Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 11

Jochen Geppert / Didaktik der Physik

Sommersemester

Abstract. Es werden als Fortsetzung der Vorlesung 10 weitere mathematische Modelle mit Maple behandelt.

1. Mathematische Modellierung: Elektron im Feld eines Protons

Maple-Programme:
- QPVorl11Pr1.mws (Elektron in einem äußeren Magnetfeld)
- QPVorl11Pr2.mws (Elektron im Feld eines Protons)

1.1. Modell 1: "Elektron wird von einem konstanten B-Feld auf eine Kreisbahn gezwungen". Man kann ein Elektron in einem konstanten Magnetfeld unter den folgenden Bedingungen auf eine Kreisbahn zwingen:

$$\mathbf{B} = B_0 \cdot \mathbf{e}_\vartheta \;,\; \mathbf{v} = v_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi = v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei (zur Erinnerung) gilt:

$$\mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \\ \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Dann gilt weiter:

$$\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r$$

Die Bewegungsgleichung zusammen mit den frei gewählten Anfangsbedingungen[1] lautet nun :

$$\begin{aligned} m_e \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) &= q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (-1) \cdot v_0 \cdot B_0 \cdot \mathbf{e}_r = -v_0 \cdot B_0 \cdot \frac{\mathbf{r}}{|r|} \qquad (1) \\ m_e \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} &= -v_0 \cdot B_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \dot{\mathbf{r}}(0) = v_0 \frac{1}{\sqrt{x(0)^2+y(0)^2}} \begin{pmatrix} -y(0) \\ x(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ B_0 &= 100T \;,\; v_0 = 10\frac{m}{s} \qquad (2) \end{aligned}$$

[1] Es geht an dieser Stelle nicht um ein konkretes physikalisches Beispiel - z.B. das H-Atom in der Bohrschen Vorstellung - sondern nur um den Effekt.

Zur Berechnung der Bahn wurde die Elektronenmasse gleich Eins gesetzt:

$$m_e = 1kg \tag{3}$$

Diese Setzung verfälscht nicht die Rechnung, erlaubt es Maple aber leichter zu rechnen.
Im Programm "QPVorl11Pr1. mws", wird das System (1) numerisch berechnet, man erhält die Kreisbahn:

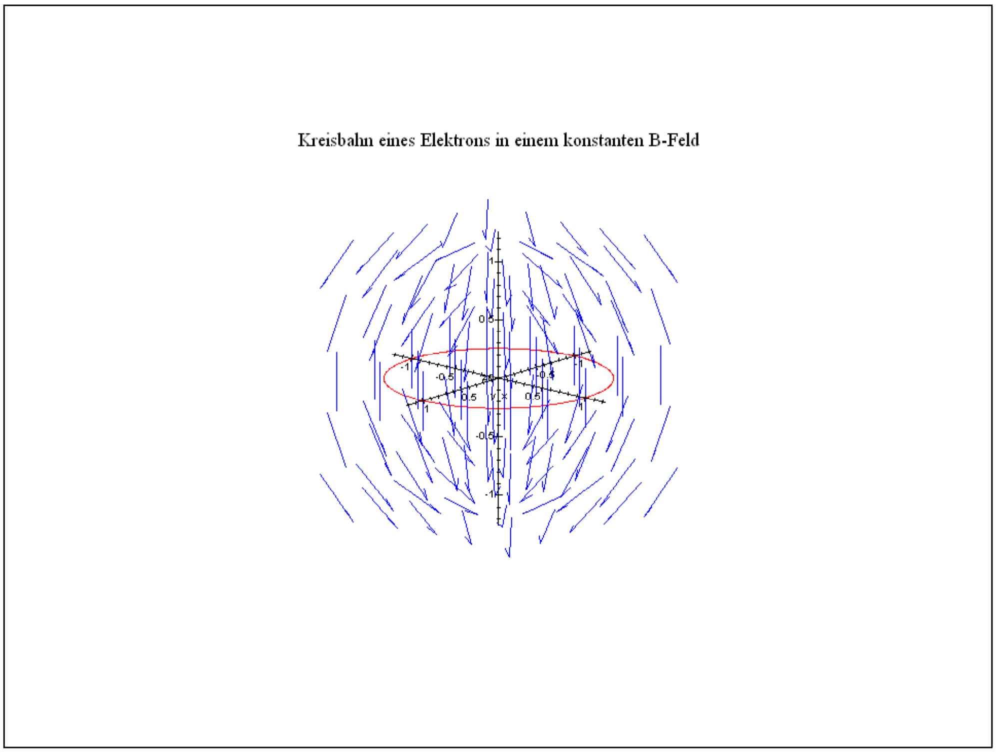

Figure 1: **B**-Feld und numerische Bahn des Elektrons.

