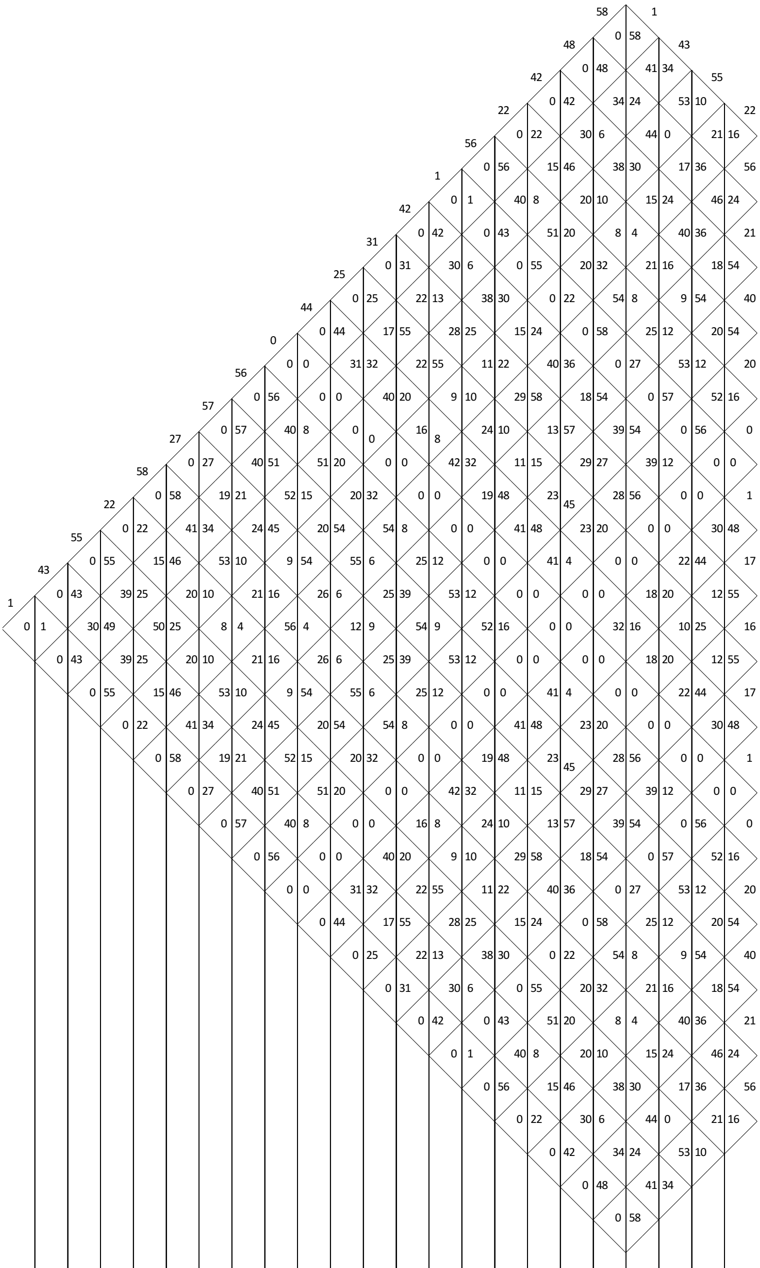
Diese Genauigkeit ist auch notwendig, da sich der Wert für c_i mit wachsenden Werten für i sehr schnell dem Wert $2, 0; 0$ annähert, da die Wurzel, die man für c_i aus $(2, 0; 0 + c_{i-1}) \cdot 1{,}0{;}0$ zieht diesem Grenzwert entgegenstrebt.

Die Probe dieser Berechnung (siehe Tabelle 16) besteht aus einem Teilausschnitt einer Multiplikationstabelle und der Summe als Teilergebnis darunter [Anmerkung: In der deutschen Übersetzung steht in der ersten Zeile 0 38, der Wert im arabischen Manuskript ist unleserlich. Bei der 38 handelt es sich wohl um einen Tippfehler, da der korrekte Wert 58 ist, hier grün markiert, und al-Kaschi auch mit diesem

Probe durch Ausrechnung des Quadrats																						
																		0	58			
																	0	48	41	34		
																0	42	34	24	53	10	
															0	22	30	6	44	0	21	16
														0	56	15	46	38	30	17	36	56
													0	1	40	8	20	10	15	24	46	24
												0	42	0	43	51	20	8	4	40	36	21
											0	31	30	6	0	55	20	32	21	16	18	54
										0	25	22	13	38	30	0	22	54	8	9	54	40
									0	44	17	55	28	25	15	24	0	58	25	12	20	54
								0	0	31	32	22	55	11	22	40	36	0	27	53	12	20
							0	56	0	0	40	20	9	10	29	58	18	54	0	57	52	16
						0	57	40	8	0	0	16	8	24	10	13	57	39	54	0	56	0
					0	27	40	51	51	20	0	0	42	32	11	15	29	27	39	12	0	0
				0	58	19	21	52	15	20	32	0	0	19	48	23	45	28	56	0	0	1
			0	22	41	34	24	45	20	54	54	8	0	0	41	48	23	20	0	0	30	48
															48							
		0	55	15	46	53	10	9	54	55	6	25	12	0	0	41	4	0	0	22	44	17
	0	43	39	25	20	10	21	16	26	6	25	39	53	12	0	0	0	0	18	20	12	55
		44	35	4	47	25	57	31	57	53	55	2	55	3	51	59	59	43	50	16	34	
		44	35	4	47	25	57	31	57	53	55	2	55	3	51	59	59	43	50	16	34	
	1	30	49	50	25	8	4	56	4	12	9	54	9	52	16	0	0	32	16	10	25	
																			3	16	27	
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		(1)	(1)	2	2	2	4	2	3	3	4		3	5	6	6	7	7	6	(7)	(7)	

Tabelle 16: Probe zur ersten Berechnung - Quadrierung des Ergebnisses der Wurzel. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 12)

Wert gerechnet haben muss, um als Summe 50 zu erhalten.] Da die vollständige Multiplikationstabelle eine Quadratzahl berechnet, ist diese Multiplikationstabelle Achsensymmetrisch (siehe Tabelle 3 und Tabelle 17) und entsprechend werden die Quadratzahlen der Sexagesimalziffern, welche sich auf der horizontalen Achse befinden, und das Teilergebnis, welches die Zahlen oberhalb der Achse summiert, noch dazu addiert. In der untersten Zeile stehen die Überträge, welche sich als „Summe der oberen 18 Zeilen modulo 60“ ergeben. Darüber steht die Summe aus den Teilergebnissen und dem Rest der Berechnung aus der ersten Berechnungstabelle, welche, wenn die Berechnungen korrekt waren, den Radikanden aus der Berechnungstabelle ergibt.



0	2	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	56	43	33	20
0	0	1	3	2	5	4	5	9	5	7	7	8	9	6	11	13	13	15	15	12	15	14
																			3	16	27	
0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Tabelle 17: Ausschnitt (gerundet) aus der Multiplikationstabelle für das Quadrat der Zahl 1,43,55;22,58,27,57,56,0,44,25,31,42,1,56,22,42,48,58,57.

In Tabelle 17 ist der von al-Kaschi genutzte Ausschnitt aus der vollständigen Multiplikationstabelle für das Quadrat der Zahl

$$1, 43, 55; 22, 58, 27, 57, 56, 0, 44, 25, 31, 42, 1, 56, 22, 42, 48, 58, 57$$

abgebildet. Die Multiplikationstabelle wurde gemäß der Anleitung aus dem „Schlüssel“ erstellt, die vollständige Multiplikationstabelle mit Erläuterungen zur Erstellung findet sich als Beispiel für die Grundrechenart Multiplikation im Unterkapitel „Die erste, zweite und dritte Abhandlung: Arithmetik“ des Kapitels „Miftah al-Hisab“ dieser Arbeit.

Wie ein Abgleich mit der vollständigen Multiplikationstabelle zeigt, wurde die letzte Spalte von al-Kaschi gerundet, wobei das genaue Vorgehen nicht direkt ersichtlich ist. Bei 36 hat er noch ab- und bei 44 aufgerundet, wo man bereits ab 30 ein Aufrunden erwarten würde. Da es sich hierbei um die Oktodezimen handelt, welche weggelassen werden, ändert das Runden am Ergebnis zunächst nichts. Zum Ende des Lehrbriefes hin geht al-Kaschi zudem noch auf die Rundungsfehler ein und berücksichtigt diese.

Die achtundzwanzigste Berechnungstabelle ist die letzte Berechnung nach (66) und ihr Ergebnis liefert $\sqrt{1, 0; 0 \cdot (2, 0; 0 + c_{27})} = c_{28}$ (siehe Tabelle 18). Auch diese Tabelle ist stark verkürzt und so kann man an den unteren Zeilen nur noch die Oktaven, Nonen und Dezimen ablesen. Es folgt die Probe durch Quadrierung, diesmal mit einer Besonderheit.

Nachdem al-Kaschi diese Berechnungen für c_1 bis c_{28} gemäß (66) durchgeführt hat, kann er nun nach (67) aus c_{28} die Sehne s_{28} berechnen (siehe Tabelle 19). Dazu zieht er die Wurzel aus der Differenz des Quadrats des Durchmessers und des Quadrats von c_{28} und erhält das Quadrat der Sehne, s_{28}^2. Dies geschieht unterhalb der Probe zur achtundzwanzigsten Berechnungstabelle. Der berechnete Wert für s_{28}^2 beträgt 36 Oktaven, 48 Nonen, 31 Dezimen, 9 Undezimen, 56 Duodezimen, 45 Tredezimen, 28 Quattuordezimen, 40 Quindezimen, 21 Sexdezimen und 17 Septendezimen.

Es folgt erneut eine Tabelle zum Wurzelziehen - mit anschließender Probe durch Quadrierung - diesmal um die Wurzel aus $s_{28}^2 = 36, 48, 31, 9, 56, 45, 28, 40, 21, 17$ Septendezimen zu berechnen (siehe Tabelle 20). Er erhält als Ergebnis $6, 4, 1, 14, 59, 36, 14, 33, 36, 19, 25$ Quattuordezimen, was der Probe durch Quadrierung standhält, die wieder s_{28}^2 ausgibt. Nun bleibt noch die Länge dieser einen Seite mit der Anzahl der Seiten zu multiplizieren, um so die Näherung des Umfangs des Vielecks zu erhalten.

Achtundzwanzigste Berechnung Sie ergibt die Sehne der Ergänzung eines Bogens, der ein 1 2 8 16 12 48-stel des Umfangs ist																								
	Einmal Erhöhtes		Grad		Minuten		Sekunden		Tertien		Quarten		Quinten		Sexten		Septimen		Oktaven		Nonen			
	1		59		59		59		59		59		59		59		59		59		50			47 Dezimen
Waage	Zweimal Erhöhtes	Einmal Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen			52 Undezimen 12 Duodezime 30 Tredezimen 48 Quattuordezimen 37 Quindezimen 49 Sexdezimen
	3	59	59	59	59	59	59	59	59	59	23	11	28	50	3	14	31	19	38	43				54 Septendezimen
	3	59							59	56	0							0	1					40 Oktodezimen
										3	23	11	28	50	3	14	31	19	37					richtig
										3	19	59							59	1	40			
											3	11							38	41	20			
55											3	7	59							59	44	56	49	
												3	28							41	35	3	11	
12												3	27	59							59	44	13	
													0	50							35	18	58	
57														47								59	56	
														2								19	2	
10														2	0							0	0	
															3							19		
43															3	12						0		
																2								
19																2	28							
																	3							
50																	3	16						
																		3						
																		3	36					
																			2					
34																								
																			4	0				
34																		4	0					
																	4	0						
44																4	0							
28															4	0								
24														3	59								59	
35													3	59								59	41	
51												3	59								59	40	47	
24											3	59							59	58	50			
1										3	59	59	59	59	59	59	59	58	59					

Tabelle 18: Achtundzwanzigste Berechnung - Quadratwurzel von 3,59;59... Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 15)

																			54			
																		49	53	6	6	6
																	37	48	11	4	4	4
																48	36	23	12	12	12	12
															30	47	12	49	49	49	49	50
														12	29	30	17	17	17	17	17	17
													52	11	48	18	18	18	18	18	18	18
												47	51	8	20	20	20	20	20	20	20	20
											50	46	13	4	4	4	4	4	4	4	4	
											49	10	57	57	57	57	57	57	57	57		44
												49	49	49	49	49	49	49	49		39	10
										1	41	35	44	25	1	37	15	39	47	9	52	2
										1	41	35	44	25	1	37	15	39	47	9	52	2
	3	59							59	56	0							0	1	41	40	37
																			2	41	35	19
		59								59	23	11	28	50	3	14	31	19	38	43	0	0
[Nach] Abzug dieses Quadrats vom Quadrat des Durchmessers bleibt als Quadrat der Seite folgendes übrig:																						
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17		
											2	3	2	4	4	4	5	5	3	2	3	

Tabelle 19: Probe durch Quadrierung und Berechnung von s_{28}^2 aus $d^2 - c_{28}^2$. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 15)

Auch das geschieht in Tabellenform (siehe Tabelle 21) und zwar mit Hilfe der vorletzten Multiplikationsmethode, wie sie im Unterkapitel „Die erste, zweite und dritte Abhandlung: Arithmetik“ des Kapitels „Miftah al-Hisab“ beschrieben wird. Bei dieser benutzt er jeweils zwei Zeilen, um die Produkte mitsamt dem Überschuss hinschreiben zu können. Der Multiplikand ist die Länge der Seite s_{28}, der Multiplikator die Anzahl der Seiten. Das Ergebnis, die Zeile mit dem Produkt, entspricht der Näherung des Umfangs des einbeschriebenen Vielecks. Also gilt:

$$U_e = 6,16;59,28,1,34,51,46,14,49,46 \text{ mit } r = 60. \tag{69}$$

Al-Kaschi berechnet nun die Näherung für den Wert von ε, also die eingeschränkte Differenz von U_u und U_e, welche, um die maximale Abweichung von einem Rosshaar nicht zu gefährden, nicht größer als 1 Oktave sein darf. Für die Näherung von ε nimmt er mit gerundeten Werten für $s_{28} \approx 6,17;0$, $c_{28} \approx 1,0;0$ und $\frac{d_{28}}{2} - \frac{c_{28}}{2} \approx 4,36 \cdot 60^{-10}$ die folgenden Verhältnisse an:

$$\begin{aligned} &6,17 \text{ Teile } (\hat{=}\, 60^0) : \varepsilon = 1,0;0 : 4,36 \text{ Dezimen } (\hat{=}\, 60^{-10}) \\ \Leftrightarrow\ &6,17;0 \cdot 60^0 \cdot 4,36;0 \cdot 60^{-10} = \varepsilon \cdot 60 \\ \Leftrightarrow\ &28;54,12 \cdot 60^{-11} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{70}$$

Das in der achtundzwanzigsten Berechnung ausgerechnetete Quadrat war folgendes:											
Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezime	richtig
6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	

	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen		
	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17			
	36												
	0												
		48	16										
			15										
			12	8	1								
			3	1	55								
			2	49	52	31	16						
				12	3	14	12						
				11	55	54	26	30	1				
					7	19	46	10	20				
					7	16	49	29	59	9	36		
						2	56	40	21	7	24		
						2	49	52	34	59	48	51	16
							6	47	46	7	35	8	44
							6	40	25	22	29	33	51
								7	20	45	5	34	53
								7	16	49	29	59	31
									3	55	35	35	22
									3	50	32	47	30
										5	2	47	52
										12	8	2	30
									12	8	2	29	59
								12	8	2	29	59	12
							12	8	2	29	59	12	14
						12	8	2	29	58	36		
					12	8	2	28	59				
				12	8	2	14						
			12	8	1								
		12	4										
	6												
									1	54			
								3	36	1	16		
							3	18	2	24	0	19	
						1	24	2	12	0	36	4	26
					3	36	0	56	0	33	8	24	19
				5	54	2	24	0	14	7	42	35	24
			1	24	3	56	0	36	3	16	32	27	21
		0	6	0	56	0	59	8	24	13	46	19	48
	0	24	0	4	0	14	13	46	35	24	8	24	8
		24	7	34	57	51	5	51	9	55	10	34	26
		24	7	34	57	51	5	51	9	55	10	34	26
0	36	0	16	0	1	3	16	58	1	21	36	3	16
										5	2	47	52
0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17	0	0	0
				(1)	1	2	2	2	2	3	2	2	

Tabelle 20: Berechnung der Wurzel aus s_{28} mit anschließender Probe. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāšī, 1953, S. 16)

Multiplikand			6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
	Multiplikator													
Fünfmal Erhöhtes	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25		
Viermal Erhöhtes	2		12	8	2	29	59	12	29	7	12	38	50	
Dreimal Erhöhtes			0	48	0	8	7	52	1	52	4	48	3	
	8			0	32	1	52	4	48	4	24	2	32	
Zweimal Erhöhtes				1	36	0	16	15	44	3	44	9	36	
	16				1	4	3	44	9	36	8	48	5	
Einmal Erhöhtes					1	12	0	12	11	48	2	48	7	
	12					0	48	2	48	7	12	6	36	
Zahl						4	48	0	48	47	12	11	12	
	48						3	12	11	12	28	48	26	
Produkt		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46		
		Einmal Erhöhtes	Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	

Tabelle 21: Multiplikation von s_{28} mit der Anzahl der Seiten. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 17)

Teile	Minuten	Sekunden	Tertien	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen	Oktaven	Nonen	Dezimen	Undezimen	Duodezimen	Tredezimen	Quattuordezimen	Quindezimen	Sexdezimen	Septendezimen	Oktodezimen
59	59	59	59	59	59	59	59	59	55	23	56	6	15	24	18	54	57	20
zu folgendem Überschuss der Hälfte des Durchmessers über sie:									4	36	3	53	44	35	41	5	2	40

Tabelle 22: Der Wert für $c_{28}/2$ und die Differenz aus $d/2 = 60,0;0$ und $c_{28}/2$. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 17)

Die Differenz der Umfänge der Vielecke, welche kleiner als 1 Oktave sein sollte, ist also tatsächlich sogar kleiner als 29 Nonen. Und da U_k genau zwischen diesen beiden Umfängen liegt, benötigt al-Kaschi den Mittelwert aus U_u und U_e. Dazu berechnet er zunächst einmal $U_e + 29$ Nonen $\approx U_u$ und erhält

$$U_u = 6,16;59,28,1,34,51,46,14,50,15 \text{ mit } r = 60. \tag{71}$$

Den Mittelwert findet er nun, indem er zu U_e 14 Nonen hinzurechnet bzw. von U_e 15 Nonen abzieht. Dass er bei U_e mehr abzieht als er bei U_u hinzurechnet, ist gerechtfertigt, da ja $\varepsilon \approx 28;54,12$ Nonen für die Berechnung von U_e aber $U_e + 29$ Nonen $= U_u$ angenommen wurde. Er gelangt auf diesem Wege zum Umfang des Kreises mit

$$U_k = 6,16;59,28,1,34,51,46,14,50 \text{ mit } r = 60. \tag{72}$$

Er bringt die Ziffern in einem Vers unter und gibt die Vielfachen (1-60) dieser Zahl für $r = 1$ (also die gleichen Ziffern nur um eine Sexagesimalstelle nach rechts verschoben) in einer Tabelle an. In dieser Tabelle findet sich für das 30-fache von U_k mit $r = 1$ der Wert $3,8;29,44,0,47,25,53,7,25,0$, der entsprechend das um eine Sexagesimalstelle verschobene Pi in Sexagesimalschreibweise darstellt, denn es gilt für $r = 1$:

$$\frac{U_k}{2} = \frac{U_k \cdot 30}{60} = \frac{6;16,59,28,1,34,51,46,14,50 \cdot 30}{60} = 3;8,29,44,0,47,25,53,7,25. \tag{73}$$

Da al-Kaschi nicht explizit auf der Suche nach Pi, sondern nach dem Umfang, also 2· Pi war, ist dies der Sexagesimalwert mit dem er Pi bestimmt hat, ohne ihn so zu benennen. Dieser Wert ist auf 9 Sexagesimalstellen genau, der genauere Wert beträgt 3;8,29,44,0,47,25,53,7,24,57,36, ... - wie zuvor mit Hilfe von Wolfram Alpha nach Anleitung des Verfahrens aus dem „Schlüssel“ berechnet.

Bevor al-Kaschi seinen gefundenen Wert in „indische Ziffern“ (Dezimalzahlen) umwandelt, geht er näher auf die bei den Berechnungen angefallenen Rundungsfehler ein und untersucht, ob sich diese über die Berechnungen hinweg verstärkt haben. Diese Rundungsfehler entstehen, da er beim Wurzelziehen einen Rest übrig behält, aus dem er wie im Kapitel „Miftah al-Hisab“, Unterkapitel „Die erste, zweite und dritte Abhandlung: Arithmetik“ beschrieben, durch lineare Interpolation die nicht perfekten Stellen der Wurzel berechnet.

In Tabelle 23 hat al-Kaschi seine Berechnungen bezüglich des Rundungsfehlers für jede einzelne Berechnungstabelle festgehalten. Beim Aufrunden entsteht ein sogenannter „Mangel“ und beim Abrunden ein „Überschuss“. Er rechnet an dieser Stelle also noch genauer nach und stellt fest, dass er bei der letzten Stelle der ersten Berechnung $56;40$ Oktodezimen zu $57;0$ Oktodezimen aufgerundet hat. Es liegt also ein Mangel in Höhe von 20 Nondezimen vor. Diesen zieht er vom Rest der zweiten Berechnung ab und erhält einen korrigierten Rest, mit dem er dann analog verfährt. Er durchläuft also alle Berechnungen erneut, berechnet sie auf eine Sexagesimalstelle genauer und notiert seine Ergebnisse tabellarisch. Am Ende kommt er zu dem Schluss, dass der Umfang U_e mit 54 Nondezimen zu groß angesetzt wurde. Er rät deshalb dazu, die letzte Sexagesimalstelle mit 45 statt mit 46 anzusetzen. Zugleich weist er aber darauf hin, dass die Rundungsfehler weniger als eine None Differenz ausmachen.

Tafel dessen, was an der letzten Stelle der Berechnungen vernachlässigt wird				
Berech-nungen		Was es ausmacht		Überschüsse und Mängel
1		20		mangelh.
	2		32	mangelh.
3		6		mangelh.
	4		15	übersch.
5		28		mangelh.
	6		15	mangelh.
7		22		übersch.
	8		6	mangelh.
9		24		mangelh.
	10		18	übersch.
11		4		mangelh.
	12		12	übersch.
13		5		mangelh.
	14		16	mangelh.
15		17		mangelh.
	16		9	übersch.
17		16		übersch.
	18		8	übersch.
19		3		mangelh.
	20		17	mangelh.
21		14		mangelh.
	22		27	übersch.
23		3		übersch.
	24		1	übersch.
25		18		übersch.
	26		15	übersch.
27		10		übersch.
	28		26	übersch.
Quadrat der Seite		10		mangelh.
			52	mangelh.
Umfang		54		mangelh.

Tabelle 23: Berechnung der Rundungsfehler beim Rest der Berechnungstabellen. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāsī, 1953, S. 21)

Als nächstes wandelt er die gefundene Sexagesimalzahl noch in „indische Ziffern“, also in Dezimalzahlen um. Das Vorgehen dazu beschreibt er im „Schlüssel“. Die Tabelle 24, die in dieser Art im Lehrbrief enthalten ist, gibt dabei die Vielfachen des Umfangs eines Kreises mit dem Radius 1 an. Die Tabelle wird mit Ganzen und Brüchen überschrieben, gibt also die Zahlen vor und nach dem Komma an. Wie schon beim 30-fachen des Umfangs als Sexagesimalzahl, gibt al-Kaschi auch in dieser Tabelle wieder einen Wert für das um eine Stelle erhöhte von Pi an, ohne es explizit zu benennen. Da die erste Zeile den Wert für $U_k = 2\pi r$ mit $r = 1$ angibt, ist das 5-fache davon logischerweise $10\pi r$ mit $r = 1$, also Pi um eine Dezimalstelle verschoben. Der Wert, den al-Kaschi für das 5-fache angibt, ist also Pi auf 18 Dezimalstellen berechnet. Zur Erinnerung: Der genauere Wert für Pi hat die Dezimalstellen 3 141 592 653 589 793 238 … Der von al-Kaschi berechnete Wert ist also auf 17 Dezimalstellen korrekt – eine eindrucksvolle Leistung.

Abschließend gibt al-Kaschi noch eine Einführung in das Rechnen mit den Tabellen des Vielfachen an und vergleicht sein Ergebnis in Sexagesimalziffern mit dem bis dato geläufigen. Er erhält eine Differenz die größer ist als 9 Sekunden. Außerdem kommt er bei einem weiteren Vergleich zu dem Schluss, dass ein einfacher Näherungswert zur Berechnung des Umfangs besser durch $\frac{d}{2} \cdot 6;17 \approx d \cdot 3,14167$ als durch $d \cdot 3\frac{1}{7} \approx d \cdot 3,14286$ gegeben werden kann.

Tafel der Vielfachen des Verhältnisses des Umfangs zum Durchmesser																			
Ganze		[Zähler der] Brüche																	Zahlen
deren Zehner	Vielfache der Hälfte des Durchmessers	Einer der fünfmal [wiederholten]	viermal wiederholt[e Tausender]			dreimal wiederholt[e Tausender]			Tausender der Tausender]			Tausender							
			Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	Hunderter	Zehner	Einer	
null	sechs	zwei	acht	drei	eins	acht	fünf	drei	null	sieben	eins	sieben	neun	fünf	acht	sechs	fünf	
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	1
1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	2
1	8	8	4	9	5	5	5	9	2	1	5	3	8	7	5	9	5	3
2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0	4
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5	5
3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0	6
4	3	9	8	2	2	9	7	1	5	0	2	5	7	1	0	5	5	7
5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0	8
5	6	5	4	8	6	6	7	7	6	4	6	1	6	2	7	8	5	9
6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5	0	10

Tabelle 24: Die Vielfachen (1-10) des Umfangs geteilt durch den Durchmesser, also die Vielfachen (1-10) von 2π. Quelle: Der Lehrbrief über den Kreisumfang (Luckey & Kāšī, 1953, S. 22)

7 Fazit

Jamshid al-Kaschi war zwar „nur“ einer von vielen großen islamischen Mathematikern, doch auch er hat die Mathematik mit seinen Methoden um Jahrhunderte nach vorne gebracht. Ob durch eine hohe Genauigkeit der Stellen beim Sinus und bei Pi durch clevere Iterationen oder das Sammeln und Weiterentwickeln von Wissen im eigenen Lehrbuch – al-Kaschi war über eine lange Zeit unerreicht in seiner Genauigkeit und der Präsentation seiner Ergebnisse.

Gerade sein Lehrbuch *Miftah al-Hisab* verdient auch heute noch Aufmerksamkeit. Die mathematischen Methoden, die er anbietet, mögen auf den ersten Blick altbekannt bis überholt wirken. Doch seine Methoden wissen bei genauerem Hinsehen auch heute noch zu überzeugen:

Die Gelosia-Multiplikation wird heute noch im Internet als einfache Alternative zur heutzutage an Schulen gelehrten Multiplikationsmethode dargestellt und seine Idee, das bekannte Gitter um 45° zu drehen, stellt eine praktische Verbesserung dar.

Spannend ist auch das Thema Wurzelberechnung, das man in der schriftlichen Form, natürlich didaktisch transformiert, im Mathematikunterricht der Oberstufe einsetzen könnte, um den Schülerinnen und Schülern noch einmal ins Gedächtnis zu rufen, was beim Druck auf die Wurzeltaste des Taschenrechners eigentlich passiert.

Zudem ist auch das didaktische Vorgehen bemerkenswert. Selbst wenn er sich gelegentlich zu Sätzen wie: „The explanation of its operation and the operations in the multiplication table of the divisor are clear to the clever.“ (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 207) hinreißen lässt und eine genauere Erklärung seines Vorgehens bei einem Beispiel schuldig bleibt, er präsentiert stets mehrere Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und demonstriert die Anwendung seiner Methoden an Beispielen, die insbesondere im Bereich der Algebra sehr nah an der damaligen Lebenswirklichkeit der Leserinnen und Leser waren.

Seine Vorliebe für übersichtliche Tabellen hilft dabei, dass sein Vorgehen auch heute noch leicht nachvollziehbar ist. So ließen sich, didaktisch aufgearbeitet, seine Methoden recht einfach in einer Unterrichtseinheit über islamische Mathematiker präsentieren – hier bietet sich eine Möglichkeit für einen fächerübergreifenden (Mathematik, Geschichte, islamische Religionslehre) Exkurs.

Die These, dass die islamischen Mathematiker nur bereits Bekanntes aus dem indischen und griechischen Sprachraum übersetzt haben, lässt sich durch *Miftah* *al-Hisab* und die Lehrbriefe von al-Kaschi schnell falsifizieren. Natürlich ließe sich die These noch einfacher durch Beweis durch Gegenbeispiel widerlegen - an dieser Stelle sei nur auf Al Khawarizmis Buch Al-Jabr-wal-Muqabla, aus dessen Titel sich das Wort Algebra abgeleitet hat und in dem er die bekannten geometrischen Lösungswege durch algebraische Terme ersetzte, verwiesen (O'Connor & Robertson, 1999).

Das antike Wissen wurde gesammelt und übersetzt, auch das haben die islamischen Mathematiker geleistet. Doch darüber hinaus haben sie die Weiter- und Neuentwicklung von mathematischen Methoden vorangetrieben und – wie in dieser Arbeit ausführlich gezeigt – dadurch eine Genauigkeit bei ihren Ergebnissen erzielt, die teils erst Jahrhunderte später wieder in Europa erreicht wurde.

Dass die arabischen Mathematiker einen größeren Beitrag geleistet haben und nicht nur als die „Warmhalteplatten" des antiken Wissens fungierten, wurde auch bei der überarbeiteten vierten Fassung des Werkes von Cajori berücksichtigt, in dem es inzwischen heißt:

> „Formerly it was held that the Arabs added but little to the knowledge of mathematics; recent studies indicate that they must be credited with novelties once thought to be of later origin." (Cajori, 1985, S. 99)

Literatur

Aaboe, A. (1954). Al-Kashi's Iteration Method for the Determination of sin 1°. *Scripta Mathematica*(20), 24-29.

al-Chuwarazmi, M. i., & Karpinski, L. C. (1915). Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi. With an introduction, critical notes and an English version. Macmillan, New York/London.

Arndt, J., & Haenel, C. (2000). *Pi: Algorithmen, Computer, Arithmetik* (2., überarb. und erw. Aufl. Ausg.). Springer.

Aydin, N., & Hammoudi, L. (2019). *Al-Kashi's Miftah al-Hisab, Volume I: Arithmetik. Translation and Commentary.* Springer Nature Switzerland AG.

Aydin, N., Hammoudi, L., & Bakbouk, G. (2020). *Al-Kashi's Miftah al-Hisab, Volume II: Geometrie. Translation and Commentary.* Springer Nature Switzerland AG.

Aydin, N., Hammoudi, L., & Bakbouk, G. (2020). *Al-Kashi's Miftah al-Hisab, Volume III: Algebra. Translation and Commentary.* Springer Nature Switzerland AG.

Azarian, M. (2015). A Study of Risāla al-Watar wa'l Jaib ("The Treatise on the Chord and Sine"). *Forum Geometricorum*, S. 229-242.

Bagheri, M. (August 1997). A Newly Found Letter of Al-Kāshī on Scientific Life in Samarkand. *Historia Mathematica, 24*(3), S. 241-256.

Berggren, J. (2011). *Mathematik im mittelalterlichen Islam.* Springer.

Bradley, M. J. (2019). *The Age of Genius. Updated Edition.* Infobase Holdings.

Brown, E. (März 1999). Square Roots from 1; 24, 51, 10 to Dan Shanks. *THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, 30*(2), 82-95.

Cajori, F. (1893). *A History of Mathematics.* New York/London: Macmillan & Co.

Cajori, F. (1985). *A history of mathematics* (4. Ausg.). Chelsea Publ.

Chabert, J.-L., & Barbin, É. (1999). *A history of algorithms: from the pebble to the microchip.* Springer.

Clagett, M. (1999). *Ancient Egyptian science, 3. Ancient Egyptian mathematics: a source book.* American Philos. Soc.

Euclides, & Thaer, C. (2015). *Die Elemente: Bücher I - XII* (Bde. 4. Aufl., Reprint [der Ausg. Leipzig, Akad. Verl.-Ges., 1933, 1935, 1936 und 1937]). Europa-Lehrmittel.

Gericke, H. (1984). *Mathematik in Antike und Orient.* Springer.

Grattan-Guinness, I. (1997). *The Fontana History of the Mathematical Sciences. The Rainbow of Mathematics.* London: Fontana Press.

Hamadanizadeh, J. (1980). The trigonometric tables of al-Kāshī in his Zīj-i Khāqānī. *Historia Mathematica, Volume 7*(Issue 1), 38-45.

Ḫwārizmī, M.-M., & Folkerts, M. (1997). *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī.* Verl. der Bayer. Akad. der Wiss.

Ifrah, G. (1987). *Universalgeschichte der Zahlen* (Bde. 2., durchges. und um ein Register erw. Aufl.). Campus-Verl.

Luckey, P. (1951). *Die Rechenkunst bei Gamsid B. Mas'ud Al-Kashi.* Wiesbaden: Kommissionsverlag Franz Steiner GmbH.

Luckey, P., & Kāsī, G.-M. (1953). *Der Lehrbrief über den Kreisumfang: = ar-Risāla al-muḥīṭīya.* Akad. Verl.

Martzloff, J.-C. (2006). *A History of Chinese Mathematics.* Springer-Verlag.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1999). *Arabic mathematics : forgotten brilliance?* Abgerufen am 10. Februar 2024 von MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics/

O'Connor, J., & Robertson, E. (Juli 1999). *Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi.* Abgerufen am 08. Februar 2024 von MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/

Saidan, A. S. (1978). *The arithmetic of al-Uqlīdisī : the story of Hindu-Arabic arithmetic as told in Kitāb al-fuṣūl fī al-ḥisāb al Hindī, by Abū al-Ḥasan, Aḥmed ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī.* Dordrecht-Holland: D- Reidel Publishing Company.

Schubring, G. (2021). *Geschichte der Mathematik in ihren Kontexten: Neue Zugänge.* Springer International Publishing.

Strick, H. K. (2020). *Mathematik - einfach genial! Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor.* Springer Verlag GmbH Deutschland.

Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy's Almagest.* Princeton University Press.

Vogel, K. (1958). *Vorgriechische Mathematik, 1. Vorgeschichte und Ägypten.* Schroedel [u.a.].

Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton.* Springer Verlag.

Youschkevitch, A., & Rosenfeld, B. (1973). Al-Kashi. *Dictionary of Scientific Biography, 7*, 255-262.

Zirker, H. (2013). *Der Koran* (4., überarbeitete Aufl.). Lambert Schneider.

