

## Vorlesungen über Quantenmechanik - Vorlesung 6

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Wintersemester

ABSTRACT. Inhalt dieser Vorlesung ist der Tunneleffekt, der ein charakteristischer quantenmechanischer Effekt ist.

### 1. DER TUNNELEFFEKT DURCH EINE POTENZIALBARRIERE

#### Maple-Datei zur Vorlesung:

- QMV6Pr1.mws (Stationäre Lösungen, drei Beispiele für ein Wellenpaket)
- QMV6Pr2.mws (Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets bei frei wählbaren Konstanten)

Eine der wichtigsten und verblüffendsten Konsequenzen des Wellencharakters der Materie ist der Tunneleffekt: Teilchen können eine Potenzialbarriere mit endlicher Wahrscheinlichkeit durchdringen, auch dann, wenn ihre kinetische Energie dazu nicht ausreicht, wenn also:

$$E < V_0 \quad (1)$$

gilt. Die Situation ist in folgendem Diagramm dargestellt:

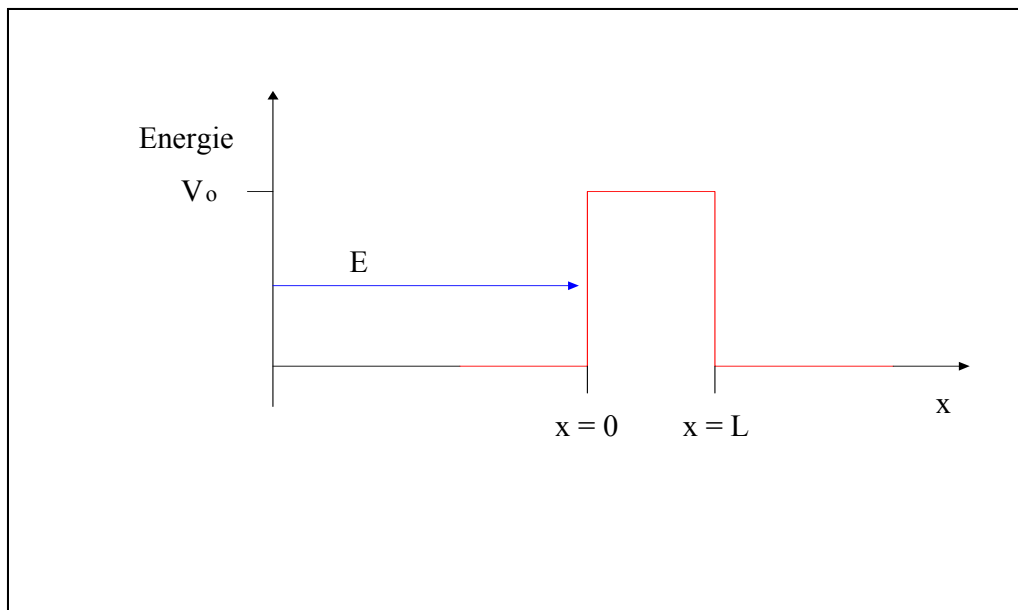


Figure 1: Energiediagramm zum Tunneleffekt

Zur Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung unterteilt man den Potenzialverlauf in

drei Gebiete:

$$\begin{aligned}\text{Gebiet 1} & : x < 0 \\ \text{Gebiet 2} & : 0 \leq x \leq L \\ \text{Gebiet 3} & : x > L\end{aligned}\tag{2}$$

Mit den Definitionen:

$$\begin{aligned}k_1 & : = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \rho & : = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}\end{aligned}\tag{3}$$

erhält man wie in den Vorlesungen vorher gezeigt die folgenden Lösungen.

**Lösung im Gebiet 1:**

In diesem Bereich lautet die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_1(x) = E \cdot \varphi_1(x), \quad E = \frac{\hbar k_1^2}{2m}\tag{4}$$

Sie besitzt die Lösung:

$$\varphi_1(x) = A_1 \cdot e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}\tag{5}$$

Die *zeitabhängige Lösung* für diesen Bereich lautet somit:

$$\psi_1(x, t) = (A_1 \cdot e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\tag{6}$$

**Lösung im Gebiet 2:**

In diesem Bereich erhält man:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_2(x) + V_0 \cdot \varphi_2(x) = E \cdot \varphi_2(x), \quad E = \frac{\hbar k_1^2}{2m}\tag{7}$$

hier erhält man:

$$\varphi_2(x) = A_2 \cdot e^{\rho x} + B_2 e^{-\rho x}\tag{8}$$

Die *zeitabhängige Lösung* lautet dann:

$$\psi_2(x, t) = (A_2 \cdot e^{\rho x} + B_2 e^{-\rho x}) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\tag{9}$$

