Vorlesungen über Quantenmechanik - Vorlesung 9

Jochen Geppert / Didaktik der Physik

Wintersemester

Abstract. Als weiteren Beleg für die technische Nutzung des Tunneleffekts wird das Raster-Tunnel-Mikroskop besprochen.

1. Die Kaltemission

Wir betrachten Leitungselektronen im Metall. Wie wir bereits wissen, sind diese Elektronen im Metall durch ein Potenzial gebunden. Man kann es in erster Näherung durch einen Potenzialkasten endlicher Tiefe beschreiben[1]. Die folgende Darstellung zeigt die Energieniveaus im Metall, angelehnt an dieses quantenmechanische Modell des Potenzialkastens endlicher Tiefe:

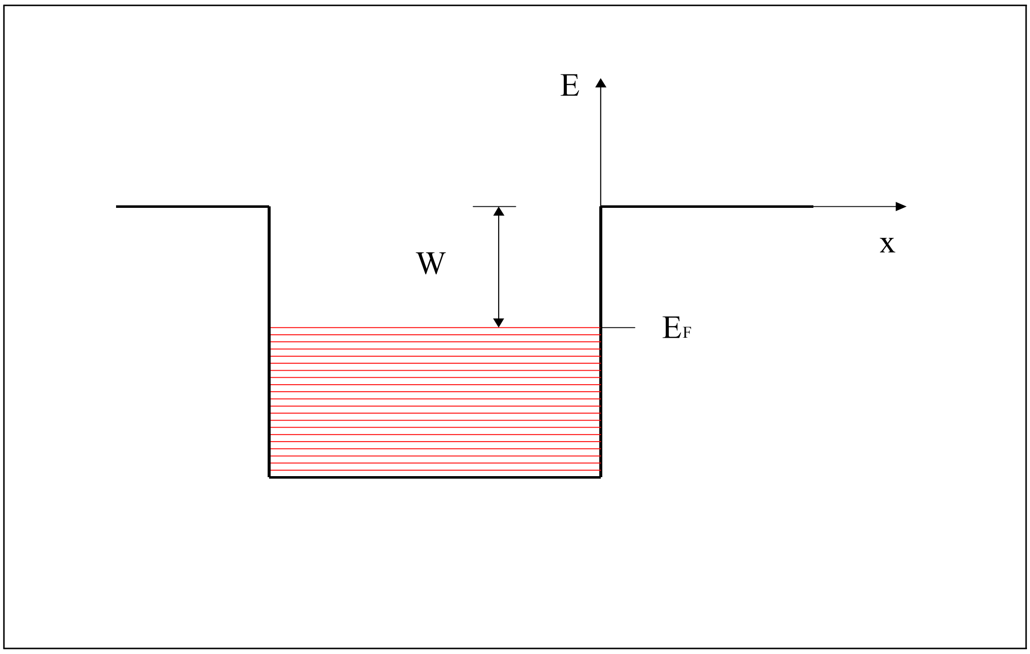

Figure 1: Energiediagramm eines Potenzialtopfes endlicher Tiefe

Die in roter Farbe eingezeichneten Striche seien die Energiewerte die wir im Modell des endlich tiefen Potenzialtopfes in der Vorlesung 8 errechnet haben[2]:

$$E_n \sim V_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m \cdot (2a)^2} \tag{1}$$

[1] Siehe Vorlesung 8: *Quantenmechanik*.
[2] Siehe Gleichung (57) aus Skript 8: *Quantenmechanik*.