Anhang

Beispiel zum Wurzelziehen aus Sexagesimalzahlen, genauer Ziehen der Würfel-Würfel-Wurzel (6. Wurzel) aus einer Sexagesimalzahl mit 11 Stellen am Beispiel der Sexagesimalzahl 34,59,1,7,14,54,23,3,47,37;40 (Tabelle 25)

Example	Extraction of the root of the cube-cube of the number in the row of number															
Row of output	Minute 30						Degree 0						First elev. 14			
Row of the number as a cube-cube	Sixth	Fifth	Fourth	Third	Second	Minute	Degree	Elevated	2nd Elevated	3rd Elevated	4th Elevated	5th Elevated	6th Elevated	7th Elevated	8th Elevated	9th Elevated
						40	37	47	3	23	54	14	7	1	59	34
													16	32	51	34
													51	28	7	
	0	0	0	15	56	30	37	47	3	25	54	14	51	28	7	
Second of the number that is row of square-cube	0	0	30	52	1	15	35	7	46	48	29	42	57	14		
	0	0	30	52	1	15	15	7	46	48	5	20	1			
											24	22	56	14		
												24	22	56	14	
													24	22	56	14
														58	26	52
													44	23	29	2
Thrid of the number that is row of square-square	0	0	45	3	30	10	15	32	37	41	40	2				
	0	0	45	3	30	10	15	32	37	41	40	2				
										20	0	5	40	2		
													0	20	40	2
													40	42	46	1
													20	21	53	
													20	41	42	
													16	40	10	
Fourth of the number that is row of cube	0	30	7	0	21	30	20	15	15							
	0	30	7	0	21	30	20									
							40	14	15							
										40	14	15	40	14	14	
													20	36	7	
													20	36	7	
													24	34	20	
													56	2	3	
													52	56	2	
													44	45		
Fifth of the number that is row of square													0	49		
													20	16		
													40	32		
													20	53		
													36	59		
													48	9		
													48	9		
													32	6		
	0	15	0	42	0	49			0	49			16	3		
Row of the root													24	1		
													10	1		
													56			
													42			
													28			
	30	0	24	1			0	24	1				14			

Tabelle 25: Schriftliche Berechnung der sechsten Wurzel aus der Sexagesimalzahl 34,59,1,7,14,54,23,3,47,37;40. Quelle: Miftah al-Hisab (Aydin & Hammoudi, 2019, S. 217)

Anschauung als Leitprinzip im Rechenunterricht bei Pestalozzi und Diesterweg.

Susanne Spies

1 Anschauung in der Tradition Pestalozzis

Sowohl der Schweizer Pädagoge Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1824) als auch der preußische Lehrerbildner Friedrich Adolph Wilhelm Diesterweg (1790-1866) erhoben die Anschauung zu einem ihrer pädagogischen Leitprinzipien. Eine einfache Erklärung für diese Übereinstimmung liefert das gerne bediente Narrativ von Diesterwegs Bewunderung für Pestalozzis Ansatz und dem daraus entstehenden Umstand, dass Diesterwegs Anschauungsprinzip klar in der Tradition Pestalozzis stehe. Exemplarisch sei hier Kempelmanns Befund wiedergegeben:

> „Das Prinzip der Anschauung war für ihn ‚Hauptgrundsatz des neueren Unterrichts, das Prinzip des Elementarunterrichts der neuen Schule.‘ Auch in dieser Auffassung griff er die Gedanken von Rousseau und Pestalozzi auf. ‚Selbsttätigkeit durch anschauliche Erkenntnis und auf der Basis derselben‘ war seine Forderung, die er aus der theoretischen-philosophischen Traditionslinie von Kant und Fries ableitete und die durch Pestalozzis Methode auf jeden Unterricht einwirkte. ‚Unterrichte anschauliche!‘ war sein Credo, das er jedem Lehrer zur Aufgabe stellte.“ (Kempelmann, 1995, S. 147)

Und tatsächlich findet sich in Diesterwegs Werk viel Bewunderung für den, wie er ihn nennt, „Lehrer aller Lehrer“ Pestalozzi. Allerdings kann seinen Äußerungen auch ein durchaus „problematisches Verhältnis“ (vgl. Oelkers, 1995) zu dem zu Diesterwegs Zeit in weiten Kreisen hoch verehrten Pestalozzi entnommen werden.

Dies gilt vor allem bezüglich dessen in den Jahren 1800 bis 1803 ausgearbeiteten „Methode“ wie (Oelkers, 1995) nachweist.
Bezogen auf das Prinzip der Anschauung scheint das Verhältnis auf den ersten Blick jedoch eher unproblematisch: So ist bei beiden etwas, das sie Anschauung nennen, die Grundlage der menschlichen Erkenntnis und damit Primat allen Lernens. Es werden in diesem Kontext sehr ähnliche Bezeichnungen verwendet und Diesterweg schlägt sogar Pestalozzis Einheitentabelle (vgl. Abb. 1) als Grundlage des Anfangsunterrichts in der Arithmetik vor (vgl. 3.1). Doch gerade in den jeweiligen Ausführungen zum Lehren und Lernen von Mathematik offenbaren sich auf den zweiten Blick fundamentale Unterschiede. Dies betrifft sowohl die erkenntnistheoretischen Grundannahmen, als auch die Bedeutung der Begrifflichkeiten und die resultierenden Empfehlungen für die Praxis.

Im Folgenden sollen diese Unterschiede zwischen Pestalozzis und Diesterwegs theoretischen Konzepten bezüglich der Anschauung als Unterrichtsprinzip einerseits (Kap. 2) und ihrer Anwendung im arithmetischen Anfangsunterricht andererseits (Kap. 3) herausgearbeitet werden. So kann der Frage nachgegangen werden, inwiefern das Narrativ der Pestalozzinachfolge Diesterwegs bezüglich des Prinzips der Anschauung haltbar ist oder ob auch hier von einem „problematischen Verhältnis“ zu sprechen wäre.

Während die Rolle der Anschauung in den Arbeiten Pestalozzi sowohl von seinen direkten Schülern und Nachfolgern und den Pädagogen zu Beginn des 20. Jhd. (vgl. etwa Paul Natorp, 1912 oder Georg Kerschensteiner, 1932) als auch in neueren Arbeiten (vgl. etwa Böversen, 1970, Merkle, 1983, Osterwalder und Reusser, 1997 oder Brühlmeier, 2024) ausführlich behandelt wurde, beschränken sich Arbeiten zu Diesterweg meist auf die prominente Nennung des Prinzips der Anschauung, dem Hinweis auf die (vermeintliche) Pestalozzinachfolge sowie die Darstellung der schulpraktischen Auswirkungen dieses Prinzips im Allgemeinen. Daher kann in Kapitel 2 zur Darstellung von Pestalozzis Konzepten auch auf Sekundärliteratur zurückgegriffen werden, während die philosophischen Grundannahmen Diesterwegs zunächst aus dessen eigenen Schriften herauszuarbeiten sind. Auch bezüglich der Zahlenlehre bzw. des Rechenunterrichts zeigt sich ein ähnlicher Befund. Obwohl beispielsweise der erste Band seines gemeinsam mit Heuser verfassten *praktischen Rechenbuchs* bereits zu Diesterwegs Lebzeiten in 16. Auflage erschien und sein *Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer* nebst den darin enthaltenen Ausführungen zum Rechenunterricht mindestens unter den preußischen Volksschullehrern weit verbreitet war, wird er in der Literatur nur sehr selten als Rechendidaktiker gelesen. In dem die folgende Untersuchung gerade sein Konzept mathematischer Anschauung sowie seine Vorschläge zum Anfangsunterricht im

Rechnen exemplarisch betrachtet, steht hier also ein selten beachteter Aspekt der Diesterwegforschung im Fokus.

Damit verfolgt der Artikel zunächst ein unterrichtshistorisches Interesse und möchte außerdem einen Beitrag zur in der Literatur eher selten geleisteten[1] Darstellung Diesterwegs als Mathematikdidaktiker leisten. Darüber hinaus wird jedoch auch das systematische Anliegen verfolgt das Problemfeld Mathematik - Anschauung - Unterricht genauer zu fassen.

2 Anschauung als pädagogisches Prinzip

Diesterweg veröffentlicht seine zum Anschauungsprinzip führenden erkenntnistheoretischen Grundlagen einerseits in seinem 1833 in den *Rheinischen Blättern* erschienenen Aufsatz *Über die Quelle unserer Erkenntnis und über das (einzig richtige) Verfahren bei Erwecken derselben in Andern, nebst einem Anhange über die heuristische Methode in der Raumlehre.* (Diesterweg, 1833) und andererseits in seinem wohl einflussreichsten Werk *Wegweiser zur Bildung für Lehrer und die Lehrer werden wollen, und methodisch-praktische Anweiseungen zur Führung des Lehramts* (1835[1]) (insbesondere Kapitel IV: *Die Anlage des Menschen und die aus ihrem Wesen entspringenden allgemeinen didaktischen Gesetze und Regeln.*). Diese beiden Werke sollen den folgenden Ausführungen zu Diesterwegs Anschauungsbegriff hauptsächlich zu Grunde liegen, da es sich hier um zusammenhängende systematisch-philosophische Betrachtungen handelt. Darüber hinaus gibt es in Diesterwegs Werk eine Vielzahl pädagogisch-didaktischer Schriften zu unterschiedlichen Themen, in denen das Primat der Anschauung in unterschiedlicher Konnotation hervorgehoben wird. Immer wieder wird hier jedoch auf die Ausführungen in den beiden oben genannten Texten verwiesen.

Bei Pestalozzi findet man keinen ausgearbeiteten Text zu seinen philosophischen Grundannahmen, was Böversen folgend daran liegt, dass „der Begriff der Anschauung bei Pestalozzi eine fast universale Bedeutung“ habe und außerdem „Pestalozzi bei aller Klarheit seiner Intention keine scharfe Begrifflichkeit“ (Böversen, 1970, S. 216) nutze. Auch die Literatur zum Thema komme daher so Böversen zu keiner einheitlichen Auffassung, sondern versuche eher Pestalozzis Ausführungen mit jeweils anderen philosophischen Anschauungskonzeptionen in Passung zu bringen. Die ausführlichsten Darstellungen zum Prinzip der Anschauung liefert Pestalozzi in *Wie Gertrud ihre Kinder lehrt* (1801[1]), wo er umfassend seine Methode der

[1] Ausnahmen stellen hier vereinzelte Arbeiten wie etwa Koch (1958), Jahnke (1990) oder Zeimetz (2012) dar.

Menschenbildung durch die Mütter und die Schule beschreibt, sowie bezogen auf mathematische Inhalte in den seine Methode umsetzenden Lehrwerken *ABC der Anschauung oder Anschauungslehre der Maßverhältnisse* (1803) und *Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse* (1803).

Auf Grund einer fehlenden zusammenhängenden pestalozzischen Philosophie der Anschauung sollen im Folgenden, die im Rahmen seiner Methode verwendeten zentralen Begrifflichkeiten, äußere Anschauung, innere Anschauung und Begriffsbildung, den Vergleich zu Diesterweg gliedern.

2.1 Epistemische und politische Funktion der Anschauung

Sowohl Diesterweg als auch Pestalozzi sehen in der Anschauung den Anfang aller Erkenntnis – Pestalozzi spricht hier immer wieder vom viel zitierten „absoluten Fundament aller Erkenntnis“ (vgl. z.B. Pestalozzi, 1887, S. 160). Beide grenzen damit den anschaulichen Unterricht vom reinen auswendig Repetieren für die Kinder bedeutungsloser Sätze, dem „Maulbrauchen“ (Pestalozzi) bzw. „Wortschällen“ (Diesterweg), ab.[2]

Diesterweg unterscheidet in diesem Zusammenhang Erkenntnis von bloßer Kenntnis:

> „Kenntnisse sind Vorstellungen, durch die man einen Gegenstand kennt [z.B. unwesentliche äußere Merkmale, Namen, Zeichen usw.], Erkenntnisse aber solche, durch welche wir das Wesen der Dinge [Merkmale der Gegenstände, ursprünglich und abgeleiteten und ihr Verhältniss] auffassen.“ (Diesterweg, 1833, S. 292)

Er kritisiert, dass in den Volks- und Bürgerschulen und insbesondere in den Lateinschulen seiner Zeit viel zu häufig durch das auswendige Aufsagen und Nachsprechen etwa von Regeln lediglich Kenntnisse unterrichtet würden:

> „Ihr sprecht in der Schule oft weit und breit von Dingen, die den Kindern keine Dinge sind, ihr gebraucht Worte, welche Vorstellungen oder auch Erkenntnisse bezeichnen können, die aber den Kindern Worte (‚Wortschällen‘) bleiben.“ (Diesterweg, 1833, S. 294)

[2] Auch wenn Pestalozzi dies nicht explizit sagt, so ist diese Idee und die daraus folgenden Forderungen für die pädagogische Praxis schon zu Pestalozzis Zeit nicht mehr neu: Ganz ähnlich formuliert sie bereits 1632 Johann Amos Comenius (1592-1670) in seiner Didactica magna (vgl. Liedtke, 1990, S. 198f).

Um Menschen hingegen zu echten Erkenntnissen zu führen, sieht er nur einen möglichen Weg:

> „Wir verstehen nur das, wir haben nur von dem eine Erkenntniss, was wir anschaulich erkannt haben oder auf Anschauungen zurückführen können." (Diesterweg, 1833, S. 294)

Dies gilt für Diesterweg über alle Wissensgebiete hinweg und auch auf allen Niveaustufen. Begriffe, zu denen unmittelbare Anschauungen nicht möglich sind (als Beispiele nennt er Engel, Unsterblichkeit, Jenseits usw.), können somit auch nur dem Worte nach gekannt, aber nicht im eigentlichen Sinne erkannt werden. Dies bedeutet auch, dass in diesen Fällen ein Wiedererkennen bzw. Zuordnen nicht möglich ist.

Pointiert formuliert Diesterweg seine Folgerung für das Lehren und Lernen im Allgemein als „Grundsatz der Didaktik":

> „In dem Schüler muß zuerst die unmittelbarste Anschauung, auf welche sich ein Begriff, ein Gedanke, ein Gefühl stützt, hervorgerufen werden, oder, falls dieses nicht möglich sein sollte, das Neue muß wenigstens mit unmittelbaren Anschauungen in Verbindung gebracht werden durch Vergleichung, durch Analogie und bildliche Darstellung." (Diesterweg, 1833, S. 300)

Um diesen Grundsatz zu stützen und weiter zu konkretisieren, arbeitet er in *Über die Quelle unserer Erkenntnis* seine Idee vom Wesen der Anschauung weiter aus. Dabei stützt er sich explizit auf die anthropologische Logik nach Jakob Friedrich Fries (1773-1843), dessen Ansichten er vermutlich den Friesschen Ausführungen unter dem Titel *System der Logik. Ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstgebrauch* (Fries, 1837) in der ersten Auflage von 1811 oder der zweiten Auflage von 1819 entnommen hat.[3] Allerdings zieht er nicht das ganze von Fries aufgesetzte neukantische philosophische System heran, sondern wendet die Ansätze für die Schulpraxis. Dabei hat er durchaus auch kritische Bemerkung zu den von Fries verwendeten Bezeichnungen übrig. Man könnte Diesterwegs Ansatz eine philosophisch informierte Pädagogik oder eine pragmatische Wendung der Philosophie für die Pädagogik nennen.

[3] Der Bezug auf die Inhalte dieses zeitgenössischen Philosophen zeigt, dass Diesterweg seinen eigenen, expliziten Aufforderung an die Lehrerschaft, mehr Hintergrundliteratur zu lesen (vgl. Aufsatz in den Rheinischen Blättern), ebenfalls nachkommt und im Rahmen seiner Lehrerbildungstätigkeit die Forschung nicht vernachlässigt. Der Aufsatz *Quelle unserer Erkenntnis* ist beispielsweise auch, wie Diesterweg dort eingangs schreibt, motiviert durch eine Reihe von Fortbildungsmaßnahmen und die dort diskutierten Inhalte (vgl. Diesterweg, 1833, S. 291f).

Wenn Schülerinnen und Schüler Dinge nur kennen aber nicht erkennen, sind sie nicht in der Lage, mit dem auswendig gelernten, leeren Wissen selbsttätig weiter zu arbeiten und die Aussagen zu überprüfen. Es handelt sich dann bestenfalls um Wahrheit, die auf Autoritäten zurückgeht. Von diesen ist dann Diesterweg folgend keine Emanzipation bzw. kritische Prüfung, aber auch keine selbständige Erweiterung oder Anwendung des Erlernten möglich. Letzteres aber entspricht seinem liberalen Bildungsziel, seiner politischen, aber auch seiner religiösen Einstellung. Hier, so Hohendorf, beruft Diesterweg sich auf das protestantische Prinzip des „freien Prüfungsrechts“ (Hohendorf, 1990, S. 25), welches aus dem Paulus Zitat: „Prüfet alles, das Gute behaltet.“ (Thess. 5, 21) abgeleitet wird:

> „Nur der geistig Todtgeborene, der ewig Blinde spricht gläubig nach, was Andere ihm vorsprechen; der nach geistiger Mündigkeit und Selbstständigkeit Strebende aber untersucht und prüft, ob das für wahr Hingestellte sich mit dem Ergebniß seines Lebens, mit unmittelbar gewonnenen sicheren Anschauungen verträgt.“ (Diesterweg, 1833, S. 300)

Interessanter Weise unterscheidet sich bei aller Einigkeit über das Erkenntnisfundament dieses Begründungsmuster für die Notwendigkeit echter Erkenntnis deutlich von dem Pestalozzis. Ausgehend von einer natur- bzw. gottgegebenen Ständeordnung, soll Pestalozzi folgend Erziehung den Menschen dazu bringen, einerseits die Anforderungen seiner gesellschaftlichen Stellung selbstständig zu erfüllen und andererseits diese göttliche Ordnung wie ein Naturgesetz als Wahrheit zu erkennen und sich diesem auf Grund dieser Erkenntnis aus freiem Willen zu unterstellen. Durch die Erziehung nach Pestalozzis Methode sollen die Menschen Osterwalder und Reusser folgend vom Sollen zum Wollen und damit zu innerer Zufriedenheit gelangen:

> „Wenn dem Menschen auf Weisheit gegründete Furcht und auf Liebe ruhender Gehorsam zur zweiten Natur geworden, so finden die gereiften Früchte an dem Stamm, dem sie entkeimet, keine Nahrung mehr und das grosse Werk der Menschen in sich selbst erschafft, seine zuverlässige Treue wird dann frei.“ (Pestalozzi, 1797: *Meine Nachforschungen über den Gang der Natur in der Entwicklung des Menschengeschlechts.* zitiert nach Osterwalder und Reusser, 1997, S. 319)

Es sind also jeweils ganz verschiedene politisch motivierte Bildungsziele, die Pestalozzi und Diesterweg zunächst zum gleichen pädagogisch-philosophischen Grundsatz, dem Primat der Anschauung führen.

2.2 Äußere Anschauung

Mit äußerer Anschauung ist sowohl bei Pestalozzi als auch bei Diesterweg zunächst die Wahrnehmung der Umwelt mit Hilfe der fünf Sinne gemeint. Sie bildet in beiden Konzeptionen den einzig möglichen Zugang zur Realität und damit den Ausgangspunkt des Lernens. Jedoch zeigen sich auch bei diesem grundlegenden und zunächst klar umrissenen Konzept bereits Unterschiede, etwa darin, wie die Sinneseindrücke dem Menschen gegeben sind.
So beschreibt Pestalozzi die auf die Sinne einströmenden Eindrücke zunächst als unstrukturiertes Ganzes:

> „Die Welt [...] liegt uns als ein in einander fließendes Meer verwirrter Anschauungen vor Augen." (Pestalozzi, 1887, S. 102)

Pestalozzi verwendet für diese „verwirrten Anschauungen" auch synonyme Begriffen, wie „bloße", „einfache", „gemeine", „physische" oder „tierische" Anschauung (vgl. Böversen, 1970, S. 222). Diese können dem Kind nun bei korrekter Strukturierung bzw. Abstraktion sowohl Einsicht in das Wesen des Wahrgenommenen liefern, als auch in die Irre führen:

> „Alle Dinge, die meine Sinne berühren, sind für mich nur insoweit Mittel zu richtigen Einsichten zu gelangen, als ihre Erscheinungen mir ihr unwandelbares, unveränderliches Wesen vorzüglich vor ihrem wandelbaren Wechselzustand oder ihrer Beschaffenheit in die Sinne fallen machen. Sie sind umgekehrt für mich insoweit Quellen des Irrtums und der Täuschung, als ihre Erscheinungen mir ihre zufälligen Beschaffenheiten vorzüglich vor ihrem Wesen in die Sinne fallen machen."(Pestalozzi, 1887, S. 97)

Um dieser in der einfachen Sinneswahrnehmung liegenden Möglichkeit zu Irrtum und Täuschen vorzubeugen und die sonst eher zufällig eintretende „richtige Einsicht" schneller und gezielter herbeizuführen, ist systematische Anleitung durch Erwachsene im Elternhaus und in der Schule notwendig. Dazu soll einerseits durch die Mutter das Wahrnehmen des Kindes sprachlich begleitet und die jeweiligen Bezeichnungen immer wieder wiederholt werden. Für die Schule hingegen, soll das Wahrzunehmende zunächst elementarisiert und dann in systematischer Reihenfolge dargeboten und wieder zusammengesetzt werden. Dazu sollen alle denkbaren Eigenschaften des betrachteten Gegenstandes aufeinanderfolgend genannt und mehrfach wiederholt werden. Anhand dieser so zur Verfügung gestellten Urformen ist es dann Pestalozzi folgend unumgänglich das Wesen der Dinge in den äußeren Anschauungen zu erkennen sowie vorstellbar und erinnerbar zu machen.

> „[D]ie Sache des Unterrichts und der Kunst ist es [...], daß sie die Verwirrung, die in dieser Anschauung liegt, aufhebe, die Gegenstände unter sich sondere, die ähnlichen und zusammengehörigen in ihrer Vorstellung wieder vereinige, sie alle uns dadurch klar mache, und nach vollendeter Klarheit derselben in uns zu deutlichen Begriffen erhebe. Und dieses thut sie, indem sie uns die in einander fließenden, verwirrten Anschauungen einzeln vergegenwärtigt, dann uns diese vereinzelten Anschauungen in verschiedenen wandelbaren Zuständen vor Augen stellt, und endlich dieselben mit dem ganzen Kreis unseres übrigen Wissens in Verbindung bringt." (Pestalozzi, 1887)

Osterwalder und Reusser, 1997 folgend greift Pestalozzi hier auf die Grundideen der sensualistischen Erkenntnistheorie des Abbé de Condillac (1714-1780) und der Anschauungspädagogik Phillip Julius Lieberkühns (1754-1788) zurück und steht damit in der Tradition der Sensualisten (vgl. Osterwalder und Reusser, 1997, S. 309f).

Diesterweg hingegen folgt mit seiner Konzeption von (äußerer) Anschauung dem Friesschen Ansatz. Demnach nimmt der Menschen durch die äußeren Sinne zunächst einzelne Merkmale wahr, wodurch Vorstellungen dieser Einzelmerkmale in der Seele entstehen, die Diesterweg mit Fries „Empfindungen" nennt. Diese zunächst passiv („leidend") aufgenommenen Einzelempfindungen werden dann mit Hilfe der figürlichen Einbildungskraft aktiv zu einer „Gesammtvorstellung von einem einzelnen Dinge mit allen seinen Merkmalen , d. h. eine[r] Anschauung" (Diesterweg, 1833, S. 302) eines konkreten äußeren Dinges zusammengefasst:

> „Aus Empfindungen entstehen Anschauungen. Jene sind einfache, diese zusammengesetzte Vorstellungen. Beide aber beziehen sich auf Einzelnes, die Empfindungen auf einzelne Merkmale, die Anschauungen auf einzelne Dinge." (Diesterweg, 1833, S. 302)

Diese zusammengesetzten Vorstellungen oder Anschauung verortet Diesterweg in der Seele des Individuums. Da es sich hier um von außen durch die Erfahrung evozierte Vorstellungen handelt, spricht Diesterweg auch von „empirischem Bewusstsein" (Diesterweg, 1835, S. 101) . Auch wenn eine solche äußere Anschauung immer eine konkrete Anschauung im einzelnen Individuum ist, die individuell verschieden ausfallen kann, betont Diesterweg im *Wegweiser*, dass die verschiedenen Sinne je einen unterschiedlichen Grad an Subjektivität erzeugen. Während er dem Tast-, Geschmacks- und Geruchssinn deutlich subjektive Empfindungen zubilligt, geht er beim Gesichtssinn und dem Gehör von intersubjektiv geteilten Wahrnehmungen aus.

> „Bei den Wahrnehmungen des Gegenständlichen unterscheiden wir daher dasjenige, was dem Einzelwesen eigen ist, und was ihm als Wesen der Gattung, als Mensch, allen andern Menschen gleich gesetzt, angehört. Das Bewußtsein der uns eigenthümlich angehörenden körperlichen und geistigen Empfindungen nennen wir das subjective oder individuelle, das Bewußtsein von den uns mit allen andern Menschen gemeinschaftlichen Wahrnehmungen das objective, das allgemeine oder das Gattungsbewußtsein. Das empyrische Bewußtsein zerfällt also in diese beiden Arten." (Diesterweg, 1835, S. 101)

Äußere Anschauung sind für Diesterweg also bereits durch den wahrnehmenden Menschen aus Einzelempfindungen zusammengesetzte Vorstellungen konkreter Einzeldinge. Die aktive Leistung des wahrnehmenden Subjekts besteht also nicht wie bei Pestalozzi im korrekten Zergliedern und Absondern des wahrgenommenen „fließenden Meeres", sondern im Zusammenführen der einzelnen Sinnesdaten in der Vorstellung. Die Leistung der Kinder beim Zugang zu Dingen in der äußeren Welt besteht also in der Kombination der Einzelmerkmale. Somit macht es für Diesterweg auch keinen Sinn auf die von Pestalozzi vorgesehene Art vorbereitend die wahrzunehmenden Dinge zu zergliedern, um den Zugang zu erleichtern. Dieser Unterschied zeigt sich spätestens am Beispiel des für den Naturkundeunterricht vorgesehenen anschaulichen Zugang der beiden Pädagogen: Während Diesterweg empfiehlt, mit den Kindern zunächst die Umgebung zu erkunden bzw. sie an die bereits gemachten Erfahrungen in der Umgebung zu erinnern und an diese anzuknüpfen, sollten Pestalozzi folgend die Gegenstände der Natur in gut durchdachter Systematik vorgezeigt werden:

> „Es ist daher gar nicht in den Wald oder in die Wiese, wo man das Kind gehen lassen muß, um Bäume und Kräuter kennen zu lernen; Bäume und Kräuter stehen hier nicht in den Reihenfolgen, welche die geschicktesten sind, das Wesen einer jeden Gattung anschaulich zu machen und durch den ersten Eindruck des Gegenstandes zur allgemeinen Kenntnis des Faches vorzubereiten. Um dein Kind auf dem kürzesten Wege zum Ziele des Unterrichts, zu deutlichen Begriffen, zu führen, mußt du ihm mit großer Sorgfalt in jedem Erkenntnisfache zuerst solche Gegenstände vor Augen stellen, welche die wesentlichsten Kennzeichen des Faches, zu welchem dieser Gegenstand gehört, sichtbar und ausgezeichnet an sich tragen und dadurch besonders geschickt sind, das Wesen desselben im Unterschiede seiner wandelbaren Beschaffenheit in die Augen fallen zu machen." (Pestalozzi, 1887, S. 175)

Hiermit wendet sich Pestalozzi von seinem großen Vorbild Jean Jaques Rousseau

(1712-1778) ab, für den gerade den Dingen von Natur aus die Möglichkeit innewohnt, ihr Wesen erkennbar zu machen, so dass auch die Natur die Erkenntnis leiten sollte (Osterwalder und Reusser, 1997, S. 312). Diesterweg und seine Co-Autoren im *Wegweiser*[4] gehen diese Abkehr nicht mit. So fordert im Kapitel zum naturkundlichen Unterricht August Lübben etwa, dass bei der systematischen Ordnung ein möglichst natürliches System zu wählen sei, dass die Schülerinnen und Schüler eigenständig entdecken könnten und nicht bloß auswendig lernen müssten:

> „Die Grundsätze des Systems muß der Schüler unter Leitung des Lehrers selbst aufstellen. Der ganze Gang muß von selbst darauf führen. Unter den Systemen sind die sogenannten natürlichen den künstlichen vorzuziehen, weil sie zu einem genauen Eingehen in die gesamte Natur der Geschöpfe auffordern und den Forschungstrieb anregen, während die ausschließliche Auffassung und Behandlung eines künstlichen Systems zu einer höchst einseitigen und oberflächlichen Betrachtung veranlaßt.“ (Diesterweg, 1835, S. 563)

2.3 Innere Anschauung

Auch die Bezeichnung „innere Anschauung“ wird in beiden Konzeptionen verwendet und die Gemeinsamkeit liegt zunächst auf der Hand: Die innere Anschauung ist das Pendant zur durch die äußeren Sinne vermittelten Anschauung im Innern des Menschen. Wie hier jedoch innere und äußere Anschauung in Verbindung gebracht werden, welches die Gegenstände der inneren Anschauung sind und welche

[4] Sein zu Lebzeiten in vier, immer wieder um aktuelle Literatur erweiterten, Auflagen erschienenes Werk *Wegweiser zur Bildung für Lehrer und die Lehrer werden wollen, und methodisch-praktische Anweisung zur Führung des Lehramtes.* (1835[1]) (später *Wegweiser für deutsche Lehrer*) besteht aus einem theoretischen ersten Teil (*Das Allgemeine*), in dem Diesterweg seine didaktischen und psychologischen Grundlagen für die praktische Arbeit der Lehrer darlegt, und einem zweiten fachdidaktischen Teil (*Das Besondere*), in dem diese pädagogischen Grundlagen auf die Fächer der damaligen Volksschulen angewendet werden. Dort finden sich neben konkreten Hinweisen zu Reihenfolge und Auswahl der Inhalte auch methodische Hinweise, sowie die Besprechung bereits existierender Lehrwerke und fachdidaktischer Literatur. Die Kapitel zum Unterricht im Lesen, der deutschen Sprache, der Naturlehre und mathematischen Geographie sowie der Zahlen- und Form- und Raumlehre verantwortet Diesterweg selbst, während er für die anderen Fächer erfahrene Lehrerkollegen aus dem Umfeld seines Seminars als Co-Autoren gewinnen konnte: K. Bormann (Lehrer am Berlinischen Seminar und Rektor der (höheren) Mädchenschule auf der Friedrichsstadt in Berlin) für Religion und Geographie, Dr. Mädler (Lehrer am Berlinischen Seminar) für Schreibunterricht, Hentschel (Lehrer am Seminar in Weißenfels) für den Unterricht im Zeichnen und Singen, Fr. Schuart (Direktor der höheren Mädchenschule auf der Dorotheenstadt in Berlin) für den Geschichtsunterricht und Aug. Lübben (Lehrer an der Bürgerschule in Aschersleben) für den Unterricht in der Naturgeschichte.

Funktion sie im Erkenntnisprozess einnimmt, darin unterscheiden sich Pestalozzis und Diesterwegs Konzepte fundamental.

In einem Fragment über die Grundlagen der Bildung (1803) unterscheidet Pestalozzi die innere von der äußeren Anschauung bezüglich der Anschauungsobjekte und ihrer Funktion für die menschliche Erkenntnis. Von innerer Anschauung ist zu sprechen wenn der Mensch sich selbst, seine Gefühlsregungen wahrnimmt („Ich sehe mich selbst an"). Dabei hat Pestalozzi emotionale Regungen ausgelöst durch äußere Eindrücke im Sinn. Mit der darauf folgenden emotionalen oder auch moralischen Einordnung gibt die innere Anschauung nach Pestalozzi der äußeren einen „menschlichen Werth":

> „Die äußere Anschauung ist Anfangspunkt und belebendes Element des Denkens, die innere Anschauung Ausgangspunkt und Fundament der sittlichen Bildung." (Böversen, 1970, S. 220)

Diesterweg hingegen sieht nicht den Zweischritt einer durch äußere Anschauung ausgelösten inneren Anschauung, sondern parallelisiert die beiden Konzepte. So versteht er unter innerer Anschauung ebenfalls die zusammengesetzte Vorstellung von Empfindungen, nur dass diese Einzelempfindungen nun nicht auf die Wahrnehmung von außer uns liegenden Einzeldingen gerichtet ist und diese beispielsweise ethisch einordnet, sondern von „einzelnen Zuständen unseres Geistes selbst" (Diesterweg, 1833, S. 300) zu einem bestimmten Augenblick. Diese werden durch eine Art „innerer Sinn", den sich Diesterweg den äußeren Sinnesorganen ähnlich vorstellt und der „die Empfänglichkeit für die Auffassung der Zustände der Seele im vorübergehenden Augenblicke des Lebens besitzt", wahrgenommen (Diesterweg, 1833, S. 302). Diese konkreten inneren Einzelempfindungen, werden dann wiederum mit Hilfe der figürlichen Einbildungskraft zusammengesetzt zu einer Vorstellung des konkreten Geisteszustandes, einer inneren Anschauung.

Beispiele solcher Geisteszustände sind für Diesterweg zunächst ähnlich wie für Pestalozzi bestimmte, eine Situation begleitende Gefühlsregungen. Allerdings beschreibt er die „mathematische Anschauung" ebenfalls als innere Anschauung. Sie entsteht aus der äußeren Wahrnehmung konkreter physischer Körper einerseits durch direktes Wahrnehmen und Zusammensetzen mittels der figürlichen Einbildungskraft und andererseits durch eine Art Hineinsehen mittels der produktiven Einbildungskraft. Diesterweg konkretisiert dies am Beispiel eines Holzwürfels, bei dem mittels der äußeren Anschauung etwa die Beschaffenheit der Seitenflächen, der Kanten und Ecken erkannt werden kann. Das Holzmodell liefert jedoch auch die Grundlage, sich beispielsweise die Diagonalen des Würfels vorzustellen und deren Eigenschaften „zu betrachten", obgleich diese im Inneren des massiven Modells liegend nicht für die äußeren Sinne sichtbar sind. In Fällen wie diesen geht also auch Diesterweg von einer durch äußere Anschauung initiierten mathematischen Anschauung aus:

> „Die Gegenstände der äußeren Anschauung erwecken, beleben, verdeutlichen die inneren, mathematischen Anschauungen. Darum rufen wir diese durch jene hervor.“ (Diesterweg, 1833, S. 312)

Hier wird für Diesterweg der Geist schaffend. So ist es auch möglich, dass Sätze in der Anschauung unmittelbar als wahr bzw. evident erkannt werden können. Diesterweg spricht hier von einer „anschaulichen Erkenntnisweise“. Vom wahrgenommenen konkreten physischen Körper der äußeren Anschauung ist dann auch der mathematische Körper der mathematischen Anschauung zu unterscheiden. Insbesondere in der Raumlehre zeigt sich dies, wenn dort einerseits kanonische äußere Anschauungen in Form von Zeichnungen und Modellen vorhanden sind, andererseits diese aber mindestens in den Büchern für die höheren Klassen und Bildungsgängen explizit ausgespart werden, um direkt die produktive Einbildungskraft aktiv werden zu lassen. Zeichnungen kommt dann erst eine nachgeordnete Rolle als Veranschaulichungsmittel zu (vgl. Lemanski, 2022, S. 16).