**Lösung im Gebiet 3:**

In diesem Bereich erhält man wieder die folgende Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_3(x) = E \cdot \varphi_3(x), \quad E = \frac{\hbar k_1^2}{2m}\tag{10}$$

mit der Lösung:

$$\varphi_3(x) = B_3 e^{ik_1x}\tag{11}$$

Die *zeitabhängige Lösung* hat hier die folgende Gestalt:

$$\psi_3(x, t) = (e^{ik_1x}) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\tag{12}$$

Wir schränken die Lösung deshalb ein, weil ein Anteil:

$$B_3 e^{-ik_1 x} \quad (13)$$

in der Lösung einen nach links - in Richtung fallender  $x$ -Werte - sich bewegenden Teilchenstrom liefert. Dieser müsste dann aus der Richtung wachsender  $x$ -Werte kommen. Für einen Streuvorgang durch Teilchen, die von links einlaufen, besteht jedoch keine Ursache. Zu beachten ist allerdings folgendes: Wir setzen die Lösung im Gebiet 3 nicht automatisch Null, wie wir das aus der klassischen Physik gewohnt wären<sup>1</sup>. Wir lösen ganz formal die SCHRÖDINGER-Gleichung für diesen Bereich. Um die physikalischen Konsequenzen dieses rein mathematischen Vorgehens kümmern wir uns im Folgenden.

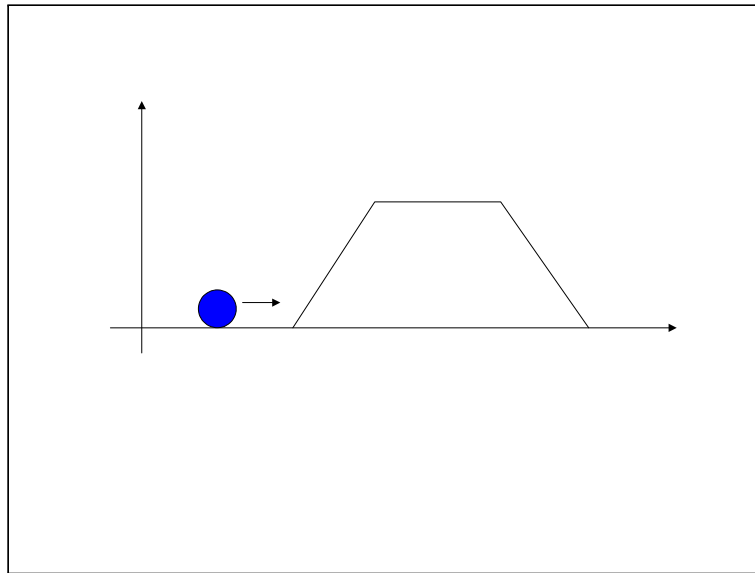


Figure 2: Zur klassischen Beschreibung: Die kinetische Energie der Kugel reicht nicht aus, um das reibungsfrei gedachte Hindernis zu überwinden.

Mittels Maple ist es möglich<sup>2</sup> die Grenzbedingungen<sup>3</sup> auszuwerten und die Koeffizienten  $A_1, A_2, B_1, B_2$  zu bestimmen. Die Koeffizienten sind im Programm angegeben und brauchen an dieser Stelle nicht wiederholt zu werden. Betrachten wir stattdessen den **Transmissionskoeffizienten  $T$** , der das Betragsquadrat des Verhältnis des durchlaufenden Teilchenstroms<sup>4</sup> zum einfallenden Teilchenstrom<sup>5</sup> darstellt. Mittels einer

<sup>1</sup>Die kinetische Energie der Kugel reicht nicht aus, den Berg zu überwinden - siehe nächstes Bild.

<sup>2</sup>Siehe im Programm "QMV6Pr1.mws".

<sup>3</sup>Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer Ableitung.

<sup>4</sup>Repräsentiert durch den Koeffizienten  $B_3 = 1$ .