Hierbei ist 2a die Breite des Potenzialtopfes und $V_0 < 0$ der Energiewert des Potenzialtopfes. Die Energieniveaus liegen sehr dicht aneinander, da der Potenzialtopf sehr breit ist[3]. Es ist eine Eigenschaft von Elektronen, dass nicht mehr als zwei von ihnen ein und dasselbe Energieniveau besetzen können (*PAULI-Prinzip*[4]). Aus diesem Grund werden im Grundzustand eines jeden Metalls alle Energieniveaus bis hinauf zu einer bestimmten Grenze besetzt sein. Unter dem *Grundzustand* versteht man den *energetisch niedrigsten Zustand eines Systems*. Diese Grenzenergie heißt *FERMI-Energie*. Ihre Lage hängt von der Dichte der Leitungselektronen im Metall ab. Oberhalb der Temperatur von 0° Kelvin sind einige Elektronen thermisch auf höhere Zustände angeregt, aber selbst bei Zimmertemperatur sind es nur wenige. Die Differenz zwischen der FERMI-Energie und dem oberen Rand des Potenzialtopfs ist die zur Auslösung eines Elektrons aus dem Metall erforderliche Mindestenergie. Wir kennen sie bereits vom Photoeffekt als Austrittsarbeit[5]. Elektronen können aus dem Metall entfernt werden, indem man ihnen Energie zuführt. Dies kann entweder durch Photonen[6] oder auf thermischen Weg, der Glühemission, geschehen. Sie können aber auch durch das Anlegen eines äußeren (externen) elektrischen Feldes E heraus gelöst werden. Diese Kaltemission ist deshalb möglich, weil durch das äußere elektrische Feld das von einem Elektron „gesehene" Potenzial verändert wird von W auf:

$$\Phi(x) = W - eEx \tag{2}$$

sofern das Elektron sich ganz oben auf dem "See" der Energieniveaus befindet. Betrachte dazu die folgende Darstellung:

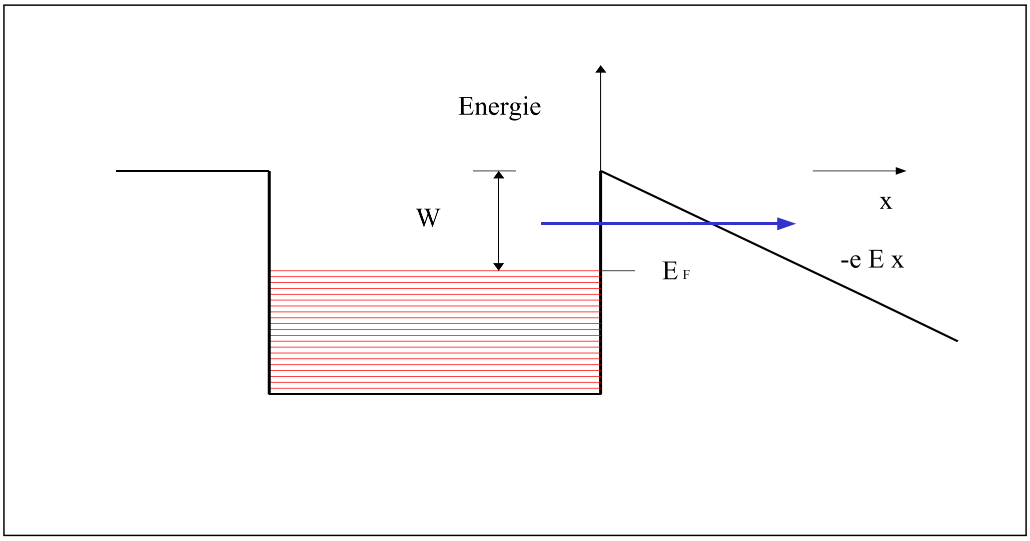

Figure 2: Kaltemission von Elektronen durch den Tunneleffekt

[3] Damit wird die obige Gleichung immer genauer, siehe Skript 8: *Quantenmechanik*.
[4] Das PAULI-Prinzip wird in der 23. Vorlesung *Quantenmechanik* im einzelnen behandelt.
[5] Siehe Skript 14: *Einführung in die Quantenphysik*.
[6] Also z.B. durch Lichtbestrahlung, wie beim Photoeffekt.

Durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes E kommt es zu einer Kaltemission von Elektronen, die quantenmechanisch durch einen Tunneleffekt erklärbar wird. Die Wahrscheinlichkeit für den Tunneleffekt wird durch die folgende **FOWLER-NORDHEIM-Formel** (ohne Beweis) angegeben, wir wollen sie nur qualitativ untersuchen:

$$|T|^2 = e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{mW}{\hbar^2}}\left(\frac{W}{eE}\right)} \tag{3}$$

T ist dabei wieder der Transmissionskoeffizient, den wir schon aus vorgehenden Problemen kennen. $|T|^2$ gibt nun die Wahrscheinlichkeit für einen Tunneleffekt[7] an. Wir können an der Formel folgendes erkennen:
1. Je größer die Austrittsarbeit W bei sonsten festgehaltenen Größen ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit eines Tunneleffekts.
2. Je größer die Feldstärke E des angelegten äußeren elektrischen Feldes ist - bei sonst festgehaltenen Größen - desto größer wird die Wahrscheinlichkeit der Kaltemission.

Beide Ergebnisse hätten wir auch intuitiv vorhergesagt. Die FOWLER-NORDHEIM-Formel beschreibt die Ergebnisse auch nur qualitativ. Sie vernachlässigt z.B. den Effekt der Unebenheiten in der Metalloberfläche, die das elektrische Feld lokal verändern. Da die elektrische Feldstärke in der obigen Formel im Exponenten steht, können sich solche Schwankungen stark auswirken. An dieser Stelle sind solche näheren Betrachtungen nicht weiter wichtig. Entscheidend ist, dass nach der Beschreibung des radioaktiven Zerfalls und der Tunneldiode mit der Kaltemission von Elektronen einen weiterer experimentellen Nachweis für den Tunneleffekt existiert.

[7] In der zweiten Darstellung durch einen dicken blauen Pfeil markiert.

2. Das Rastertunnelmikroskop

Eine Variante der Kaltemission hat eine wichtige Anwendung im *Rastertunnelmikroskop* gefunden (scannning tunneling microscope, STM). Es beruht auf einer besonderen Empfindlichkeit bezüglich Entfernungen bei der Kaltemission[8]. Durch eine elektrische Potenzialdifferenz - also eine el. Spannung - erzeugt man einen Elektronenstrom zwischen einer Metalloberfläche und einer sehr feinen Wolframspitze über der Oberfläche. Der einsetzende Elektronenstrom beruht auf demn Tunneleffekt, die Potenzialdifferenz entspricht dem Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes ($U = eE$).
Betrachte dazu die folgende schematische Darstellung:

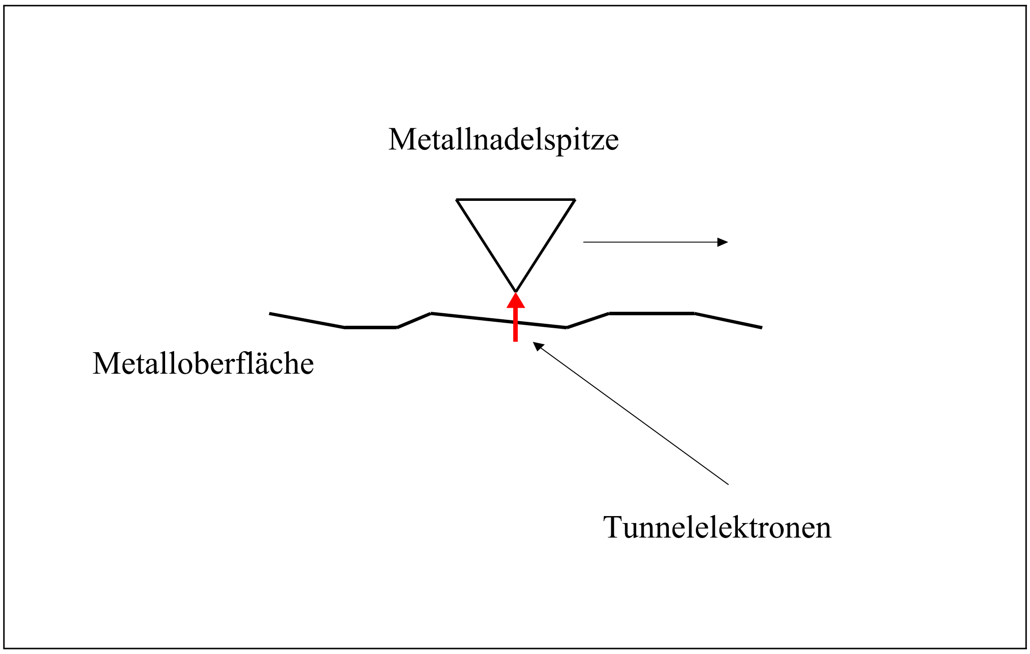

Figure 3: Tunneleffekt beim Rastertunnelmikroskop

Aus dem Objekt (z.B. einer Metalloberfläche) tunneln Elektronen - der Abstand Objekt - Spitze beträgt 1nm ! - durch die Lücke zwischen Oberfläche und Nadel. Der dabei entstehende "Tunnelstrom" hängt sehr empfindlich vom Abstand zwischen Nadelspitze und Oberfläche ab. Durch Rückkopplung mit der Nadelführung erreicht man, dass der Tunnelstrom und damit der Nadelabstand beim Abtasten konstant bleibt. Zeichnet man nun die für die Bewegung der Nadel verantwortliche Regelspannung über der Horizontalebene auf, so erhält man ein dreidimensionales Rasterbild der zu untersuchenden Oberfläche.

[8] Genauer auf der exponentiellen Abhängigkeit von der Breite der Potenzialbarriere.

Betrachte dazu als Beispiel die folgende Darstellung einer Siliziumoberfläche durch ein Rastertunnelmikroskop[9]:

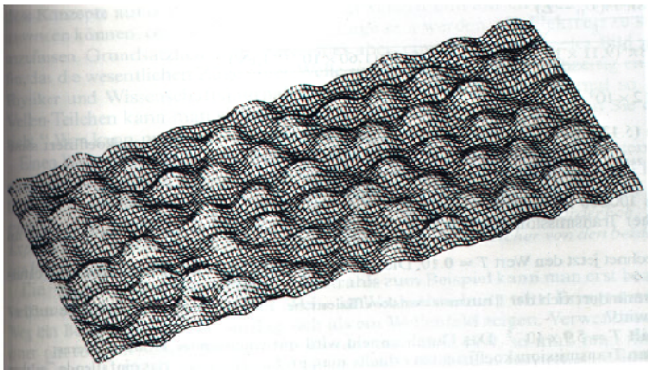

Figure 4: Darstellung einer Siliziumoberfläche im Rastertunnelmikroskop

Die "Beulen", die man in der obigen Abbildung sehen kann weisen auf einzelne Siliciumatome hin. Es ist bereits gelungen, Strukturen bis zu einem Hundertstel eines Atomdurchmessers aufzulösen.

[9] Aus Halliday / Resnick: Physik , Bd. 2.

3. Tunneln zwischen zwei Metallen

Ein Tunneln geschieht auch dann, wenn man zwei Metallplatten zusammenbringt:

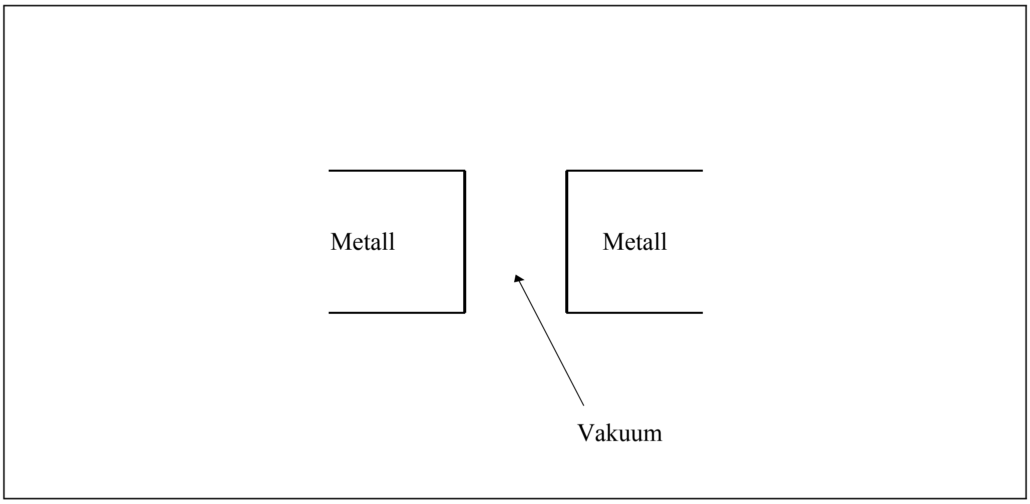

Figure 5: Schematische Darstellung zweier Metallplatten, die einander angenähert werden.

Legt man nun eine Spannung an, so erhält man energetisch die folgende Situation:

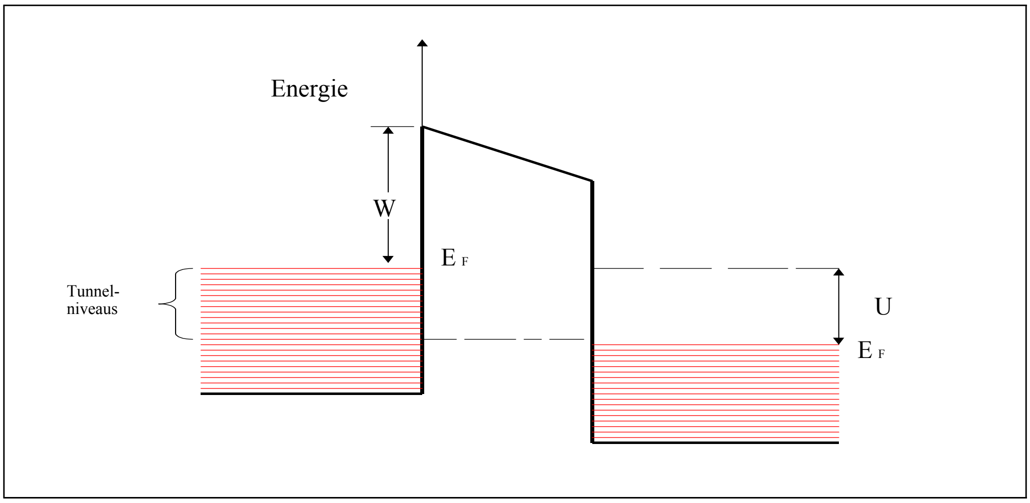

Figure 6: Energiediagramm zum Tunneleffkt zwischen zwei Metallen.

Auf diesem Energiediagramm ist die Tunnelmöglichkeit zwischen zwei Metallen welche durch eine Vakuumstrecke getrennt sind, schematisch wiedergegeben. Tunneln ist nur dann möglich, wenn auf der rechten Seite freie Zustände[10] zur Verfügung stehen.

[10] Solche Zustände sind noch nicht durch Elektronen besetzt.

Solche freien Zustände werden zur Verfügung gestellt, wenn eine Spannung angelegt wird, die das FERMI-Niveau auf der rechten Seite absenkt. Durch das Anlegen der Spannung wird die Form des Potenzialwalls ein wenig verändert, diesen Effekt können wir aber vernachlässigen.
Es stehen also nach Anlegen einer Spannung freie Energieniveaus auf der einen Seite einigen gefüllten Niveaus auf der anderen gegenüber, jetzt kann getunnelt werden. Für den Transmissionskoeffizienten erhält man (ohne Herleitung):

$$|T|^2 \cong e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a} \tag{4}$$

Man kann erkennen, dass der Transmissionskoeffizient in empfindlicher Weise vom Abstand a der beiden Metalle abhängt. Mit zunehmendem Abstand der Metalle wird er sehr schnell sehr klein. Ebenso verständlich ist die Abhängigkeit von der Austrittsarbeit W, je größer sie ist[11], umso geringer ist die Tunnelwahrscheinlichkeit. Da die Austrittsarbeit W in der Größenordnung einiger Elektronenvolt liegen, sollte die Vakuumstrecke im Bereich einiger Ängströms 10^{10} m !) liegen. Es ist technisch sehr schwierig die Platten genügend eben und parallel zu machen. Das Ergebnis wurde aber angewendet, um den Strom zwischen zwei Platten mit einer dazwischen liegenden 50Å dicken Oxidschicht (Ni - NiO - Pb) zu deuten, und als qualitativ richtig befunden.

[11] Mit anderen Worten, je schwerer es für Elektronen ist, das Metall zu verlassen.