Inwiefern die mathematische Anschauung vergleichbar ist mit der Anschauung von Geisteszuständen wie etwa emotionalen Regungen und es damit gerechtfertigt ist, beides zur inneren Anschauung zu rechnen, bleibt bei Diesterweg in *Die Quelle unserer Erkenntnis* zunächst im Dunkeln. Eine mögliche Erklärung wäre, dass Diesterweg hier ohne es explizit auszuführen das Konzept mathematischer Anschauung von Fries übernimmt, der in der Nachfolge Kants die mathematische Anschauung als „reine Anschauung“ bezeichnet, deren Gegenstände „die Beziehung auf die Vorstellung von Raum und Zeit“ sind (Fries, 1837, S. 55). Dabei werden die Vorstellungen von Raum und Zeit hier als die von der Erfahrung unabhängigen Voraussetzungen jeder Anschauung angesehen, was wiederum allgemeine Schlüsse aus dieser mathematischen Anschauung ermöglicht. Der Begriff Vorstellungen wird hier also einerseits im kantischen Sinne als Gewahrwerden der Anschauungsformen in der reinen Anschauung verwendet. Andererseits kommt es bei Fries aber auch zu einer eher psychologischen und damit näher an unserer heutigen Wortdeutung liegenden Verwendung des Begriffs Vorstellung im Sinne von Imagination oder der Wahrnehmung und Manipulation innerer Bilder, in der aber beispielsweise ein Verlängern in die räumliche Unendlichkeit „gesehen“ werden kann oder zeitliche Fortsetzung über den konkreten Augenblick hinaus möglich ist (vgl. Fries, 1837, S. 56ff). Diesterweg scheint diese changierende Verwendung des Terminus Vorstellung mitzugehen, wenn er im *Wegweiser* einerseits einen dem Äußeren parallelen „inneren Sinn“ postuliert, der die konkreten „Tätigkeiten der

Seele“, zu denen er neben den Gefühlen dort eben auch die inneren Bilder eines äußeren Gegenstandes zu zählen scheint, wahrnimmt:

> „Der innere Sinn faßt nicht das Allgemeine, sondern das Besondere, Einzelne, die im Augenblick der Gegenwart die Seele bewegende einzelne Thätigkeit (das Concrete) auf. Durch ihn wird sie sich ihrer Erkenntnisse , Gefühle, Bestrebungen bewußt.“ (Diesterweg, 1835, S. 102)

Die innere Anschauung entsteht dann wie die äußere (s.o.) aus der Verbindung dieser „die Seele bewegenden einzelnen Thätigkeiten“. Zum Wesen der (eher psychologisch gedeuteten) Vorstellung gehört für Diesterweg dann auch, dass diese unmittelbaren nur in einem Augenblick bestehenden inneren Zustände mit Hilfe der Einbildungskraft in Form mittelbarer Vorstellungen erinnert werden können (vgl. Diesterweg, 1835, S. 104). Von diesem konkreten Bewusstsein unterscheidet Diesterweg dann aber auch das „Bewusstsein von den allgemeinen Gesetzen, unter welchen die einzelnen Thätigkeiten der Seele stehen“ (Diesterweg, 1835, S. 102) und welche als Bedingung der Möglichkeit jeder Sinnlichkeit auch für die äußere Anschauung gelten. Hierzu zählt Diesterweg die „Grundformen des Raumes und der Zeit“[5].

In einer erst in den späteren Ausgaben des Wegweisers zu findenden Ergänzung verbindet Diesterweg dann die metaphysische und psychologische Deutung mathematischer Anschauung auch und deutet sie pädagogisch aus. Als Antwort auf die Frage „welche oder was für verschiedene Anschauungen sind in dem Schüler hervorzurufen, aus welchen Gebieten nehmen wir sie?“ unterscheidet er die mathematische Anschauung von der sinnlichen, der sittlichen, der religiösen, der ästhetischen, der rein-menschlichen und der sozialen Anschauung:

> Die mathematischen Anschauungen entwickeln sich aus den sinnlichen durch leichte, nahe liegende Abstraktionen, die Vorstellungen räumlicher Ausdehnung neben einander, die zeitlichen das Nacheinander, die Zahlvorstellungen das Wieviel, die Bewegungsvorstellungen der Veränderung im Raume und der Durchschreitung desselben. Die einfachsten dieser Vorstellungen sind die Raumvorstellungen, die übrigen werden daher auch durch diese Raumvorstellungen, durch Punkte, Linien und Flächen, veranschaulicht. In der Zahlenlehre z. B. sind Punkte, Linien und deren Theile, Körper und deren Theile die veranschaulichenden Lehrmittel [(vgl. auch 3.1)]. (Diesterweg, 1850[4], S. 329)

[5] An dieser Stelle nimmt Diesterweg weder konkret Bezug auf Kant noch auf Fries, auch wenn es sich hier um ein dem Friesschen sehr ähnliches Konzept handelt. Diese Referenzen werden erst später (Diesterweg, 1835, S. 107) im Zusammenhang mit der Zergliederung von Urteilen namentlich, aber ohne Angabe der konkreten Werke, genannt.

2.4 Begriffsbildung

Die Vorstellungskraft umfasst nach Diesterweg neben dem Anschauungsvermögen auch das Denken als Vermögen der begrifflichen Erkenntnis (vgl. Diesterweg, 1835, S. 104). Begriffe werden demnach als „allgemeine Vorstellungen“ aufgefasst, welche mittels des Verstandes durch Abstraktion gebildet werden. Dabei folgt der Verstand nach Diesterweg den „Gesetzen der Absonderung und Verknüpfung“. Dieser Prozess der Abstraktion kann nun wiederum auch auf Begriffe angewendet werden, so dass durch weitere Absonderung und Verknüpfung abstrakte Begriffe entstehen, die immer einfacher in ihrer Struktur, jedoch allgemeiner in ihrem Geltungsbereich werden. Während also eine Empfindung eine einfache Vorstellung von inneren oder äußeren konkreten Erscheinungen ist (vgl. 2.2 und 2.3), ist ein abstrakter Begriff eine einfache Vorstellung bezogen auf eine unbestimmte Menge von Dingen. Die Erkenntnis verläuft Diesterweg folgend nun im Allgemeinen vom Konkreten (den Empfindungen) zum Allgemeinen. Dies gilt zunächst für alle Wissensgebiete und alle Altersstufen, also auch für das Lernen in Lehrerseminaren und Universitäten. Dabei betont Diesterweg an verschiedenen Stellen, dass abstrakte Begriffe immer an Anschauungen gebunden sein sollen, da sie andernfalls „hohl und leer“ seien:

> „Der Gegenstand übt auf den Geist einen Reiz aus, ruft Empfindungen in ihm hervor, erregt ihn zur Aufmerksamkeit, und er schaut den Gegenstand an, gewinnt von ihm unmittelbare Vorstellungen (Anschauungen). Er stellt sich denselben vor [. . .]. Seine Vorstellungen sind nicht mehr an das Ding gebunden, er kann davon abstrahieren, er kann von einzelnen Merkmalen absehen, neue Vorstellungen (Begriffe) bilden und Wörter dafür erfinden. Dieser [Begriff] ist nun kein leerer Schall, sondern eine inhaltsvolle Vorstellung. [. . .] Daher fügt Kant obigem Sage den andern bei: ‚Anschauungen (Empfindungen) ohne Begriffe sind blind.‘ Hier aber bleibt unser Refrain: Begriffe ohne Anschauungen sind leer und hohl.“ (Diesterweg, 1850^4, S. 225)[6]

Anders als in anderen Wissensgebieten können mathematische Sätze Diesterweg folgend aber auch aus Begriffen abgeleitet werden. Dabei werden Merkmale mathematischer Gegenstände durch den Verstand logisch deduziert also mittelbar

[6] Interessant ist an dieser Stelle anzumerken, dass der obere Satz „Anschauungen ohne Begriffe sind blind“ und der explizite Bezug auf Kant in der ersten Ausgabe des *Wegweisers* noch nicht enthalten ist, sondern erst in einer späteren Auflage eingefügt wurde. Und tatsächlich scheint es für Diesterweg mit Bezug auf das schulische Lernen eine weitaus größere Gefahr zu sein, mit bedeutungslosen, weil nicht an Anschauung gebundenen Worten in Berührung zu kommen, als mit „blinden Anschauungen“. Diese Beobachtung wirft aber auch die Frage auf, inwiefern sich Diesterweg wie häufig behauptet auf Kants *Kritik der reinen Vernunft* direkt bezieht oder eher auf die Ideen Kants vermittelt z.B. durch Fries.

abgeleitet. Hierzu zählt Diesterweg auch die Anwendung arithmetischer Gesetze in der elementaren Geometrie: Er zeigt den Unterschied etwa am Beispiel der Frage, wie viele Kanten ein Würfel habe. Diese können entweder am Objekt oder in der Vorstellung „gezählt“ werden oder durch das Wissen um die Anzahl von Seiten der Außenflächen und Überlegungen, wie diese zu einem Körper zusammengesetzt sind, errechnet werden. Gerade in solchen Fällen beobachtet er häufig ein Wechselspiel von anschaulichem und begriffsmäßigem Erkennen. Bei der begriffsmäßigen Erkenntnis spricht er auch von analytischer Erkenntnis nach Art der Franzosen und weist „den Griechen“ die anschauliche zu.[7] Begriffsmäßige und anschauliche Erkenntnis unterscheiden sich durch die Geistestätigkeit und das dabei jeweils aktive Erkenntnisvermögen. Die produktive Einbildungskraft ermöglicht anschauliche, der Verstand begriffliche Erkenntnis. Dieser „formale“ Unterschied wirkt sich auch auf die genetische Reihenfolge der Erkenntnisweisen aus:

> „Der Unterschied beider Erkenntnißweisen ist kein materialer, sondern ein formaler. Die Thätigkeiten des Geistes sind verschieden. Die anschauliche ist die erste, nächste, einfachste, leichteste, unmittelbare; die begriffsmäßige ist die zweite, abgeleitete, schwierigere, mittelbare, höhere. Jene gehört für den Anfangsunterricht, diese für den weiter fortgeschrittenen.“ (Diesterweg, 1833, S. 316)

Aus der philosophischen Betrachtung über die beiden Erkenntnisweisen folgen also auch hier Schlüsse für die Unterrichtspraxis: Der Mathematikunterricht muss anschaulich beginnen. Im Elementarbereich, womit mindestens die ersten Jahre der Volksschule gemeint sind, sollen Erkenntnisse über die mathematischen Gegenstände zunächst anschaulich erworben werden. Für das alltägliche Leben und die berufliche Anwendung, beispielsweise im Handwerk, genügt die anschauliche Evidenz. Erst später und auch nur für diejenigen, die das Talent zu höherer Geistesbildung mitbringen, sollen die gleichen Sätze auch begrifflich hergeleitet und bewiesen werden. Dabei hat es für Diesterweg durchaus einen bildenden Wert, wenn die gleichen „Wahrheiten“ zunächst anschaulich und später begriffsmäßig erkannt bzw. bewiesen werden, da es so zu einer „Vielseitigkeit der Ansichten“ (Diesterweg, 1833, S. 317) auf den Gegenstand kommt, was für Diesterweg echte Bildung ausmacht:

> „[D]ie Bildung besteht viel mehr in der Vielseitigkeit der Ansichten, als in der Masse derselben. Deshalb ist es mehr werth, eine Satz von

[7] Hier scheint der Einfluss seines älteren Bruders und Förderers Wilhelm durchzuscheinen, der als einer der beiden ersten Mathematikprofessoren der Universität Bonn noch den Wert der Elementarmathematik auf Basis der griechischen Werke von Euklid oder Appolonius betonte und diese den „modernen“ algebraisch-analytischen Teildisziplinen vorzog (vgl. Schubring, 1990).

sechs Seiten zu betrachten, als sechs Sätze von einer Seite; bildender, eine Aufgabe auf sechs verschiedene Weisen auflösen zu lassen, als sechs Aufgaben in einerlei Weise." (Diesterweg, 1833, S. 317)

Diesterwegs Bildungsziel in der Mathematik besteht also in der umfassenden Einsicht in das Wesen der behandelten mathematischen Objekte und der Zusammenhänge zwischen diesen. Diese können auf Grund der Allgemeinheit der Anschauungsformen, auf die sie sich beziehen, entweder mittels Anschauungserkenntnis bzw. anschaulicher Evidenz erhalten werden oder aus allgemeinen Begriffen deduziert werden. Es sind also nicht die allgemeinen Begriffe als solche das Ziel mathematischer Bildung.

Damit unterscheidet sich Diesterwegs Konzeption erneut von der Pestalozzis, da für diesen das Ziel aller Bemühungen stets der „klare" oder „deutliche Begriff" ist.[8] In *Wie Gertrud ihre Kinder lehrt* beschreibt er eine Art Stufengang, in dem sich diese deutlichen Begriffe in allen Grunddisziplinen (Schall, Form und Zahl) entwickeln:

> „[...] uns in allen diesen drei Fächern gleichförmig von dunklen Anschauung zu bestimmten, von bestimmten Anschauung zu klaren Vorstellungen, und von klaren Vorstellungen zu deutlichen Begriffen zu führen." (Pestalozzi, 1887, S. 106)

Etwas weiter unten beschreibt er es dann als „letztes Ziel der Sprache, unser Geschlecht von dunklen Anschauungen zu deutlichen Begriffen zu führen". Bereits die durchgängige Verwendung von Attributen aus dem Bereich der sinnlichen Wahrnehmung (dunkel, klar, deutlich) verweist darauf, dass hier kein qualitativer Unterschied zwischen den ersten Anschauungen und den Begriffen besteht. Böversen, 1970 bestätigt, dass „kein prinzipieller Gegensatz von Anschauung und Begriff" (Böversen, 1970, S. 229) in Pestalozzis Konzeption zu erkennen sei, Begriffe vielmehr ein sprachlich vermittelter Teil des Anschauungskontinuums sind:

> „Mit anderen Worten: zur deutlichen Erkenntnis komme ich nicht dadurch, dass zu der sinnlichen Anschauung ein geistig-begriffliches Prinzip stößt. Einheitsformen des Denkens, welche die Anschauungen auf einen Begriff bringen, sonder die Einheitsformen des Denkens - die Begriffe - sind selbst Resultat gereifter Anschauungen. Das heißt: die Anschauung muss durch einen Selbstläuterungsprozess zu immer klarerer Erkenntnis führen. Am Ende dieses Prozesses steht der deutliche Begriff." (Böversen, 1970, S. 230)

[8] Vgl. auch die Auflistung entsprechender Stellen in Böversen, 1970, Anmerkung 16.

Dieser Selbstläuterungsprozess ergibt sich für Pestalozzi durch den Beginn mittels möglichst elementarisierten Anschauungsmitteln, durch deren umfängliche Betrachtung und den lückenlosen, didaktisch organisierten Gang von den einfachen zu den höheren Erkenntnissen (vgl. Osterwalder und Reusser, 1997, S. 315ff) sowie durch Wiederholung der Anschauung und der sprachlichen Beschreibung (vgl. Böversen, 1970, S. 230). In seinem Aufsatz *Über das Wesen, den Zweck und den Gebrauch der Elementarbücher* konkretisiert Pestalozzi dieses Vorgehen am Beispiel der Unterteilung des Quadrats:

> „Schon die einfache Anschauung der Abtheilungen des Quadrats entwickelt im Kind ein allgemeines Bewusstseyn der Größen und ihrer Verheltnisse. d.i. das wesentliche und innere Fundament der Meßkunst. Dieses entwickelte Verheltnisgefühl geht dann durch seine des Quadrats und seiner Abtheilungen mit dem Nachzeichnen dieser Abtheilungen zu einer sich in Verbindung mit diesem Verheltnisgefühl entwickelnden Kunstkrafft hinüber, die dann in Verbindung mit den Üungen im Reden über alles, was das Kind hierin sieth und thut, nicht anders kann, als dasselbe 1. zu einem unauslöschlichen Bewußtseyn der Anschauungsfundamente aller Verhältnisse, 2. zu harmonischen mit dem richtigsten Verheltnisgefühl dieser innerern Kraft gebildeten äußeren Fertigkeiten und 3. zu einer den ganzen Kreis dieser ihrer Fundamente umfassenden Kraft, sich bestimmt über dieselbe auszudrücken, emporheben.“ (Pestalozzi: *Über das Wesen, den Zweck und den Gebrauch der Elementarbücher* zitiert nach Merkle, 1983, S. 164)

Es sind gerade diese Annahmen, die zu Gestaltungsprinzipien seiner Methode werden: Vom Anschauen und Benennen über das Nachzeichnen zu wörtlichen Äußerungen über das Gesehene bzw. Erkannte (vgl. Merkle, 1983, S. 104).

3 Das anschauliche Fundament des Rechenunterrichts

> „Wenn auch die schweizerischen Zahlübungen in den deutschen Volksschulen nie Bürgerrecht erlangen konnten, so bleibt dem Namen Pestalozzis die Genugthuung, daß in keinem Unterrichtsfache sein Prinzip, von der Anschauung auszugehen und auf dieser Basis überall das Kind mit klarem Bewußtsein operieren zu lassen und das eigene Nachdenken zu wecken, sowie der Grundsaht der strengen Stetigkeit im Fortschreiten nach Maßgabe der geistigen Entwickelung des Kindes so tief in die

> Schulpraxis eingedrungen und Wurzel geschlagen hat, wie im Rechenunterrichte." (Jänicke, 1888, S. 78)

Die Beobachtung, die Jänicke in seiner *Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts* festhält, verweist auf zwei zentrale Punkte: Erstens ist das Prinzip der Anschauung bereits Ende des 19. Jahrhunderts fest mit dem Namen Pestalozzi verbunden. Zweitens ist es mindestens mit Blick auf den Rechenunterricht nicht Pestalozzis Methode im eigentlichen Sinne, die in den Deutschen Volksschulen Anwendung findet. Vor dem Hintergrund der oben herausgestellten unterschiedlichen Anschauungskonzeptionen Diesterwegs und Pestalozzis liegt nun die Vermutung nahe, dass es sich auch nur der Bezeichnung nach um das Pestalozzische Prinzip der Anschauung handelt, welches im Rechenunterricht dieser Zeit allenthalben zur Anwendung kommt.
Der folgende Vergleich der jeweils für den Ansfangsunterricht im Rechnen vorgeschlagenen Arbeitsmittel[9] und Aufgabenformate von Pestalozzi und Diesterweg bestärkt diese Vermutung.

3.1 Arbeitsmittel

Die ersten Erfahrungen mit elementarer Arithmetik sollen Pestalozzi folgend mit Hilfe gleichförmiger Alltagsgegenstände und Körperteile bereits im frühen Kindesalter beginnen und die Grundformen der Zahl, als zusammengesetzte Menge gleichförmiger Einheiten erfahrbar werden. Das Benennen der Anzahlen mit Zahlworten gilt dann lediglich als Abkürzung (vgl. Pestalozzi, 1887, S. 149). Damit werden Finger und andere Alltagsgegenstände bereits im *Buch der Mütter* (1803) zu ersten Arbeitsmitteln zum Aufbau einer kardinalen Zahlvorstellung.

> „Da aber dieses Kunstmittel [die Finger], sich selbst überlassen, bei der Zahl Zehn stille steht, indessen das Bedürfniß des Rechnenkönnens unendlich weiter geht, so fordert die Möglichkeit des weiteren Fortschritts vom Zählen zum Rechnen neue Kunstmittel, die aber von dem ursprünglichen ausgehen, ihm wesentlich gleich seyn und sich in allen Theilen an demselben anschließen müssen." (Pestalozzi, 1803, S. vi)

Aufgrund der natürlichen Begrenztheit der Anzahl der Finger nimmt Pestalozzi also für den weiteren Unterricht weitere Arbeitsmittel hinzu. Dabei beschränkt

[9] Unter Arbeitsmitteln sollen im Folgenden alle didaktisch absichtsvoll ausgewählten, mit den äußeren Sinnen wahrnehmbaren Gegenstände verstanden werden, denen erstens eine mathematische Bedeutung zugesprochen wird und mit denen im weitesten Sinne hantiert werden kann. Insofern beschreibt die englische Übersetzung „manipulatives" nach Hartshorn und Boren, 1990 die hier gemeinte Klasse der Arbeitsmittel treffend.

er sich auf zweidimensionale graphische Mittel, die von Lehrern und Kindern gezeichnet werden, wie etwa die unterteilte gerade Linie oder das geteilte Quadrat zur Ausbildung der Anschauung von Anteilsvorstellung und Brüchen im *ABC der Anschauung* (1803). In seinem dritten Elementarbuch *Die Anschauungslehre der Zahlverhältnisse*, das hier für den Anfangsunterricht exemplarisch betrachtet werden soll, führt er als Erweiterung der zu zählenden Finger als erstes Arbeitsmittel eine Tabelle mit strukturiert angeordneten Zählstrichen ein (Abb. 1), die er wie folgt charakterisiert:

> „Die erste [Tafel] enthält eine zehnfache Nebeneinanderstellung der zehnfachen Abtheilungen der Zahl Zehn, in Strichen, von denen jeder als eine Einheit angesehen und benutzt wird.“ (Pestalozzi, 1803, S. xii)

Anhand dieser Einheitentabelle werden dann sehr kleinschrittig Zahlzerlegungen und Grundrechenarten im Zahlenraum bis 100 erarbeitet (vgl. 3.2).

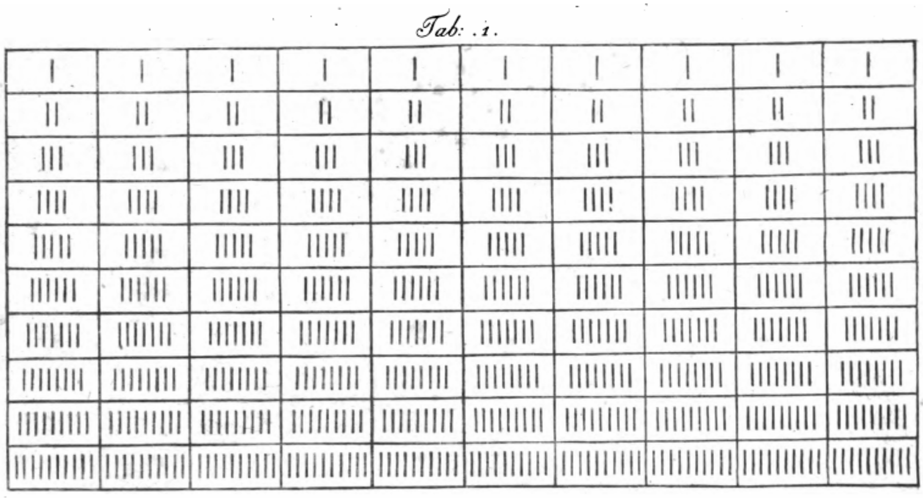


Abbildung 1: Tabelle 1 aus (Pestalozzi, 1803)

Auch Diesterweg stellt in *Über die Quelle unserer Erkenntnis* fest, dass „Nichts leichter [sei], als einen verständigen, d. h. anschaulichen Unterricht in der Zahlenlehre zu ertheilen“ (Diesterweg, 1833, S. 311) und führt dies auf die Einfachheit der grundlegenden Anschauungen zurück:

> „Die Anschaulichkeit in der Zahlenlehre beruht auf der Reduction aller Zahlen auf die Eins und die aus ihrer Vervielfachung entstehenden hö-

> heren Einheiten, also in unserem Rechnen auf dem klaren dekadischen System.“ (Diesterweg, 1833, S. 311)

Diesterweg ist nicht zuletzt durch seine Zusammenarbeit mit den Pestalozzianern an der Musterschule in Frankfurt und der Auseinandersetzung mit der Rechenmethodik des Pestalozzischülers Schmid mit den mathematischen Arbeitsmitteln und -methoden Pestalozzis vertraut (vgl. Oelkers, 1995, S. 259ff). So ist auch die Pestalozzische Einheitentabelle (Abb. 1) ein von Diesterweg vorgeschlagenes Arbeitsmittel für den Anfangsunterricht, das eine sinnlich wahrnehmbare Repräsentation der Eins und des dekadischen Systems ermöglicht. Darüber hinaus nennt er in der ersten Auflage des *Wegweisers* aber auch als weitere Optionen der Veranschaulichung für den Lehrer „ein Rechenbrett, oder Striche oder Punkte“ (Diesterweg, 1835, S. 613) und ergänzt diese Liste der Möglichkeiten bis zur vierten Auflage um die „Denzel'sche Leiter“[10], die „russische‘ Rechenmaschine“[11] und Friedrich Fröbels dritte Spielgabe[12] (vgl. Diesterweg, 1850^4, S. 357). Dass der Rechenunterricht eines anschaulichen Arbeitsmittels bedarf steht für Diesterweg außer Frage. Welches der Lehrer aber wählt, gehört zur „Manier“ des Unterrichts und kann demnach vom Lehrer selbst entschieden werden. Diese Einstellung ist nicht zuletzt auf Diesterwegs Ziel für den arithmetischen Anfangsunterrichts zurück zu führen, anschaulich zu unterrichten und Zahlvorstellungen, also innere bzw. mathematische Anschauungen zu erzeugen (vgl. Kap. 2).

> „Aber worin besteht die Anschaulichkeit der Zahlvorstellungen? Etwa darin, daß man sich der Striche, Punkte, Würfel ect. bedient? - Mit nichten, sondern darin, daß man sich bei jeder Zahl die Menge der Einheiten vorstellt, die sie enthält. Darum muß jede Zahl auf die

[10] Hierbei handelt es sich um ein von dem württembergischen Seminardirektor und Pestalozzikenner Bernhard Gottlieb Denzel (1773-1838) entwickeltes dekadisch strukturiertes Material, bei dem Einerstäbchen („Sprossen“) zu je zehn gebündelt („Leitern“) werden, welche wiederum auf einer großen „Leiter“ zur Erweiterung des Zahlenraums gebündelt werden können (vgl. die ausführliche Beschreibung in Zerrenner, 1834, S. 37f).

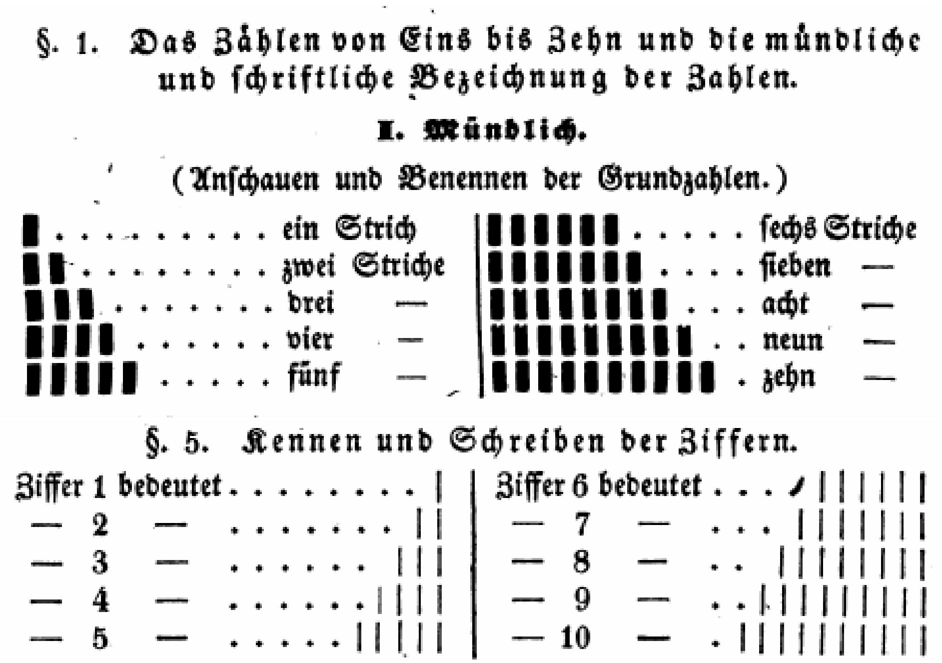
[11] Bei dem auch unter dem Namen „Stschoty“ bekannten Hilfsmittel handelt es sich um einen dekadisch strukturierten Rechenrahmen, mit jeweils 10 beweglichen Perlen auf mehreren Stangen, die farblich markiert in Fünfergruppen unterteilt sind. Jede Stange repräsentiert jeweils eine Zehnerpotenz. Anders als die Denzelsche Leiter wurde dieses Material als Abakus, also als Rechenhilfe und nicht in erster Linie als Veranschaulichungsmittel konzipiert. (Vgl. Vollrath, 2013, S. 111)

[12] Diese besteht aus einem aus acht kleinen Würfeln bestehenden größeren Holzwürfel, der Diesterweg folgend „zur Veranschaulichung der ersten Rechenoperationen“ dienen kann (Diesterweg, 1850^4, S. 357). Anzumerken ist hierzu, dass Diesterweg erst kurz vor dem Erscheinen der vierten Auflage des Wegweisers Fröbel persönlich kennenlernt und sich erst dann eingehend auch inhaltlich mit seinen Ideen und Arbeitsmitteln auseinandersetzt. Diese Begegnung beeindruckt Diesterweg so, dass er die 4. Auflage Fröbel widmet (vgl. Diesterweg, 1850^4, Vorwort). Warum genau Diesterweg hier die dritte Spielgabe nennt, obwohl Fröbel selbst für den arithmetischen Anfangsunterricht das Stäbchenlegen vorsieht (vgl. Rahn und Spies, 2023), bleibt zu klären.

> Grundvorstellung Eins und (späterhin) auf die höheren Einheiten zurückgeführt werden.“

Das gewählte Arbeitsmittel liefert also nur einen möglichen, empirisch wahrnehmbaren Repräsentanten der Einheit, wird aber nicht selbst zur Anschauung erhoben.

Auch wenn er diesen im *Wegweiser* also keinen besonderen Vorrang einräumt, nutzt er in seiner detaillierten Anleitung für Lehrer, *Methodisches Handbuch für den Rechenunterricht* (Diesterweg und Heuser, 1844), an die Tafel zu zeichnende Striche zur Einführung ins Zählen und die erste symbolische Darstellung von Zahlen (vgl. Abb. 2). Dies könnte pragmatische Gründe haben: Striche sind erstens für ein solches Handbuch drucktechnisch leichter zu realisieren als etwa Zeichnungen dreidimensionaler Objekte. Außerdem stehen Tafeln als Schreibmaterial den Lehrern und Schülern im Allgemeinen zur Verfügung, so dass sich dieses Arbeitsmittel einfach in großen Mengen „beschaffen“ lässt und keine separaten Anschaffungen von gedruckten Tabellen oder gar Materialien nur für den Rechenunterricht notwendig werden.



§. 1. Das Zählen von Eins bis Zehn und die mündliche und schriftliche Bezeichnung der Zahlen.

I. Mündlich.

(Anschauen und Benennen der Grundzahlen.)

▌ . . . . ein Strich	▌▌▌▌▌▌ . . . . . sechs Striche
▌▌ . . . . zwei Striche	▌▌▌▌▌▌▌ . . . . sieben —
▌▌▌ . . . . drei —	▌▌▌▌▌▌▌▌ . . . acht —
▌▌▌▌ . . . . vier —	▌▌▌▌▌▌▌▌▌ . . neun —
▌▌▌▌▌ . . . . . fünf —	▌▌▌▌▌▌▌▌▌▌ . zehn —

§. 5. Kennen und Schreiben der Ziffern.

Ziffer 1 bedeutet . . . . |	Ziffer 6 bedeutet . . . ||||||
— 2 — . . . . ||	— 7 — . . . |||||||
— 3 — . . . . |||	— 8 — . . ||||||||
— 4 — . . . . ||||	— 9 — . . |||||||||
— 5 — . . . . . |||||	— 10 — . ||||||||||

Abbildung 2: Einführung der Zahlen von 1 bis 10 in (Diesterweg und Heuser, 1844)

Gleiches ist bereits in den ersten Kapiteln in seinen gemeinsam mit Peter Heuser verfassten und 1828 erstmals erschienenen *Praktischen Rechenbüchern* zu beobachten. Auch hier wählt er in Band 1 den Zählstrich, den die Kinder auf ihre Tafeln schreiben, als erstes Anschauungsobjekt für die Einheit. Dort werden auch zunächst alle vier Grundrechenarten mit diesen Arbeitsmitteln eingeführt und so einerseits das Rechnen auf das Zählen der Striche zurückgeführt und andererseits Rechenaufgaben und ihre Ergebnisse mit Hilfe von Strichen dargestellt. Als Besonderheit ist hier zu erwähnen, dass er im Rechenbuch für die Veranschaulichung der dekadischen Struktur auf die römischen Zahlzeichen für die Zehnerbündel zurückgreift, bevor die indisch-arabischen Ziffern und das dekadische Stellenwertsystem eingeführt werden. So geschieht die Erweiterung des Zahlraums über die Zehn oder Zwanzig hinaus auf anschauliche Weise und weiterhin können die Grundrechenarten auch mit großen Zahlen durch abzählen der entsprechenden Zeichen gelöst werden. In seinem Artikel *Bemerkungen über den Rechenunterricht*, in dem er das neu erschienene Lehrwerk bewirbt, begründet er dies wie folgt:

> „Da diese Zeichen [die römischen Zahlzeichen] die Vorstellungen der Zahlen viel anschaulicher und sinnlicher darstellen, als unsere arabischen Ziffern, so kann man diese Zeichen Zahlbilder nennen, und das Rechen mit ihnen das Rechnen mit Zahlbildern." (Diesterweg, 1828, S. 95)

Die additiv zusammengesetzten Zahldarstellungen mithilfe der römischen Zahlzeichen führen also Diesterweg folgend auf direktem Wege zu „Vorstellungen", also tragfähigen inneren Anschauungen, von der Einheit bzw. der Zehn (Hundert, Tausend usw.) als gebündelte Einheit und der Zahl als Menge dieser Einheiten. Auf dieser Grundlage können dann Addition und Subtraktion als „Zusammenzählen" und „Abziehen" oder „Wegnehmen", die Multiplikation als „Vervielfachen", also mehrfaches zusammenzählen gleichgroßer Mengen und die Division als „Theilen" bzw. „Aufteilen" einer Zahl in eine vorgegebene Anzahl von gleichmächtigen Teilen eingeführt werden (Diesterweg und Heuser, 1846[16], §§1-7). Er behandelt die römischen Zahlzeichen hier also nicht in erster Linie als Mittel zur Zahldarstellung, sondern eher im Sinne eines Arbeitsmittels mit dekadischer Struktur wie etwa das deutlich später entwickelte goldene Perlenematerial nach Maria Montessori oder ähnliche strukturierte Materialien. Dies sieht man auch daran, dass er zunächst auf die eigentlich der römischen Zahldarstellung eigenen Fünferbündel und die subtraktiven Elemente verzichtet. Durch den Einstieg mittels dieser „Zahlbilder" verspricht er sich, dass die Kinder lernen „von vorn herein auf das klarste und schärfste die Vorstellung von dem Zeichen [zu] unterscheiden" und so durch die „Begründung der Grundvorstellungen" (Diesterweg, 1828, S. 96) einem rein mechanischen, aber unverstandenen Umgang mit dem dezimalen Positionssystem vorzubeugen. Wenn Diesterweg hier auch, wie vom Hofe (1996) richtig bemerkt, als einer der ersten im deutschsprachigen Raum den in der heutigen Mathematikdidaktik so häufig bemühten Begriff der Grundvorstellung verwendet, so kann man Diesterweg dennoch nur bedingt als historisches Vorbild verwenden. Bei Diesterwegs „Grundvorstellungen" handelt es sich gerade nicht um die Beschreibung von „Beziehungen zischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen" (vom Hofe, 1996, S. 259), da die Anwendung in realen Sachzusammenhängen für Diesterweg dem Aufbau allgemeiner mathematischer Anschauungen immer erst nachgeordnet ist. Dies gilt ihm insbesondere für künstlich bemühte „Sachzusammenhänge":

> „Wer die Liebe zur Sache in der Anwendung der Zahl auf Aepfel und Nüsse, oder in erfundenen Erzählungen, in welchen Rechenaufgaben versteckt sind, sucht, hat das Wesen der Sache nicht begriffen. Abwechselung ist gut, ja nothwendig; aber die Hauptsache bleibt die reine Durcharbeitung des Stoffes." (Diesterweg, 1835, S. 626)

Möchte man eine zeitgenössische Beschreibung für Diesterwegs Konzept für den Rechenunterricht finden, so scheint es sich bei den intendierten Vorstellungen der Zahlenbildern doch eher um „mental entities [. . .] which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities – like ideality, abstractness, generality, perfection" (Fischbein, 1993, S. 143) zu handeln, also um „figural concepts" im Sinne Fischbeins. Ob dieser Befund auch für den Unterricht in anderen Teildisziplinen bzw. die mathematische Anschauung im allgemeinen gilt, bleibt zu klären.