<sup>5</sup>Repräsentiert durch den Koeffizienten  $A_1$ .

mit Maple<sup>6</sup> durchgeführten Rechnung erhält man:

$$T = \left| \frac{1}{A_1} \right|^2 \approx \frac{32 \cdot E \cdot (V_0 - E) \cdot e^{-2\rho L}}{4V_0^2 - 6V_0E + 5E^2} \quad (14)$$

Man kann aus diesem Ergebnis erkennen, dass das Teilchen im Gegensatz zur klassischen Erwartung eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzt, den Potentialwall zu durchtunneln. Im Gebiet 3 verschwindet die Wellenfunktion nicht mehr, vielmehr verhält sie sich wie eine gedämpfte Welle mit der Reichweite  $\frac{1}{\rho}$ . Für eine Potentiallänge von  $L < \frac{1}{\rho}$  vermag sie mit nennenswerter Wahrscheinlichkeit den Wall zu durchqueren. Das ist der **Tunneleffekt**. Der Transmissionskoeffizient verschwindet erst, wenn L gegen Unendlich anwächst, wie es im Programm "QMV6Pr1.mws" gezeigt wird.

Das folgende Diagramm aus dem Programm zeigt den Transmissionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Breite des Potenzialwalls für den Fall:

$$\begin{aligned} V_0 &= 10 \text{ Nm} \\ E &= 9.8 \text{ Nm} \end{aligned}$$

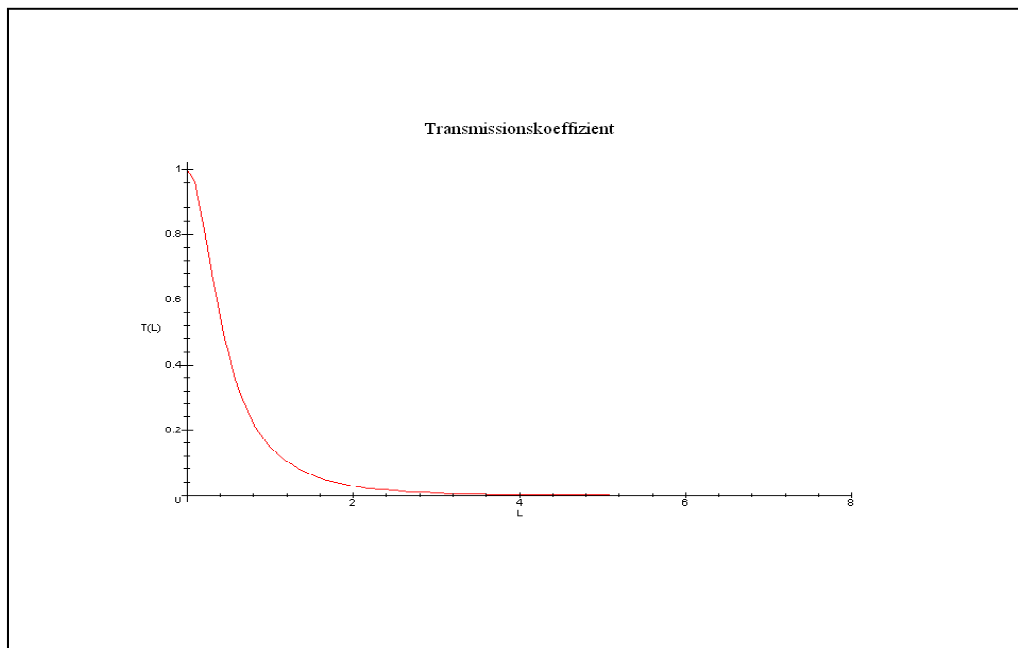


Figure 3: Graphische Darstellung des Transmissionskoeffizienten

Natürlich ist die Wahrscheinlichkeit des Tunneleffekts gleich Eins für eine verschwindende Breite  $L$ . In diesem Fall handelt es sich ja nicht um einen Tunneleffekt, sondern

<sup>6</sup>Diese wird im zur Vorlesung gehörenden Programm durchgeführt.

nur um die Ausbreitung des Teilchenstrahls. Man kann aber erkennen, dass dieser Effekt des Durchtunnels eines abstossenden Potenzials sehr schnell unwahrscheinlich wird, wenn die Breite des Potenzials zu groß oder natürlich die Energie der Teilchen zu gering ist. Diese Überlegungen stellen schon ein Hinweis darauf dar, warum man diesen Effekt in der klassischen Physik nie beobachtet hatte. In der nächsten Vorlesung soll dieser Effekt an zwei später entdeckten Problemen<sup>7</sup> studiert werden. Für den obigen Fall, in dem die Energie der einfallenden Teilchen nur wenig geringer als die Energie  $E$  ist erhält man das folgende Diagramm der Teilchenstromdichte:

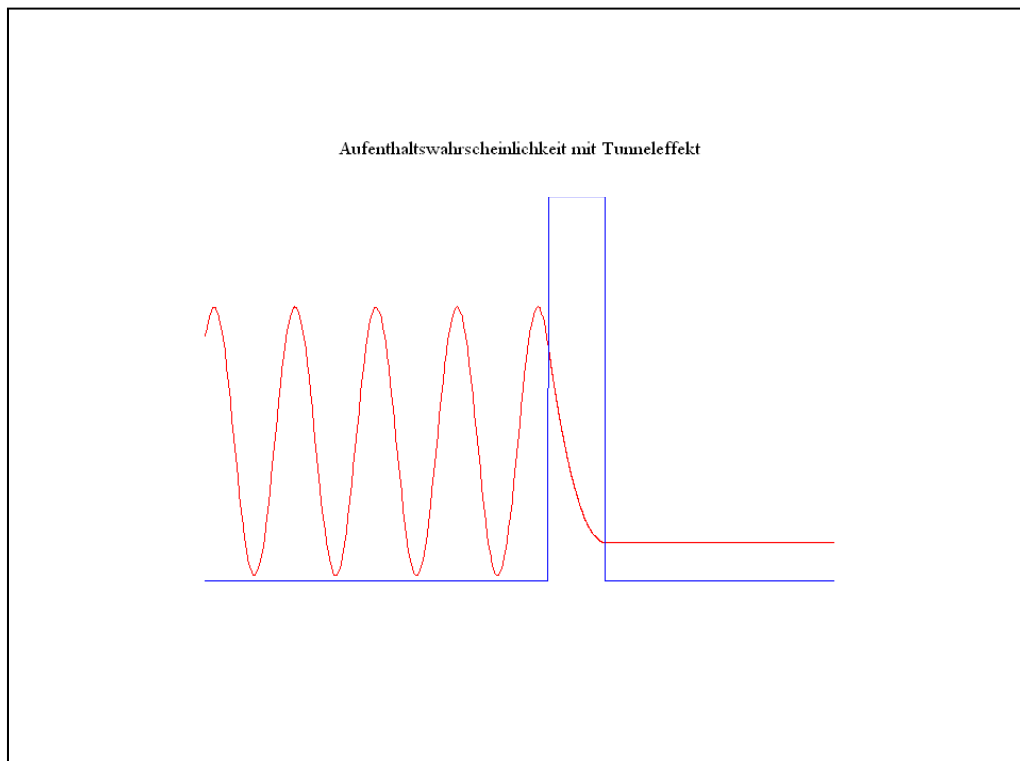


Figure 4: Darstellung von  $|\psi(x)|^2$  im stationären Fall. Der Tunneleffekt ist deutlich zu erkennen.

Man kann in diesem Bild sehr deutlich den Tunneleffekt erkennen, die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen den Potenzialwall durchtunneln ist zwar klein, aber sie verschwindet eben nicht! Noch deutlicher ist dieser Effekt in den Animationen im Programm "QMV6Pr1.mws" zu erkennen.

<sup>7</sup>Im Skript 7 zur *Quantenmechanik* wird der radioaktive Zerfall und dem Tunneleffekt in der Diode über dieses theoretische Ergebnis der Quantenmechanik erklärt.

## 2. ENTWICKLUNG EINES GAUSS-WELLENPAKETS

Im Falle diskreter Energieeigenwerte kennen wir bereits die allgemeine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung als Überlagerung der Lösungen der zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \\ a_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \cdot \varphi(x, 0) \cdot dx\end{aligned}\tag{15}$$

Nun haben wir den Fall, dass wir kontinuierliche Energiewerte  $E$  haben, die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung lieferte keine Einschränkungen an  $V_0 > E$ . In diesem Fall erhält man die allgemeine Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung durch:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E(k)t} \cdot \varphi_k(x) \cdot dk\tag{16}$$

wobei nun gilt:

$$\begin{aligned}E(k) &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < V_0 \\ \varphi_k(x) &: \text{Lösung der zeitunabhängigen Gleichung}\end{aligned}\tag{17}$$