Verkleinert man unter sonst gleichen Bedingungen die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons, so erhält man einen anderen Bahnverlauf:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{r}}(0) = v_0 \frac{1}{\sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}} \begin{pmatrix} -y(0) \\ x(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ B_0 &= 100T\ , v_0 = 1\frac{m}{s}\end{aligned} \tag{4}$$

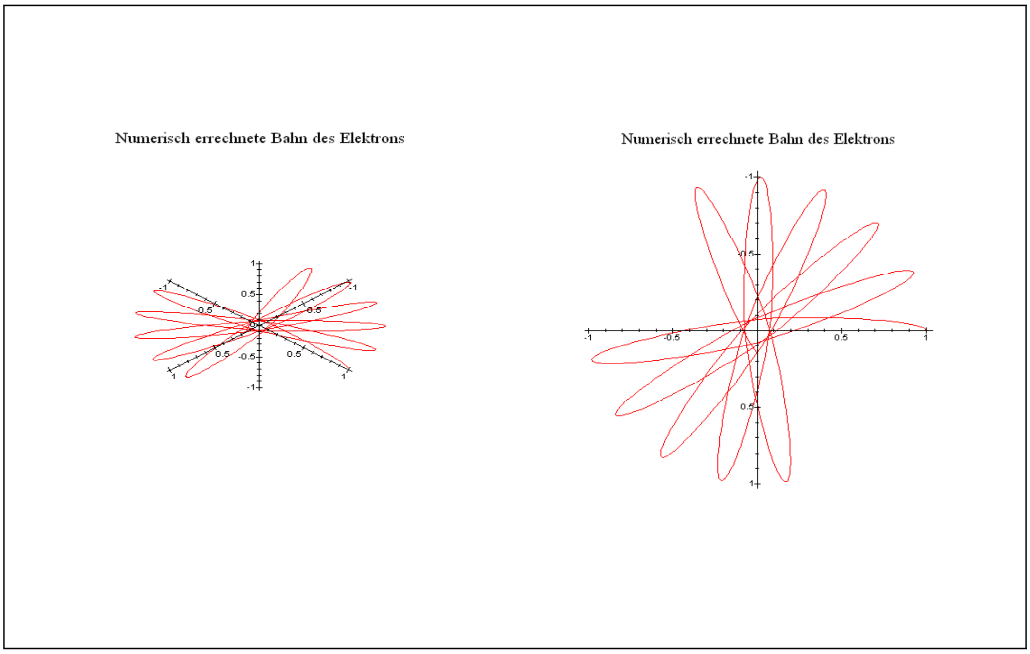

Figure 2: Numersich errechneter Bahnverlauf bei Verkleinerung der Anfangsgeschwindigkeit. Die Einheit der Achsen ist Meter.

Vergrößert man die Anfangsgeschwindigkeit, so erhält man den folgenden Bahnverlauf:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{r}}(0) = v_0 \frac{1}{\sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}} \begin{pmatrix} -y(0) \\ x(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B_0 &= 100T \text{ , } v_0 = 20\frac{m}{s} \end{aligned} \tag{5}$$