Sowohl Pestalozzi als auch Diesterweg schlagen zum Einstieg in den Umgang mit Zahlen nach ersten Erfahrungen mit den eigenen Fingern, Zählstriche und damit absichtsvoll eingesetzte, speziell für den Rechenunterricht konzipierte zweidimensionale Materialien vor. Während die Einheitentabelle bei Pestalozzi als erstes Mittel gesetzt ist, ist Diesterweg hier deutlich flexibler in der Auswahl. Der eigentliche Unterschied zeigt sich aber insbesondere im intendierten unterrichtlichen Umgang mit diesen Materialien.

3.2 Umsetzung im Anfangsunterricht

In *Die Anschauungslehre der Zahlverhältnisse* verwendet Pestalozzi die Einheitentabelle (Abb. 1) als Grundlage einer ganzen Reihe arithmetischer Übungen zum Aufbau von Zahlauffassungen. So könne man Pestalozzi folgend hier zunächst die Einheit und das „Eins und eins dazu" erleben. Dies wird durch die Lehrperson durch Zeigen auf die Zellen der ersten Zeile der Tabelle und einem dazugehörigen vorgegebenen Text „1 mal 1, 2 mal 1, 3 mal 1“ usw. in Übung 1 vorgemacht (Pestalozzi, 1803, S. 1f). Beim Wechsel in die nächsten Zeilen werden dann je zwei, drei usw. Striche zu einer Einheit zusammengefasst und ebenfalls deren Anzahl bestimmt. Die von Pestalozzi vorgesehenen Formulierungen, die dann vom Lehrer vorgesprochen und von den Kindern wiederholt werden sollen, werden dabei ganz präzise vorgegeben und Zelle für Zelle sehr kleinschrittig wiederholt. Er betont dabei, dass keine Zelle übersprungen, kein beschreibender Satz ausgelassen werden dürfe. Hier zeigt sich also ein Beispiel für Pestalozzis Prinzip der Lückenlosigkeit (vgl. 2.4). Zur Überprüfung und Wiederholung sollen dann die vorgesagten Sätze in Frageform gestellt werden:

> „Wie viel mal Eins sind bis hierher? Wie viel mal Drey, wie viel mal fünf sind bis hierher? Dieses Fragen wird so lange wiederholt, bis es dem Kinde leicht ist auf jede in dieser Uebung vorkommende Frage mit Leichtigkeit und Sicherheit zu antworten.“ (Pestalozzi, 1803, S. ixf)

Die erwarteten Antworten entsprechen den vorher vom Lehrer vorgesprochenen Sätzen.
In Übung zwei werden dann umgekehrt die gebündelten Mengen aufgelöst und bestimmt, wie sie sich aus den vorherigen Mengen und deren Anteilen zusammensetzen lassen: „5 mal 1 ist 2 mal 2 und der Halbe Teil von 2“ (Pestalozzi, 1803, S. 2). Gleichzeitig werden so also Multiplikationsaufgaben als Zusammenfassung gleichgroßer Einheiten dargestellt und die sprachlich immer gleiche Formulierung der Einmaleinsreihen mit einer Visualisierung in Verbindung gebracht. Gleichzeitig werden hier Brüche sprachlich verwendet. Aufgabe des Schülers ist dabei zunächst das aufmerksame Zuhören und anschließend das Nachahmen von Text und Geste auf Fragen hin. Dabei soll der Lehrer darauf achten, dass Antworten, die ohne Geste gegeben werden können, dennoch am Bild begründet werden. Wenn auch von Pestalozzi anders intendiert kann man aus heutiger Sicht das Vorgehen als nachahmend, repetitiv und schematisch bezeichnen (vgl. Rahn und Spies, 2023, S. 218).

Besonders Pestalozzis Forderung nach Lückenlosigkeit und dem strengen Folgen vorgegebener Formulierungen in seiner Anschauungslehre bringt ihm recht bald Kritik auch unter seinen Anhängern ein. So zitiert Sauer, 1991 exemplarisch Christian Friedrich Hoffmann, der bereits 1810 die Methode als „Rechen-Mechanismus“ bezeichnet, der „im Allgemeinen weder Denkkraft erheben, noch Denkfreiheit erzeugen“ könne und darüber hinaus allein durch die so resultierende Anzahl an pro Übung zu sprechenden Sätzen - Hoffmann errechnet eine Anzahl zwischen 90.000 und 150.000 Sätzen - in gewöhnlichen Volksschulen schon zeitlich nicht möglich wäre (zitiert nach Sauer, 1991, S. 377f). Zu ganz ähnlicher Kritik kommt Diesterweg in seinem *Wegweiser*:

> „Man suchte die Lückenlosigkeit (wie Pestalozzi z. B. in seinem ‚Buche der Mutter' und I. Schmid in seiner ‚Formen und Größenlehre') in dem Lehrgegenstande, in dem Objecte. Daher die vielen kleinen, kleinlichen Uebungen, welche, statt der freien Entwicklung, wieder einen geistfesselnden Mechanismus in die Schule einführten." (Diesterweg, 1835, S. 116)

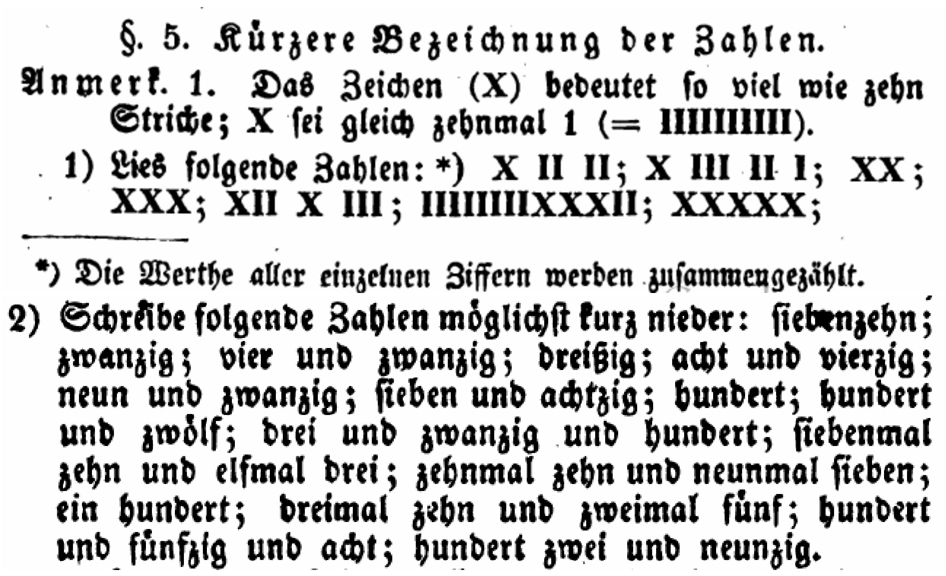
Er führt also den bei Pestalozzi zu beobachtenden Mechanismus auf eine falsch verstandene Lückenlosigkeit zurück. So will Pestalozzi alle Facetten des Gegenstandes (also beispielsweise die Zerlegung aller Zahlen im Zahlenraum bis 100 in der Einheitentabelle) vorgeführt wissen, während Diesterweg unter Lückenlosigkeit die Orientierung an der geistigen Entwicklung des individuellen Schülers, bei der keine Entwicklungsstufe übersprungen werden soll, versteht[13]: „Beginne den Unterricht auf dem Standpunkte des Schülers, führe ihn von da aus stetig, ohne Unterbrechung, lückenlos fort!" (Diesterweg, 1835, S. 116)

Folgerichtig schlägt Diesterweg, obgleich sich die von ihm verwendeten Arbeitsmittel nicht zwingend von denen Pestalozzis unterscheiden, ein anderes methodisches Vorgehen für den Anfangsunterricht im Rechnen vor, was sich beispielsweise in den Aufgabensammlungen der *praktischen Rechenbücher* niederschlägt. Mit der Gestaltung der Bücher wollen Diesterweg und Heuser den realen Zuständen in Volksschulen mit sehr großen jahrgangsübergreifenden Klassen Rechnung tragen und erstellen Aufgaben, die von einzelnen Schülern im Selbststudium bearbeitet werden können, während sich der Lehrer anderen Schülern widmen kann. Trotzdem sind aber auch diese Aufgaben nicht lückenlos im Sinne Pestalozzis gestaltet, sondern bieten immer eine Auswahl an Beispielen, die den Kindern erlauben, die hinterliegende Struktur zu erkennen und exemplarisch anzuwenden also eine entsprechende mathematische Anschauung aufzubauen. Dies zeigt sich etwa in der Einführung der Darstellung von Zahlenbildern mittels römischer Zahlzeichen (s.o.) in §5 des *praktischen Rechenbuchs* (vgl. Abb. 3). Hier sollen in Aufgabe 1) nach einer kurzen Erklärung des Zeichens X, zunächst Zahlen mit diesem Zeichen gelesen werden. Statt nun in Pestalozzischer Manier vorzugeben etwa „Einmal X bedeutet zehnmal I, XX bedeutet zwanzig mal I usw." werden einzelne nicht offensichtlich geordnete Beispiele gegeben.[14] Um nicht in ein mechanisches Weiterzählen zu ver-

[13] Damit ist auch das Prinzip der Lückenlosigkeit ähnlich wie der Anschauungsbegriff ein Beispiel für von Diesterweg und Pestalozzi gemeinsam aber mit völlig unterschiedlicher Bedeutung genutzter Bezeichnungen.

[14] Interessanter Weise ähneln die Formulierungshilfen für Lehrer, die Diesterweg und Heuser, 1844 in ihrem *Methodischen Handbuch* geben, eher den pestalozzischen Sprachübungen als die für

fallen, folgt deren Anordnung keinem erkennbaren Schema. Außerdem werden die einzelnen Zeichen verschieden gruppiert, vermutlich um zu verhindern, dass bestimmte Gruppierungen mit einem Wert in Verbindung gebracht werden. Denn um flexibel mit den Zahlenbildern in der Anschauung auch weitere Zahlen darstellen zu können oder später die Grundrechenarten durchführen zu können, muss jeweils einem Zeichen der entsprechende Wert zugeordnet werden und diese dann additiv zusammengesetzt werden. Dass auf Grund der additiven Struktur der Zahlenbilder der Wert nicht von der Reihenfolge oder vom Ort eines Zeichens abhängt, geht ebenfalls in die Auswahl der Beispiele ein (vgl. etwa die Darstellung der 25 als *XII X III* in Abb. 3). Dies macht es später leichter z.B. das Ergebnis des Zusammenzählens (Addition) auf diese Weise dargestellter bzw. vorgestellter Zahlen zu ermitteln.


§. 5. Kürzere Bezeichnung der Zahlen.

Anmerk. 1. Das Zeichen (X) bedeutet so viel wie zehn Striche; X sei gleich zehnmal 1 (= IIIIIIIIII).

1) Lies folgende Zahlen: *) X II II; X III II I; XX; XXX; XII X III; IIIIIIIXXXII; XXXXX;

*) Die Werthe aller einzelnen Ziffern werden zusammengezählt.

2) Schreibe folgende Zahlen möglichst kurz nieder: siebenzehn; zwanzig; vier und zwanzig; dreißig; acht und vierzig; neun und zwanzig; sieben und achtzig; hundert; hundert und zwölf; drei und zwanzig und hundert; siebenmal zehn und elfmal drei; zehnmal zehn und neunmal sieben; ein hundert; dreimal zehn und zweimal fünf; hundert und fünfzig und acht; hundert zwei und neunzig.

Abbildung 3: Einführung des Lesens und Schreibens von Zahlen mit Hilfe der römischen Zahlzeichen in (Diesterweg und Heuser, 1846[16]*)*

Die Aufgaben in Abb. 3 zeigen außerdem, dass auch Diesterweg auf einen „vollständig genauen, deutlichen, mündlichen Ausdruck [...] überall einen entscheidenden Werth“ legt (Diesterweg, 1835, S. 627). Dies äußert sich hier insbesondere darin,

die Kinder vorgesehenen Aufgaben, obgleich auch dort das *praktische Rechenbuch* empfohlen wird. Eine mögliche Erklärung wäre, dass die Autoren sicher gehen wollen, dass auch sehr schlecht oder nicht ausgebildete Volksschullehrer, von denen es zu dieser Zeit noch sehr viele gab (vgl. Sauer, 1991), die Lösungen zu allen möglichen Zahlzerlegungen und Rechnungen vorliegen haben.

dass er die im Deutschen additive Bildung von Zahlworten besonders hervorhebt und damit die anschaulichen Zahlbilder unterstützt. Ob die Rolle der Sprache als die Anschauung unterstützendes Medium bei Diesterweg auch über diese Beispiele hinaus als allgemeines Prinzip angesehen werden kann, bleibt jedoch noch zu prüfen.

4 Ein inhaltlich nicht haltbares Narrativ

Die Darstellungen von Diesterwegs Anschauungskonzept und dessen unterrichtlicher Anwendung sowie der Vergleich zu Pestalozzi in Kap. 2 und 3 zeigen, dass zwar beide Pädagogen zentrale Momente ihres Konzeptes identisch *bezeichnen*, jedoch zu sehr unterschiedlichen konzeptionellen wie auch praktischen Vorstellungen gelangen. Die einzige konzeptionelle inhaltliche Konstante ist wohl die allererste Grundannahme, dass Erkenntnis empirischer Erfahrungen und sinnlicher Wahrnehmung bedarf und die daraus resultierende Forderung: „unterrichte anschaulich!“

Ein möglicher Grund dafür, dass sich aus dieser gemeinsamen Basis, sehr verschiedene Konzepte entwickeln, liegt sicher in den jeweiligen philosophischen Referenzen der beiden Pädagogen begründet. Während Pestalozzi mit de Condillac und Lieberkühn in der pädagogischen Linie der sensualistischen Tradition bleibt, stehen Diesterwegs Grundannahmen mit Fries klar in einer psychologisch bzw. pädagogisch gewendeten Tradition Kants. Hier ist wohl neben den verschiedenen kulturellen biographischen Kontexten, die das Denken der beiden Pädagogen und ihr theoretisches Interesse geprägt haben, auch der zeitliche Abstand ihres Schaffens von Bedeutung.

Dass sich trotz der offensichtlichen inhaltlichen Unterschiede die Erzählung des Pädagogen Diesterwegs - und nahezu aller weiteren nachfolgenden, anschaulichen (Mathematik-)Unterricht fordernden Kollegen - als in der Tradition Pestalozzis stehend bis heute Bestand hat, ist sicher einerseits auf die Verwendung der selben Termini zurückzuführen. Möglicher Weise hat aber auch Diesterweg selbst dafür gesorgt, in der Tradition Pestalozzis gesehen zu werden und dafür die ihm durchaus bekannten inhaltlichen Differenzen bewusst übergangen. So beschreibt sowohl Oelkers, 1995 als auch Günther, 1990, dass Diesterweg trotz seiner expliziten und teilweise auch polemischen Kritik an Pestalozzis Methode und deren Verteidigung und Umsetzung durch dessen Schüler aktiv an der Idealisierung Pestalozzis als Zunftheiligem der sich organisierenden und professionalisierenden Volksschullehrer mitgewirkt hat. Dabei wurde insbesondere Pestalozzis Lehrerhandeln und sein unbedingter Einsatz für eine neue Art von Unterricht hervorgehoben. So konnte dann auch zur öffentlichkeitswirksamen Rechtfertigung des Anschauungsprinzips auf den großen Ahnherrn verwiesen werden.

Ein so in die Tradition Pestalozzis gestellter Diesterweg führt nun jedoch zu zwei eigenartigen weiter zu untersuchenden Phänomenen: Erstens wird in Arbeiten zur Geschichte des Mathematikunterrichts Diesterweg fälschlicherweise eine inhaltliche Pestalozzi-Nachfolge bescheinigt, was insbesondere mit dem geteilten Anschauungsprinzip begründet wird. Zweitens wurde bereits um die Jahrhundertwende Pestalozzis Prinzip der Anschauung im Lichte der Philosophie Kants gelesen. Dies scheint zur Folge zu haben, dass das heute Pestalozzi zugesprochene Prinzip der Anschauung nicht wirklich Pestalozzis Ideen, sondern denen Diesterwegs zu entsprechen scheint bzw. an diese erinnert. Dennoch ist der Name Diesterweg mindestens in der Mathematikdidaktik auch und gerade wenn es um Anschauungen geht, verloren gegangen, während Pestalozzi als Urvater des anschauungsbasierten Mathematikunterrichts, wie wir ihn heute kennen, gilt. Hier wäre zu klären, inwiefern in späteren Konzeptionen etwa der Reformpädagogik oder der Neuen-Mathematik-Bewegung Diesterwegs Ideen (unter der Pestalozzi-Flagge) weitergetragen wurden.

Literatur

Böversen, Fritz (1970). „Pestalozzis Begriff der Anschauung". In: *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Pädagogik* 46.3, S. 216–238.

Brühlmeier, Arthur (Okt. 2024). „Gedanken zu Pestalozzis Anschauungsbegriff". Okt. 2024. URL: https://www.bruehlmeier.info/texte/pestalozzi/lehrtexte-und-abhandlungen/gedanken-zu-pestalozzis-anschauungsbegriff/.

Diesterweg, Friedrich Adolph Wilhelm (1828). „Bemerkungen über den Rechenunterricht, mit besonderer Beziehung auf das Rechenbuch von Diesterweg und Heuser." In: *Rheinische Blätter* 3.1, S. 86–101.

– (1833). „Über die Quelle unserer Erkenntnis und über das (einzig richtige) Verfahren bei Erwecken derselben in Andern, nebst einem Anhange über die heuristische Methode in der Raumlehre." In: *Rheinische Blätter*, S. 291–324.

– (1835). *Wegweiser zur Bildung für Lehrer und die Lehrer werden wollen, und methodisch-praktische Anweisungen zur Führung des Lehramts.* Baedecker, 1835.

– (1850^4). *Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer.* Bd. 1. GD Bädeker, 1850^4.

Diesterweg, Friedrich Adolph Wilhelm und Peter Heuser (1844). *Methodisches Handbuch für den Gesamt-Unterricht im Rechnen: Als Leitfaden beim Rechenunterrichte und zur Selbstbelehrung. Von FAW Diesterweg und P. Heuser. In 2 Abth.* Bd. 1. Büschler, 1844.

– (1846[16]). *Praktisches Rechenbuch für Elementar-und höhere Bürger-Schulen: Erstes Uebungsbuch.* Bd. 1. Büschler, 1846[16].

Fischbein, Ephraim (1993). „The Theory of Figural Concepts.“ In: *Educational Studies in Mathematics* 24.2, S. 139–162.

Fries, Jakob Friedrich (1837). *System der Logik: ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstgebrauch [A system of logic: A handbook for teachers and independent study].* Heidelberg: Winter.[Erste Ausgabe 1811], 1837.

Günther, Karl-Heinz (1990). „„Pestaluzern“ - Diesterweg und Pestalozzi.“ In: *Adolph Diesterweg. Wissen im Aufbruch.* Hrsg. von Universität-Gesamthochschule-Siegen. Deutscher Studienverlag, 1990, S. 332–338.

Hartshorn, Robert und Sue Boren (1990). „Experiential Learning of Mathematics: Using Manipulatives. ERIC Digest.“ In.

Hohendorf, Gerd (1990). „Über die Quellen der Pädagogik Diesterwegs“. In: *Diesterweg: Pädagogik-Lehrerbildung-Bildungspolitik.* Hrsg. von Gerd Hohendorf und Horst F. Rupp. Deutscher Studien Verlag, 1990.

Jahnke, Thomas (1990). „Die Regel de Tri. Eine mathematische Reise mit Diesterweg.“ In: *Adolph Diesterweg. Wissen im Aufbruch.* Hrsg. von Universität-Gesamthochschule-Siegen. Deutscher Studienverlag, 1990, S. 210–216.

Jänicke, Edmund (1888). „Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts“. In: *Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichtes.* Hrsg. von C. Kehr. 2. Aufl. Bd. 3. Thienemanns Hofbuchhandlung, 1888, S. 1–180.

Kempelmann, Johannes (1995). *Didaktik als Prinzipienlehre: Natur und Kultur als Leitgedanken didaktischen Denkens bei Adolph Diesterweg.* Bd. 24. Verlag Die Blaue Eule, 1995.

Kerschensteiner, Georg (1932). „Die Prinzipien der Pädagogik Pestalozzis“. In: *Pestalozzi-Studien* 2, S. 1–14.

Koch, Otto (1958). „Diesterweg als Methodiker des Rechen- und Raumlehreunterrichts“. In: *Der Pädagoge Adolph Diesterweg.* Hrsg. von Hugo Gotthard Blotz. Verlag Moritz Diesterweg, 1958, S. 54–70.

Lemanski, Jens (2022). „Schopenhauers Logikdiagramme in den Mathematiklehrbüchern Adolph Diesterwegs“. In: *SieB* 16, S. 101–132.

Liedtke, Max (1990). „Analogiedenken und Pestalozzis Unterrichtsprinzip der Anschauung - Erkenntnistheoretische und stammesgeschichteliche Anmerkungen zu den Voraussetzungen von Lernen und Erkenntnis.“ In: *Pestalozzi im internationalen Gespräch.* Hrsg. von Pestalozzianum. Orell Füssli, 1990, S. 197–228.

Merkle, Siegbert Ernst (1983). *Die historische Dimension des Prinzips der Anschauung: historische Fundierung und Klärung terminologischer Tendenzen des didaktischen Prinzips der Anschauung von Aristoteles bis Pestalozzi.* 1983.

Natorp, Paul (1912). *Pestalozzi: sein Leben und seine Ideen.* Bd. 250. BG Teubner, 1912.

Oelkers, Jürgen (1995). „Diesterweg und Pestalozzi: Rezeptionsgeschichtliche Bemerkungen zu einem schwierigen Verhältnis". In: na, 1995.

Osterwalder, Fritz und Kurt Reusser (1997). „Pestalozzis dreifache Methode-innere Vollendung des Menschen, göttliche Ordnung, Buchstabier-und Rechenkunst". In: *Beiträge zur Lehrerbildung* 15.3, S. 304–370.

Pestalozzi, Johann Heinrich (1803). *Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse.* Pestalozzis Elementarbücher. Heinrich Geßner und Gotta'sche Buchhandlung, 1803.

– (1887). *Johann Heinrich Pestalozzis Wie Gertrud ihre Kinder lehrt: ein Versuch, den Müttern Anleitung zu geben, ihre Kinder selbst zu unterrichten (1801).* Bd. 4. Schöningh, 1887.

Rahn, Anne und Susanne Spies (2023). „Arithmetic by manipulatives: a view through historical examples." In: *"Dig where you stand" 7. Proceedings of the seventh International Conference on the istory of Mathematics Education.* Hrsg. von u.a. K. Bjarnadóttir. WTM-Verlag, 2023, S. 213–226.

Sauer, Michael (1991). „Es schärfet des Menschen Verstand...Die Entwicklung des Rechenunterrichts in der preußischen Volksschule". In: *Zeitschrift für Pädagogik* 37.3, S. 371–395.

Schubring, Gert (1990). „Wilhelm Diesterweg. Ein Elementarmathematiker in der entstehenden Forschungsuniversität." In: *Adolph Diesterweg. Wissen im Aufbruch.* Hrsg. von Universität-Gesamthochschule-Siegen. Deutscher Studienverlag, 1990, S. 75–83.

Vollrath, Hans-Joachim (2013). *Verborgene Ideen: Historische mathematische Instrumente.* Springer-Verlag, 2013.

vom Hofe, Rudolf (1996). „Über die Ursprünge des Grundvorstellungskonzeptes in der deutschen Mathematikdidaktik." In: *JMD* 17.3/4, S. 238–264.

Zeimetz, Antonia (2012). „Anwendungen und weitere Vernetzungen in Diesterwegs Raumlehre". In: *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht.* Hrsg. von Andreas Filler und Matthias. Ludwig. Franzbecker, 2012, S. 157–176.

Zerrenner, Karl Christoph Gottlieb (1834). *Mittheilungen und Winke die Einführung der wechselseitigen Schuleinrichtung betreffend.* Heinrichshofen, 1834.

A Contribution on the Unpublished Cantor Correspondence in Halle

Karin Richter & Toni Reimers

1 Introduction: Aims & Stucture

In 1974, during a conversation with the Italo-American mathematician Gian-Carlo Rota (*1932, †1999),[1] the Polish-born Stanisław Marcin Ulam (*1909, †1984)[2] compared Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (*1845, †1918)[3] with one of the great world "revolutionaries" like "Jesus, Marx, Freud, Einstein".[4] The Prussian David Hilbert (*1862, †1943)[5] also considered Cantor to be one of the boldest mathematical thinkers and his mathematics of the infinite to be a "Paradies" from which he did not want to be expelled.[6] Today, the achievements of the father of *Mengentheorie* are undisputed and have been widely recognized – this was not always the case: During his life, Cantor repeatedly had to deal with doubters and (sometimes unreasonable) critics.

Cantor's life and work were and are the subject of scientific historical research from various perspectives.[7] A rich source is the partially very well preserved Cantor's correspondence, for which exploration the Berlin mathematics professor Herbert Meschkowski (*1909, †1990)[8] has made an eminent contribution, by editing and contextualising letters and its copies as well as parts of the inherited *Briefbücher*, written by Cantor, which are now in the possession of the Georg August University

[1] O'Connor and Robertson, 2000.
[2] O'Connor and Robertson, 2024.
[3] Wangerin, 1918; Kertész and Stern, 1983.
[4] Eckhardt and Shera, 1987, p. 306.
[5] Freudenthal, 1972.
[6] Meschkowski and Nilson, 1991, p. 2.
[7] Purkert and Ilgauds, 1987; Dauben, 1979.
[8] Fritsch, 1994.

of Göttingen.[9] The aim of this short article is on the one hand to get an insight to the until now unpublished Cantor correspondence and on the other hand to give a more complete prosopographical view on an interesting episode of the history of mathematics, connected with the quest to prove the *Wohlordnungssatz* (well-ordering theorem), also known as Zermelo's theorem.[10] Futhermore, the authors want to give an *apéritif* of the unpublished Cantor correspondence preserved at the Martin Luther University Halle-Wittenberg (MLU) and to continue the analysis of the inherited letters. Part of them have been shown to the public at the Museum universitatis of the MLU during the Cantor exhibition *Ein Leben für Unendlichkeit* (23rd November 2018—27th January 2019) and during the awarding of the Cantor Medal of the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* at the MLU, 27th November 2024.

After these introductive sentences, this article is structured in four parts: Firstly, the authors want to give a very brief overview of the contemporary and past of the well-ordering theorem, before continuing with the main subject: an unpublished postcard of David Hilbert to Georg Cantor from 12th September 1904. The last third is dedicated to an undated note (c. 1875) by Cantor, giving already an idea about the later continuum hypothesis.

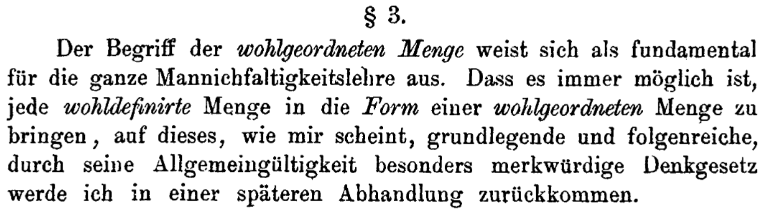
2 Synopsis: Mathematical Outline & Historical Framework of the *Wohlordnungssatz*

Without looking at the possible relations of well-orders among themselves, the naive question is: Can any set be well-ordered, i. e. does for any set M exist an well-order $<$ on M? A well-order on a set M is a total ordering on M with the property that every non-empty subset of M has a least element in this ordering.[11] With the words of Cantor:

> "Unter einer *wohlgeordneten* Menge ist jede wohldefinirte Menge zu verstehen, bei welcher die Elemente durch eine bestimmte vorgegebene Succession mit einander verbunden sind, welcher gemäss es ein *erstes* Element der Menge giebt und sowohl auf jedes einzelne Element (falls es nicht das letzte in der Succession ist) ein bestimmtes anderes folgt, wie auch zu jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Elementen ein bestimmtes Element gehört, welches das ihnen allen

[9] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.
[10] Zermelo, 1908b, v. e. Tarski, 1939.
[11] Cf. e. g. Deiser, 2024, pp. 243–59.

> *nächst* folgende Element in der Succession ist (es sei denn, dass es ein ihnen allen in der Succession folgendes Element überhaupt nicht giebt)."[12]



§ 3.

Der Begriff der *wohlgeordneten Menge* weist sich als fundamental für die ganze Mannichfaltigkeitslehre aus. Dass es immer möglich ist, jede *wohldefinirte* Menge in die *Form* einer *wohlgeordneten* Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen.

Figure 1: Edited excerpt of Cantor, 1883, p. 550.

If one thinks of the real numbers, for example, it is by no means clear what a well-ordering of the real numbers should look like. In 1883, Georg Cantor considered the well-ordering theorem to be a *Denkgesetz*, in his fourth continuation of his article *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.*[13] The Hungarian mathematician Gyula Kőnig (*1849, †1913)[14] claimed to have proven that such a well-ordering cannot exist, during the third *Internationaler Mathematikercongreß* (8th—13th August 1904) in Heidelberg. For the reactions on Kőnig's lecture and the first steps to correct it, see section 3 of this article.

The first rigorous proof of the well-orderability of any set was achieved by the German Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (*1871, †1953)[15] in 1904. Given the three-page length of the publication, it caused an enormous stir in the mathematical world. Zermelo studied mathematics, physics and philosophy at the universities of Berlin, Halle (Saale), and Freiburg and, in 1894, received his doctorate from the University of Berlin under supervision of the Prussian Carl Hermann Amandus Schwarz (*1843, †1921)[16] with *Untersuchungen zur Variationsrechnung*, in which he expanded Weierstraß' theory.[17] In Berlin, he studied under the German theoretical physicist Max Karl Ernst Ludwig Planck (*1858, †1947),[18] whose assistant he was. In 1897, Zermelo went to Göttingen, where he submitted his habilitation on a hydrodynamic topic. In 1904, he formulated the axiom of choice and thereby proved the well-ordering theorem. This gathered so much attention that he was appointed as professor in Göttingen in 1905. However, his proof also provoked

[12] Cantor, 1883, pp. 348 sq.
[13] Cantor, 1883.
[14] In Germany known as Julius König: O'Connor and Robertson, 2004.
[15] Neuenschwander, 2014.
[16] Röttel, 2010.
[17] For Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (*1815, †1897), see Ullrich, 2020.
[18] Hoffmann, 2001.

strong criticism, so that he gave a new proof in 1908.[19] He subsequently founded axiomatic set theory with the axioms of Zermelo set theory in 1907/08, the basis for Zermelo-Fraenkel set theory,[20] which is established as the standard approach today.[21]

All acquainted proofs are founded on the idea of an exhaustive enumeration of all elements of the based set. It turns out that, in the axiomatic development of set theory, the well-ordering theorem is equivalent to a distinguished axiom on the basis of the other axioms, namely the axiom of choice: the axiom that enables selection acts "a/an …". In this respect, Cantor's designation *Denkgesetz* for the well-ordering theorem is not inappropriate.[22]

Theorem (Wohlordnungssatz, Ernst Zermelo)**.**
Let M be a set. Then there is a well-order $<$ on M.

Zermelo's proof. For every $\varnothing \neq A \subseteq M$ let be

$$\gamma(A) = \text{"an } x \in A\text{"},$$

i. e. to fix a function $\gamma\colon 2^M \backslash \{\varnothing\} \longrightarrow M$, with $\gamma(A) \in A$ for all $A \in \mathrm{dom}(\gamma) = 2^M \backslash \{\varnothing\}$. A well-order $\langle A, < \rangle$ is a γ-set, if:

1. $A \subset M$,
2. for all $x \in A$ is $x = \gamma(M \backslash A_x)$,

whereas $A_x = \{y \in A | y < x\}$ is the first part of the beginning piece, deined by x, of the well-order $\langle A, < \rangle$. Especially is $\gamma(M)$ the smallest element of every γ-set $\langle A, < \rangle$, with $A \neq \varnothing$. Further on, a beginning piece of a γ-set is again a γ-set.

The idea is: The γ-sets are the beginning pieces of a certain well-order of M, namely the well-order, that is generated by eroding M according to γ. The function γ provides one element of the residual on every eroding position, as long as it is not depleted.