Im Programm "QMV6Pr1.mws" wird dieses Integral über eine Reihe von „Tricks“ gelöst, die an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden sollen<sup>8</sup>. Die Funktion  $g(k)$  wird als GAUSS-Funktion gewählt, was sinnvoll ist, da eine Messung für das Elektron Impulswerte liefert, die um einen Wert  $k_0$  streuen<sup>9</sup>:

$$g(k) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma_k^2}}\tag{18}$$

Im folgenden soll nun wieder die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets für den Fall  $E < V_0$  betrachtet werden. Dabei gehen wir wie gewohnt vor. In diesem Fall gibt es allerdings einiges im voraus zu überlegen. Zum einen müssen wir zur Berechnung der Integrale das Wellenpaket im Impulsraum relativ scharf zentrieren. Das ermöglicht dann eine Berechnung der Koeffizienten, die aus den Stetigkeitsbedingungen als Funktion an der Stelle  $k = k_0$  folgen und eine Auswertung zwischen den Integrationsgrenzen Null und Unendlich. Dadurch kann man die so entstehenden Integrale berechenbar gestalten. Allerdings werden damit natürlich die Wellenpakete im Ortsraum enorm breit. Zu breit dürfen sie aber auch nicht werden, damit der Effekt als Ganzes noch am Bildschirm zu erkennen ist. Damit ist aber die Breite des

<sup>8</sup> So wird das Potenzial  $V_0$  auch als ein Ausdruck  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  mit  $k = K_0$  verstanden und nun werden nur  $k < K_0$  im Integral behandelt. Die anderen Verfahren sind ebenfalls in den letzten Vorlesungen schon vorgestellt worden.

<sup>9</sup> Jeder einzelne Impulswert ist dabei nicht genau, sondern nur im Rahmen der Unbestimmtheitsrelation bekannt.

Potentials stark eingeschränkt, denn einen gut sichtbaren Tunneleffekt sieht man nur für den Fall:

$$L < \frac{1}{\sqrt{K_0^2 - k_0^2}} \quad (19)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} K_0 & : = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \\ k_0 & : = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

In der konkreten Rechnung werden die beiden Konstanten  $m$  und  $\hbar$  aus Gründen der Darstellbarkeit wieder gleich Eins gesetzt. Man steht also vor dem folgenden didaktischen Dilemma: Will man auf der einen Seite ein breites Potenzial - also großes  $L$  - so muss  $k_0$  relativ nahe bei  $K_0$  liegen. Wenn dies aber der Fall ist, muß die GAUSS-Funktion im Impulsraum sehr scharf sein, um die Bedingungen der Berechenbarkeit der Integrale noch zu erfüllen. Dies bedeutet dann aber ein zu breites Wellenpaket im Ortsraum. Aus diesem Grund wird im Folgenden so vorgegangen, das  $L$  relativ schmal ist<sup>10</sup>. Immerhin kann man aber den ganzen Effekt in der Animation deutlich sehen. Was man dagegen nicht sehen kann, ist die Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte innerhalb des Potenzials!

Betrachten wir ein paar Bilder aus der Animation für die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} K_0 & : = 9.85 \frac{1}{m} \\ k_0 & : = 4.93 \frac{1}{m} \\ \sigma_k & : = 0.009 \frac{1}{m} \\ L & \approx 0.12 m \end{aligned} \quad (21)$$

Man kann sehen, dass die Breite des Potenzials aus den oben angegebenen Gründen sehr schmal gewählt wurde und man in den folgenden Bildern also praktisch die y-Achse als Potenzial ansehen kann.

---

<sup>10</sup>Im Verhältnis zur Breite des Wellenpakets im Ortsraum.

Man erhält dann die folgende zeitliche Entwicklung der nicht-normierten Wahrscheinlichkeitsdichte:

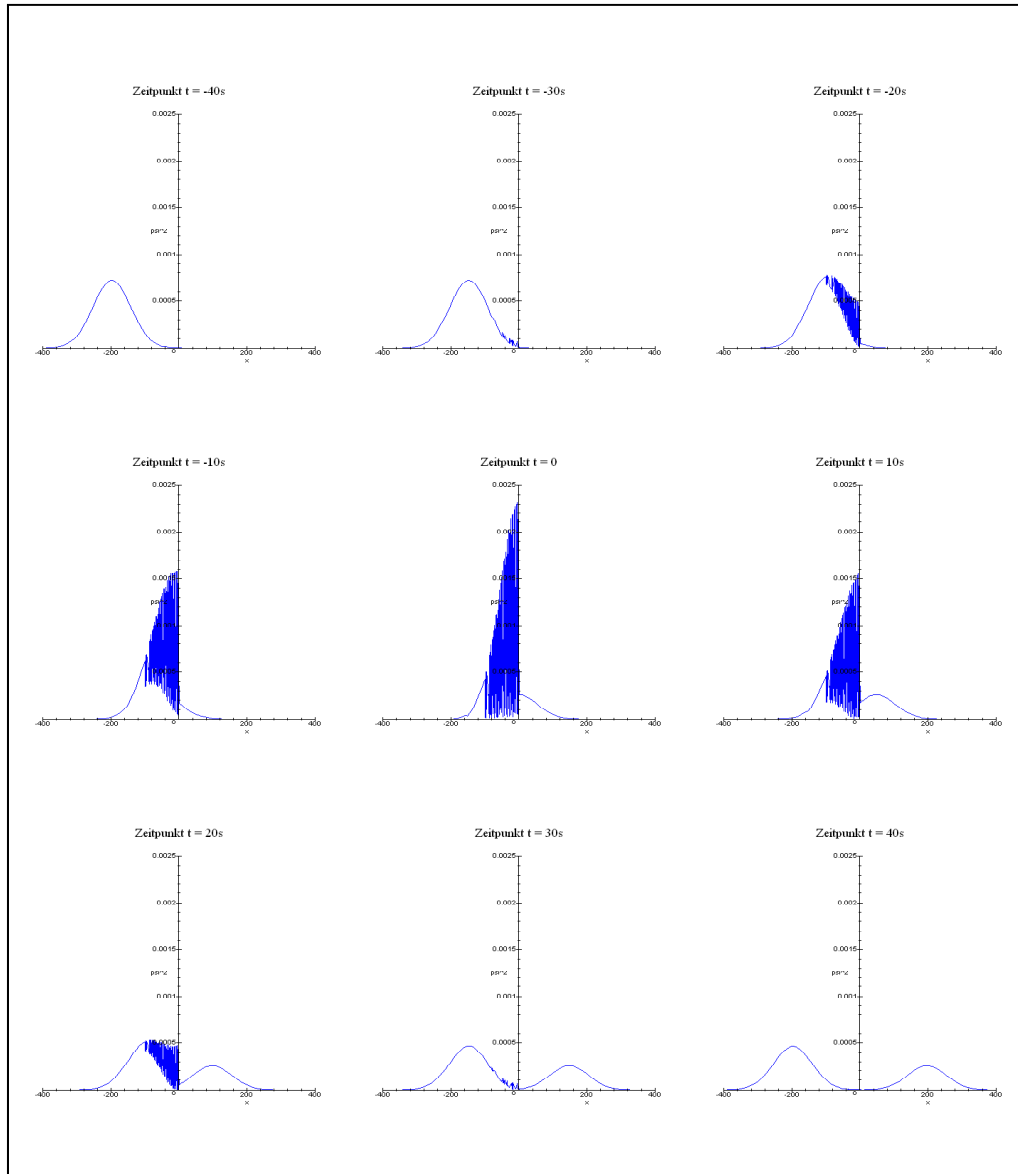


Figure 5: Tunneleffekt: Zeitliche Entwicklung von  $|\psi(x, t)|^2$

Man kann also das auf die Potenzialwand zu laufende Elektron<sup>11</sup> bzw. eine Elek-

<sup>11</sup>Elektronen dienen hier als Beispielpartikelchen. Die Darstellung ist ebenfalls für andere geladene Teilchen richtig.



tronenverteilung durch die Wahrscheinlichkeitsdichte identifizieren.

Der Tunneleffekt darf nun nicht so interpretiert werden, dass sich etwa ein Elektron der Theorie nach teilen würde. Elektronen können sich nach bisheriger Erkenntnis nicht teilen, sie werden immer als Ganzes nachgewiesen. Geteilt hat sich die Wahrscheinlichkeit das Elektron nachzuweisen. Für einen Elektronenstrahl bleibt die Interpretation im bekannten Rahmen: einige Elektronen tunneln durch den abstossende Potenzialwall hindurch, andere werden reflektiert.

Den Tunneleffekt haben wir bisher nur theoretisch vorhergesagt. Er ergibt sich mathematisch aus der Anwendung der SCHRÖDINGER-Gleichung auf einen solchen "Potenzialwall". Dieses Verhalten ist typisch für Wellen und kann in der Optik auch für Licht beobachtet werden. Wir postulieren dies aber auch für Teilchen. Natürlich musste dieser Effekt in der Natur auch nachgewiesen werden und dies gelang auch<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup>Historisch betrachtet hat man aber zuerst den Effekt beobachtet ("α-Zerfall") ohne ihn deuten zu können. Dies gelang erst durch die Quantenmechanik (GAMOV 1928, gleichzeitig mit CONDON und GURNEY).