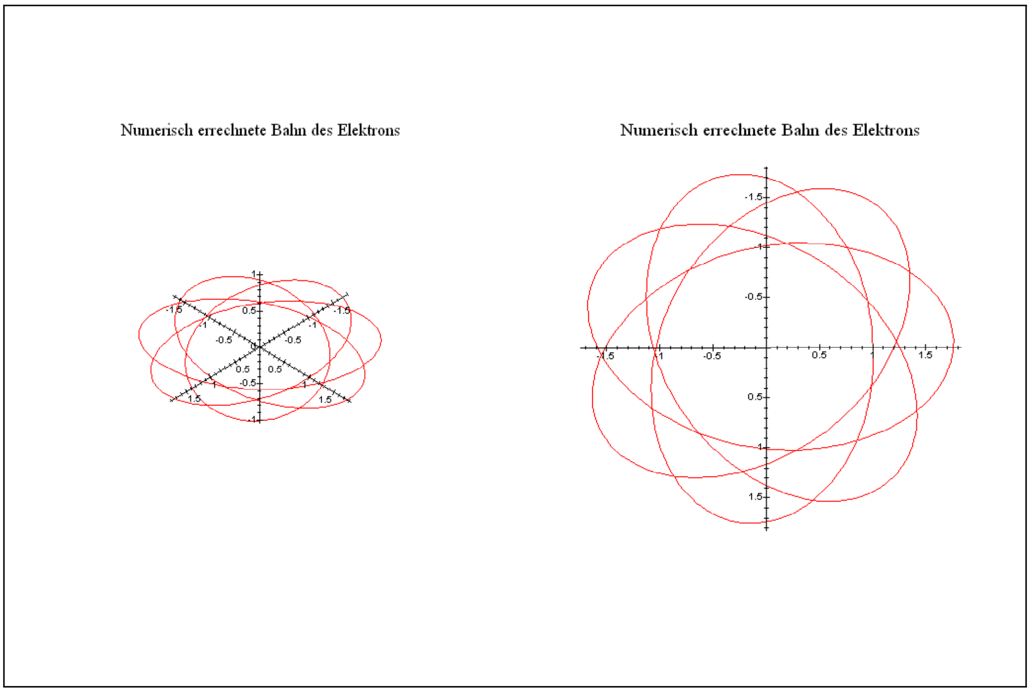

Figure 3: Numerisch errechneter Bahnverlauf bei Vergrößerung der Anfangsgeschwindigkeit. Die Einheit der Achsen ist Meter.

1.2. Modell 2: Elektron im Feld eines Protons (Modell des H-Atoms).

Unter günstigen Anfangsbedingungen kann ein Proton - das man als ruhend ansehen kann, da es erheblich schwerer als das Elektron ist[2] - ein Elektron auf eine Kreisbahn zwingen[3]. Die wirkende Kraft ist die Coulombkraft, die das Proton auf das Elektron ausübt. Man erhält somit die folgende Bewegungsgleichung des Elektrons:

$$m_e \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_p \cdot q_e}{|\mathbf{r}(t)|^3} \cdot \mathbf{r}(t) \tag{6}$$

[2] Die Ruhemasse des Elektrons ist $m_e = 9.1091 \cdot 10^{-31}$kg, während die des Protons $m_p = 1.6725 \cdot 10^{-27}$kg beträgt. Es liegt also rund ein Faktor 10000 zwischen den beiden Massen!

[3] Es ist ebenfalls möglich,dass das Elektron in Richtung Proton gezogen wird oder dass es am Proton vorbei verschwindet. Ausschlaggebend sind die Anfangsbedingungen des Elektrons.

Leider ließen sich mit der Studentenversion nun nicht die realen Verhältnisse im H-Atom simulieren, jedoch wird im Programm QPVorl11Pr2.mws das obige System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen mit realen Konstanten, jedoch leicht veränderten Anfangsbedingungen berechnet.
Die folgenden Möglichkeiten sind dabei von besonderem Interesse. Im Programm besteht auch die Möglichkeit die numerische Bahn mit beliebig gewählten Anfangsbedingungen zu berechnen und graphisch darstellen zu lassen.