Therefore, until a certain point, a γ-set archives the course of a process, that runs without arbitrariness. Due to this interpretation, the following proposition is no

[19] Zermelo, 1908a.
[20] For Adolf Abraham Halevi Fraenkel (*1891, †1965), see O'Connor and Robertson, 2014.
[21] Fraenkel, 1922; Fraenkel, 1927; Fraenkel, 1960, for a chronological overview, see Deiser, 2024, pp. 499–507.
[22] Zermelo, 1904, v. e. Deiser, 2024, pp. 262 sq.

surprise:

$$\begin{aligned}&\textit{Let } \langle A,<\rangle \textit{ and } \langle B,<\rangle \textit{ be two different } \gamma\textit{-sets,}\\ &\textit{then one is a beginning piece of the other.}\end{aligned} \tag{1}$$

Proof of (1). According to the comparability theorem for well-orders, let w. l. o. g. $\langle A,<\rangle \equiv \langle B',<\rangle$, in which $\langle B',<\rangle$ let be a beginning piece of $\langle B,<\rangle$ or equal $\langle B,<\rangle$. Let

$$\pi\colon A \longrightarrow B'$$

be the affiliated order's isomorphism. It is enough to show that $\pi = \mathrm{id}_A$. So, let

$$X = \{x \in A | \pi(x) \neq x\}.$$

Assuming $X \neq \varnothing$. Thus let x be the smallest element of X and $z = \pi(x)$. Then, by minimal choice of x, $A_x = B'_z$. Due to $\langle A,<\rangle$ and $\langle B',<\rangle$ are γ-sets, so it holds

$$x = \gamma(M \backslash A_x) = \gamma(M \backslash B'_z) = z,$$

which is a contradiction. So, (1) is proven.

Let $\Gamma = \{\langle A,<\rangle | \langle A,<\rangle \text{ is a } \gamma\text{-set}\}$ and

$$\langle N,<\rangle = \bigcup \Gamma.$$

$\bigcup \Gamma$ is a well-order, due to (1). Furthermore:

$$\langle N,<\rangle \textit{ is a } \gamma\textit{-set.} \tag{2}$$

Proof of (2). Obviously is $N \subseteq M$. Let $x \in N$ Then it exists a γ-set $\langle A,<\rangle$ with $x \in A$, so $x = \gamma(M \backslash A_x)$. But $A_x = N_x$ for all $x \in A$ and thereby

$$x = \gamma(M \backslash N_x).$$

Thus $\langle N,<\rangle$ is a γ-set.

$$\textit{It is true that } N = M. \tag{3}$$

Proof of (3). Assuming $M \backslash N \neq \varnothing$. Let be $x = \gamma(M \backslash N)$ and $\langle N',<'\rangle$ the well-order $\langle N,<\rangle$, expanded by the element x, i. e.

$$\langle N',<'\rangle = \langle N,<\rangle \oplus \{x\}.$$

Then, $\langle N', <' \rangle$ is a γ-set with $x \in N'$, contradicts $x \notin N$ and the definition on N as union of the support of all γ-sets.

Thus $\langle N, < \rangle$ is a well-order on M. $\square$

However, this theorem quickly turned out to be equivalent to the well-ordering theorem, in the sense of first-order logic that the Zermelo-Fraenkel axioms with the axiom of choice included are sufficient to prove the well-ordering theorem.[23] Conversely, the Zermelo-Fraenkel axioms without the axiom of choice, but with the well-ordering theorem included are sufficient to prove the axiom of choice. In second-order logic, however, the well-ordering theorem is strictly stronger than the axiom of choice: From the well-ordering theorem one may deduce the axiom of choice, but from the axiom of choice one cannot deduce the well-ordering theorem.[24]

Cantor's theory already got much attention during the international mathematician's congress in Zurich in 1897. This was even more the case in Heidelberg in 1904: While Zurich's congress had brought friendly recognition, a lecture in Heidleberg brought a refutation of Cantor's fundamental views.

3 Subject: Hilbert's Postcard to Cantor & its Significance

The postcard, considered here (Fig. 2), refers directly to the events during the congress in Heidelberg. Gyula Kőnig, who was described as "äußerst scharfsinnig und absolut zuverlässig"[25] by Waldemar Hermann Kowalewski (*1876, †1950),[26] 'proved' that the cardinality $\aleph$ of the continuum, which according to Cantor's conjecture should be equal to the cardinality $\aleph_1$ of the first class of numbers, does not occur at all among the alephs. Zermelo's proof was not known to the audience and they did not find any mistake in Kőnig's deductions, so Cantor's *Denkgesetz* was 'proven wrong': The cardinality $\aleph$ of the continuum was different from $\aleph_1$, therefore it was impossible to generate a well-order for the continuum. According to Barna Szénássy (*1913, †1995),[27] these findings were a sensation at the congress: "All section meetings were cancelled so that everyone could hear his

[23] Deiser, 2024, pp. 472 sqq.
[24] Deiser, 2024, pp. 261 sqq.
[25] Kowalewski, 1950, p. 201.
[26] Kirschmer, 1980.
[27] Prékopa, 2005.

[= Kőnig's] contribution."[28] Even the daily newspapers, which are usually very reserved about mathematical conferences, reported on them.[29]

The reports about Cantor's reaction differ: According to the Prussian mathematician Arthur Moritz Schoenflies (*1853, †1928),[30] Cantor meant,

> "daß er von vorne herein das Königsche Resultat trotz seiner exakten Beweisführung nicht für richtig hielt [...]. Er pflegte scherzweise zu sagen, er hege kein Mißtrauen gegen den König, nur gegen seine Minister."[31]

During a *Nachkongreß*, Cantor met Hilbert, Kurt Jakob Wilhelm Sebastian Hensel (*1861, †1941),[32] Felix Hausdorff (*1868, †1942)[33], and Schoenflies and it was

> "geradezu ein dramatischer Augenblick, als Cantor eines Morgens in dem Hotel erschien, [...] um überreif [...] uns und der Umwelt sofort eine neue Widerlegung des Königschen Theorem[s] vorzuführen."[34]

Gregory Moore (*1944) described the history about dealing with Kőnig's argumentation as follows:

> "Ebbinghaus [...] discovered a letter of October 27, 1904, from Zermelo to Max Dehn, which showed that Zermelo was one of those to suspect the error lay in Berstein's 'theorem', but was not able to verify this only when, after the holidays, he returned to Göttingen and could visit the library. [...] However, the clearest light on what happened is shed by a letter [...] from Otto Blumenthal to Emile Borel on December 1, 1904. Blumenthal informed Borel that König himself was the first to realize that his proof was not valid, followed (independently of each other) by Cantor, Bernstein, and Zermelo."[35]

The day after, it became apparent that Kőnig's *Beweis* was wrong: Ernst Zermelo noticed that Kőnig used a proposition from *Untersuchungen aus der Mengenlehre* (1901), the dissertation of Felix Bernstein (*1878, †1956),[36] a Cantor's disciple

[28] Szénássy, 1992, pp. 233 sqq.
[29] Meschkowski, 1967, p. 165.
[30] Fritsch, 2007.
[31] Schoenflies, 1922, p. 100.
[32] Hasse, 1969.
[33] Krull, 1969.
[34] Schoenflies, 1922, p. 100.
[35] Moore, 2009, p. 825, see also Dugac, 1989, p. 74; for Max Wilhelm Dehn (*1878, †1952), see Süss, 1957, for Ludwig Otto Blumenthal (*1876, †1944), seeMilkutat, 1955, and for Félix Édouard Justin Émile Borel (*1871, † 1956), see O'Connor and Robertson, 2008b; v. e. Ebbinghaus and Peckhaus, 2009, p. 52.
[36] O'Connor and Robertson, 2008a.

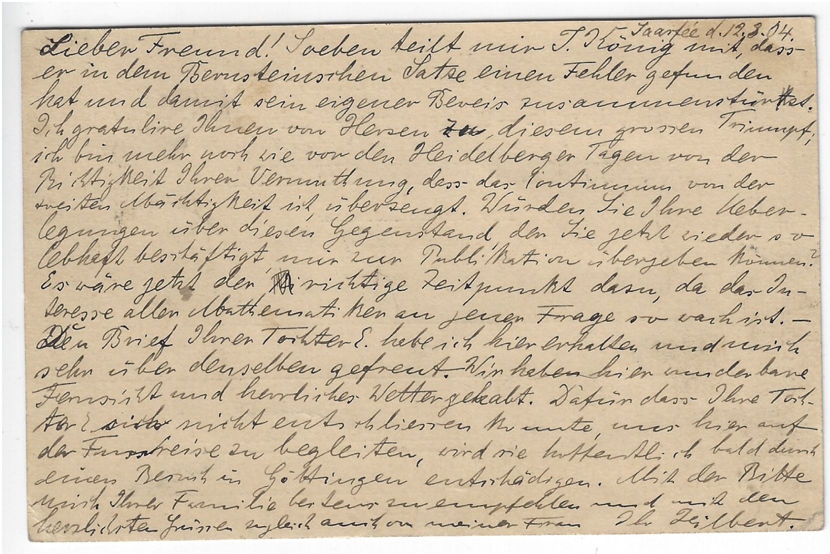
and doctoral student of Felix Christian Klein (*1849, †1925)[37] and David Hilbert. This proposition did not have the necessary general validity.

The articles[38] of Kőnig and Bernstein in the *Mathematische Annalen* 60 (1905) reflect the significance of Kőnig's lecture and its reactions. The Hallensian Bernstein wanted to make it clear that the idea of his proposition is true, under his assumptions, but Kőnig could not apply it in this case. Kőnig, on the other hand, wanted to point out that his deductions are right, but Bernstein's proposition has a *Lücke.* It is remarkable that Bernstein's article *Zum Kontinuumproblem* closes with:

> "[...] Es ist übrigens wenig wahrscheinlich, daß das Kontinuumsproblem mit den bisher entwickelten Begriffen und Methoden gelöst werden kann."[39]

In Kőnig's opinion, he did not make a mistake himself, but moreover Bernstein did, which can also been read in the *Korrespondenzkarte* (Fig. 2) from Hilbert to Cantor from Monday, 12th September 1904, one day after Kőnig's lecture:

> "Lieber Freund! Soeben teilt mir J. König mit, dass
> er in dem Bernsteinschen Satze einen Fehler gefunden
> hat und damit sein eigener Beweis zusammenstürtzt.
> Ich gratuliere Ihnen von Herzen zu diesem Triumpf;
> ich bin mehr noch wie vor den Heidelberger Tagen von der
> Richtigkeit Ihrer Vermuthung, dass das Continuum von der
> zweiten Mächtigkeit ist, überzeugt. Würden Sie Ihre Ueber-
> legungen über diesen Gegenstand, der Sie jetzt wieder so
> lebhaft beschäftigt, mir zur Publikation übergeben können?
> Es wäre jetzt der richtige Zeitpunkt dazu, da das In-
> teresse aller Mathematiker an jener Frage so wach ist. —
> Den Brief Ihrer Tochter E[lse] habe ich hier erhalten und mich
> sehr über denselben gefreut. Wir haben hier wunderbare
> Fernsicht und herrliches Wetter gehabt. Dafür dass Ihre Toch-
> ter E. sich nicht entschließen konnte, uns hier auf
> der Fußreise zu begleiten, wird sie hoffentlich bald durch
> einen Besuch in Göttingen entschädigen. Mit der Bitte
> mich Ihrer Familie bestens zu empfehlen und mit den herrlichsten
> Grüssen zugleich auch von meiner Frau Ihr Hilbert."[40]



Saasfee d. 12.9.04.

Lieber Freund! Soeben teilt mir J. König mit, dass er in dem Bernsteinschen Satze einen Fehler gefunden hat und damit sein eigener Beweis zusammenstürzt. Ich gratulire Ihnen von Herzen ~~zu~~ diesem grossen Triumpf; ich bin mehr noch wie vor den Heidelberger Tagen von der Richtigkeit Ihrer Vermuthung, dass das Continuum von der zweiten Mächtigkeit ist, überzeugt. Würden Sie Ihre Ueberlegungen über diesen Gegenstand, der Sie jetzt wieder so lebhaft beschäftigt, mir zur Publikation übergeben können? Es wäre jetzt der richtige Zeitpunkt dazu, da das Interesse aller Mathematiker an jener Frage so wach ist. — Den Brief Ihrer Tochter E. habe ich hier erhalten und mich sehr über denselben gefreut. Wir haben hier wunderbare Fernsicht und herrliches Wetter gehabt. Dafür dass Ihre Tochter E. ~~sich~~ nicht entschliessen konnte, uns hier auf der Fussreise zu begleiten, wird sie hoffentlich bald durch einen Besuch in Göttingen entschädigen. Mit der Bitte mich Ihrer Familie bestens zu empfehlen und mit den herzlichsten Grüssen zugleich auch von meiner Frau Ihr Hilbert.

Figure 2: Photograph (by Nobert Kaltwaßer, 2018) of the Korrespondenzkarte *from Hilbert to Cantor, 12th September 1904*

Like many of his colleagues, Cantor had been following Kőnig's works on set theory closely, for years. At the time of the Heidelberg *Congreß*, Cantor was already marked by his severe illness for years. Nevertheless, he did not miss the opportunity to be personally present at the congress and especially at König's lecture. The impact Kőnig's lecture had on Cantor is not difficult to understand. From this point of view, Hilbert's warm-hearted congratulations can be immediately understood as a need to correct Kőnig's considerations, which the community of mathematicians, under them especially Zermelo, Hilbert and others, immediately had recognized as necessary. Hilbert's request for a publication of Cantor's ideas is followed logically here. The extent to which these discussions moved Cantor can also be seen in a letter from Cantor to Philip Edward Bertrand Jourdain (*1879, †1919)[41] dated 3rd May 1905. Cantor wrote:

> "Sie werden gehört haben, daß Herr Julius König aus Budapest durch einen im Allgemeinen jedenfalls falschen Satz von Herrn Bernstein ver-

[37] Tobies and F. König, 1981.
[38] J. König, 1905; Bernstein, 1905.
[39] Bernstein, 1905, p. 464.
[40] Since this postcard has not been published before, it is reproduced in full by the authors transcribed form.
[41] O'Connor and Robertson, 2005.

leitet wurde, in Heidelberg bei dem internation. Mathematikercongreß einen Vortrag gegen meinen Satz zu halten, der besagt, daß jeder ‚Menge' d. h. jeder ‚consistenten Vielheit' ein Aleph zukommt.

Das, was König selbst an Positivem beigesteuert hat, ist jedenfalls gut und schön. Nun hat Herr Bernstein die neue Unvorsichtigkeit begangen, in den mathematischen Annalen zeigen zu wollen, dass es „Mengen giebt, die nicht wohlgeordnet werden können". Ich habe keine Zeit nach dem Fehler in seinem Beweise zu suchen, bin aber fest überzeugt, dass ein solcher vorhanden ist. Hoffentlich kommt bald die Zeit und Gelegenheit, wo ich meine Meinung über alle derartigen [. . .] Versuche aussprechen kann."[42]

At this important time, on the threshold of modern 20th-century mathematics, it was increasingly recognized that Cantor's ideas about infinity had become an indispensable part of mathematics and their introduction into current scientific research had to be supported and promoted immediately. "Now would be the right time to do so, as the interest of all mathematicians in this question is so keen.", writes David Hilbert in his postcard. It turned out: He was right.

4 Prospect: A Note & Initial Formulations linked to the later Continuum Hypothesis

In the 19th and the beginning of the 20th century, the opportunities for scientific contacts were sparse. The exchange of ideas at large conferences only became common towards the end of the century. Until then, the letter, the handwritten letter, was the most important mean of exchanging ideas between researchers, teachers, and students.[43]

Hilbert's here presented postcard (Fig. 2) provides an example of this, using a development step that was so important for the modern set theory of infinities. The significance of scientific correspondence, even many decades after its creation, can be of great interest both for the history of science and for scientific research itself. Herbert Meschkowski clearly emphasizes this with reference to Georg Cantor and his surviving letters: These letters should be seen as a testimony of the career, the opinions, hopes, and fears of Cantor. They contain intermediate results and

[42] The full text of the letter to Jourdain, can be read in Meschkowski and Nilson, 1991, pp. 442 sq.
[43] Meschkowski and Nilson, 1991, p. 1.

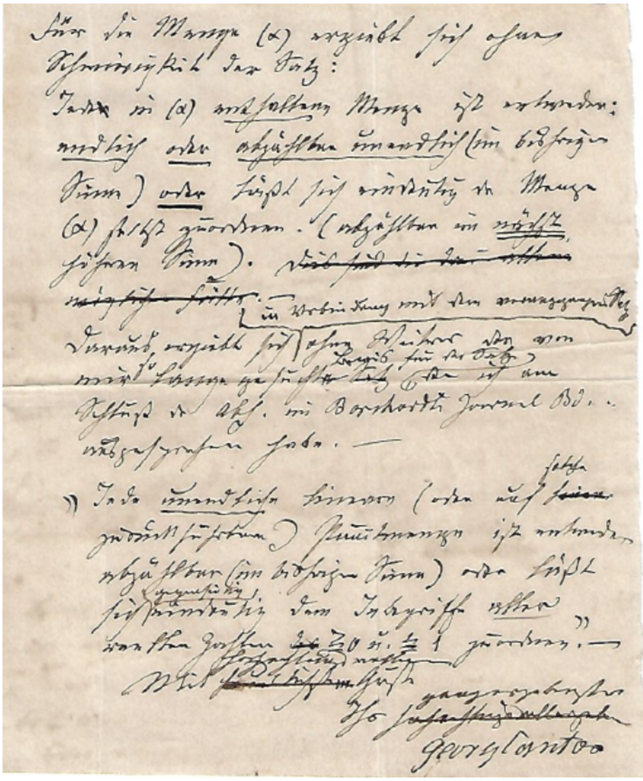


Figure 3: Undated note of Cantor.

definitions that are not found in the printed treatises. There are expressions of opinions in the letters that were not intended for publication.[44]

The following note (Fig. 3),[45] this time written by himself, demonstrates this aspect very clearly:

> "für die Menge (α) ergiebt sich ohne
> Schwierigkeit der Satz:
> Jede in (α) <u>enthaltene</u> Menge ist entweder:
> <u>endlich</u> <u>oder</u> <u>abzählbar unendlich</u> (im bisherigen
> Sinne) <u>oder</u> läßt sich eindeutig der Menge
> (α) selbst zuordnen. (abzählbar im <u>nächst</u>
> höheren Sinne). <u>Dies sind die drei offenen möglichen Fälle</u>. —

[44] Meschkowski and Nilson, 1991, p. 1.
[45] This note is a gift of Cantor's family to the MLU.

> Daraus ergiebt sich in Verbindung mit dem vorangegangenen Satz ohne Weiteres der von
> mir so lange gesuchte Beweis für den Satz, den ich am
> Schluß der Abh. im Borchardt Journal Bd.
> ausgesprochen habe. —
> „Jede unendliche lineare (oder auf solche
> zurückführbare) Punktmenge ist entweder
> abzählbar (im bisherigen Sinne) oder läßt
> sich gegenseitig eindeutig dem Inbegriff aller
> reellen Zahlen $\geqslant 0$ u. $\leqslant 1$ zuordnen."—
> Mit freundlichem hochachtungsvollem Gruße
> Ihr ganz hochachtungsvoll ergebenster ergebenster Georg Cantor"

This undated note from Cantor is the end of a draft of a letter, as can be seen from the closing to an unknown addressee. It is reasonable to assume that Richard Dedekind or Karl Weierstraß could have been the designated recipients. This can be assumed based on Cantor's reference to his treatise in Borchardt's journal, meaning the *Journal für reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* which was published from 1856 to 1880 by the Prussian mathematician Karl Wilhelm Borchardt (*1817, †1880).[46] Cantor refers to his article *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.*[47] The period for the creation of the draft can therefore be placed in the second half of the 1870s, during which Cantor corresponded particularly often with Dedekind and Weierstraß. In terms of content, this short note provides a glimpse of one of Cantor's most crucial insights as early as the 1870s: The continuum, represented by the set of all real numbers between 0 and 1 inclusive, designated here by Cantor with (α), is delimited from the countably infinite sets. What is more, each subset of the continuum is characterized as either finite, countably infinite, or of the cardinality of the continuum. From the formulation "[...] sets (α) [...] (countable in the next higher sense)" the first ideas about the later continuum hypothesis emerge.

In Hilbert's (until now) unpublished postcard to Cantor, presented in this article, the intellectual arc is closed in a certain way, which at the same time covers the central core of Cantor's foundation of the theory of infinities. This article should be seen as an initial connection of the unpublished correspondences of Cantor in Halle with the historical research on an interesting chapter on the way to modern-day mathematics.

[46] Steck, 1955.
[47] Cantor, 1874.

References

Bernstein, Felix (1905). „Zum Kontinuumproblem“. In: *Mathematische Annalen (Math. Ann.)* 60.3. Ed. by Felix Christian Klein, David Hilbert, and Walther Franz Anton Dyck, pp. 463 sq.

Cantor, Georg (1874). „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“. In: *Crelles Journal* 77, pp. 258–62.

– (1883). „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“. In: *Math. Ann.*, pp. 545–91.

Dauben, Joseph Warren (1979). *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. London, 1979.

Deiser, Oliver (2024). *Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*. München, 2024.

Dugac, Pierre (1976). „Des Correspondances Mathématiques des XIX^{e} et XX^{e} Siècle“. In: *Revue de Synthèse (RSyn)* III.81/82, pp. 149–70.

– (1989). „Sur la Correspondance de Borel et la Théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue“. In: *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 39, pp. 69–110.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter and Volker Peckhaus (2009). *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work*. Berlin, 2009.

Eckhardt, Roger and Nancy Shera (1987). „Conversations with Rota“. Trans. by Françoise Ulam. In: *Los Alamos Science* 15. Ed. by Necia Grant Cooper.

Fraenkel, Adolf Abraham (1922). „Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre“. In: *Math. Ann.* 86, pp. 230–37.

– (1927). *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*. Leipzig, 1927.

– (1960). „Über die Grundlagenfragen der Mathematik (1929)“. In: *Selected Works in Logic*. Oslo, 1960, pp. 227–73.

Freudenthal, Hans (1972). „Hilbert, David“. In: *Neue Deutsche Biographie (NDB)* 9, pp. 115–17.

Fritsch, Fritz Rudolf (1994). „Meschkowski, Herbert“. In: *NDB* 17, pp. 207–09.

– (2007). „Schoenflies, Arthur“. In: *NDB* 23, pp. 412 sq.

Grattan-Guinness, Ivor (1971). „Towards a Biography of Georg Cantor“. In: *Annals of Science (Ann. Sci)* 27.4, pp. 345–91.

Hasse, Helmut (1969). „Hensel, Kurt Jakob Wilhelm Sebastian“. In: *NDB* 8, pp. 559 sq.

Hoffmann, Dieter (2001). „Planck, Max“. In: *NDB* 20, p. 497.

Kertész, Andor and Manfred Stern (1983). „Georg Cantor 1845–1918. Schöpfer der Mengenlehre“. In: *Acta Historica Leopoldina*. 15. 1983.

Kirschmer, Gottlob (1980). „Kowalewski, Gerhard“. In: *NDB* 12, p. 628.

König, Julius (1905). „Zum Kontinuum-Problem“. In: *Math. Ann.* 60.1, pp. 177–80.

Kowalewski, Gerhard Waldemar Hermann (1950). *Bestand und Wandel. Meine Lebenserinnerungen zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik.* München, 1950.

Krull, Wolfgang (1969). „Hausdorff, Felix“. In: *NDB* 8, pp. 111 sq.

Meschkowski, Herbert (1967). *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors.* Braunschweig, 1967.

Meschkowski, Herbert and Winfried Nilson, eds. (1991). *Georg Cantor: Briefe.* Berlin, 1991.

Milkutat, Ernst (1955). „Blumenthal, Ludwig Otto von“. In: *NDB* 2, pp. 332 sq.

Moore, Gregory H. (1982). *Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence.* Heidelberg, 1982.

– (Aug. 2009). „Review on: Heinz-Dieter Ebbinghaus & Volker Peckhaus. Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work“. In: *Notices of the AMS*, pp. 823–27.

Neuenschwander, Erwin Alfred (2014). „Ernst Zermelo“. In: *Historisches Lexikon der Schweiz (HLS).* URL: https://hls-dhs-dss.ch/de/articles/043140/2014-02-12/.

O’Connor, John J. and Edmund Frederick Robertson (2000). „Gian-Carlo Rota“. In: *MacTutor History of Mathematics Archive (MT).* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rota/.

– (2004). „Julius König“. In: *MT.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Konig_Julius/.

– (2005). „Philip Edward Bertrand Jourdain“. In: *MT.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jourdain/.

– (2008a). „Felix Bernstein“. In: *MT.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernstein/.

– (2008b). „Félix Edouard Justin Émile Borel“. In: *MT.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Borel/.

– (2014). „Adolf Abraham Halevi Fraenkel“. In: *MT.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fraenkel/.

– (2024). „Stanisław Marcin Ulam“. In: *MT.* URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ulam/.

Prékopa, András (2005). „A magyarországi matematika történésze. Szénássy Barna élete és munkássága“. In: *Természet Világa.*

Purkert, Walter and Jans-Joachim Ilgauds (1987). *Georg Cantor: 1845–1918.* Stuttgart, 1987.

Röttel, Karl (2010). „Schwarz, Carl Hermann Amandus“. In: *NDB* 24, pp. 5 sq.

Schoenflies, Arthur Moritz (1922). „Zur Erinnerung an Georg Cantor". In: *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)* 31, pp. 97–106.

Steck, Max (1955). „Borchardt, Karl Wilhelm". In: *NDB* 2, p. 456.

Süss, Wilhelm (1957). „Dehn, Max Wilhelm". In: *NDB* 3, pp. 565 sq.

Szénássy, Barna (1992). *History of Mathematics in Hungary until the 20th Century.* Trans. by Judit Pokoly. Berlin, 1992.

Tarski, Alfred (1939). „On Well-Ordered Subsets of Any Set". In: *Fundamenta Mathematicae.* Vol. 32. 1939, pp. 176–63.

Tobies, Renate and Fritz König (1981). „Felix Klein". In: *Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner.* Vol. 50. Leipzig, 1981.

Ullrich, Peter (2020). „Weiertraß, Karl". In: *NDB* 27, pp. 586–88.

Wangerin, Friedrich Heinrich Albert (1918). „Georg Cantor". In: *Leopoldina* 54, pp. 10–13.

Zermelo, Ernst (1904). „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann". In: *Math. Ann.* 59, pp. 514–16.

– (1908a). „Neuer Beweis für die Möglichkeit eine Wohlordnung". In: *Math. Ann.* 65.1, pp. 107–28.

– (1908b). „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". In: *Math. Ann.* 65.2, pp. 261–81.

Bernard Bolzano im Kontext der Logikgeschichtsschreibung von Heinrich Scholz

Julia Franke-Reddig

1 Einleitung

Philosophie ist ohne die Berücksichtigung ihrer eigenen Geschichte nicht möglich, denn Letztere ist stets als ein notwendiges Moment der Ersteren zu betrachten. Damit ist gesagt, dass 1.) die zeitgenössische Philosophie nicht eigentlich Philosophie sein kann, wenn nicht die Reflexion auf die Philosophiegeschichte – die Geschichte ihrer eigenen Genese – ein inhärentes Merkmal ihres Philosophierens selbst darstellt.

Demgegenüber ist 2.) die Philosophiegeschichtsschreibung selbst stets auch aus der Praxis des Philosophierens heraus als das Philosophieren über die eigene Geschichte zu verstehen: während sie sich selbst sowie ihre eigenen Methoden und Ziele durch die Betrachtung ihrer Geschichte besser zu verstehen trachtet, wendet sie eben jene Methoden zugleich an und schreibt auf diese Weise ihre eigene Geschichte in der Gegenwart fort. M.a.W. ist die Philosophiegeschichtsschreibung zu jeder Zeit auch als Praxis der Geschichtsphilosophie und damit auch als das Fortschreiben eben jener Geschichte selbst zu verstehen.

In diesem Sinne und unter Beachtung jener zwei zentralen Aspekte der Philosophiegeschichtsschreibung wird im Folgenden die philosophiehistorische Rolle untersucht, die dem Logikhistoriker Heinrich Scholz (1884-1956) im 20. Jahrhundert zukam. In diesem Zusammenhang wird vor allem sein Verhältnis zum Wiener Kreis beleuchtet. Dabei kristallisiert sich heraus, dass eine Untersuchung der Arbeiten von Scholz zu Bernard Bolzano (1781–1848) für die Philosophiegeschichtsschreibung von großer Bedeutung ist. Eine derartige Untersuchung wird im letzten Abschnitt exemplarisch anhand von Scholz' *Jahrundertbetrachtung* der Wissenschaftslehre vorgenommen.

2 Scholz' als Historiker

Die philosophische Fachgemeinschaft darf mit Spannung die Ergebnisse der Aufarbeitung des Nachlasses von Heinrich Scholz erwarten, die seit dem vergangenen Jahr der an der Universität Münster neu eingerichteten Forschungsstelle obliegt (https://www.uni-muenster.de/Heinrich-Scholz/index.html). Es lässt sich erwarten, dass die Ergebnisse dieser Forschungen viele neue Erkenntnisse sowohl über den ersten Lehrstuhlinhaber und Gründer des 1943 gegründeten Instituts für mathematische Logik und Grundlagenforschung wie auch über die Einflüsse der „Schule von Münster" in der Philosophie des 20. Jahrhunderts zutage tragen werden. Doch was sich bereits heute über Scholz' Rolle in der Philosophie- und Logikgeschichte sagen lässt, wird von Volker Peckhaus auf zwei entscheidende Punkte gebracht, die hier im Folgenden näher erörtert werden sollen. Peckhaus schreibt zunächst:

> Scholz's most important contributions to the development of logic, however, should not be sought on the systematic side. Indeed, he was one of the most distinguished historians of logic of his time. (Peckhaus, 2008, S. 84)

Damit ist ein entscheidender Aspekt bei der philosophiehistorischen Betrachtung von Scholz' Werk vorweggenommen: wie bereits ein Blick auf seine Publikationen offenbart (vgl. Heinrich Scholz im Katalog der Deutschen Nationalbibliothek), zeichnete sich Scholz nicht durch seine systematischen Beiträge als einer der herausragenden Logiker des 20. Jahrhunderts aus, sondern vielmehr durch seine Beiträge zur Aufarbeitung der Geschichte der Logik– „unter der Form der Logistik" (Scholz, 1959 [1931], S. V), d.h. ausgehend vom Standpunkt der *modernen formalen Logik*. Diesbezüglich führt Peckhaus an, dass Scholz den Wert der Beiträge von Leibniz, Bolzano und Frege für die Entwicklung der modernen Logik hervorhob (Peckhaus, 2008, S. 84). Dies deutet an, dass es Scholz' Verdienst für die Logikgeschichtsschreibung des 20. Jahrhunderts gewesen sein mag, auf die Werke dieser drei auch heute noch als bedeutende Logiker geltenden Denker hingewiesen zu haben. In diesem Zusammenhang ist ein kurzer Blick in eines von Scholz' bekanntesten Werken zur Logikgeschichte lohnenswert, d.i. der 1931 fertiggestellte *Abriß* *der Geschichte der Logik* (Scholz, 1959 [1931], nachfolgend: *Abriß*). Darin schreibt er den Beiträgen der zuvor genannten drei Denker eine ganz besondere Rolle in der Entwicklung der modernen formalen Logik zu: so stellt er im §3 des *Abrisses* zur modernen Gestalt der formalen Logik „Leibniz als Schöpfer der Logistik" heraus. Obgleich er nicht müde wird, die herausragende Leistung des Aristoteles zu betonen, so sei es Leibniz, mit dem für die Aristotelische Logik das „Neue Leben" beginnt,

> dessen schönste Manifestation in unsern Tagen die moderne exakte Logik, unter der Form der Logistik, ist. (Scholz, 1959 [1931], S. 48)

Daneben benennt er Bolzano und Frege als die beiden „größten deutschen formalen Logiker[ ] des 19. Jahrhunderts" (Scholz, 1959 [1931], S. 4). Ihr Verdienst bestehe darin, das „Rüstwerk" geschaffen zu haben für eine Interpretation der Aristotelischen Logik, die eben jene als eine *formale* Logik herausstellt, d.h. eine Logik, die sich ausschließlich mit *Formen* beschäftige (Scholz, 1959 [1931], S. 4). Entscheidend ist dabei vor allem die Vorrangstellung, die Scholz den Beiträgen eben jener drei Denker – ausgehend von Aristoteles — im Rahmen der Logikgeschichte zur Entwicklung einer rein „formalen Logik" zuschreibt. Dazu kontrastiert er bspw. die „nicht-formallogisch erweiterte formale Logik" von Port Royal (Scholz, 1959 [1931], S. 12f.) sowie die „formallogisch unterbaute nicht-formale Logik" des 19. Jahrhunderts (Scholz, 1959 [1931], S. 16-18), wie auch die *transzendentale Logik* Kants, die er hier zur „nicht-formalen Logik" rechnet (Scholz, 1959 [1931], S. 13-16). Zentral für seine Logikgeschichtsschreibung ist also der Begriff des „formalen" und damit jede Logik, die sich sinnvoll in eine Linie von Aristoteles hin zur modernen formalen und an der Mathematik orientierten Logik einreihen lassen. Somit wird es verständlich, dass Scholz gerade die Bedeutung von Leibniz, Bolzano und Frege für die Geschichte und Entwicklung hervorhebt, die sämtlich auch Mathematiker waren und deren Denken sich streng an mathematischen Methoden orientierte. Doch anhand der hier ausgewählt zitierten Formulierungen Scholz' deutet sich bereits ein entscheidender Aspekt seiner Geschichtsschreibung an, der bei einer Lektüre seiner Werke Beachtung finden muss: es geht ihm stets um die Entwicklung der Geschichte hin zu einem *formalen* Standpunkt, der in Gestalt der modernen Logik des 20. Jahrhunderts daherkommt. Dabei liegt sein historischer Fokus bei der Untersuchung unterschiedlicher Denker stets auf denjenigen Aspekten, die eine Möglichkeit zur formal-logischen Interpretation bieten. Am Beispiel von Aristoteles gesteht er dieses Vorgehen auch explizit ein (Scholz, 1959 [1931], S. 4), doch auch seine Ausführungen zu Leibniz (Scholz, 1942, S. 217-244) deuten in Richtung einer formallogischen Interpretation, die dessen *philosophische* Ausführungen zudem in eine Richtung auslegen, die hin zu einer als metaphysisch begriffenen formalen Logik führt, welche von Scholz selbst zu allererst selbst in Angriff genommen wurde (auf den Begriff einer ‚Logik' als ‚Metaphysik' wird weiter unten einzugehen sein). In jüngster Zeit zeigte überdies Ingolf Max auf, dass Scholz die Arbeiten Freges so deutete, als würde Frege eine Logik als uninterpretierter Kalkül im Sinne David Hilberts vorschweben (Max, 2025). Es deutet sich damit an, dass Scholz eine gewissermaßen teleologische Logikgeschichtsschreibung verfolgt hat. Vor diesem Hintergrund fragt sich berechtigterweise, ob diese Art der Auslegung sich auch in Scholz' Ausführungen zu Bernard Bolzano nachweisen lassen. Denn diesen benennt Scholz, wie oben angeführt, als den dritten Denker neben Leibniz und Frege, dessen Arbeiten für die Enwticklung jener modernen formalen Logik wegbereitend gewesen seien. Und die Klärung dieser Frage gewinnt umso mehr an Relevanz, je mehr man bedenkt, welche Rolle der Scholz'schen Geschichtsschreibung selbst in der Geschichte zukommt: Diese besteht im wesentlichen zunächst in der Besetzung des ersten Lehrstuhls für mathematische Philosophie im deutschsprachigen Raum, der darauffolgenden Gründung der Gruppe von Münster, die viele bekannte Logiker hervorbrachte und prägte und die weitreichende internationale Kontakte pflegte sowie in der Tatsache, dass die Schule von Münster nach der Flucht ins Exil vieler- und dem Tod einiger Intellektueller während der Zeit des dritten Reiches nach dem Ende des 2. Weltkrieges als einziger Hort für mathematische Philosophie und Logik im gesamten deutschsprachigen Raum verblieben war (Vgl. Peckhaus (2008, S. 81-86) sowie Strobach (2023, S. 329-334)).

Vor diesem Hintergrund ist es selbsterklärend, dass der Scholz'schen Auffassung von der Entwicklung der modernen Logik eine bedeutende Rolle in der Geschichtsschreibung des 20. Jahrhunderts zukommt, da sie gewissermaßen aus einer Monopolstellung heraus tiefgreifenden Einfluss auf die weitere Entwicklung ihres Fachgebiets nehmen konnte und zwar vor allem auch in Hinblick auf ihr zeitgenössisches Selbstverständnis: denn das Selbstverständnis einer Wissenschaft ist stets auch durch eine Reflexion auf die eigene Geschichte geprägt, die in diesem Fall in zentralen Aspekten von Scholz geschrieben und vorangetrieben werden konnte. Es deutet sich damit an, dass für ein vertieftes Verständnis der Logikgeschichtsschreibung im frühen 20. Jahrhundert (und deren Vermächtnis für den zeitgenössischen Standpunkt) eine Untersuchung der Schriften von Scholz vor Allem über die zuvor genannten Philosophen unabdingbar ist. Vorliegender Artikel widmet sich vor diesem Hintergrund den Schriften zu Bolzano. Der Grund, aus welchem hier gerade der ‚Leibniz von Böhmen' ins Zentrum der Untersuchung gestellt werden soll, eröffnet sich im nun folgenden Abschnitt. Dieser widmet sich einem weiteren zentralen Aspekt an Scholz' Auffassung von Logik und ihrer Geschichte, welcher (neben der Monopolstellung im Bereich der Logikgeschichtsschreibung) noch ein inhaltlich und systematisches Alleinstellungsmerkmal darstellt.

3 Logik, Metaphysik und der Wiener Kreis

Im oben bereits mehrfach angeführten Artikel liegt der Fokus auf einer besonders interessanten Facette des Projekts von Scholz und der Schule von Münster. Es sei laut Peckhaus zu verstehen als eine:

> variation of the scientific world view that was based on sources similar to those of Logical Empiricism. (Peckhaus, 2008, S. 78)

Und eben dies ergänzt die enorme historische Relevanz der Scholz'schen Logikgeschichtsschreibung um einen sehr interessanten Punkt: Scholz und seine Schule seien als die deutsche logizistische Bewegung an der Peripherie des logischen Empirismus zu deuten, die sich jedoch in wesentlichen Punkten vom Neopositivismus unterschied (vgl. Peckhaus (2008, S. 79)). Damit wird Scholz, der hier zunächst lediglich als Logikhistoriker in Betracht stand, in die Nähe philosophischer Debatten gerückt, denn der Logische Empirismus des mit dem Begriff der „Wissenschaftlichen Weltauffassung" assoziierten Wiener Kreises ist zwar stets dem Fachgebiet der mathematischen Logik zugewandt gewesen, doch dem Grunde nach als eine philosophische Bewegung zu betrachten. Darüber hinaus wird aus dieser Perspektive der Scholz'schen Logikauffassung eine enorme philosophiehistorische Relevanz zuteil: Insofern diese tatsächlich als eine Variation der ‚Wissenschaftlichen Weltauffassung' verstanden werden darf, so ist sie als eine philosophische Position zu erachten, der ein historisch bedeutsames Alleinstellungsmerkmal zukommt und zwar im Kontext von Debatten über einen inhaltlich-/systematischen Bruch zwischen der durch den logischen Empirismus geprägten Analytischen Philosophie auf der einen- und der kontinentaleuropäischen Tradition auf der anderen Seite. Denn die Entwicklung der analytischen Philosophie geht wie heute gemeinhin anerkannt in ihren Ursprüngen der logische Empirismus voraus. Insofern Scholz sich in gewissen Aspekten an dieses Projekt anlehnt, sich jedoch zugleich in entscheidenden Punkten davon abwendet, befindet er sich nicht nur historisch am Scheideweg dieser Entwicklung, sondern auch inhaltlich-systematisch. Grund genug an dieser Stelle einen vertiefenden Blick auf das Verhältnis von Scholz zum Wiener Kreis, zumal auch auf deren grundlegende Differenzen zu werfen. Zunächst sei hierzu vermerkt, dass die Frage danach, was eigentlich unter der Philosphie des „Wiener Kreises" verstanden werden darf oder welche Autor*innen überhaupt unter dem Schlagwort „Logischer Empirismus" berechtigter Weise angeführt werden können, keineswegs so einfach zu beantworten ist, wie es auf den ersten Blick scheint. Dies offenbart sich exemplarisch einerseits an der keineswegs unumstrittenen Einteilung der „Mitglieder" des Kreises in den Kern und die Peripherie (Stadler, 2015 [1997],

S. 407-609), andererseits aber auch anhand von Debatten über einen sog. *ersten Wiener Kreis* (siehe bspw. Limbeck-Lilienau (2018)).

Noch deutlicher wird diese Problematik bei Betrachtung der Umstände um die Entstehung des sog. *Manifests*, das unter dem Titel „Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis" jene heute etablierten Begrifflichkeiten überhaupt erst in den Diskurs einführte. Es hatte keine offiziellen Verfasser, unterzeichnet wurde es von Otto Neurath (1882-1945), Rudolf Carnap (1891-1970) und Hans Hahn (1879-1934).[1] Es bestimmt den ‚Wiener Kreis' als eine Gruppierung von Wissenschaftler*innen, die sich seit der Berufung von Moritz Schlick nach Wien im Jahr 1922 um den Physiker gebildet hat (siehe Hegselmann (1979, Geleitwort, S. 81) sowie Stadler (2015 [1997], S. 48ff.)). Für den zuvor als loser Gesprächskreis existierenden Personenzirkel beginnt mit der Veröffentlichung des *Manisfests* der Eintritt in seine sog. öffentliche Phase (Stadler, 2015 [1997], S. 65ff.). Es war Moritz Schlick gewidmet, der unumstritten als „Gründer" und „Integrationsfigur" des Kreises gelten darf (Max, Ingolf; Borchers, Raphael; Franke-Reddig, Julia und Bauer, Philipp L. (2022), siehe auch Glassner (2012, S. vii)). Doch er selbst erlangte erst durch die Veröffentlichung des besagten Schriftstücks überhaupt Kenntnis von der Existenz dieses Textes, dessen Positionen er entschlossen als „zu dogmatisch" ablehnte.[2] Daran kristiallisiert sich der Disput heraus, der vor allem zwischen Schlick und Neurath bestand und der zu einer Unterscheidung zwischen dem „linken" und dem „rechten" Flügel des Wiener Kreises Anlass gegeben hat (Damböck, 2013, Nachwort, insb. Anm. 1). Unabhängig davon ob diese Einteilung berechtigt sein mag, verweist sie auf eine eindeutige inhaltliche Differenz, die zwischen Schlick und den (mutmaßlichen) Verfassern des Manifests bestand: während Schlick dem angestrebten „physikalistischen Weltbild" des *Manifests* den Vorwurf des „Dogmatismus" machte und auch in den darauffolgenden Jahren eine ausführliche Kritik an Neuraths und Carnaps Entwurf einer „physikalistischen Einheitssprache" sowie auch eine Kritik am „Konventionalismus" Carnaps veröffentlichte, wurde er selbst v.a. von Neurath als „Metaphysiker" kritisiert (Neurath, 1934). Obgleich Schlick es strikt ablehnte, als solcher deklariert zu werden, spiegelt sich im Disput zwischen Neurath und Schlick auch die Differenz zwischen Scholz und dem Wiener Kreis wieder: Während Schlick von Seiten Neuraths der Vorwurf der ‚Metaphysik' zuteil wurde, entbrannte sich die Kontroverse zwischen Münster und Wien an einer

[1] Bezüglich der Verfasserschaft siehe Friedl (2007, S. 293 Anm. 1)

[2] Vgl. McGuinness (1967, S. 17ff.), siehe auch Friedl (2007, S. 293, Anm. 1). Schlick schrieb am 15. Februar 1930 an Robert Millikan: „Mr Feigl told me he was going to send you a copy of the pamphlet ‚Wissenschaftliche Weltauffassung' which some of my students and friends dedicated to me last fall. The reader of this pamphlet, which was certainly written with the best of intentions, might easily be led to form an incorrect view about our Viennese philosophy. Most of us are not inclined to think of our Circle as a real philosophical ‚school' and are particularly averse to dogmatism of any kind."

divergierenden Auffassung vom Status metaphysischer Sätze: Während das Manifest eine streng „Animetaphysische Weltauffassung" einfordert, erarbeitete Scholz eine *Metaphysik als strenge Wissenschaft* (Scholz, 1941): In dieser Arbeit entwickelt er die Idee von einer Logik als „Identitätstheorie", die letztlich in Gestalt einer Prädikatenlogik erster Stufe daherkommt. Auf Grundlage der Annahmen, dass metaphysische Sätze Aussagen seien, die auf eine eindeutige Art über den Horizont eines physikalischen Satzes hinausgehen, die wenigstens mit dem Genauigkeitsgrad eines physikalischen Satzes formuliert werden können und über deren Gültigkeit man sich in jeder möglichen Welt so verständigen kann, wie über die Wahrheit irgendeiner mathematischen Aussage gelangt er zu dem Resultat, dass es sich bei jener Identitätstheorie um eine Metaphysik handle. Und zwar um eine Metaphysik im Sinne einer *philosophia perennis*, die letztlich auf Leibniz zurückgeht.[3]

Vor diesem Hintergrund beziehe ich mich mit dem Disput zwischen Scholz und dem Wiener Kreis ausdrücklich auf die Herausgeber des Manifests, namentlich Neurath, Carnap und Hahn, da sich die Kritik von Scholz am ‚Wiener Kreis' durchweg auf Positionen bezieht, welche am prominentesten und radikalsten von jenen drei Denkern vertreten wurden. Im klaren Kontrast dazu ist das Verhältnis zwischen Scholz und Schlick zu betrachten: die zwischen den beiden vormaligen Kieler Kollegen bestehende enge freundschaftliche Verbindung ist durch den Briefwechsel der beiden, der heute in der Moritz-Schlick-Forschungsstelle in Rostock bearbeitet wird, gut belegt.[4]

Scholz Argumentation gegen die Philosophie *dieses* Wiener Kreises lässt sich in drei Einwänden zusammenfassen. Diese betreffen deren ablehnende Haltung gegenüber Metaphysik, Ethik und Theologie. Obleich alle drei dieser Einwände naturgemäß in engem Zusammenhang miteinander stehen mögen, lassen sie sich anhand verschiedener Auseinandersetzungen zwischen Scholz und den Zirkelmitgliedern einzeln illustrieren und letztendlich zu einer Gesamtkritik zusammenführen. Doch selbstredend gab es neben diesen Einwänden auch eine Schnittstelle zwischen dem ‚logischen Empirismus' und Scholz, auf die sich Peckhaus mit seiner Formulierung einer„Variation" bezieht und auf die hier zuvörderst einzugehen ist: In einem später verfassten Rückblick erinnerte sich Scholz, der vormals Theologe und Philosoph war, mit den folgenden Worten an das Ereignis, das seine Hinwendung zur Logik und Mathematik veranlasste:

> Nachdem ich hier [in Kiel] meine Religionsphilosophie publiziert hatte,

[3]Vgl. Scholz (1942) sowie v.A. Scholz (1941, insb. die §§7-8)

[4]Zum Verhältnis zwischen Schlick und Scholz vgl. Strobach (2023, S. 336-338) sowie Lemke (2018, S. 225-227).

> entdeckte ich 1921 durch einen Glücksfall auf der Kieler Bibliothek die ‚Principia Mathematica'. Ich sah sofort, daß ich hier das gefunden hatte, was ich so lange vergeblich gesucht hatte. (Zitiert in (Lemke, 2018))

Die „Bemühungen" der Mitglieder des Wiener Kreises „um eine Erneuerung der Logik" unter Bezug auf Russells und Whiteheads epochales Werk dürfte hinlänglich bekannt sein (Hegselmann, 1979, I.1. Vorgeschichte). Auf dieser Basis hat in den 1930er Jahren eine Kooperation zwischen dem Wiener Kreis und der Schule von Münster bestanden, bezeugt bspw. durch Scholz' Teilnahme an der *Zweiten Tagung zur Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften, 5.-7.9.1930 in Königsberg*, dem *Ersten Kongress für Einheit der Wissenschaften in Paris 1935* sowie am *3. Internationalen Kongress für Einheit der Wissenschaften* (Stadler, 2015 [1997], S. 168, 179, 183, 188, 191 sowie 195). Darüber hinaus haben Scholz und seine Schule auch explit Eingang in Neuraths *Enzyklopädie des wissenschaftlichen Empirismus* gefunden, allerdings lediglich durch den nachfolgend zitierten Vermerk:

> Obgleich Scholz mit seinen Mitarbeitern wertvolle Beiträge zur Analyse der Wissenschaften beisteuert, vertritt er dennoch eine voll entwickelte Metaphysik. (Neurath, 1937, Anm. 2)

Und dies führt sogleich zur Beleuchtung des Disputs zwischen den beiden Gruppen: Jener Kommentar ist aus der Perspektive des ‚logischen Empiristen' Neuraths – der, wie oben angeführt, u.A. im *Manifest* jede Form der Metaphysik vehement ablehnte – eindeutig als ablehnendes Urteil zu werten, ähnlich dem gegenüber Schlick geäußerten Metaphysikvorwurf. Und gerade diese „Kritik" wird von der Gegenseite nicht bloß verworfen, sondern gar ins Gegenteil verkehrt, wenn Scholz bspw. unter Bezug auf Carnap schreibt:

> Von der Anwendung der Logistik auf einen nicht-mathematischen Bereich liegt bisher nur eine einzige streng übersehbare Probe vor: in dem Werk von Rudolf Carnap über den logischen Aufbau der Welt 1928. Dieses Werk ist nun zwar in jedem Falle eine höchst respektable Leistung. Es steht in Ansehung seiner Durchdachtheit turmhoch über der philosophischen Durchschnittsliteratur. Aber es führt wenigstens im Vorwort auf machscher Basis, im Namen der wissenschaftlichen Philosophie einen Kampf gegen die Metaphysik, von dem ich hier weit abrücken möchte. [...] jedenfalls kann man aus diesem Buch in einem sehr erheblichen Sinne erlernen, was von der Durcharbeitung eines ernst zu nehmenden philosophischen Standpunktes heute verlangt werden darf. Aber das ist bis heute durchaus nicht entschieden, daß eine

> wissenschaftliche Real-Philosophie nur aus der Verbindung der Logistik mit einem solchen Positivismus gewonnen werden kann. (Scholz, 1959 [1931], S. 64)

Und dies verdeutlicht sehr anschaulich zugleich Scholz' Hinwendung zum Projekt der Anwendung von Logik auf nicht-mathematische Bereiche (möglicherweise im Sinne einer ‚wissenschaftlichen Weltauffassung') bei gleichzeitiger Ablehnung der Ausführung desselben durch die Mitglieder des ‚Wiener Kreises' auf Basis einer antimetaphysischen Haltung im Sinne Ernst Machs. [5] Sein oben bereits angeführtes Werk zur *Metaphysik als strenger Wissenschaft* mag vor diesem Hintergrund als Gegenentwurf verstanden werden, der eben jenem Aspekt Rechnung trägt. Sein erster Einwand gegen den ‚logischen Empirismus' wäre damit klar hervorgehoben: die Überzeugung, dass ein „Logistiker nicht zugleich Metaphysiker sein kann" ist abzulehnen (Scholz, 1959 [1931], S. 65).

Ein zweiter Einwand beleuchtet wiederum seine wohlwollende Einstellung gegenüber Schlick: in einer Rezension der Zeitschrift *Erkenntnis*[6] distanziert er sich, wie auch Strobach beleuchtet (Strobach, 2023, S. 335f.) – mit einem neuerlichen Vermerk bezüglich der Haltung zur Metaphysik – ausdrücklich vom Programm des Wiener Kreises und übt eine zugegebenermaßen sehr knapp ausgefallene und doch zugleich sehr harsche Kritik daran (vgl. *Deutsche Literaturzeitung* 1931 (September 1931) zitiert in Strobach (2023, S. 335-336)): so bezeichnete er den „Erfahrungsbegriff" des ‚Logischen Empirismus' als ‚naiv' und dessen ‚Kampf' gegen das ‚Apriori' als widersprüchlich. Doch bemerkenswert ist besonders sein in diesem Kontext vorgebrachter Kommentar zu Schlick: dass dieser „ein Buch über Ethik geschrieben habe" widerspreche „dem Programm des Logischen Empirismus" (zitiert in Strobach (2023, S. 336)). In der Tat ist Schlick zu jener Zeit das einzige zum ‚Kern' des Kreises zählende Mitglied, das mit den *Fragen der Ethik* (Schlick, 1930) eine ethische Abhandlung in den *Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung* publiziert hatte. In einem auf den 16. Februar 1931 datierten Brief an Schlick urteilt Scholz nach der Lektüre seiner „schöne[n] Ethik", Schlick habe „die erste hochwertige Ethik des natürlichen und anständigen Menschen geschrieben".[7] Dies offenbart, welch großen Wert Scholz auch im Rahmen des Projektes einer

[5] Dass Mach nicht lediglich aus formalen Gründen Namensgeber des Vereins wurde, den die Mitglieder des Kreises als weiteres Organ zur Verbreitung der ‚Wissenschaftlichen Weltauffassung' nutzten, wird beleuchtet in Stadler (2021) sowie auch in Franke-Reddig (2024)

[6] Die *Annalen der Philosophie* erschienen ab 1930 unter neu beginnender Zählung, herausgegeben von Rudolf Carnap und Hans Reichenbach „Im Auftrage der Gesellschaft für wissenschaftliche Philosophie in Berlin und des Vereins Ernst Mach in Wien" unter dem Titel *Erkenntnis*. Die Zeitschrift diente fortan als Publikationsorgan der Vertreter einer ‚wissenschaftlichen Weltauffassung'.

[7] Heinrich Scholz an Moritz Schlick am 16. Februar 1931

‚wissenschaftlichen Philosophie‘ auf eine Auseinandersetzung mit ethischen Fragestellungen legte. Scholz’ zweiter Einwand gegen die Philosophie des Wiener Kreises betrifft folglich die (vorgeblich)[8] ablehnende Haltung gegenüber einer Auseinandersetzung mit ethischen Fragestellungen auf der Basis einer ‚wissenschaftlichen Philosophie‘ im Sinne des Wiener Kreises, m.a.W. formuliert, besteht sein Einwand darin, dass Ethik stets einen Platz im Rahmen einer ‚wissenschaftlichen Weltauffassung‘ haben müsse.

Um auf Scholz’ dritten Einwand gegen den Wiener Kreis einzugehen, sei darauf verwiesen, dass das *Manifest* von „wissenschaftlicher Philosophie“ nicht lediglich eine antimetaphysische Haltung einforderte, sondern darüber hinaus zugleich auch an mehreren Stellen eine Abkehr von der Theologie (Hegselmann, 1979).[9] Gerade dies mag für Scholz, der seineszeichens nicht bloß als Mathematiker und Philosoph, sondern zunächst und auch Zeit seines Lebens als publizierender Theologe agiert hat, den tiefgreifensten Grund für seine Ablehnung der Philosophie des Wiener Kreises geliefert haben.[10] Dieser Eindruck erhärtet sich unter Rücksicht auf ein im Jahr 1991 mit Karl Popper geführtes und von Friedrich Stadler und in seinen Studien zum Wiener Kreis abgedrucktes Interview. Darin bezeichnet Popper den „sehr guten Logiker“ Scholz als einen „professionellen Christen“ (Stadler, 2015 [1997], S. 279). Dass dies eine ablehnende Haltung ausdrückt, erhellt sich durch den Kontext, der erneut im Zusammenhang mit Schlick steht, diesmal in einem tragischen: als die Teilnehmer an einem von Neurath veranstalteten Kongress von der Ermordung Schlicks durch seinen ehemaligen Studenten Johann Nelböck erfuhren, soll Scholz — nach Poppers Worten — geäußert haben „das kommt davon“. Auf die Frage, was Scholz damit gemeint haben könne, äußert Popper sinngemäß, dass jener dies als Strafe „für die Gottlosigkeit“ — womöglich für die im Wiener Kreis vertretene Philosophie — erachtet haben mag (Stadler, 2015 [1997], S. 279). Ob die Erinnerung des zu diesem Zeitpunkt 88 -jährigen Popper faktengetreu und die Scholz in den darauffolgenden Zeilen in die Nähe der antijüdischen Argumentation der *Katholischen Wochenzeitung*[11] rückende Argumentation gerechtfertigt

[8] Das verbreitete Bild des Wiener Kreises, nachdem die Mitglieder jeglicher Auseinandersetzung mit ethischen Fragestellungen grundlegend ablehnend gegenüberstanden, gilt heute als überholt. Neben umfangreichen Publikationen zur politischen Dimension des Wiener Kreises findet sich eine umfassende Rekonstruktion der ethischen Positionen seiner einzelen Mitglieder in Siegetsleitner (2014)

[9] Siehe insb. die Abschnitte *I.1 Vorgeschichte*, *II. Wissenschaftliche Weltauffassung* sowie *IV. Rückblick und Ausblick*

[10] Zum selben Urteil gelangt auch Strobach (2023, 9. Carnap und Scholz, S. 345ff.).

[11] Diese Wochenzeitung hatte schon in der Zeit vor Schlicks Ermordung gegen den Wiener Kreis polemisiert. Auf einige „zu lobende Nachrufe“ in Folge seiner Ermordung reagierte das Blatt mit einem Artikel, der Schlick dagegen selbst die Schuld an seiner eigenen Ermordung zuschrieb. Hierfür bediente sie sich antisemitischer Stereotype: die von dem Philosophen in seinen Vorlesungen vertertene Philosophie sei zu logisch, zu mathematisch und damit zu jüdisch

ist, ist sicherlich anfechtbar (vgl. hierzu auch Strobach (2023, S. 343)). Doch es offenbart, dass Scholz durch die Mitglieder des Wiener Kreises — dessen Peripherie hier durch Popper vertreten wird — als jemand wahrgenommen wurde, der der im Manifest vertretenen Antitheologischen Haltung klar entgegenstand, und dies mag nicht unbegründet gewesen sein. So argumentiert auch Strobach, dass Scholz vom im „Manifest“ angeführten „Feindbild“ getroffen war (vgl. hierzu auch Strobach (2023, 9. Carnap und Scholz, S. 345ff.)). Obgleich nicht von einer offenen Feindschaft zwischen Scholz und dem Wiener Kreis die Rede sein kann, beläuft sich doch sein dritter Einwand gegen die ‚wissenschaftliche Weltauffassung‘ auf die durch den Wiener Kreis offen vorgetragene Kritik an der Theologie: ihr müsse, wie auch der Ethik und Metaphysik, ein Platz im Weltbild eingeräumt werden.

Scholz’ Einwände gegen diese Form des ‚logischen Empirismus‘, der sowohl im *Manifest* als auch in späteren Schriften von vor allem Carnap und Neurath als ‚wissenschaftliche Weltauffassung‘ vertreten wird, bringt er 1943 in einem Rückblick auf „die verflossene Wiener Schule“[12] auf einen Punkt. Er warnt davor,

> zu sagen, dass alles, was in unserer Welt von einer gewissen Kalkülforschung verschieden ist, in den Bereich der Lyrik fällt oder in den Abgrund, über welchem geschrieben steht: ‘Viel Lärm um Nichts’.

Eine solche „Seelenblindheit“ würde schlussendlich in „Barbarei“ münden und dürfe der Schule von Münster nicht zugeschrieben werden. Dagegen fordert er:

> Es wird und soll und muss neben der philosophischen Grundlagenforschung, für welche die Schule von Münster sich einsetzt, eine zweite philosophische Grundlagenforschung geben, die da einspringt, wo unserer Werkstatt die Grenzen gezogen sind, die sie auf eine ehrliche Art in einem übersehbaren Zeitraum nicht überschreiten wird.

An dieser Formulierung fällt zunächst ein besonderer Punkt auf: Scholz bezeichnet diejenige Grundlagenforschung, mit der sich die Schule von Münster beschäftigt, d.i. die „Kalkülforschung“ bzw. die moderne formale Logik, hier als eine *philosophische*. Dies bestätigt zum einen die von Peckhaus ins Spiel gebrachte und hier näher ausgeführte Auffassung, dass Scholz’ logisches Projekt in Anlehnung an den

gewesen, was den Studenten in den Wahnsinn getrieben habe. Zugleich wird darin betont, dass Schlick viele enge Kontakte zu jüdischen Wissenschaftlern gehabt habe, u.A. wird sein Assistent Friedrich Waismann angeführt, um ihn in einer durch Antisemitismus geprägten Zeit in ein negatives Licht zu rücken. (Stadler, 2015 [1997], Dokumentation: Zur Ermordung von Moritz Schlick, S. 615-646)

[12] Die Ermordung Schlicks, auf die in den darauffolgenden Jahren die Flucht der meisten Mitglieder des Wiener Kreise sowie der „Anschluss Österreichs“ folgte, markiert gemeinhin anerkannt das Ende des Wiener Kreises.

‚logischen Empirismus' auch als ein philosophisches Anliegen betrachtet werden kann. Zum anderen verdeutlicht sich hierdurch, dass für Scholz die ‚Logik' als ein philosophisches und nicht ein rein mathematisches Fachgebiet angesehen wird. In diesem Sinne kann seine Logikgeschichtsschreibung *auch* als eine Philosophiegeschichte betrachtet werden, was letztlich unter Bezug auf Autoren wie Aristoteles, Leibniz und Bolzano besonders sinnvoll erscheint, da diese ihre „logischen" Projekte im Rahmen philosophischer Ausführungen verfolgten.

Desweiteren kulminieren in den soeben zitierten Worten Scholz' Einwände gegen den ‚logischen Empirismus' welche die Ablehnung von Metaphysik, Ethik und Theologie betreffen. Eben deshalb, weil mit der geforderten „philosophische[n] Grundlagenforschung [...] die da einspringt", wo die Grenzen der Grundlagenforschung der Schule von Münster liegen, zweifelsohne nichts anderes gemeint sein kann, als philosophische Disziplinen, die jenseits der „Kalkülforschung" liegen. Und das sind namentlich bspw. Disziplinen wie die Metaphysik, die Ethik und eben auch die Theologie — nicht ohne Grund überschrieb Scholz die hier zitierten „Axiome" als „*Glaubens*artikel".[13]

Daran zeigt sich eindrucksvoll auf, inwiefern gerade die Betrachtung von Scholz — wie oben angesprochen — im Kontext von Fragen um die Ursprünge zeitgenössischer Philosophie aufschlussreich sein kann: zum einen liegt eine klare Anlehnung an das Projekt zur Etablierung einer wissenschaftlichen Philosophie vor, zugleich jedoch auch die konsequente Ablehnung des auch als ‚reduktionistisch' bezeichneten Standpunkts des ‚logischen Empirismus', was ihn in eine systematische Sonderstellung am Ursprung der zeitgenössischen analystischen Philosophie bringt. Vor den hier offengelegten historischen Hintergründen lässt sich nun auch aufzeigen, warum in diesem Zusammenhang gerade die Auseinandersetzung von Scholz' Schriften über Bolzano in den Fordergrund gerückt werden sollte, womit sich der nächste Abschnitt befassen wird.

4 Bolzanos Wissenschaftslehre

Ein Grund vor dem Hintergrund der vorangegangenen Ausführungen gerade Scholz' Arbeiten über Bolzano in den Blick zu nehmen, liegt natürlich darin, dass dieser sowohl in Münster als auch in Wien als eine zentrale historische Figur betrachtet wurde. Wie Stadler im Prolog seiner *Studien zum Wiener Kreis* bemerkt, steht am „Beginn wissenschaftlicher Philosophie in der Habsburger-Monarchie [...] ohne Zweifel der Prager Volksbildner, Philosoph, Mathematiker und Theologe *Bernard*

[13] Ein nicht unwesentliches Detail, auf das mich Gregor Nickel aufmerksam machte.

Bolzano." Dem im *Manifest* formulierten Selbstverständnis nach sahen sich die Mitglieder des Kreises u.A. in der Tradition Bolzanos, dessen *Paradoxien des Unendlichen* von Hans Hahn 1921 neu herausgegeben wurden, der die Auseinandersetzung mit dem „böhmischen Leibniz"(Stadler, 2015 [1997], S. XV) im Wien der 1920er Jahre beförderte. Zugleich liegt auch bei Scholz eine intensive Auseinandersetzung mit Bolzano vor. Wie zuvor angeführt, benennt er in seiner Logikgeschichte Leibniz, Bolzano und Frege – ausgehend von Aristoteles – als die wichtigsten Logiker im Rahmen der Enwticklung hin zum modernen Standpunkt der formalen Logik und legt Arbeiten zu allen genannten Denkern vor. Doch gerade Bolzano sticht an dieser Stelle klar hervor: wie bereits angeführt, sei dieser laut Scholz einer der Wegbereiter gewesen, die das „Rüstzeug" für den Weg zur modernen formalen Logik geschaffen haben. Doch in diesem Zusammenhang scheint eines fraglich: da viele von Bolzanos Ideen erst posthum eine größere Bekanntheit erlangten und zum Teil erst nachträglich entdeckt wurde, dass er bestimmte Entwicklungen in Logik und Mathematik in seinen Werken vorweggenommen hat, bevor diese von späteren Denkern unabhängig von Bolzano gewissermaßen " neu" entdeckt wurden,[14] lässt sich zwar behaupten, dass Bolzano unterschiedliche Entwicklungen in Mathematik und Logik antizipiert hat (vgl. Stadler (2015 [1997], S. XV)), doch kann in diesem Zusammenhang nicht von einem tiefergehenden Einfluss auf jene Entwicklungen die Rede sein. Aus welchem Grund also spielt Bolzano für Scholz in der Geschichte eine so große Rolle, wenn er doch selbst vermerkt, dass diesem seinerzeit nicht einmal das Glück zuteil wurde, gelesen zu werden? (Scholz, 1959 [1931], S. 46) Der Schlüssel zum Verständnis dafür, liegt m.E. einerseits in einer persönlichen Identifikation mit Bolzano, denn beide Denker teilten das Schicksal, zugleich Mathematiker, Philosoph und Theologe gewesen zu sein. Und in diesem Kontext spielt wiederum der Wiener Kreis eine Rolle. Denn wie hier argumentiert wurde, liegt der entscheidende Kontrapunkt zwischen dem Wiener Kreis und Scholz in der Ablehnung von ethischen, theologischen und metaphysischen Ambitionen durch Ersteren. Die Divergenz zwischen Münster und Wien besteht folglich in einer Positionierung zu primär philosophischen Fragestellungen und möglicherweise deshalb wird Bolzano für Scholz so interessant. Denn er erklärt, dass die „wissenschaftliche Hauptleistung" des zumeist als Mathematiker bekannten Bolzanos eine „philosophische Leistung" gewesen sei, die sich in der 1837 veröffentlichten *Wissenschaftslehre* darbietet (Bolzano, Neuausgabe 1985-2000 [1837]).

Mit Blick auf die Konzeption einer wissenschaftlichen Philosophie, ein Anliegen das Scholz wie hier dargelegt wurde, mit dem ‚logischen Empirismus' zu teilen

[14]Beispiele hierfür liefern u.A. der Satz von Bolzano-Weierstraß, die später von Alfred Tarski unabhängig formulierte Folgebeziehung, das Cauchysche Konvergenzkriterium sowie auch die Vorwegnahme der Arbeiten Dedekinds in Bolzanos *Paradoxien des Unendlichen*.

schien, sollen im Folgenden Scholz' Ausführungen über diese philosophische Leistung Bolzanos exemplarisch anhand von Scholz' *Jahrhundertbetrachtung* analysiert werden. Dies kann in diesem Rahmen nur andeutungsweise geschehen, d.h. die nun folgenden Ausführungen stellen nur einen ersten Annäherungsversuch an die Thematik dar, die sich zunächst auf die grundlegenden Äußerungen von Scholz über Bolzanos Werk fokussiert. Damit sollen hier zunächst die Rahmenbedingungen für vertiefende Untersuchungen zu dieser Thematik abgesteckt und zugleich die Relevanz einer weiteren Exegese der Werke von Bolzano vor dem Hintergrund von Scholz Ausführungen verdeutlicht werden.