1. Möglichkeit: *Elektron stürzt in das Proton*

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m \text{ und } \dot{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} \tag{7}$$

unter diesen Anfangsbedingungen eines ruhenden Elektrons bewirkt die Coulombkraft als gerichtete Anziehungskraft eine beschleunigte geradlinige Bewegungdes Elektrons auf das Proton zu. Man erhält die folgende numerische Bahn:

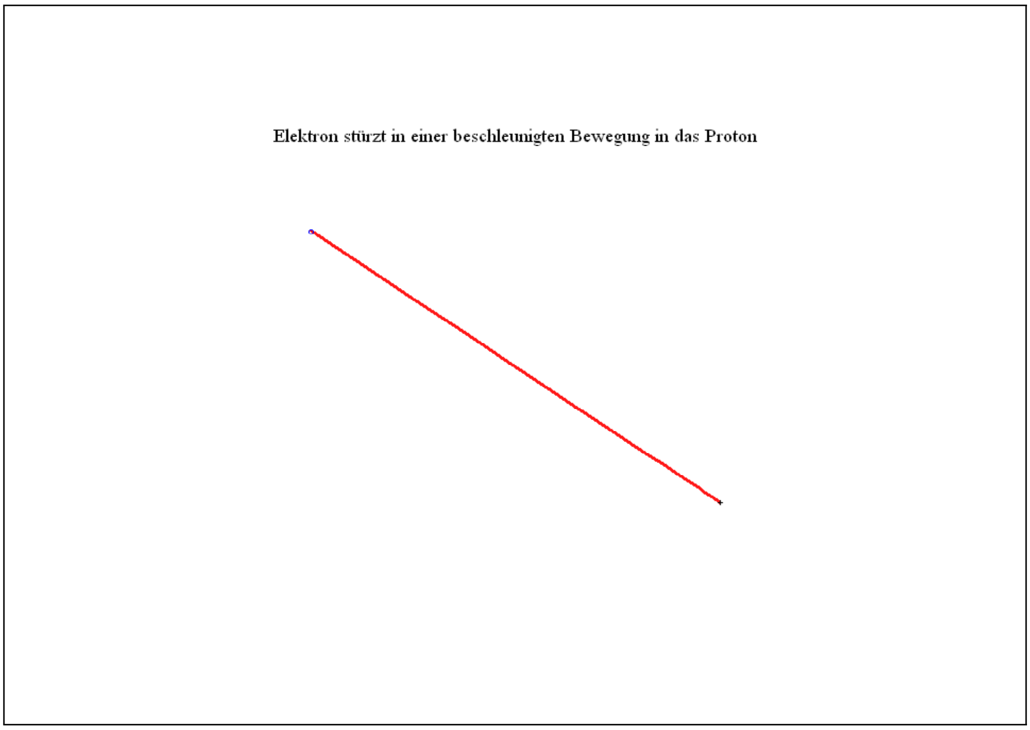

Figure 4: Elektron stürzt in einer beschleunigten Bewegung in das Proton. Die Einheit der Achsen ist Meter.

2. Möglichkeit: *Elektron bewegt sich auf einer geschlossenen Kreisbahn*:
Unter den folgenden Anfangsbedingungen bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit dem Proton als Zentrum:

$$\mathbf{r}\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m \text{ und } \dot{\mathbf{r}}\,(0) = \begin{pmatrix} 15.9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} \tag{8}$$

Maple errechnet numerisch die folgende Bahn:

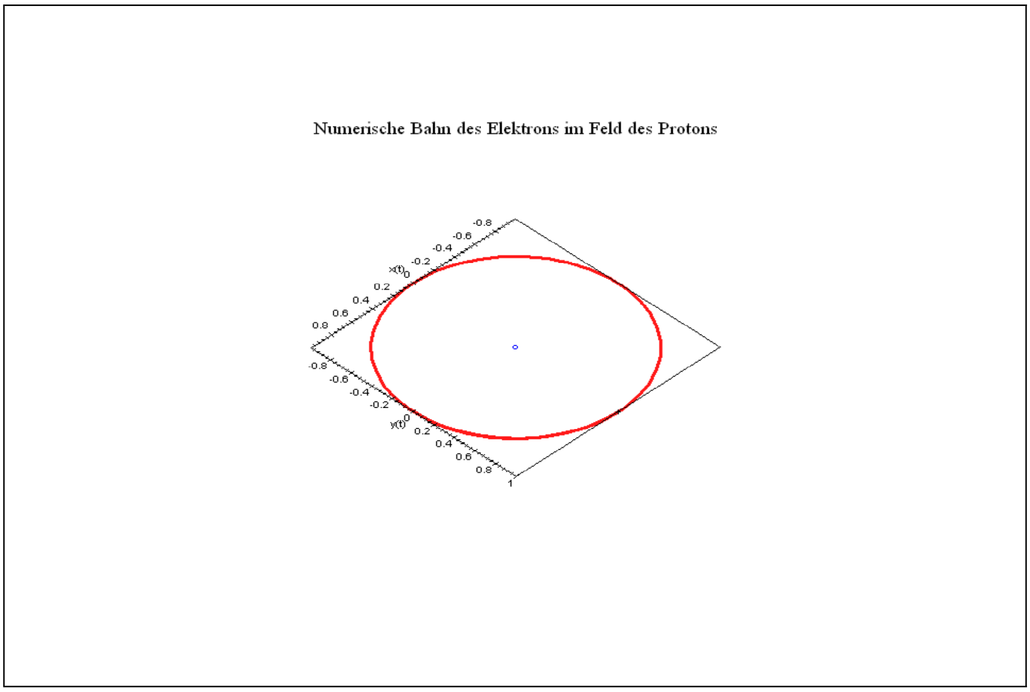

Figure 5: Numerisch errechnete Kreisbahn des Elektrons mit Proton als Mittelpunkt. Das kleine schwarze Kreuz markiert den Beginn der Bewegung. Die Einheit der Achsen ist Meter.

In diesem Modell wurde noch nicht berücksichtigt, dass das Elektron als eine auf einer Kreisbahn sich bewegende Punktladung Energie in Form einer elektromagnetischen Welle abstrahlt. Dieser Effekt wird in der Diskussion des RUTHERFORD-Atommodells in der nächsten Vorlesung mitberücksichtigt und in seinen Konsequenzen diskutiert.

3. Möglichkeit: *Elliptische Bahn des Elektrons*
Wählt man eine höhere Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons, so ist auch eine elliptische Bahn des Elektrons möglich. Das Proton befindet sich in einem Brennpunkt der Ellipse:

$$\mathbf{r}\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m \text{ und } \dot{\mathbf{r}}\,(0) = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} \tag{9}$$

Auch in diesem Fall wird die Energieabstrahlung des Elektrons nicht berücksichtigt!

Maple errechnet dann die folgende Bahn:

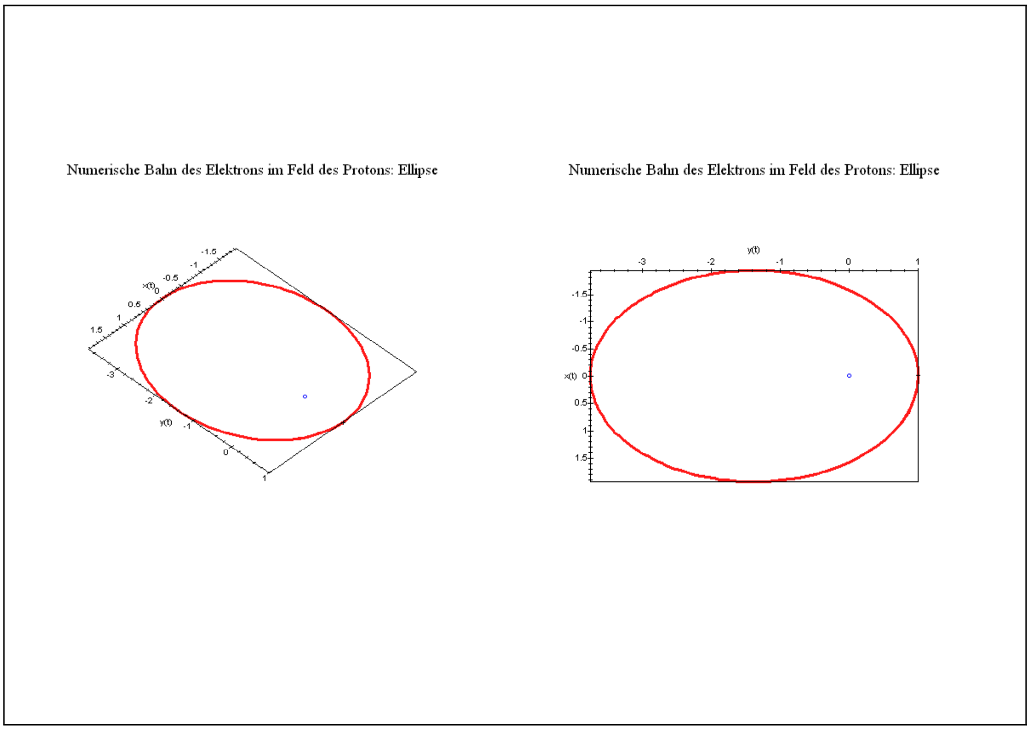

Figure 6: Numerisch errechnete elliptische Bahn des Elektrons um das Proton. Die Einheit der Achsen ist das Meter.

4. Möglichkeit: *Offene Bahn des Elektrons: Hyperbel*
Ist die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons und damit seine kinetische Energie groß genug, so wird das Elektron vom Proton nicht mehr auf eine geschlossene Bahn geführt.

$$\mathbf{r}\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} m \text{ und } \dot{\mathbf{r}}\,(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s} \tag{10}$$

Auch für diesen Fall wird allerdings die Abstrahlung des Elektrons nicht mitberücksichtigt!
Mit diesen Anfangsbedingungen erhält man dann die folgende numerische Bahn:

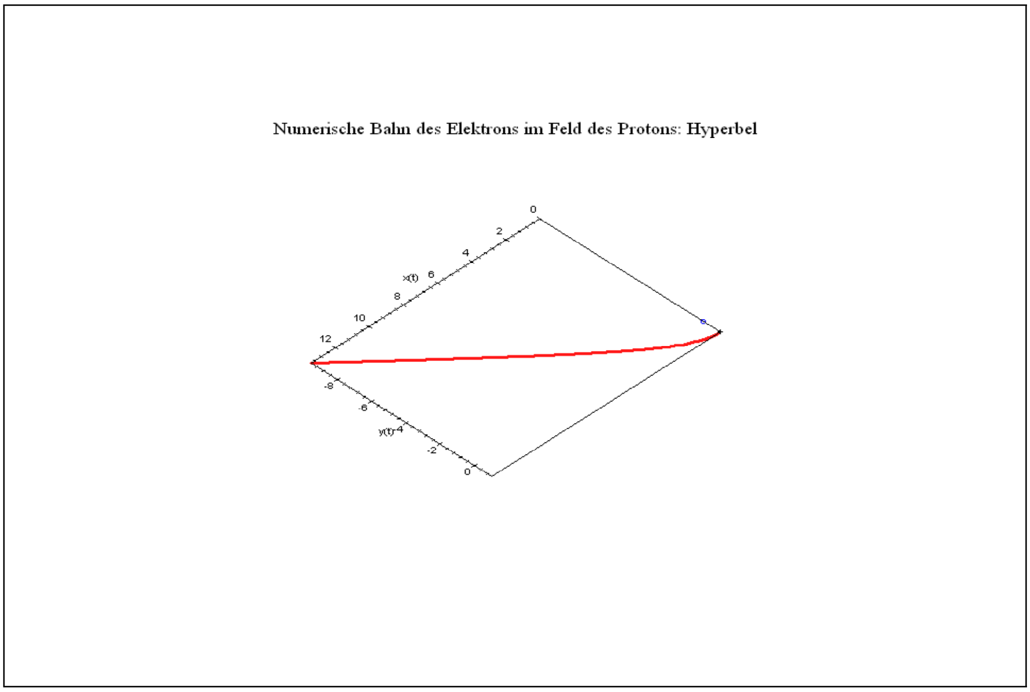

Figure 7: Offene Bahn des Elektrons am Proton vorbei. Die Einheit der Achsen ist Meter.

1.3. Modell 3: Berücksichtigung der Abstrahlung. Wir betrachten ein sich auf einer Kreisbahn bewegendes Elektron, d. h. es gelte für den Ortsvektor des Elektrons

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

für seine Ladungsdichte[4]:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \cdot \delta(x - \cos(\omega t)) \cdot \delta(y - \sin(\omega t)) \cdot \delta(z)$$

und damit für das Dipolmoment:

$$\mathbf{p}(t) = \int_{R^3} \mathbf{r} \cdot \rho(\mathbf{r}, t) \cdot d^3r = q \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ k = \frac{\omega}{c}, \ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Man kann dieses Dipolmoment als Überlagerung von zwei Dipolmomenten in der Ebene auffassen.
In weiter Entfernung : $R_0 \ll \lambda \ll r$ gilt[5]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot k^2 \cdot \mathrm{Re}\left\{\mathbf{n} \times \mathbf{p}(t) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}\right\} \tag{12}$$

Man erhält für $q = -1.602 \cdot 10^{-19} C$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 1.602 \cdot 10^{-19} C \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k^2}{r^2} \cos(kr) \cdot \begin{pmatrix} z \cdot \sin(\omega t) \\ -z \cdot \cos(\omega t) \\ y \cdot \cos(\omega t) - x \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Das dazu gehörige elektrische Feld erhält man aus[6]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot k^2 \cdot \mathrm{Re}\left\{\mathbf{n} \times \mathbf{p}(t) \times \mathbf{n} \cdot \frac{e^{ikr}}{r}\right\} \tag{14}$$

also:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2}{r^3} \cos(kr) \cdot \begin{pmatrix} -z^2 \cdot \cos(\omega t) + y \cdot (x \cdot \sin(\omega t) - y \cdot \cos(\omega t)) \\ -z^2 \cdot \sin(\omega t) - x \cdot (x \cdot \sin(\omega t) - y \cdot \cos(\omega t)) \\ z \cdot y \cdot \sin(\omega t) + z \cdot x \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Das Elektron strahlt damit die Energiestromdichte:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \ , \ [S] = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit } \times \text{ Fläche}} \tag{16}$$

[4] Wenn die Definition der Ladungsdichte über die DIRAC-Funktion nicht bekannt sein sollte, übernehme man nur das Ergebnis für das Dipolmoment.

[5] Dabei sei R_0 der Radius der Kreisbahn auf der sich das Elektron ohne Abstrahlung bewegen würde! Die Formeln stammen aus Fliessbach: Elektrodynamik, B.I. Verlag 1993, S.250 ff.

[6] Siehe ebenfalls im Skript zur Vorlesung 8, Gleichung (4).

ab. Aus diesem Ausdruck erhält man durch Integration über die Oberfläche und weiteren Vereinfachungen den folgenden Ausdruck für die abgestrahlte Leistung:

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\left\langle \mathbf{v}'' \right\rangle \;,\; [P] = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} \tag{17}$$

Beachte hierbei:

$$\left\langle \mathbf{v}'' \right\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} \mathbf{v}\left(t'\right) \cdot dt' \;, \text{ Mittelwertbildung}$$

Die Rückwirkung dieser Abstrahlung auf das Elektron[7] beschreibt man durch die **Strahlungskraft $\mathbf{F}_{Str}$** . Sie wird in der theoretischen Physik über die folgenden Annahmen hergeleitet[8]:

1. Sie wird so bestimmt, dass die Energiebilanz im Mittel erfüllt ist, d. h. die vom Elektron abgegebene Leistung ist im Mittel gleich der vom Elektron aufgrund der Strahlungskraft abgegebenen Energie pro Zeit:

$$P = -\mathbf{F}_{Str} \cdot \mathbf{v} \tag{18}$$

2. Man setzt eine periodische Bewegung voraus, diese Vorausetzung ist bei der Kreisbewegung erfüllt.
3. Der folgende Wert der Strahlungskraft ist sehr klein im Verhältnis zu den anderen auf das Elektron wirkenden Kräften (z. B. der Coulombkraft). Dann erhält man:

$$\mathbf{F}_{Str} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3c^3}\mathbf{v}''\left(t\right) = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \mathbf{r}'''\left(t\right) \tag{19}$$

Literatur :

[1] Fliessbach, T.: Elektrodynamik, BI-Verlag 1993

[7] Das Elektron verliert Energie durch die Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle, man kann diesen Vorgang als Ergebnis des Wirkens einer abbremsenden Kraft auffassen, der Strahlungskraft.

[8] Siehe in [1] Fliessbach, S.256 ff.