In diesem Zusammenhang ist ein Bericht aus dem Wintersemester 1936/37 höchst bemerkenswert: Die Semester-Berichte „Zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule" erschienen am Mathematischen Seminar in Münster einmal je Semester. Im Wintersemester 1936/37 war einer dieser Berichte von Scholz eine Bolzano gewidmete „Jahrhundertbetrachtung" (Scholz, 1936/37). Sinn und Zweck dieser Betrachtung sei, wie Scholz zu Beginn ausführt, nicht eine würdigende Darstellung von Bolzanos Leistungen, durch welche der Name einem jeden Mathematikstudenten im Zusammenhang mit Weierstrass oder Cauchy hinlänglich bekannt sein dürfte, sondern eine Betrachtung seiner philosophischen Hauptleistung, die mit der zu diesem Zeitpunkt vor 100 Jahren erstmals veröffentlichten *Wissenschaftslehre* vorgelegt wurde (Bolzano, Neuausgabe 1985-2000 [1837], S. 3). Und diese solle — so Scholz — in keiner Schulbibliothek fehlen,

> denn diese W[issenschafts]L[ehre] ist das einzige Werk von diesem Alter, dessen Studium einen Mathematiker mit irgendeinem von Null verschiedenen und positiven Anteil an logischen oder wissenschaftstheoretischen Fragen nach meinem Urteil noch heute dringend empfohlen werden kann. Jedenfalls dann, wenn er nicht in der Lage ist, sich in die grundlegenden Arbeiten der neueren exakten WL mit dem jetzt unentbehrlich gewordenen logistischen Rüstzeug hineinzulesen. (Scholz, 1936/37, S. 3)

Diese Textstelle offenbart erneut etwas zuvor bereits Angedeutetes: zunächst spricht Scholz explizit vom *philosophischen* Werk Bolzanos, nur um dann wenige Zeilen später dazu überzugehen, sie dem *Mathematiker* zu empfehlen. Und zwar nicht in dem Sinne, dass er es einem jungen Mathematikstudenten nahelegen würde, sich mit philosophischen Fragestellungen abseits seines mathematischen Fachgebiets zu beschäftigen — im Gegenteil stellt er Bolzanos Wissenschaftslehre der „neueren exakten WL", für die ein logistisches Werkzeug „unentbehrlich" sei, als inhaltlich gleichwertig gegenüber. M.a.W., die Wissenschaftslehre, die auch von Scholz explizit als ein philosophisches Vorhaben bezeichnet wird, bedarf der modernen

Logik: der an logischen *oder* wissenschaftstheoretischen Fragen interessierte Mathematiker solle sich Bolzanos Wissenschaftslehre, seinem *philosophischen* Hauptwerk, zuwenden. Ist dies ein Bezug auf das Vorhaben des Wiener Kreises, eine ‚wissenschaftliche Weltauffassung' zu etablieren? Insbesondere die darauffolgende Passage ist in diesem Zusammenhang interessant. Sie stellt eine kurze Kritik an der Fichte'schen Wissenschaftslehre dar. Fichte habe zur „Realisierung" einer Wissenschaftslehre nichts beigetragen, sein einziges Verdienst erschöpfe sich bereits in der Erschaffung des Namens einer ‚Wissenschaftslehre' (Scholz, 1936/37, S. 4f.). Doch was eine Fichte'sche Wissenschaftlehre ausmachen würde, sei sie denn realisiert, wäre wesentlich identisch mit einer „Mathesis universalis" im Leibniz'schen Sinne und d.i., so Scholz, „die Einheitswissenschaft' (Scholz, 1936/37, S. 4). Der Bezug zum im *Manifest* beschriebenen Vorhaben besteht hier nicht lediglich in der Beziehung auf Leibniz, die sich auch im Wiener Kreis findet, sondern in der expliziten Verwendung des deutschen Ausdrucks „Einheitswissenschaft", der sich so in vielen Publikationen der Mitglieder des Kreises wiederfindet und dessen Verwendung erst durch diese prominent geworden ist.[15] Diese beiden Aspekte stellen Indizien dar, die m.E darauf hindeuten, dass Scholz das Vorhaben der modernen ‚Logik' eben nicht lediglich als ein mathematisches oder rein logisches Unterfangen, sondern stets auch als ein philosophisches begreift und zwar als eines, das eine *Lehre* von der *Wissenschaft* zum Ziel hat. In diesem Sinne spiegelt sich auch hier seine Anlehnung an das Vorhaben einer ‚wissenschaftlichen Weltauffassung' wieder. Doch was hat nach Scholz' Auffassung Bolzano zu diesem Projekt beigetragen? Denn insofern ein Mathematikstudent, der das Rüstzeug der Logistik noch nicht besitzt, sich statt mit der modernen exakten Wissenschaftslehre ebensogut mit Bolzanos Werk zur Einführung in die Logik begnügen kann, so muss dessen Wissenschaftslehre irgendeinen nennenswerten Beitrag zu diesem Vorhaben geliefert haben. Und dieser besteht laut der *Jahrhundertbetrachtung* eben darin, als erster eine Wissenschaftslehre vorgelegt zu haben, die diesen Namen überhaupt verdiene (Scholz, 1936/37, S. 5). Auf den darauffolgenden Seiten geht Scholz sehr gründlich der Frage nach, was eine Wissenschaft im Sinne Bolzanos sei. Und er tut dies, für ihn typisch, auf eine sehr moderne streng logische Weise. Letztlich läuft die Bestimmung einer „Wissenschaftslehre im Sinne Bolzanos" hier auf insgesamt vier Definitionen hinaus, die Scholz einzeln herausarbeitet und erläutert. Da er sich vor allem mit der ersten intensiv auseinandersetzt, möchte ich im Folgenden seine Ausführungen hierzu ausführlicher darstellen. Sie lautet in der zunächst von Scholz vorgestellten Formulierung folgendermaßen:

[15] Siehe die Beiträge in *Erkenntnis* Vol. 1-7 (1930-1937).

> D1,1: M ist eine Wissenschaft $=_{Df}$ M ist ein Wahrheitskomplex und die Menge der uns zur Zeit bekannten Wahrheiten, die zu M gehören, ist eine eines Lehrbuchs würdige Wahrheitsmenge.
>
> (Scholz, 1959 [1931], S. 5-6)

Doch Scholz findet an dieser Formulierung sofort ein Problem. Sie sei nicht hinreichend, um eine Wissenschaft im Sinne Bolzanos zu definieren. Hierzu bedürfe es noch einer Ergänzung. Denn bei genauer Betrachtung des definiens zeige sich, dass dieser mit der Formulierung „zur Zeit" eine freie Zeitraumsvariable T impliziere. Eine korrekte Definition verlange es jedoch, „dass jede im definiens autretende freie Variable auch im definiendum auftritt" (Scholz, 1936/37, S. 10). Dies sei das „kritisch bemerkenswerte" an Bolzanos Wissenschaftsbegriff:

> Bolzano hat die Bedeutung des Ausdrucks „Wissenschaft" durch seine Interpretation dieses Ausdrucks so eigentümlich relativiert, dass wir aus dieser Relativierung eine Folgerung zu ziehen haben, die dem Scharfsinn Bolzanos entgangen ist. (Scholz, 1936/37, S. 10)

Auf Grundlage dieser Definition erlaubt Scholz sich nun eine Erweiterung der Definition D1,1 zu:

> D1,1: M ist eine Wissenschaft in T $=_{Df}$ M ist ein Wahrheitskomplex von der Art, dass die Menge der in T bekannten Wahrheiten, die zu M gehören, nach dem Urteil der Elemente, die zu α gehören, eine des Lehrbuchs würdige Wahrheitsmenge ist.
>
> (Scholz, 1959 [1931], Vgl. zur Erweiterung des definiens S. 10, zur Erweiterung des definiendum S. 11)

Neben dieser kritischen Bemerkung äußert Scholz, sei Bolzanos Wissenschaftsbegriff sowohl psychologisch als auch sachlich bemerkenswert. Als „psychologisch" bezeichnet er dessen Einschränkung auf „Wahrheitskomplexe", die eines Lehrbuchs würdig sind bzw. „es verdienen, in einem eigenen Buche so fasslich und überzeugungskräftig wie möglich dargestellt zu werden." (Scholz, 1936/37, S. 8)Jenem Auswahlprinzip komme höchste praktische Bedeutung zu, denn es nehme Rücksicht auf den wesentlich psychologischen Faktor bei der Konstitution des Wissenschaftsbegriffs und komme damit dem Wissenschaftsbegriff „des inhaltlichen Denkens" so nah wie möglich (Scholz, 1936/37, S. 9). Dagegen sei es „sachlich" bemerkenswert, dass die Unterscheidung zwischen einem „Wahrheitskomplex und einem seiner Darstellungen" bei dieser Konstitution brücksichtigt werde (Scholz, 1936/37, S. 6). Diese fundamentale Unterscheidung sei von Bolzano als erstem nicht übersehen und in seinen Wissenschaftsbegriff von Beginn an implementiert worden (Scholz, 1936/37, S. 7).

Darin besteht laut Scholz von Bolzano selbst herrührende erste Relativierung des Wissenschaftsbegriffs. Doch trotz des großen Lobes, das Scholz für Bolzanos Interpretation des Wissenschaftsbegriffes hat, sei die erste Relativierung noch nicht ausreichend, um den Begriff einer Wissenschaft hinreichend zu bestimmen. Es bedürfe noch einer zweiten Relativierung und bei dieser handle es sich um eine natürliche Fortsetzung der von Bolzano selbst herrührenden Relativierung und sie sei dadurch gerechtfertigt, dass sie etwas zum Ausdruck bringe, was dieser selbst an anderer Stelle gegen Kant hervorgebracht habe:

> Bolzano hat nämlich sich gegen Kant ausdrücklich dafür eingesetzt, dass man der Lehre von der Zeit, obschon sie verhältnismässig wahrheitsarm ist, nicht vorenthält, was man der Lehre vom Raum, also der Geometrie, seit Platon unwidersprochen zugebilligt hat: dass sie eine Wissenschaft zu heißen verdient (WL IV §412). (Scholz, 1936/37, S. 11)

Wie hängt dies mit der Definition einer Wissenschaft im Sinne Bolzanos zusammen? Scholz beruft sich mit diesem Beispiel darauf, dass nicht lediglich zu verschiedenen Zeiten, sondern auch von verschiedenen Menschen unterschiedlich beurteilt wird, was als eine Wissenschaft zu bezeichnen ist und was nicht (Scholz, 1936/37, S. 12). Daraus folgert er, dass Bolzanos Definition einer Wissenschaft auf die folgende Weise erweitert werden müsse:

D1,1

Diese zunächst neutral vorgetragene Darstellung von Scholz' Ausführungen über Bolzano bedarf an dieser Stelle einer letzten Ergänzung, bevor sie abschließend kritisch beleuchtet werden kann.

In den o.g. Definitionen taucht der Ausdruck „Wahrheitskomplex“ auf. Darunter versteht Scholz eine sog. Wahrheitsmenge von bestimmter Art:

> Wir denken uns die Menge aller Wahrheiten in Teilmengen zerlegt, sodass jede Teilmenge eine Menge ist, der alle und nur die Wahrheiten angehören, zu denen eine Frage existiert von der Art, dass sie als Antworten auf diese Frage interpretiert werden können. (Scholz, 1936/37, S. 5)

Scholz selbst merkt an, dass der Ausdruck „Wahrheitskomplex“ in der Form nicht bei Bolzano zu finden sei. Er gebe jedoch genau wieder, was er in den §§409-427 und insb. in §421 und §425 über das „Auswahlprinzip für die Konstituierung von wissenschaftserzeugenden Wahrheitsmengen“ gesagt habe (Scholz, 1936/37, S. 6).

Darin zeigt sich etwas für Scholz sehr typisches, das oben bereits angeführt wurde: seine Ausführungen, obgleich historischer Natur, sind keineswegs werkgetreu zu verstehen. Dies zeigt sich hier insb. in der Einführung des Begriffs der„Wahrheitskomplexe“, der im Prinzip eine Verkürzung oder, wie Scholz es selbst an diversen Stellen zum Ausdruck bringt, eine abkürzende Sprechweise darstellen. Sicherlich ist an dieser Stelle die Frage angebracht, ob die von Scholz eingeführten Wahrheitskomplexe tatsächlich völlig unverfälscht wiedergeben und ob nicht in dieser Darstellung etwas verloren gegangen ist. Dies betrifft hier nicht nur den Begriff der Wahrheitskomplexe, sondern auch die von Scholz unter Bezug auf Bolzanos Ausführungen gegen Kant gerechtfertigte zweite Relativierung des Wissenschaftsbegriffs sowie auch schon die in der ersten Relativierung vorgenommene Einführung einer Variable im definiens: dies mag vom logistischen Standpunkt des 20. Jahrhunderts, aus der Perspektive der modernen formalen Logik gesehen, völlig richtig sein. Die Frage ist jedoch, ob die Perspektive Bolzanos deshalb tatsächlich falsch sein muss, denn diese geht eben von einem völlig anderen Standpunkt aus. Dieser andere Standpunkt ist historisch und entwicklungsgeschichtlich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu verorten. Allerdings ließe sich diesbezüglich, um eine Fehlinterpretation Bolzanos durch Scholz auszuschließen, eine werkhistorische Exegese der von Scholz angeführten Paragraphen aus der Wissenschaftslehre sowie seiner Ausführungen zu Kant durchführen, um auf dieser Grundlage einen tiefgehenden inhaltlich-systematischen Abgleich mit der Scholz’schen Darstellung durchzuführen. Doch all dies würde lediglich dazu führen, festzustellen, ob die Darstellung Bolzanos durch Scholz die Ausführungen des „Leibniz von Böhmen“ adäquat wiedergibt. Wäre dies der Fall, so würde eine inhaltliche Auseinandersetzung mit Scholz’ Arbeiten über diesen gänzlich uninteressant werden. Denn insofern es das Ziel wäre, nur „Bolzano“ zu verstehen, würde es sich anbieten, diesen selbst zu lesen. Dass Scholz’ Ausführungen möglicherweise gerade nicht darum bemüht sind, die Inhalte der Wissenschaftslehre völlig unverfälscht abzubilden, macht seine Darstellungen gerade deswegen erst relevant: es scheint, als würde Scholz mit seinen Darlegungen ein gewisses Ziel verfolgen. Dieses besteht zum einen darin, die Geschichte der Logik als eine Enwticklung ausgehend von Aristoteles bis hin zum modernen Standpunkt der modernen Logik zu verstehen. Dies bezeugt schon seine Darstellung der „Aristotelischen Logik“[16] als *formale* Logik über seine hier

[16]Man bemerke er spricht an dieser Stelle explizit von *Logik* und nicht von *Syllogistik*.

besprochene zum Teil möglicherweise verkürzte oder gar verfälschte Darstellung Bolzanos hin zu seiner allgemeinen Methode zur Analyse klassischer Texte mit den Mitteln der modernen formalen Logik (vgl. hierzu Peckhaus (2008, S. 84)).

Doch noch viel relevanter scheint mir an dieser Stelle der zweite Aspekt: Scholz fokussiert sich bei Bolzano auf diejenigen Inhalte, die er als philosophisch erachtet und das sind gerade diejenigen, die in der „Jahrhundertbetrachtung zur Bestimmung des Wissenschaftsbegriffs beleuchtet werden. Das hier eine Verbindung zum Anliegen des Wiener Kreises eine wissenschaftliche Weltauffassung zu etablieren besteht, erscheint mir schlüssig. Da Scholz dieses Vorhaben zugleich in Abgrenzung zum Wiener Kreis in Form einer „Metaphysik“ der Wissenschaft wenige Jahre später publizierte, lässt sich an dieser Stelle die abschließende Hypothese aufstellen, dass Scholz' Darstellung von Bolzano letztlich darauf ausgelegt ist, den Aufbau dieses Projekts zu unterstützen. Ein weiteres Indiz hierfür liefert Scholz' Vermerk über Carnaps *Logische Syntax der Sprache* zum Ende der Jahrhundertbetrachtung: Bolzanos Ausführungen zur Folgebeziehung seien dem vorzuziehen (Scholz, 1936/37, S. 52). Sollte diese Hypothese sich bestätigen, so ließen sich vor dem Hintergrund der hier erörterten Sonderstellungen, die Scholz in der Geschichte der Logik und Philosophie des 20. Jahrhunderts einnahm, relevante Rückschlüsse ziehen über die Ursprünge zeitgenössischer analytischer Philosophie.

5 Fazit und Ausblick

Auf den vorangegangenen Seiten wurde zunächst in Abschnitt 1 die historische Relevanz von Scholz für die Logik- und Philosophiegeschichte erörtert. Darauffolgend wurde im 2. Abschnitt ergänzend zur historischen die besondere inhaltlich-systematische Stellung in der Geschichte der Philosophie des frühen 20. Jahrhunderts beleuchtet. Dies beinhaltete eine ausführliche Auseinandersetzung mit dem Verhältnis von Scholz und dem Wiener Kreis. Im abschließenden Abschnitt wurde vor den historischen Hintergründen dafür argumentiert, insbesondere Scholz' Interpretation von Bolzanos Wissenschaftslehre philosophiehistorisch zu analysieren. Ein Abriss dieser Analyse wurde abschließend gegeben, um die Hypothese aufzustellen, dass Scholz sein Vorhaben der Etablierung einer „Metaphysik als strenger Wissenschaft“ als in der Tradition Bolzanos stehend erachtet. Insofern ist seine Geschichtsschreibung auf den entwicklungsgeschichtlichen Weg hin zu diesem Punkt gelenkt. Selbstredend kann die Darstellung eines jeden Historikers zu jederzeit in dieser Weise als eine teleologische betrachtet werden und ist als solche auch niemals unhinterfragt zu übernehmen. Allerdings ist Scholz' Blick auf die Logik- bzw.

Philosophiegeschichte einerseits auf den Weg hin zur modernen Logik gerichtet, andererseits fokussiert er sich, gerade Bolzano betreffend, auf denjenigen Part, den er selbst als philosophisch erachtet (Abschnitt 3) und der sich, wie hier dargestellt wurde, in Beziehung zum Vorhaben des Wiener Kreises setzen lässt und damit auch, unter Rücksicht auf meine Argumentation in Abschnitt 2, auf sein eigenes möglicherweise daran angelehntes Projekt einer „Metaphysik als Wissenschaft“. Insofern Scholz, wie in Abschnitt 1 dargelegt, eine historisch interessante Figur am Übergang von der kontinentaleuropäischen Tradition zur analytischen Philosophie des 20. Jahhunderts ist, macht ihn dies zu einem hervorragenden Beispiel für das eingangs beschriebene Verhältnis von Geschichte und Philosophie, wonach die Geschichte der Philosophie selbst stets als Geschichtsphilosophie zu begreifen ist.

Literatur

Bolzano, Bernard (Neuausgabe 1985-2000 [1837]). *Bernard Bolzano Gesamtausgabe, Bd. I.11-14 Hrsg. von Jan Berg.* frommann-holzboog, Neuausgabe 1985-2000 [1837].

Damböck, Christian (Hg.) (2013). *Der Wiener Kreis. Ausgewählte Texte.* Reclam, 2013.

Franke-Reddig, Julia (2024). „Facets of Ernst Mach’s Influence on Moritz Schlick“. In: *Origins of Contemprorary Philosophy.: Studies on Philosophy of Mathematics APOLODORO VIRTUAL EDIÇÕES, Brazil.*

Friedl Johannes; Rutte, Heiner (Hgg.) (2007). *Moritz Schlick. Kritische Gesamtausgabe Abteilung I, Bd. 6.* Springer, 2007.

Glassner Edwin; König-Porstner, Heidi (2012). *Moritz Schlick. Kritische Gesamtausgabe Abteilung I, Bd. 5.* Springer, 2012.

Hegselmann, Rainer (Hg.) (1979). *Otto Neurath. Wissenschaftliche Weltauffassung, Sozialismus und Logischer Empirismus.* Suhrkamp, 1979.

Lemke Martin; Naujoks, Anne-Sophie (2018). *Moritz Schlick. Kritische Gesamtausgabe Abteilung II, Bd. 1.3.* Springer, 2018.

Limbeck-Lilienau, Christoph (2018). „The First Vienna Circle: Myth or Reality?“ In: *Hungarian Philosophical Review* 62 (4), S. 50–65.

Max, Ingolf (2025). „Verwendet Frege eine Kalkülsprache? Eine Kritik an der Lesart von Heinrich Scholz (1935)“. In: *Rethinking the History of Logik, Mathematics and Exact Sciences* 2, S. 219–258.

Max, Ingolf; Borchers, Raphael; Franke-Reddig, Julia und Bauer, Philipp L. (2022). „Konsequentes Philosophieren im Lichte empirischer Wissenschaften und Logik. Drei neue Bände der Abteilung II Nachgelassene Schriften der Moritz Schlick Gesamtausgabe“. In: *Zeitschrift für philosophische Forschung* 76, S. 137–153.

McGuinness, Brian (Hg.) (1967). *Wittgenstein und der Wiener Kreis von Friedrich Waismann.* Suhrkamp, 1967.

Neurath, Otto (1934). „Radikaler Physikalismus und „Wirkliche Welt““. In: *Erkenntnis* 4, S. 346–362.

– (1937). „Die neue Enzyklopädie des wissenschaftlichen Empirismus“. In: *Scientia* 31, S. 346–362.

Peckhaus, Volker (2008). „Logic and Metaphysics: Heinrich Scholz and the Scientific World View“. In: *Philosophia Mathematica (III)* 16, S. 78–99.

Schlick, Moritz (1930). *Fragen der Ethik.* Springer, 1930.

Scholz, Heinrich (1941). *Metaphysik als strenge Wissenschaft.* Staufen, 1941.

– (1942). „Leibniz und die mathematische Grundlagenforschung“. In: *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung* 52, S. 217–2449.

– (1959 [1931]). *Abriß der Geschichte der Logik; Zweite, unveränderte Auflage.* Verlag Karl Alber, 1959 [1931].

– (1936/37). „Die Wissenschaftslehre Bolzanos. Eine Jahrhundert-Betrachtung“. In: *Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule*, S.1–53.

Siegetsleitner, Anne (2014). *Ethik und Moral im Wiener Kreis. Zur Geschichte eines engagierten Humanismus.* Böhlau, 2014.

Stadler, Friedrich (2021). „Ernst Mach and the Vienna Circle. A Re-evaluation of the Reception and Influence of His Work“. In: *Interpreting Mach. Critical Essays*, S. 184–207.

– (2015 [1997]). *Der Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext.* Springer, 2015 [1997].

Strobach, Nico (2023). „Zusammenprall von Kulturen oder geteiltes Paradigma? Heinrich Scholz für und gegen den Wiener Kreis“. In: *Der Wiener Kreis und sein Philosophisches Spektrum* 2, S. 327–351.

Heinrich Scholz über den Tod von Felix Hausdorff[1]

Niko Strobach

> Mir wollt a was assähl'n von fremden Wesen? [...]
> Ick war doch imma mang eich mang mit Herz und Breejen!
> Det ist der Dank - is det der Dank? [...]
>
> Walter Mehring, *Ode an Berlin*

1 Einleitung

Für den vorliegende Beitrag soll ein Blick auf den 82. Todestag von Felix Hausdorff aus Perspektive eines zwei Seiten langen handschriftlichen Briefs von Heinrich Scholz an Max Bense geworfen werden. Nur in drei Sätzen gegen Ende des Briefs geht es um den Tod Hausdorffs. Diese Sätze sind freilich sehr gehaltreich und verdienen eine eingehende Kontextualisierung unter den folgenden Leitfragen:

1. Was muss man wissen, um die drei Sätze zu verstehen?
2. In welchem Kontext und in welcher Kommunikationssituation stehen sie?
3. Auf was für eine Beziehung zwischen den Korrespondierenden werfen sie ein Schlaglicht?

[1] Dieser Text ist die schriftliche Fassung eines Vortrags während des 24. Rheinisch-Westfälischen Seminars zur Geschichte und Philosophie der Mathematik in Bonn am 26.1.2024. Ich danke Rainer Kaenders und Walter Purkert für die Gelegenheit dazu und für den Hinweis auf Hausdorffs Todestag. Der Vortrag fand aus technischen Gründen per Zoom statt.

Die erste Frage bringt es mit sich, dass noch einmal knapp zu berichten ist, was in Bonn in der Nacht vom 25. auf den 26. Januar 1942 geschehen ist. Es ist umfassend dokumentiert in der Hausdorff-Biographie von Egbert Brieskorn und Walter Purkert[2] im von Walter Purkert herausgegebenen 9. Band der Hausdorff-Werkausgabe und in dem wichtigen Artikel von Erwin Neuenschwander über Dokumente aus dem Nachlass von Erich Bessel-Hagen.[3]

Eine Kopie des Briefs ist im Nachlass von Heinrich Scholz in der Universitäts- und Landesbibliothek in Münster vorhanden. Das handschriftliche Original befindet sich im Deutschen Literaturarchiv in Marbach. Soweit ich sehe, ist der Brief bisher nicht ausgewertet worden.[4] Auch im materialreichen und sehr differenzierten Artikel zur Korrespondenz zwischen Heinrich Scholz und Max Bense von Andrea Albrecht, Christian Blohmann und Lutz Danneberg von 2019 kommt er nicht vor.[5]

Eine Anstreichung mit dem Namen „Hausdorff" neben dem letzten Absatz des Briefes zeigt, dass irgendjemand den Schluss des Briefes schon einmal für besonders wichtig gehalten hat, vielleicht Bense selbst. So manche Frage im Detail muss im Folgenden offenbleiben, und das Wort „vielleicht" ist zuweilen nicht zu vermeiden.

Heinrich Scholz ist Mitte April 1942 davon ausgegangen, dass der Adressat des Briefes noch nichts vom Tod Hausdorffs wusste. Man kann mit hoher Wahrscheinlichkeit sagen, seit wann Heinrich Scholz selbst davon wusste. Er vertraut dem Adressaten genug, um ihm mitzuteilen, was für ein Tod es war und was der Grund dafür war. Und er verbindet dies mit einem Lob Hausdorffs, einer Art Mikro-Nachruf, den es freilich zu dechiffrieren gilt. Der Schlüssel dafür ist, dass Scholz Hausdorff mit Sokrates vergleicht.

Im Folgenden sollen zunächst kurz die involvierten Personen eingeführt (Abschnitt 2) und die Ereignisse vor 82 Jahren zusammengefasst werden (Abschnitt 3). Danach ist es möglich, den Brief vorstellen (Abschnitt 4) und detailliert auf seinen Schluss eingehen (Abschnitt 5).

[2] Brieskorn/Purkert 2021.
[3] Neuenschwander 1996.
[4] HSN 115,076 [= Heinrich-Scholz-Nachlass Kapsel 115, Dokument 76]. Ich erwähne den Brief bereits kurz in Strobach 2020, 148. Ich gebe im Folgenden die alten Signaturen der von Kai Wehmeier angefertigten, inzwischen nicht mehr allgemein zugänglichen Scans mit an, da dies den Abgleich mit Albrecht et al. 2019 erleichtert. Die Signatur von Wehmeiers Scan von HSN 115,076 ist ko-03-0341.
[5] Vgl. Albrecht et al. 2019, 104 f.

2 Die involvierten Personen

2.1 Der Autor des Briefs: Heinrich Scholz

Der Autor des Briefs ist Heinrich Scholz (1884–1956), zunächst Professor für Theologie in Breslau, für Philosophie in Kiel, ab 1928 Professor in Münster, zunächst für Philosophie, dann für mathematische Logik und Grundlagenforschung im eigenen Institut, dessen Gründung als Sitz der Gruppe oder Schule von Münster er in den 1930er und 40er Jahren beharrlich betrieben hat. Wissenschaft versteht er als internationales Unternehmen, ist vernetzt von Polen bis in die USA, auch in der Zeit zwischen 1933 und 1945 – gerade dann – und eckt damit trotz gut gepflegter Kontakte zu Entscheidungsträgern an. Er hat Mut und ein weites Herz: Jan Salamucha aus dem KZ befreien, den Tarskis helfen, seinen Freund Jan Łukasiewicz aus Polen herausholen gilt ihm gleich viel – sind doch alle Kollegen.[6] 1941 und 1942 ist seine Kontroverse mit den Propagandisten einer „deutschen Mathematik", die in der formalen Logik Fremdartiges sehen, auf dem Höhepunkt. Die Angriffe von Max Steck (1907–1971) gehen selbst einem einflussreichen Mitinitiator des Unfugs, Ludwig Bieberbach (1886–1982), inzwischen zu weit, und er bietet Scholz ein Forum, um sich zu wehren.[7] Scholz war ein unermüdlicher und gut organisierter Briefeschreiber. So tragen auch die von ihm versendeten Briefe die pro Jahr fortlaufenden Nummern seines Brieftagebuchs.[8] Sein Brief vom 13.4.1942 ist bereits Brief 309 des Jahres.

Es liegt nahe, dass Scholz und Hausdorff sich auf Konferenzen getroffen haben. Mir ist aber kein Briefwechsel zwischen ihnen bekannt, und in biografischer Literatur zum einen spielt, soweit ich sehe, der andere keine Rolle.

2.2 Der Adressat: Max Bense

Der Adressat des Briefs ist Max Bense (1910–1990) aus Straßburg, aufgewachsen im Köln-Bonner Raum. Er ist zwar studierter Mathematiker und Naturwissenschaftler; auch bei Felix Hausdorff soll er in der Vorlesung gesessen haben.[9] Aber er ist auch Philosoph, und er legt kulturwissenschaftlich einen langen und faszinierenden Weg zurück.

[6] Für mehr Details: Strobach 2020; zu Salamucha: Peckhaus 1998/99.
[7] Menzler-Trott, 215, nach Hans Karl Hofer, *Deutsche Mathematik*, Diss. Wien 1987.
[8] HSN 126,003.
[9] Walther 2003, 13.

Albrecht, Dohmann und Danneberg sehen seinen Ausgangspunkt bei Spengler – und Scholz als den Mann, der Bense zur Vernunft gebracht hat.[10] Die Begegnung mit Scholz beeindruckt ihn jedenfalls tief,[11] und es entwickelt sich gegenseitige publizistische Schützenhilfe sowie ein intensiver Briefwechsel:[12] freundschaftlich, humorvoll, mit viel Vertrauen trotz des großen Altersunterschieds von 26 Jahren – und obwohl Scholz deutlich macht, dass er bei Bense in Logik Nachholbedarf sieht. Er grüßt Bense mit „Lieber Herr Doktor".[13] Leider ist der Briefwechsel nicht symmetrisch erhalten. Wir haben vor allem Briefe von Scholz an Bense.[14] Der junge Bense ist als wissenschaftlicher Journalist tätig, verkehrt in Künstlerkreisen, bringt wie Scholz gerne monographische philosophische Kurzschriften heraus. Er schreibt wie Scholz viel in der Kölnischen Zeitung, für die in den 1930er und 40er Jahren noch ohne Bedenken das Kürzel „KZ" üblich ist.[15] Anfang 1942 ist der 31-jährige Bense nicht Soldat, sondern arbeitet als Physiker in einer Firma in Berlin-Tempelhof an kriegswichtiger Elektrotechnik.[16] Dorthin schreibt ihm Scholz im April 1942.[17] Nach dem Krieg startet Bense universitär durch und schlägt bei seiner Bewerbung in Stuttgart mit dem ihm eigenen Charisma immerhin Pascual Jordan und Carl-Friedrich von Weizsäcker aus dem Feld.[18] Er wird Pionier der Verbindung von Informatik und Kunst und einer der ersten Vertreter der Technikphilosophie. An Gedichte schreibende Maschinen hat er schon lange vor ChatGPT gedacht. Scholz geht um 1948 auf Distanz zu ihm. Er hält ihn in dieser Zeit für ein akademisches Leichtgewicht und hätte es angemessener gefunden, Bense wäre „im Tagesschrifttume" (Journalismus) geblieben.[19]

[10] Albrecht et al. 2019 bieten einen differenzierten Überblick nicht nur zum Verhältnis von Bense zu Scholz, sondern insgesamt über seine frühen Jahre. Auch Walther 2003 ist dazu informativ, auch wenn Elisabeth Walther Max Bense erst 1946 kennenlernte.

[11] Albrecht et al. 2019, 74 f. mit Zitat von Bense dazu. Albrecht et al. melden ebd. leise Zweifel an, ob, wie Elisabeth Walther an anderer Stelle berichtet, Bense wirklich schon 1933/34 eine Vorlesung bei Scholz gehört hat. Das erste persönliche Treffen vermuten sie eher erst 1938.

[12] Albrecht et al. 2019 liefern einen guten Überblick. Leider sind die Links am Ende des Textes nach Übergabe des Scholz-Nachlasses an die ULB Münster nicht mehr benutzbar. Es ist geplant, den Briefwechsel zwischen Scholz und Bense in die digitale Scholz-Ausgabe einzubeziehen, die an der Universität Münster vorbereitet wird.

[13] So auch im Brief vom 13.4.1942.

[14] Benses enge Mitarbeiterin und spätere Ehefrau Elisabeth Walther berichtet (Walter 2003, 13): „[L]eider Gottes habe ich die Briefe von Max Bense an Scholz nicht. Die scheinen in Münster bei den Bombenangriffen verlorengegangen zu sein, aber ich habe die Briefe von Scholz an Bense und daraus ersehe ich, was er vorhatte".

[15] So zum Beispiel, sicher ohne Anspielung auf Konzentrationslager, im Brief von Scholz an Bense von 13.4.1942 unter Punkt 13.

[16] Walter 2003, 14.

[17] Im Brieftagebuch vermerkt Scholz als Adresse noch am 17.1.1942 „Köln-Mühlheim", am 31.1.1942 (Brief 106) „Dr. Bense Berlin", ab 9.2. – und auch für den 13.4. – „Dr. Bense Berlin-Tempelhof".

[18] Walter 2003, 63.

[19] Dies wird in einem Brief von Scholz an René Hocke deutlich, auf den Albrecht et al. 2003, 97, hinweisen (ko-04-0528; 119017). Quasi-Entfreundung: Scholz an Bense, 31.3.1949 (ko-06-0810;

2.3 Der wahrscheinliche Nachrichten-Übermittler: Hans Hermes

Den bedeutenden Mathematiker und Logiker Hans Hermes (1912–2003) darf man zweifellos zur Schule von Münster zählen, obwohl er vor dem 2. Weltkrieg gar nicht sehr lange in Münster war. 1953–1966 war er dann dort Nachfolger von Scholz. Er beschäftigt sich in Münster schon 1937 mit Turing, geht aber noch vor Kriegsausbruch zunächst nach Göttingen und dann als Assistent nach Bonn. Zwischen 1940 und 1943 war er als Soldat auf der deutsch besetzten Kanalinsel Jersey stationiert.[20] Aber er wird sicher auch zuweilen Fronturlaub gehabt haben. Scholz ist im Herbst 1941 sicher, dass Hermes einen Brief erhält, den er nach Osnabrück schickt.[21]

2.4 Die Nachrichtenquelle: Erich Bessel-Hagen

Der Mathematiker und Mathematikhistoriker Erich Bessel-Hagen (1898–1946)[22] war, gehbehindert nicht im Krieg, an der Uni Bonn eine Stütze der Lehre in der Mathematik. Briefkontakt zwischen Heinrich Scholz und ihm habe ich nicht feststellen können. Erst lange nachdem Bessel-Hagen 1946 mit 48 Jahren an Entkräftung gestorben war,[23] ergab die Sichtung seines Nachlasses durch Neuenschwander, wie sehr er zu Verfolgten in der Mathematik in Bonn gehalten hat. Im Nachlass von Bessel-Hagen fand sich der inzwischen berühmte Brief von Hausdorff an den Rechtsanwalt Hans Wollstein vom 25.1.1942.[24] Es fanden sich dort auch (offenbar in Kopie des Absenders) Briefe von Bessel-Hagen, u.a. an die Mathematikerin Elisabeth Hagemann,[25] von geradezu tollkühner Offenheit – mitsamt einer Ermahnung durch seinen Bruder, dass er damit auch ihre Empfänger in Gefahr bringe, insbesondere solche im Kriegsdienst.[26]

115109).

[20] Elstrodt/Schmitz (2013), Teil II, Kap. 7, 263.

[21] Brief vom 6.9.1941, Brieftagebuch Nr. 515 für 1941. Ich lese „Osnabrück-Haste“. Haste ist ein Vorort von Osnabrück.

[22] Zu Bessel-Hagen: Neuenschwander 1996.

[23] Neuenschwander 1996, 253.

[24] Abgedruckt in Neuenschwander 1996, 263 f (Transkription), 265–267 (Faksimile); Hausdorff 2012, 655 f.

[25] Abgedruckt in Neuenschwander 1996.

[26] Neuenschwander 1996, 254.

2.5 Felix Hausdorff

Felix Hausdorff (1868–1942), aus großbürgerlichem Haus in Leipzig, nach einer als überdosiert empfundenen religiösen Erziehung Agnostiker,[27] versierter Pianist[28] und fasziniert von der Musik Richard Wagners,[29] unter dem Pseudonym Paul Mongré literarisch und philosophisch tätig,[30] dabei irgendwie Nietzscheaner,[31] war zunächst Astronom,[32] dann als Mathematiker (mit Professur in Bonn von 1921–1935) der große Architekt der mengentheoretischen Topologie. Zu einer Einzugs-Party von Freunden in ihr neues Haus in Bonn-Endenich im Jahre 1932 fiel ihm ein hübscher Reim ein: „Man zieht gern um: Auch Endenich / ist noch vielleicht das Ende nich."[33] Seit 1899 war er verheiratet mit Charlotte, geborene Goldschmidt (1873–1942).[34] Sie war ebenso wie ihre Schwester Edith (1883–1942), später (geschiedene) Pappenheim, evangelisch getauft[35] – ebenso wie der kirchlich aktive Wollstein.[36] Felix Hausdorff starb im Alter von 73 Jahren.

3 Der Tod der Hausdorffs

Ist mehr zu Hausdorff zu sagen? Ja. Um es unter Vermeidung des unklaren Wortes „Nazi" und mit einer Verbalphrase auszudrücken, die in diesem Kontext vielleicht einmal nützlich ist: Behörden des deutschen Reiches haben Felix und Charlotte Hausdorff, Edith Pappenheim, und Hans Wollstein, im Sinne des als positives Recht formulierten Rassenwahns als Juden *gelesen*. Sie wurden Opfer diskriminierender staatlicher Gesetze und ihrer Ausführung. Der Vater von Felix und der Großvater von Charlotte Hausdorff waren prominente Mitglieder der jüdischen Gemeinde von Leipzig in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts.[37]

Anfang 1942 durften das Ehepaar Hausdorff zusammen mit Edith Pappenheim nach gescheiterten Emigrationsversuchen[38] und finanziell ausgeplündert[39] noch

[27] Brieskorn/Purkert 2021, 21.
[28] Ebd., 459.
[29] Ebd., 96–98.
[30] Ebd., 195–262; 311–318.
[31] Ebd., 176–181.
[32] Ebd., 73–78.
[33] Ebd., 459.
[34] Ebd., 205.
[35] Ebd., 18, 208: Edith 1883, Charlotte 1896.
[36] Hausdorff 2012, 653.
[37] Brieskorn/Purkert 2021, 3–20; 206, 209f.
[38] Brieskorn/Purkert 2021, 498–500.
[39] Neuenschwander 1996, 257; Brieskorn/Purkert 2012, 498, 509.

ein Zimmer in ihrem eigenen Haus bewohnen[40] – ein erst durch mühsame Verhandlungen erreichter Zustand.[41] Charlotte Hausdorff hatte endlich einen Termin in der Universitäts-Zahnklinik bekommen und war dann mit den Worten „Raus hier, Juden sollen sich aufhängen!“ vom Behandlungsstuhl gejagt worden.[42] Nun sollte es in das mit Gewalt geräumte Nonnenkloster Endenich gehen, in dem bereits andere Verfolgte unter schlimmsten Bedingungen konzentriert waren – bis zur Deportation in die Vernichtungslager.[43] Hausdorff macht sich keine Illusionen. Am 25.1. schreibt er an Wollstein: „auch Endenich ist noch vielleicht das Ende nich.“ Von den knapp 500 in Endenich Gefangenen überlebten elf den 2. Weltkrieg[44] (Wollstein nicht).[45] In der letzten Fußnote, die Hausdorff gesetzt hat, weist er darauf hin, dass für die gewünschte Feuerbestattung wenigstens der Leichname von Charlotte und Edith, obendrein da Charlotte „in einer evangelischen Sterbekasse [war]“,[46] evtl. doch nicht die jüdische Pseudo-Selbstverwaltung zuständig sein würde: „Meine Frau und meine Schwägerin sind aber [!] evangelischer Konfession.“[47] Die im Haus aufbewahrte Menge des starken Barbiturats Veronal reichte für alle drei.[48]

4 Der Brief von Scholz an Bense vom 13.4.1942

Der Brief von Scholz an Bense besteht aus dreizehn durchnummerierten Punkten – im Folgenden als § n zitiert – und zwei nicht nummerierten Absätzen am Schluss. Eine Transkription findet sich am Ende dieses Beitrags.

Die Kontroverse zwischen Scholz und Steck ist auf dem Höhepunkt, und so schickt Scholz Bense einen Sonderdruck einer kurzen und sehr kritischen Rezension einer Arbeit von Steck im Mathematischen Zentralblatt.[49] Nicht genug, dass Steck etwas gegen die Logik hat – jetzt dilettiert er auch noch als Frege-Herausgeber: „Beikommend [. . .] die Anzeige der neuen Steckrübe“ (§ 1). Albrecht, Dohmann und Danneberg finden zu Recht den von Scholz in einem späteren Brief an Bense vom 21.12.1942 benutzten Ausdruck „Steckrüben-Komplex in der Deutschen Mathematik“ bemerkenswert. Die Einschätzung, Scholz habe die Auseinandersetzung

[40] Brieskorn/Purkert 2021, 502, Fußnote 95; Neuenschwander 1996, 257.
[41] Neuenschwander 1996, 257.
[42] Brieskorn/Purkert 2021, 510.
[43] Hausdorff 2012, 656.
[44] Ebd.
[45] Hausdorff 2012, 654.
[46] Ebd., 655.
[47] Ebd.
[48] Ebd., 656.
[49] Scholz 1942.

„launig“[50] so getauft, bezieht freilich einen gehörigen Schuss Sarkasmus nicht mit ein. Man beachte, dass Scholz das Wort „Steckrübe“ nicht für Steck selbst, sondern für dessen Texte gebraucht. Steckrüben sind, wenn man davon satt werden will, minderwertige und dürftige Produkte. Wikipedia informiert: Ein erheblicher Teil der geschätzt 700.000 Deutschen, die im 1. Weltkrieg verhungert sind, starb im so genannten Steckrübenwinter 1916/17, als es keine Kartoffeln mehr gab.

Scholz versorgt Bense außerdem mit längeren Arbeiten, deren Lektüre er von ihm erwartet. Die Dissertation zur Topologie der Zeit von Karl Schnell von 1937 hatte er ihm schon geschickt, und Bense fand sie wohl etwas mühsam zu lesen. Prompt bekommt er als „Geschenk der Schule von Münster“ Arbeiten von Friedrich Bachmann[51] und von Walther Kinder dazu[52] – begleitet von der Ermahnung (§ 11): „Ich habe ziemlich gut gewusst, wenn ich immer wieder gesagt habe, dass man durch unsere mühevollen Dinge nicht in der Diagonale hindurchkommt.“

Scholz zieht große Linien, was die Formalisierbarkeit und Axiomatisierbarkeit von Teilgebieten der Mathematik und deren Grenzen angeht. In diesem Zusammenhang erwähnt er auch Alfred Tarski als einen Mann, „von dem wir längst abgeschnitten sind“ (§ 9). Scholz war Mittelsmann zwischen Tarski in den USA und dessen Familie in Polen gewesen,[53] aber spätestens ab dem 11.12.1941 war das nicht mehr möglich, da an diesem Tag das Deutsche Reich den USA den Krieg erklärte.

Offenbar hat sich Bense bei Scholz erkundigt, ob dieser aus erster Hand etwas über neuere Entwicklungen in der Forschung von Stanisław Leśniewski berichten könne. Scholz muss ihn enttäuschen (12): „Zur Ontologie von Hrn. Lesniewski kann ich gar keine Versprechungen machen; denn wir sind abgeschnitten auf eine radikale Art.“ Allerdings: Leśniewski ist im Mai 1939 gestorben.

Scholz ist unzufrieden: Seine Werke verkaufen sich schleppend, auch das Buch *Metaphysik als reine Wissenschaft* seiner Meinung nach nicht gerade gut (§ 3). Dass Bense sich noch öffentlich in der *Kölnischen Zeitung* mit Kierkegaard beschäftigt, kommentiert er leicht pikiert (§ 13).[54] Ein längerer Brief von Scholz wäre schließlich unvollständig ohne Meldung seines schlechten Gesundheitszustandes. In diesem Fall spielt er dafür auf Leibniz‘ Theorie der möglichen Welten und Kants Schrift

[50] Albrecht et al. 2019, 83.

[51] vermutlich die Dissertation „Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik“ von 1933. Vgl. die Doktorandenliste HSN 127,006 und 127,007.

[52] sehr wahrscheinlich die Dissertation „Die reellen Zahlen in logistischer Konstituierung“ von 1935. Vgl. wiederum die Doktorandenliste.

[53] Strobach 2020, 152.

[54] „Die Kierkegaardsche Existenz, die Sie heute in der KZ erhellt haben (ich habe Ihre Studie zweimal aufmerksam gelesen, u. glaube ein paar Hauptpunkte verstanden zu haben), u. erst recht das Nichts zu dieser Existenz, sind zwei wesentliche Themen, die unserer Kompetenz entzogen sind auf eine eindeutige Art.“

Zum ewigen Frieden an: „[M]eine Eingeweide sind vom ewigen Frieden ungefähr so weit entfernt wie die beste aller möglichen Welten.“ Er berichtet ferner, er sei belastet vom „unmittelbar bevorstehenden Ausbruch des Sommer-Semesters.“ Unter anderem, so berichtet er, wird er eine Übung zur mengentheoretischen Topologie anbieten.

Nichts liegt dazu näher als der Name „Hausdorff“. Und tatsächlich hat Scholz Bense vor dem abschließenden „Der Ihrige“ noch eine Neuigkeit über Hausdorff mitzuteilen.

5 Drei kurze Sätze kurz vor Schluss

Scholz fasst die Nachricht in drei kurze Sätze (meine Nummerierung):

> „[1] Unser trefflicher 70-jähriger Hausdorff in Bonn ist mit seiner Frau aus dem Leben gegangen, nachdem man ihn zu Tode gequält hatte.
>
> [2] In der KZ hat es nicht gestanden.
>
> [3] Unantastbar ist es trotzdem.“

Der erste Satz ist sehr gehaltreich: Scholz inkludiert Hausdorff in dieselbe Wir-Gruppe wie den Adressaten und sich selbst. Er charakterisiert ihn positiv mit dem Wort „trefflich“. Er informiert Bense, dass Hausdorff sich zusammen mit seiner Frau das Leben genommen hat. Und er führt den Grund dafür an. Dem unbestimmten „man“ zum Trotz muss Bense klar sein, wer Hausdorff zu diesem Schritt gebracht hat, und warum. Darüber, wie, verwendet Scholz offen ein deutliches Verb: „quälen“, ohne ins Detail zu gehen.

Das Plusquamperfekt „gequält hatte“ wirkt für einen Moment seltsam. Aber das Perfekt „gequält hat“ wäre eher noch seltsamer: Wen man zu Tode *gequält* hat, der muss sich nicht mehr selbst töten. Das Plusquamperfekt muss hingegen nicht resultativ gemeint sein, sondern kann auch einen vorher andauernden Zustand beschreiben und die Wendung „zu Tode“ nicht ein Resultat des Quälens, sondern eine Intensität: Nachdem man ihn zu Tode gequält hatte, hat er sich das Leben genommen. Das Plusquamperfekt drückt in diesem Falle ausnahmsweise nicht eine Abfolge von Ereignissen aus (man stirbt nur einmal), sondern einen durativen Verbalaspekt.

Ein weiteres Detail ist vielleicht verwunderlich: Hausdorff war 73, nicht 70. Natürlich kann es sein, dass Scholz das einfach nicht nachgehalten hat. Der 70. Geburtstag von Hausdorff 1938 ging ja nicht mit Ehrungen einher.[55] Es kann auch sein, dass er „70-jährige[r]“ im Sinne von „über 70-Jähriger“ oder „Mann in seinen 70ern“ benutzt. Es könnte freilich mehr dahinterstecken, worauf im Folgenden noch einzugehen ist.

Auch das, was Scholz nicht schreibt, mag interessant sein: Eine Vergiftung liegt zwar bei einem gemeinsamen Suizid zweier älterer Menschen relativ nahe. Aber jedenfalls äußert sich Scholz nicht direkt zur Ausführung. Es könnte sein, dass er darüber nicht informiert war. Es ist auch darauf gleich noch einmal darauf zurückzukommen.

Der zweite und der dritte Satz sind weniger informativ als der erste oder scheinen zumindest so. Man konnte selbstverständlich keinen Nachruf auf Hausdorff in der Kölnischen Zeitung erwarten. Es mag gut sein, dass Scholz einfach Empörung darüber zum Ausdruck bringt, während er im dritten Satz bekräftigt: Es *ist* aber so, ich habe sehr zuverlässige Informationen darüber. Dennoch wirkt das Wort „unantastbar“ beim stilbewussten Scholz ungewöhnlich gewunden. Auch das ist gleich noch genauer zu betrachten.

Man fragt sich: Von wem und seit wann wusste Scholz vom Suizid der Hausdorffs? Diese Fragen lassen sich mit großer Wahrscheinlichkeit beantworten. Und die naheliegende Antwort erklärt manches, was an Scholz‘ Worten etwas rätselhaft wirken mochte.

Von wem erfährt Scholz die Nachricht? Viel spricht für die Antwort: von Hans Hermes. Seit wann? Viel spricht für die Antwort: einige Tage nach dem 4. April 1942. Denn unter den Absender-Kopien im Nachlass von Erich Bessel-Hagen befindet sich ein Brief an Hans Hermes, in dem Bessel-Hagen am 3. April 1942 schreibt:[56]

„Ende Januar schien [die Internierung in Endenich] unabwendbar. Darauf haben H[ausdorff]s, der vielen Quälereien, denen sie dauernd ausgesetzt waren, satt, die Consequenz gezogen, ihrem Leben durch Veronal selbst ein Ende zu bereiten. Es war keine Verzweiflung, sondern ruhige Überlegung, dass auch die Verpflanzung nach E[ndenich] nicht das Letzte sein werde, was man ihnen antut, und dass ihnen immer die Deportation nach Polen oder sonstwohin droht. Und vielleicht hätten sie in E[ndenich] dann keine Möglichkeit mehr gehabt, freiwillig den andern Weg zu gehen. Nach allem, was mir von den Menschen berichtet worden ist, die

[55] Neuenschwander 1996, 255 f.
[56] Abgedruckt in Neuenschwander 1996, 260.

H[ausdorff] in den letzten Tagen gesehen oder gesprochen haben, hat H[ausdorff] alles in stoischer Ruhe und Ueberlegtheit geordnet und bis zum Schluss nicht die Neigung zu humoristischen Redewendungen verloren. Er ist wirklich 'als Philosoph gestorben'."

Es ist unwahrscheinlich, dass Bessel-Hagen diesen Brief auf die Insel Jersey geschickt und Hermes Scholz von dort aus mit Feldpost über den Tod der Hausdorffs informiert hat. Es sind für beide Schritte der Informationsübertragung innerhalb von neun Tagen kürzere Wege durch den Raum zu vermuten. Dass die Information *über Hermes* zu Scholz gelangte, ist freilich sehr wahrscheinlich. Das erklärt zum Beispiel, warum Scholz Bense nicht früher davon schreibt, dann aber schon. Auch sprechen beide Briefe dafür, wenn man sie nebeneinanderlegt. Die Information vom doppelten Suizid stimmt überein, obwohl sie, wenn man an Edith Pappenheim denkt, nicht ganz präzise ist. Und es gibt eine Angabe des Grundes mit praktisch demselben starken Wort: „Quälereien" und „quälen". Dabei entspricht die Formulierung „d[ie] vielen Quälereien, denen sie dauernd ausgesetzt waren" in der von Bessel-Hagen berichteten zeitlichen Abfolge gerade der Wendung „zu Tode *gequält*" mit dem durativen Plusquamperfekt.

Angenommen, Hermes hat Scholz informiert. Dann ist es möglich, dass er ihm gegenüber nur Andeutungen über den Brief von Bessel-Hagen gemacht oder ihm davon erzählt hat, ohne ihn vorzulesen, zu zeigen oder gar weiterzuschicken.[57] Es ist aber auch möglich, dass Scholz den Brief von Bessel-Hagen an Hermes ganz kannte (und so auch spätestens daraus wusste, dass „Deportationen nach Polen oder sonstwohin" im Gange waren). Für das erste scheint zunächst zu sprechen, wieviel von dem, was Bessel-Hagen schreibt, im Brief von Scholz an Bense *nicht* vorkommt. Einerseits mag man meinen, dass das kein Wunder ist, da Scholz gar nichts übrigbleibt, als sich zu jedem einzelnen der vielen Punkte in seinem Brief kurz zu fassen. Ich möchte eine andere Deutung vorschlagen: Scholz lässt tatsächlich weniger weg, als es aussieht. Er deutet vielmehr sogar die Art und Weise des Suizids an.

Bessel-Hagen berichtet nicht nur die Fakten, er interpretiert sie: Hausdorff ist als Philosoph gestorben (trotz der Anführungsstriche, die Bessel-Hagen setzt, sehe ich hier kein Zitat). Denn er hat vor dem Entschluss Gründe abgewogen, den Suizid gefasst vorbereitet und sogar – „Endenich ist noch das Ende nich" – in seinem Abschiedsbrief Bitterstes mit Humor ausgedrückt.

[57] Als Stichworte zum Inhalt des Briefs an Bense vom 13.4.1942 hält Scholz im Brieftagebuch fest: „Anzeige Steck, Bachmann, Kinder [= die Arbeit von Walt(h)er Kinder], Brief" – nur welcher Brief?

Das Adjektiv „stoisch“ hin oder her – wo hat es das schon einmal gegeben: ein von ungerechter Staatsmacht verfolgter *Philosoph*, dessen Selbsttötung als Philosoph mit Gift Anlass zu höchstem Lob ist? Es ist praktisch unmöglich, dass Heinrich Scholz nicht an Sokrates gedacht hat, wenn er von Hausdorffs Tod in der Interpretation von Bessel-Hagen erfahren hat; dass er nicht an den Schierlingsbecher gedacht hat, dessen Inhalt Platon mit dem Wort *pharmakon* (*Phaidon* 116c) zugleich als Gift und als Heilmittel bezeichnet. Platons Bericht vom letzten Tag des Sokrates endet mit einem Lob des Sokrates, ja einem Nachruf: *Hêde hê teleutê* [...] *tou hetaírou hêmin egéneto, andrós* [...] *arístou kai allôs phronimotátou kai dikaioutátou* (*Phaidon* 118a). Die klassische Übersetzung von Schleiermacher, die Scholz als ausgewiesener Schleiermacher-Forscher zweifellos kannte, lautet: „Dies [...] war das Ende unseres Freundes, des Mannes, der [...] der trefflichste war und auch sonst der vernünftigste und gerechteteste.“

Scholz schreibt an Bense: „Unser trefflicher 70-jähriger Hausdorff... “ Er benutzt dasselbe Wort, mit dem Schleiermacher „aristos“ – „der Beste“ – übersetzt. Aber nicht nur das: Er benutzt es in Kombination mit einer inkorrekten Altersangabe. Platon lässt Sokrates in seiner Verteidigungsrede sagen (*Apologie* 17d): *etê gegonôs hebdomêkonta* – „da ich siebzig Jahre alt geworden bin“. Daraus ist die einhellige Überlieferung geworden, dass Sokrates im Alter von 70 Jahren starb.

Nimmt man, wie es sehr nahe liegt, eine Anspielung auf Sokrates an, so liegt die Frage nahe: Ist im zweiten und dritten Satz der Mitteilung von Scholz zu Hausdorffs Tod vielleicht auch noch implizite Information enthalten? Die Antwort dürfte zwar sein: eher nein. Aber sie ist nicht selbstverständlich.

Zunächst mag die Abkürzung „KZ“ ins Auge fallen. Obwohl die offizielle Abkürzung für „Konzentrationslager“, sofern davon die Rede war, wohl eher „KL“ war, war doch die Abkürzung „KZ“ schon vor Kriegsende gebräuchlich. Sollte Max Bense etwa, fernab von der grammatischen Oberfläche, hinzuverstehen: „Sie wären ins Kazett gekommen, aber das droht ihnen nun nicht mehr“? Auszuschließen ist es nicht. Dagegen spricht jedoch, dass der Satz „In der KZ hat es nicht gestanden“ wörtlich genommen nicht seltsam wirkt, sondern als Ausdruck der Empörung eine gute sprachliche Funktion hat.

Soll, unabhängig davon, der letzte kurze Satz, „Unantastbar ist es trotzdem“, an eine zweite Bedeutungsebene denken lassen? Das Wort „unantastbar“ mag seltsam wirken. Weiß man, wie Scholz es sonst benutzt? In einem anderen Brief findet sich eine – freilich selbst nicht ganz einfach verständliche, aber aufschlussreiche – Stelle,[58] in dem Scholz das Wort „unantastbar“ gebraucht und sogar damit spielt.

[58] Heinrich Scholz an Erich Hochstetter, 15.7.1953, HSN 117, 157. „Dass auch im philosophischen Raum viele insofern unantastbar gewesen sind, als sie nichts Unverantwortliches gesagt oder

Dabei gebraucht er im Hauptsatz das Wort, wie im Brief an Bense, schlicht zur Versicherung einer empirischen Wahrheit: „Dass [. . .] viele insofern unantastbar gewesen sind, als sie nichts Unverantwortliches [. . .] publiziert haben, *ist unantastbar*." Das gibt für die Deutung auch der Stelle im Brief an Bense den Ausschlag: Bekräftigung der Tatsache, von der man nur um den Preis, die Unwahrheit zu sagen, abweichen, die man aber selbst nicht löschen kann, aber keine darüber hinaus gehende Anspielung. Das ist gut verständlich. Verrätselt worden zu einem schillernden Wort, das zwischen normativ und faktisch changiert, ist das Wort „unantastbar" erst im ersten Artikel des Grundgesetzes.

Als Fazit lässt sich festhalten: Heinrich Scholz hat mit Max Bense die Nachricht vom Suizid der Hausdorffs als Ergebnis ihrer Verfolgung geteilt, weil er meinte, dass er sie mitteilen muss. Das war im dunklen Jahre 1942 keine Selbstverständlichkeit.

Quellen

Scholz, Heinrich: Brief an Max Bense vom 13. April 1942. Laut Auskunft des Deutschen Literaturarchivs Marburg (e-mail vom 9.1.2024 an Niko Strobach) ist das Original vorhanden im Nachlass von Max Bense (A: Bense). Fotokopie im Heinrich Scholz-Nachlass in der ULB Münster, Kapsel 115, Dokument 76.

Scholz, Heinrich: Brieftagebuch des Logistischen Seminars I, 19.08.1941–31.12.1943. Heinrich Scholz-Nachlass in der ULB Münster, Kapsel 126, Dokument 3.

Scholz, Heinrich: [Liste der] Doktoranden. Heinrich Scholz-Nachlass in der ULB Münster, Kapsel 127, Dokumente 6 und 7.

Literatur

Albrecht, Andrea/Blohmann, Christian/Danneberg, Lutz (2019): „'Die Mathematik ist reine Wissenschaft, nichts anderes'. Max Bense zwischen Oswald Spengler und Heinrich Scholz." In: Andrea Albrecht, Masetto Bonitz, Alexandra Skowronski, Claus Zittel (Hgg.): Max Bense. Werk – Kontext – Wirkung. Berlin/Heidelberg: J.B. Metzler (Springer Nature), 43–112.

publiziert haben, ist unantastbar. Es scheint mir jedoch, dass ich dies auch nicht angetastet habe. Ich habe nur gesagt: Sie haben geschwiegen, und beziehe mich selbst ohne irgend welche Reserven mit ein [. . .]" Ich danke Monja Reinhart für den Hinweis auf diesen Brief.

Brieskorn, Egbert/Purkert, Walter (2021): *Felix Hausdorff. Mathematiker, Philosoph und Literat.* Berlin/Heidelberg: Springer.

Elstrodt, Jürgen/Schmitz, Norbert (2013): *Geschichte der Mathematik in Münster.* Teil II, Kapitel 7 „Ehemalige Professoren 1945 – 1969“, 250–315: https://www.uni-muenster.de/FB10/historie/kapitel7.pdf

Hausdorff, Felix (2012): *Gesammelte Werke Band IX – Korrespondenz.* Hg. von Walter Purkert. Berlin/Heidelberg: Springer.

Menzler-Trott, Eckart (2001): *Gentzens Problem. Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland.* Basel: Birkhäuser.

Neuenschwander, Erwin (1996): „Felix Hausdorffs letzte Lebensjahre nach Dokumenten aus dem Bessel-Hagen-Nachlaß.“ In: Egbert Brieskorn (Hg.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis* (Band I). Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 253–270.

Peckhaus, Volker (1984) *Der nationalsozialistische „neue Begriff“ von Wissenschaft am Beispiel der „Deutschen Mathematik“ – Programm, Konzeption und politische Realisierung.* M.A.-Arbeit RWTH Aachen. Online-Version Erlangen/Paderborn 2001.

Peckhaus, Volker (1998/1999): Moral Integrity during a Difficult Period: Beth and Scholz. *Philosophia Scientiae* (Nancy) 3 (4), 151-173.

Scholz, Heinrich (1942): Rezension von: Steck, Max: „Unbekannte Briefe Freges über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilberts an Frege. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1941, 1–31 (Abh. 2)“. In: *Mathematisches Zentralblatt* 26 (1942), 242.

Strobach, Niko (2020): „Heinrich Scholz. Eine Dokumentation.“ In: Reinold Schmücker/Johannes Müller-Salo (Hgg.): *Pietät und Weltbezug. Universitätsphilosophie in Münster.* Brill mentis: Leiden 2020, 125–158.

Walther, Elisabeth: Interview mit Elisabeth Walther am 28. November 2003 in Stuttgart. Teil I: „Ab morgen Philosophie“ – Begegnung in Jena. Teil II: Philosophie in technischer Zeit – Stuttgarter Engagement. In: Barbara Büscher, Christoph Hoffmann, Hans-Christian von Heermann (Hgg.): *Ästhetik als Programm: Max Bense – Daten und Streuungen.* Band I. Zürich: Diaphanes, 2014, 11–17; 63–73.

Transkription des Briefes von Scholz an Bense vom 13.4.1942

[Stempel: Logistisches Seminar // der Universität Münster i./W. // Prof. Scholz]

[Handschriftliche Notiz zum Brieftagebuch: BT 309]

[Handschriftliche Notiz (wohl nicht von HS): An Max Bense]

[Datum rechts oben:] Münster i.W., 13. April 1942

[S. 1] Mein lieber Herr Doktor

(1) Beikommend, mit der Bitte um Rückgabe, die vom Zentralblatt für Math. von mir erbetene Anzeige der neuen Steckrübe. Es scheint mir, dass auch für Sie einiges Aufklärende gesagt ist.

(2) Es scheint mir, dass die Mitteilung von Herrn Heyde einer anderen Dimension angehört als seine Philosophie. Für diese fehlt mir jede Kompetenz.

(3) Hr. Wamper hat mir kurz geschrieben. Bis auf ein paar Ex. der Metaphysik, die wieder einmal verabreicht werden können, ist alles auf seinem alten Fleck geblieben. Es scheint mir, dass mein Pessimismus in dieser Sache bis jetzt so wenig widerlegt worden ist, wie im Warschau<er> Falle.

(4) Über "Logik u. Mathematik" kann man auf unserer Stufe nur sprechen, wenn man sich zuvor über die formalisierte L- u. M-Sprache verständigt hat. Ich habe dies zwar immer wieder gesagt; aber ich verstehe sehr gut, dass dies auch für unsere nächsten guten Freunde der schwierigste Punkt ist.

(5) Setzt man die Sprache der Russell-Logik voraus, so ist in Münster keine math. Redeweise (in Ihrer Ausdrucksart: kein math. Begriff) bekannt, die nicht restlos in dieser Sprache ausgedrückt werden kann.

(6) Hieraus folgt nicht, dass nicht auch für diese Sprache noch wesentliche Desiderate angemeldet werden können. Man irrt immer wieder sehr, wenn man glaubt, dass wir wunschlos sind.

(7) Versteht man unter der Arithmetik der nat. Zahlen die Menge der Folgerungen aus dem Dedekindschen Axiomensystem u. setzt man die WF des neuen, auf die Fregeschen Intentionen zurückgehenden u. dann von uns auf jede Art provozierten Ackermann-Kalküls (Forschungen H. 7) voraus, so lässt sich

a) in der Sprache dieser Logik ein perfektes Modell für dieses Axiomensystem konstruieren

b) der Modellcharakter dieses Modells in dieser Logik beweisen.

(8) Hiermit ist nicht alles gewonnen; denn aus dem Gödelschen Unvollständigkeitstheorem ergibt sich, grob, aber im wesentlichen zutreffend gesprochen, die Unmöglichkeit einer lückenlosen Axiomiatisierung der Arithmetik der nat. Zahlen.

(9) Dagegen hat Hr. Tarski, von dem wir auch längst abgeschnitten sind, (briefliche Mitteilung) gezeigt, dass die Analysis lückenlos axiomatisierbar ist.

(10) Wenn man in L ein Modell für das Dedekind-System konstruieren und demonstrieren kann u. nicht nur über die Individuenvariablen quantifizieren darf, so kann man in L auch ein Modell für das Hilbertsche AS der Analysis konstruieren und demonstrieren.

(11) Unter der s.Z. von mir als Prämisse vorgeschlagenen Integrierbarkeit des Frege-Kalküls in der Richtung von (7) hat mein alter Schüler F. Bachmann 7a) u. 7b), mein Schüler W. Kinder (10) bewiesen. Beide Arbeiten gehen gleichzeitig an Sie als Geschenk der Schule von Münster. Ich werde nur nicht hindern können, dass Sie Ihnen noch etwas mehr Mühe machen werden, als die Arbeit Schnell. Ich habe ziemlich gut gewusst, wenn ich immer wieder gesagt habe, dass man durch unsere mühevollen Dinge nicht in der Diagonale hindurchkommt. Es wird mir auch nur erwünscht sein, wenn Sie an diesen Exempeln erkennen, wie weit wir vom alten Philosophieren im überlieferten Sinne entfernt sind.

(12) Zur Ontologie von Hrn. Lesniewski kann ich gar keine Versprechungen machen; denn wir sind abgeschnitten auf eine radikale Art.

(13) Die Kierkegaardsche Existenz, die Sie heute in der KZ erhellt haben (ich habe Ihre Studie zweimal aufmerksam gelesen, u. glaube ein paar Hauptpunkte verstanden zu haben), u. erst recht das Nichts zu dieser Existenz, sind zwei wesentliche Themen, die unserer Kompetenz entzogen sind auf eine eindeutige Art.

[S. 2] Unsere Nächte sind wieder sehr turbulent, meine Eingeweide vom ewigen Frieden ungefähr so weit entfernt wie die beste aller möglichen Welten. Dies sind die Prolegomena zu dem unmittelbar bevorstehenden Ausbruch des Sommer-Semesters. Ich lese 4mal von 8 - 9 h über Mengen u. Folgen, dazu 2 stündige Übungen zur mengentheoretischen Topologie (Umgebungs-, Entfernungs-, Konvergenzräume).

Unser trefflicher 70-jähriger Hausdorff in Bonn ist mit seiner Frau aus dem Leben gegangen, nachdem man ihn zu Tode gequält hatte. In der KZ hat es nicht gestanden. Unantastbar ist es trotzdem.

Der Ihrige

H.S.

Adressen der Autoren

Romain Büchi
Université de Genève
Département de philosophie
5 rue De-Candolle
CH-1211 Genève 4
romain.buechi@unige.ch

Oliver Ebbers
Wormser Str. 10
D-42119 Wuppertal
oliver.ebbers@uni-wuppertal.de

Julia Franke-Reddig
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen

und/oder

Université de Genève
Faculté des Lettres
Département de philosophie
5 rue de Candolle
CH-1211 Genève 4

Toni Reimers
Universität Leipzig
Studienkolleg Sachsen
Lumumbastraße 4
D-04105 Leipzig
toni.reimers@uni-leipzig.de

Karin Richter
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Georg-Cantor-Haus
Theodor-Lieser-Str. 5
D-06120 Halle a. d. Saale
karin.richter@mathematik.uni-halle.de

Susanne Spies
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
spies@mathematik.uni-siegen.de

Niko Strobach
Universität Münster
Philosophisches Seminar - Arbeitsstelle Heinrich Scholz
Domplatz 23
D-48143 Münster
logic.language@uni-muenster.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro
Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro
Susanne Spies: Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro
Henrike Allmendinger: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro
Martin Rathgeb: George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro
Tanja Hamann: Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro
Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro
Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.
Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro
Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

Band 13 (2020), 322 S., kart., 18,– Euro
Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Stephan Berendonk, Rosmarie Junker & Susanne Spies, Edward Kanterian, Martin Mattheis, Gregor Nickel, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Moritz Vogel, Matthias Wille

Band 14 (2021), 216 S., kart., 18,– Euro
Mit Beiträgen von Henning Heske, Hannes Junker, Andreas Kirchartz, Oliver Passon und Tassilo von der Twer, Toni Reimers, Susanne Spies und Claus-Peter Wirth

Band 15 (2022), 252 S., kart., 22,– Euro
Alessa Waldvogel: Dualität in der Funktionalanalysis. Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

Band 16 (2022), 270 S., kart., 19,– Euro
Mit Beiträgen von Stephan Berendonk, Harald Boehme, Christian Hugo Hoffmann, Daniel Koenig, Jens Lemanski, Jasmin Özel, Felicitas Pielsticker & Ingo Witzke, Štefan Porubský, Dolf Rami, Renate Tobies

Band 17 (2023), 192 S., kart., 19,– Euro
Mit Beiträgen von Michael Herrmann, Henning Heske, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Renate Tobies, Matthias Wille

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 19,– Euro (monographische Bände ggf. abweichend)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 18 (2024)

Mit Beiträgen von

Romain Büchi
Über Beweis, Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik

Oliver Ebbers
Das mathematische Lebenswerk von Ghiyath ad-Din Dschamschid bin Mas'ud bin Muhammad al-Kaschi

Susanne Spies
Anschauung als Leitprinzip im Rechenunterricht bei Pestalozzi und Diesterweg

Karin Richter & Toni Reimers
A Contribution on the Unpublished Cantor Correspondence in Halle

Julia Franke-Reddig
Bernard Bolzano im Kontext der Logikgeschichtsschreibung von Heinrich Scholz

Niko Strobach
Heinrich Scholz über den Tod von Felix Hausdorff

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN