

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 5

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Inhalt dieser Vorlesung ist die ausführliche Behandlung der homogenen Wellengleichung. Als mathematischer Einschub werden komplexe Zahlen und ihre Darstellung mit Maple vorgestellt.

1. DIE MAXWELL-GLEICHUNGEN IM VAKUUM

Maple-Dateien zur Vorlesung:

- QPVorl5Pr1.mws (Lösung eindimensionaler MAXWELL-Gleichung im Vakuum)
- QPVorl5Pr2.mws (Komplexe Zahlen plus Darstellung komplexer Funktionen)
- QPVorl5Pr3.mws (Taylorreihenentwicklung für die Exponentialfunktion)
- QPVorl5Pr4.mws (Allgemeine homogene Wellengleichung)

Ausgangspunkt der Betrachtung sind die beiden folgenden Vektorfelder der elektrischen Feldstärke sowie der magnetischen Induktion, die in kartesischen Koordinaten dargestellt werden durch:

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= \begin{pmatrix} E_1(x, y, z, t) \\ E_2(x, y, z, t) \\ E_3(x, y, z, t) \end{pmatrix} \\(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) &= \begin{pmatrix} B_1(x, y, z, t) \\ B_2(x, y, z, t) \\ B_3(x, y, z, t) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

Die MAXWELL-Wellengleichungen im Vakuum haben dann ausgeschrieben für die beiden Felder die folgende Gestalt¹:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right\}\end{aligned}\tag{2}$$

wobei:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 8.8543 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}}} \approx 299790559 \frac{m}{s}\tag{3}$$

die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

Diese Gleichungen kann man nun in die einzelnen Komponenten aufspalten. Da die beiden Gleichungen in ihrer mathematischen Struktur identisch sind, werden die

¹Siehe Skript 4 zur Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (29) und (30). Zu beachten ist dann nur noch $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}$, wie MAXWELL experimentell herausfand. Auf diesen Aspekt wird in Skript 13 dieser Vorlesung noch einmal vertiefend eingegangen.

folgenden Betrachtungen nur für die erste Gleichung durchgeführt.
Man erhält in Komponenten ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1(x, y, z, t) &= c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_1(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_1(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_1(x, y, z, t) \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2(x, y, z, t) &= c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_2(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_2(x, y, z, t) \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_3(x, y, z, t) &= c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_3(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_3(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_3(x, y, z, t) \right\}\end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir dann nur eine dieser Gleichungen, da die anderen mathematisch von gleicher Struktur sind. Im folgenden kann das betrachtete $E(x, y, z, t)$ eine beliebige Komponente des Vektorfeldes $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ sein.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, y, z, t) = c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(x, y, z, t) \right\} \quad (4)$$

Nun untersuchen wir zuerst den Spezialfall $E(x, y, z, t) = E(x, t)$, d. h. unsere Komponentenfunktion sei auch nur von x und t abhängig:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, t) \quad (5)$$

Maple liefert für diese Gleichung die allgemeine Lösung:

$$E(x, t) = F_1(tc + x) + F_2(tc - x) \quad (6)$$

Da es uns im folgenden nur auf die Effekte ankommt und nicht auf physikalisch nachmessbare Werte, setzen wir $c = 1$. Im Programm "QPVorl5Pr1.mws" werden nun die folgenden Beispiele der Lösung benutzt:

1.

$$E(x, t) = E_0 \cdot (t - x)^2$$

Die Animation im Programm zeigt, wie der Schnittpunkt mit der x -Achse $P(x, 0)$ mit fortschreitender Zeit von links nach rechts über den Bildschirm wandert. Man kann diese Animation auch so interpretieren, dass die Information "Wo ist der Schnittpunkt mit der x -Achse jetzt?" über den Bildschirm wandert.

2.

$$E(x, t) = E_0 \cdot (\ln(t - x) + \ln(t + x))$$

Die Animation zeigt für diese Lösungsfunktion, dass der Schnittpunkt mit der y -Achse $P(0, y)$ sich von unten nach oben, also von negativen x -Werten in Richtung auf positive x -Werte bewegt. In diesem Falle wandert die Information "Wo ist der Schnittpunkt mit der y -Achse jetzt?" über den Bildschirm.

3.

$$E(x, t) = E_0 \left((t - x)^3 + (t + x)^3 \right)$$

Hier erkennen wir das gleiche Verhalten wie unter dem letzten Beispiel.

FAZIT:

Diese noch unphysikalischen, rein mathematischen Lösungen der MAXWELL-Gleichung zeigen, dass diese Information verschiebt. Die im Programm gezeigten Animationen dieser Lösungen zeigen, wie sich die Antwort z.B. auf die Frage nach dem Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse mit der Zeit verschiebt. Welche Information im physikalischen Sinne das für das elektrische Feld ist, werden wir noch sehen.

Man findet auch periodische Vorgänge, d. h. bei diesen bewegt sich die Information periodisch über den Bildschirm:

1.

$$E(x, t) = E_0 \left((x - t)^2 + (x + t)^2 \right)$$

Man beobachtet in der zugehörigen Animation ein periodisches Hin - und Herschwingen der Information: "Wo ist der Schnittpunkt mit der y-Achse?" .

2.

$$E(x, t) = E_0 \left((x - t)^3 + (x + t)^3 \right)$$

Man beobachtet in der zugehörigen Animation ein periodisches Hin - und Herschwingen der Tangentenrichtung im Ursprung, also der Information "Wie ist die Steigung der Funktion im Ursprung jetzt?" .

3.

$$E(x, t) = E_0 \sin \left(\frac{vt - x}{\lambda} \right)$$

Hier erhalten wir eine eindimensionale Welle: eine Erregung² breitet sich aus. Die Information "Wo ist ein zuvor gewähltes Maximum jetzt?" sieht man in Richtung wachsender x-Werte wandern.

Die Funktion:

$$E(x, t) = E_0 \sin \left(\frac{vt - x}{\lambda} \right) = E_0 \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{v}{\lambda} t - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (7)$$

$$= : E_0 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (8)$$

$$= : E_0 \sin (\omega t - kx) \quad (9)$$

ist für $\omega = \pm ck$ Lösung der MAXWELL-Gleichung. Die Konstante E_0 bestimmt die Höhe des Maximums. ω ist die Kreisfrequenz, ist sie groß, so breitet sich die Information schnell aus, tauscht ω das Vorzeichen, so läuft die Information in die entgegengesetzte Richtung. Beispiele hierfür finden sich im Maple-Programm. Verdoppelt man k , so halbiert sich der Abstand der Schrittpunkte mit der x-Achse und die (bei konstanten ω, E_0) Ausbreitungsgeschwindigkeit halbiert sich. Halbiert man k , so verbreitert sich der Abstand der Nulldurchgänge und die Ausbreitungsgeschwindigkeit verdoppelt sich (bei konstanten ω, E_0). Kehrt man das Vorzeichen von k um, so

²Z. B. das Hin - und Herbewegen eines Seils im Ursprung.

läuft die Information in die entgegengesetzte Richtung.

Man bezeichnet mit:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{2\pi}{k} : \textbf{Wellenlänge} \text{ (Abstand zweier Maxima), } [\lambda] = m & (10) \\
 \omega &= c \cdot k : \textbf{Kreisfrequenz, } [\omega] = \frac{1}{s} =: Hz \\
 \nu &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} : \textbf{Frequenz der ebenen Welle, } [\nu] = \frac{1}{s} =: Hz \\
 kx - \omega t &: \textbf{Phase}
 \end{aligned}$$

Orte gleicher Phase sind hierbei Orte konstanter E-Werte.

1.1. Mathematischer Einschub: Komplexe Zahlen. Durch Verwendung von komplexen Zahlen und Funktionen lassen sich in der Theoretischen Physik viele Sachverhalte mathematisch einfacher beschreiben. Natürlich sind alle **messbaren Größen**, die sogenannten **Observablen**, in jedem Fall reell, so dass man stets in der Lage sein muss, reelle und komplexe Darstellungen in Beziehung zu setzen.

Imaginäre Zahlen. Charakteristisch für den neuen Zahlentyp der imaginären Zahlen ist, dass ihr **Quadrat stets eine negative reelle Zahl** ist.

Def: *Einheit der imaginären Zahlen*

$$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1} \quad (11)$$

Jede imaginäre Zahl lässt sich als Produkt:

$$i \cdot y$$

mit reellem y schreiben.

Beispiele:

1.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm 2i$$

2.

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$

3.

$$\alpha^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Komplexe Zahlen. **Def.:** *Komplexe Zahl*

Die komplexe Zahl z ist die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl:

$$z = x + iy \quad (12)$$

wobei:

$$\begin{array}{ll} x & : \text{ Realteil von } z \\ y & : \text{ Imaginärteil von } z \end{array}$$

Man nennt:

$$z^* = x - iy \quad (13)$$

die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Bemerkung:

Eine komplexe Zahl ist nur dann Null, wenn Real- und Imaginärteil gleich Null sind. Die reellen und die imaginären Zahlen sind spezielle komplexe Zahlen, nämlich solche mit verschwindendem Imaginär- bzw. Realteil.

Rechenregeln für komplexe Zahlen. Bei der Aufstellung der Rechenregeln für komplexe Zahlen kann man sich an den entsprechenden Rechenregeln für die reellen Zahlen orientieren, da diese ja als ganz spezielle komplexe Zahlen aufgefasst werden können.

Addition von komplexen Zahlen:

Man addiert (subtrahiert) zwei komplexe Zahlen:

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$$

indem man die Real- und Imaginärteile getrennt addiert (subtrahiert):

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (14)$$

Produkt zweier komplexer Zahlen:

Das Produkt erhält man durch formales Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von Gleichung (11):

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (15)$$

Das Produkt ist offenbar nur dann Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist. Aus diesem Grund kann man auch den Quotienten zweier komplexer Zahlen einführen.

Quotient zweier komplexer Zahlen:

Man erhält:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} [(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)] \quad (16)$$

wobei $z_2 \neq 0$ gefordert werden muss.

Komplexe Zahlenebene. Man kann Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl als die beiden Komponenten eines zweidimensionalen Vektors auffassen:

$$z = x + iy =: (x, y) \quad (17)$$

Der Realteil entspricht dann der Projektion auf die reelle Achse, der Imaginärteil der auf die imaginäre Achse. Basisvektoren dieser sogenannten komplexen Zahlenebene sind dann:

$$1 = (1, 0) ; i = (0, 1) \quad (18)$$

Wie ganz normale zweidimensionale Vektoren kann man auch die komplexen Zahlen durch ebene Polarkoordinaten darstellen (**Polardarstellung**):

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (19)$$

und damit:

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ z^* &= r \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) \end{aligned} \quad (20)$$

Die konjugiert komplexe Zahl ergibt sich somit durch Spiegelung an der reellen Achse. Betrachte dazu die folgende Abbildung:

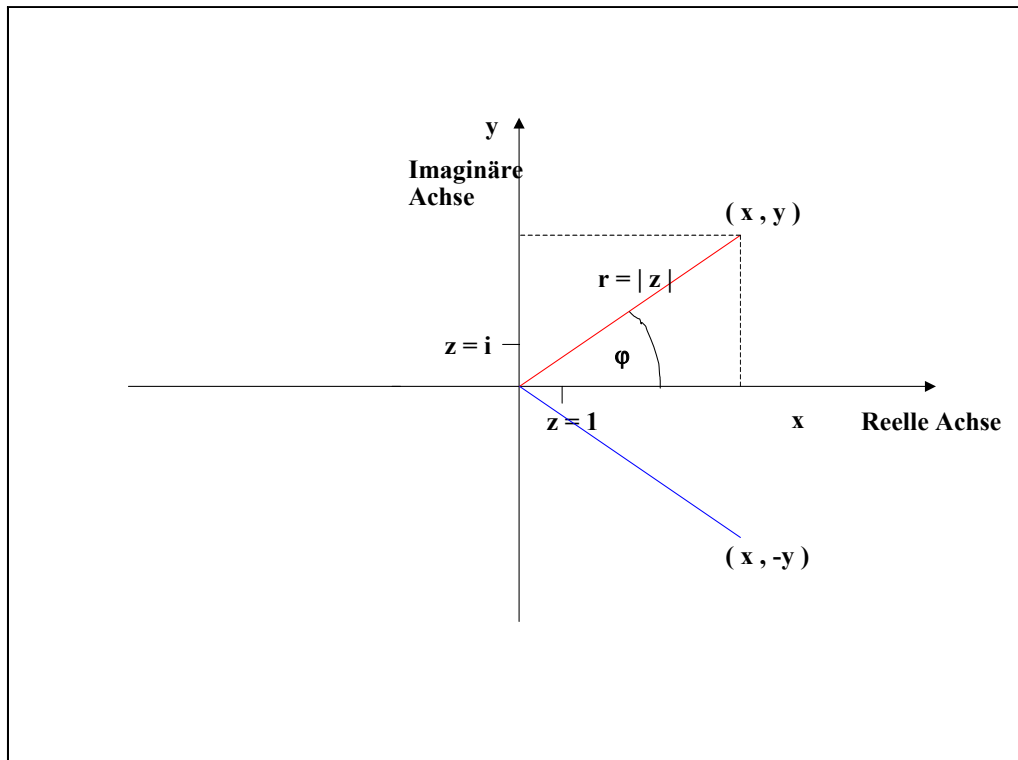


Figure 1: Komplexe Zahlenebene: Die konjugiert komplexe Zahl entsteht durch Spiegelung an der reellen Achse.

Man definiert:

$$\text{Betrag von } z: |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\text{Argument von } z: \varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (22)$$

Für jeden Wert von

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi$$

zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gibt es zwei φ -Werte zwischen 0 und 2π . Es muss derjenige φ -Wert angenommen werden, mit dem sich die Transformationsformeln (19) und (20) erfüllen lassen.

Betrachte dazu die folgende Abbildung:

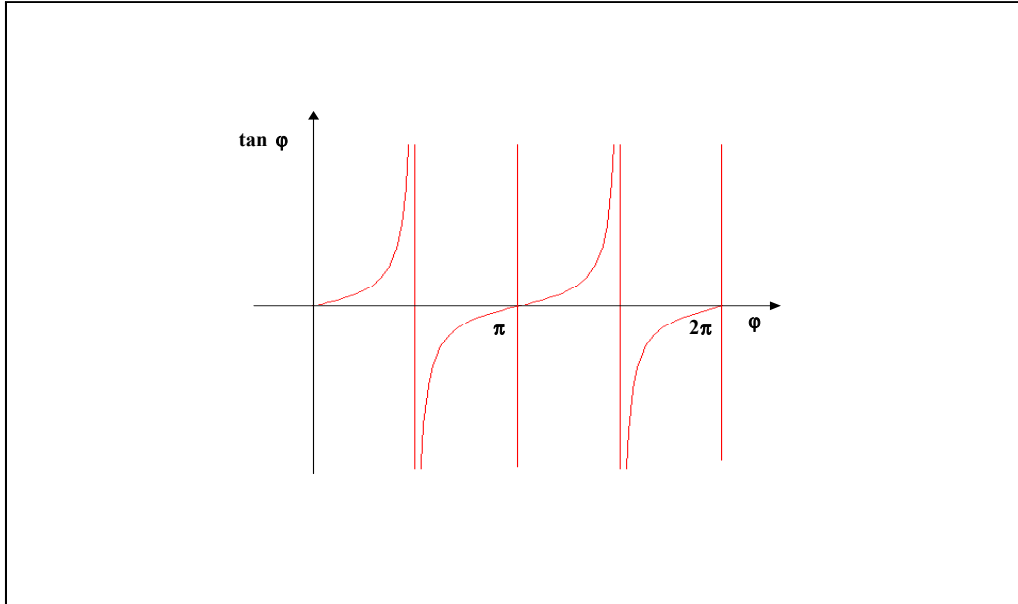


Figure 2: Für jeden Wert des Tangens gibt es zwei Argumentwerte.

Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} \quad (23)$$

wie man leicht nachrechnet:

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 + i \cdot (yx - xy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Die Exponentialform einer komplexen Zahl. Für die Exponentialfunktion e^x gilt die Reihenentwicklung³:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (24)$$

Wie man diese Reihe mit Maple erzeugt und die einzelnen Glieder graphisch darstellt, wird in der Datei QPVorl5Pr3.mws demonstriert. Entsprechende Reihenentwicklungen kennt man auch für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (25)$$

³Es handelt sich hierbei um die TAYLOR-Reihe, die nach folgender Formel entwickelt wird:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} \quad (26)$$

Aus diesen drei Reihenentwicklungen kann man die wichtige **EULER-Formel** ableiten:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (27)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich nun komplexe Zahl auch wie folgt darstellen - beachte Gleichung (19) und (20):

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad (28)$$

Da der Kosinus eine gerade, der Sinus eine ungerade Funktion von φ ist, gilt:

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi \quad (29)$$

und deshalb erhält man für die konjugiert komplexe Zahl:

$$z^* = |z| \cdot e^{-i\varphi} \quad (30)$$

Nützlich sind auch die beiden Umkehrformeln:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad (31)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (32)$$

Bemerkung:

Jede komplexe Zahl ist als Funktion von φ periodisch mit der Periode 2π :

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i(\varphi+2n\pi)}, \quad n = \pm 1, \pm 2 \quad (33)$$

Weitere Rechenregeln. Ausgehend von der Darstellung (30) erhält man:
Multiplikation:

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \Rightarrow |z| = |z_1| \cdot |z_2| ; \arg(z) = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (34)$$

Division:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \Rightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} ; \arg(z) = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (35)$$

Potenzieren:

$$z = z_1^n = |z_1|^n \cdot e^{in\varphi_1} \Rightarrow |z| = |z_1|^n ; \arg(z) = n\varphi_1 \quad (36)$$

Wurzelziehen:

$$z = z_1^{\frac{1}{n}} = |z_1|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\varphi_1}{n}} \Rightarrow |z| = |z_1|^{\frac{1}{n}} ; \arg(z) = \frac{\varphi_1}{n} \quad (37)$$

Funktionen komplexer Zahlen und ihre Darstellung. Ganz analog wie man reelle Funktionen $f(x)$ einführt, kann man auch Funktionen komplexer Zahlen betrachten. Diese Funktionen bilden die Zahlenebene \mathbb{C} der komplexen Zahlen wieder auf \mathbb{C} ab, d.h. $f(z)$ ist wieder eine komplexe Zahl. Da jede komplexe Zahl sich in Real- und Imaginärteil zerlegen lässt, kann man diese Zerlegung auch bei einer komplexen Funktion vornehmen:

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z) + i \cdot h(z) \\ g(z) &= \operatorname{Re}\{f(z)\} \\ h(z) &= \operatorname{Im}\{f(z)\} \end{aligned} \quad (38)$$

Beispiel: Die Kehrwertfunktion

Wir betrachten die Funktion:

$$\begin{aligned} w &= f(z) = \frac{1}{z} \Leftrightarrow f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\ g(z) &= g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ h(z) &= h(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Komplexe Funktionen lassen sich graphisch geschlossen nicht mehr darstellen. Eine Möglichkeit sie zu veranschaulichen, ist Real- und Imaginärteil getrennt graphisch darzustellen.

Betrachte dazu die folgende Abbildung:

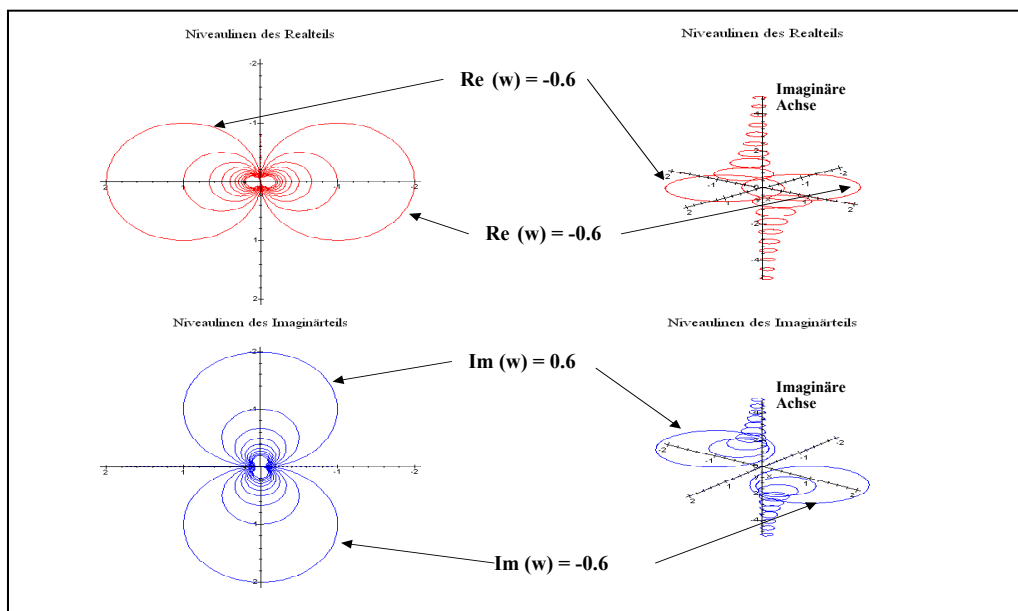


Figure 3: Niveaulinien von $\operatorname{Re}(w)$ und $\operatorname{Im}(w)$ für die Funktion $w = f(z) = \frac{1}{z}$.

Die obige Abbildung zeigt die Niveaulinien für einige ausgewählte Werte, d.h. für

die komplexe Zahl $w = \frac{1}{z}$ mit einem bestimmten Real- oder Imaginärteil werden die z-Werte in der Form $z = x + iy$ als Bahnen in der x-y-Ebenen gezeichnet. Eine weitere Möglichkeit zur graphischen Darstellung komplexer Funktionen ist die Betrachtung von speziellen Mengen von komplexen Zahlen und ihrer Abbildungen unter einer komplexen Funktion. Betrachte dazu für die Kehrwertfunktion die folgende Darstellung:

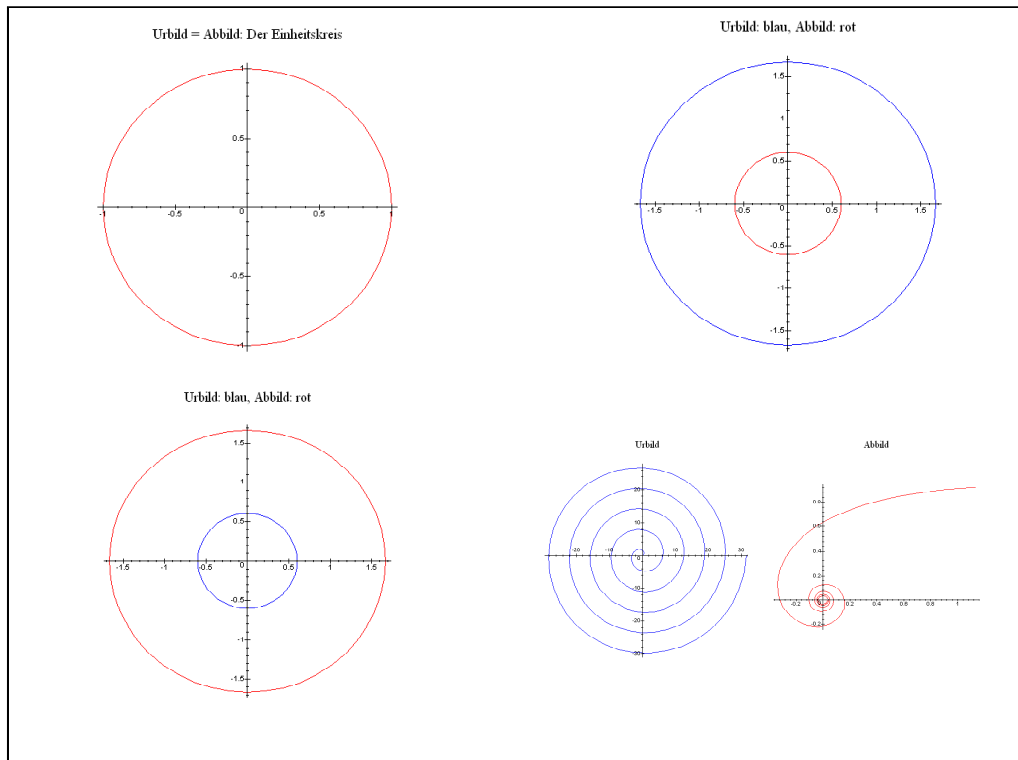


Figure 4: Urbild und Abbild von verschiedenen Mengen komplexer Zahlen durch die Kehrwertfunktion $w = \frac{1}{z}$.

Man kann erkennen, dass die Kehrwertfunktion den Einheitskreis der komplexen Zahlenebene auf sich selbst abbildet. Kreise mit einem Radius kleiner als Eins werden auf Kreise mit einem Radius größer als Eins abgebildet und umgekehrt. Die Spirale

$$z = \varphi \cdot e^{i\varphi}$$

wird auf die Spirale:

$$w = \frac{1}{\varphi} \cdot e^{-i\varphi}$$

abgebildet.

1.2. Die eindimensionale ebene Welle. Die allgemeine Form einer eindimensionalen ebenen Welle, die sich entlang der x-Achse ausbreitet, hat die folgende Gestalt:

$$E(x, t) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} = E_0 \{ \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t) \} \quad (39)$$

Die Anbindung der experimentellen Gegebenheiten an diesen komplexen Ausdruck geschieht durch die Bildung des Realteils. Es ist in vielen Rechnungen sinnvoll, zuerst mit komplexen Größen zu rechnen und dann am Ende den Realteil des Ausdrucks zu bilden, um dieses Ergebnis mit den experimentellen Daten zu vergleichen.

Die obige Darstellung macht keine Aussage darüber, in welche Richtung das E-Feld zeigt. Die folgende Darstellung zeigt eine ebene Welle, bei der die Ausbreitungsrichtung die x-Achse ist, der Feldvektor des elektrischen Feldes zeigt in y-Richtung:

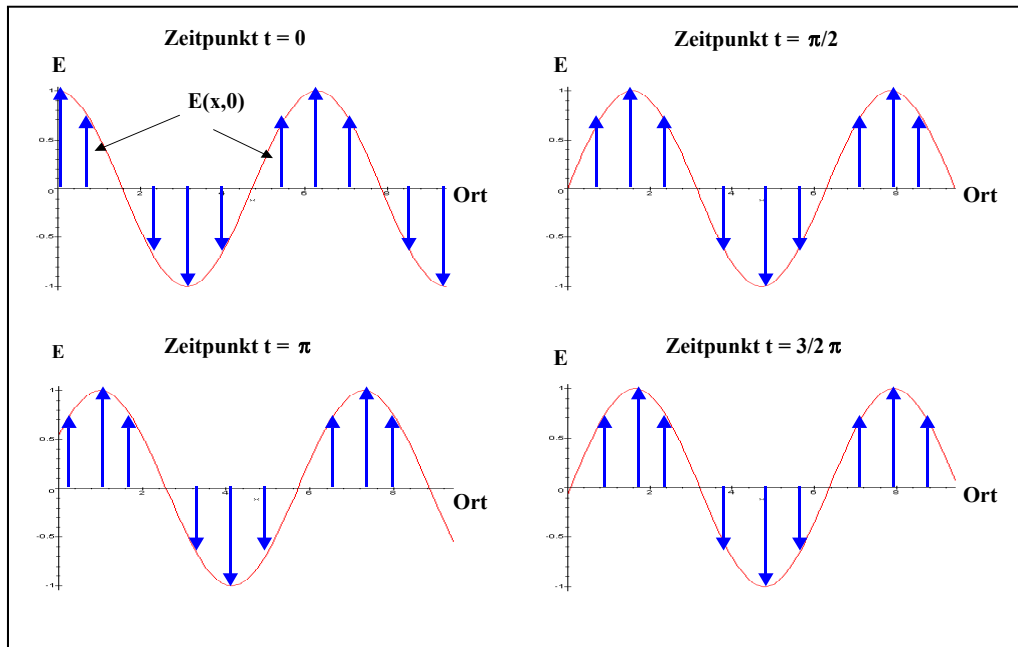


Figure 5: Ebene Welle des elektrischen Felds, breitet sich in positiver x-Richtung (Ort) aus, der Feldvektor zeigt in y-Richtung (E).

Man kann leicht zeigen, dass die Summe zweier Elementarwellen:

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= E_{01} \cdot e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}, \quad \omega_1 = ck_1 \\ E_2(x, t) &= E_{02} \cdot e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}, \quad \omega_2 = ck_2 \end{aligned}$$

wieder eine Lösung der MAXWELL-Gleichung ist⁴. Dies gilt allgemein für beliebige Überlagerungen von Lösungen der MAXWELL-Gleichung:

$$E(x, t) = \sum_{n=1}^N E_n \cdot e^{i(k_n x - \omega_n t)}, \quad \omega_n = c \cdot k_n \quad (40)$$

⁴Im Programm QPVorl5Pr1.mws wird dies demonstriert.

Für $k_1 = k_2$ (d. h. $\omega_1 = \omega_2$) erreicht man für reelle⁵ E_{01}, E_{02} eine "konstruktive Addition":

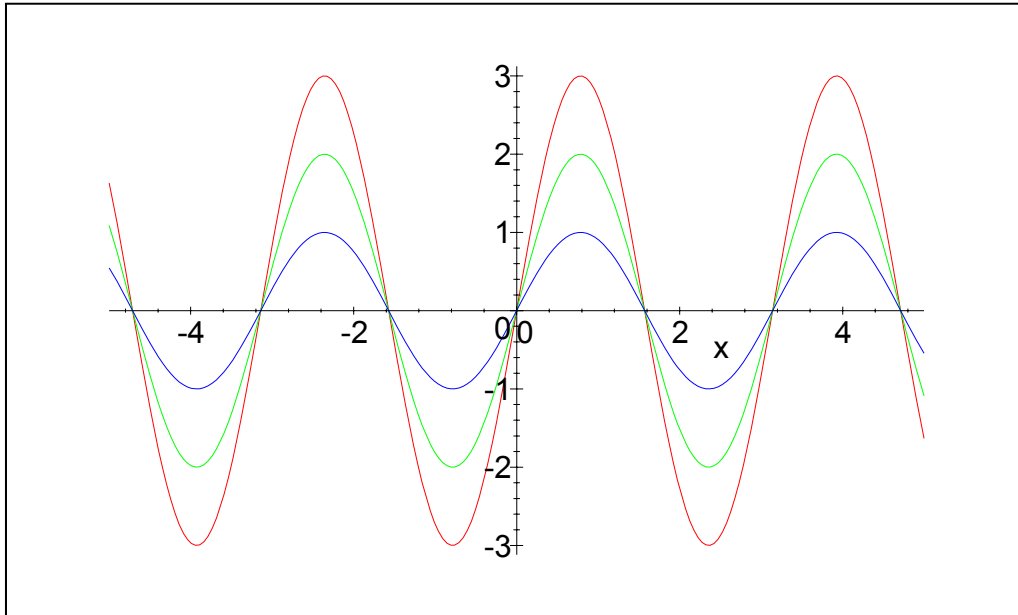


Figure 6: **Konstruktive Interferenz:** Die rote Funktion zeigt die Addition der beiden Graphen.

Lässt man auch komplexe Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} E_{01} &= |E_{01}| e^{i\Phi_1} \\ E_{02} &= |E_{02}| e^{i\Phi_2} \end{aligned}$$

dann erhält man für den Fall:

$$k_1 = k_2 \text{ und } \Phi_1 - \Phi_2 = 2n \cdot \pi, n = 0, 1, \dots \quad (41)$$

"**Konstruktive Interferenz**", d. h. beide Wellen verstärken sich, siehe obige Darstellung.

Im Falle:

$$k_1 = k_2 \text{ und } \Phi_1 - \Phi_2 = (2n + 1) \pi, n = 0, 1, \dots \quad (42)$$

erhält man die sogenannte "**Destruktive Interferenz**", d. h. die beiden Welle löschen sich gegenseitig aus:

⁵Das diese Konstanten auch komplex sein können wird später behandelt.

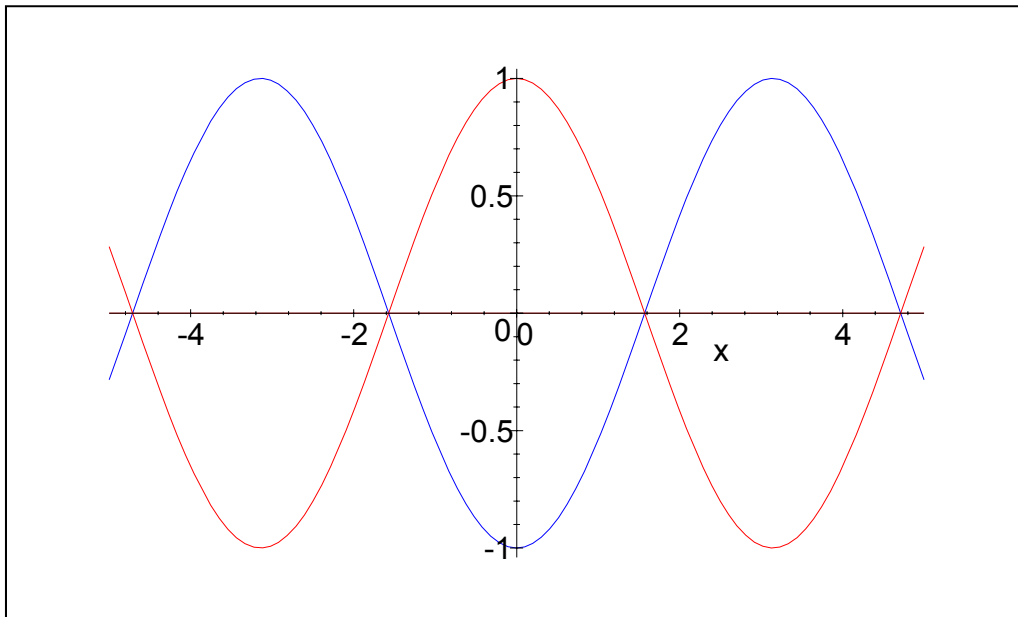


Figure 7: **Destruktive Interferenz:** die Überlagerung beider Funktionen ist die Nullfunktion.

1.3. Die allgemeine Lösung der homogenen MAXWELL-Gleichungen.

Zu den bedeutendsten Erfolgen der MAXWELL-Theorie gehört die Erkenntnis, dass sich elektromagnetische Felder unabhängig von irgendwelchen Ladungen und Strömen selbst im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Dies bedeutet nämlich, dass die Felder nicht nur mathematische Hilfsgrößen zur Beschreibung von Wechselwirkungsprozessen zwischen Ladungen bzw. zwischen elektrischen Strömen darstellen - so wurden sie ja eingeführt -, sondern eine eigenständige physikalische Realität besitzen. Diese Erkenntnis erfährt dadurch ihre Bestätigung, dass der vollständige Satz MAXWELL-Gleichungen Lösungen für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} aufweist, die vom Typ her sich im ganzen Raum ausbreitenden Wellen entsprechen. Auf die große technische Bedeutung, die die Entdeckung der elektromagnetischen Wellen erlangt hat, braucht an dieser Stelle nicht gesondert hingewiesen zu werden.

Die beiden Gleichungen unter (2) haben eine identische Gestalt und man kann sie allgemein beschreiben durch die **homogene Wellengleichung**⁶:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (43)$$

wobei Δ der LAPLACE-Operator ist:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \text{ in kartesischen Koordinaten} \quad (44)$$

⁶Diese Gleichung wird hier als Gleichung für eine skalare Funktion angegeben. Alle wichtigen Erkenntnisse lassen sich auch an der skalaren Gleichung studieren. Übertragen auf die Gleichungen unter (2) ist dies die Gleichung für die einzelnen Vektorkomponenten.

$$\Delta = \left(\frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + \frac{1}{r_{\perp}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \text{ in Zylinderkoordinaten} \quad (45)$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \text{ in Kugelkoordinaten} \quad (46)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die homogene Wellengleichung (43) von jeder Funktion der Form:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = f_{-}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + f_{+}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) \quad (47)$$

gelöst wird, wobei f_{+} und f_{-} hinreichend oft differenzierbare, ansonsten aber beliebige Funktionen der **Phase**:

$$p_{\mp}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t \quad (48)$$

mit:

$$\omega = c \cdot |\mathbf{k}| = c \cdot k \quad (49)$$

Im Folgenden soll nun die allgemeine Lösung (47) genauer untersucht werden. Dabei kann man sich auf die Teillösung f_{-} beschränken.

Bei konstanter Phase $p_{-}(\mathbf{r}, t)$ ist offensichtlich auch f_{-} konstant. Dabei beschreibt:

$$p_{-}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const.} \quad (50)$$

eine Fläche, wie das folgende Beispiel demonstrieren soll.

Beispiel: *Kugeloberfläche*

Es sei:

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r} = r \cdot \mathbf{e}_r \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k \cdot r = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Eine Fläche konstanter Phase erhält man nun z.B. für:

$$\begin{aligned} k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \omega t &= 1 \\ k \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - ckt &= 1 \\ z &= \sqrt{\left(\frac{1 + ckt}{k} \right)^2 - y^2 - x^2} \end{aligned} \quad (51)$$

Eine Animation der Bewegung dieser Kugeloberfläche kann man im Programm QPVorl5Pr4.mws sehen.

Bei konstanter Phase ist also offensichtlich auch f_{-} konstant, d.h. Flächen gleicher Phase sind auch Flächen konstanter f_{-} -Werte. Betrachtet man eine *Momentaufnahme* bei $t = t_0$:

$$p_{-}(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t_0$$

so ist die **Fläche konstanter Phase** p_{-} durch die Bedingung:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \quad (52)$$

definiert. Dieses ist die **Gleichung einer Ebene (Wellenfront) senkrecht zu \mathbf{k}** . Für alle Punkte \mathbf{r} mit gleicher Projektion $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ auf die Richtung von \mathbf{k} hat f_- denselben Wert:

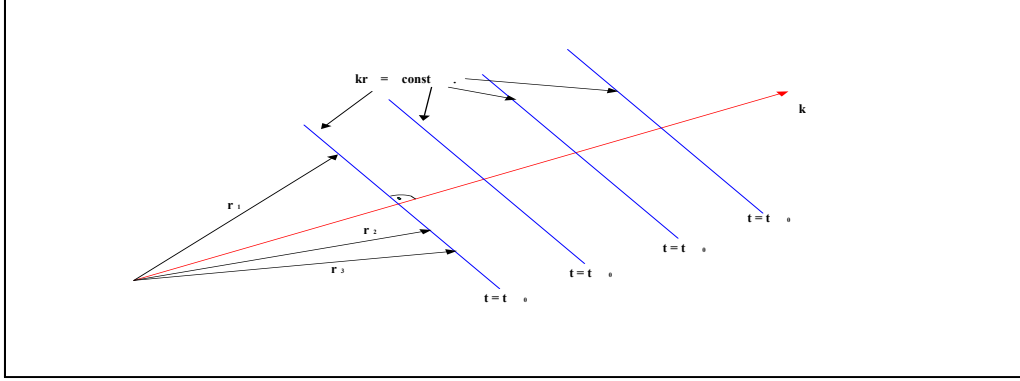


Figure 8: Flächen konstanter Phasen. Für alle Punkte \mathbf{r} mit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ auf die Richtung von \mathbf{k} hat f_- denselben Wert. Für ebene Wellen wiederholen sich für eine feste Zeit die Flächen gleicher f_{\mp} -Werte periodisch im Raum.

Betrachtet man den gesamten Raum-Zeit-Ablauf, so lautet die Bedingung für die Bewegung einer Ebene konstanter Phase $p_-^{(0)}$:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = kr_{\parallel} - \omega t = p_-^{(0)} = \text{const.} \Rightarrow r_{\parallel} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{k} = p_-^{(0)} + \frac{\omega}{k}t \quad (53)$$

Diese⁷ bewegt sich offensichtlich mit der **Phasengeschwindigkeit**:

$$\frac{dr_{\parallel}}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \quad (54)$$

in die Richtung von \mathbf{k} . Aus diesem Grund nennt man \mathbf{k} den **Ausbreitungsvektor**. Die Teillösung $f_- (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ beschreibt also die Ausbreitung einer Störung mit ebenen Fronten in Richtung von \mathbf{k} mit der Phasengeschwindigkeit c . $f_+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)$ drückt dann die entsprechende Bewegung in $(-\mathbf{k})$ -Richtung aus.

Da jede Funktion $f_- (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ bzw. $f_+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)$ die allgemeine homogene Wellengleichung löst, gilt dies speziell für die periodischen Funktionen:

$$f_- (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = A \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (55)$$

$$f_+ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) = B \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} \quad (56)$$

Raum-zeitlich periodische Gebilde wie diese, bei denen für feste Werte t die Punkte gleicher Phase eine Ebene bilden, nennt man **ebene Wellen**. Es ist sinnvoll, zunächst wieder die zweckmäßige komplexe Schreibweise zu benutzen. Dabei wird wie üblich vereinbart, als physikalisch relevante Größen nur die Realteile anzusehen.

⁷Man kann jeden Vektor \mathbf{r} in eine Komponente parallel zu \mathbf{k} : \mathbf{r}_{\parallel} und senkrecht zu \mathbf{k} : \mathbf{r}_{\perp} zerlegen.

Im Fall der ebenen Wellen wiederholen sich für eine feste Zeit die Flächen gleicher f_{\mp} -Werte periodisch im Raum, und zwar für die Abstandsvektoren:

$$\Delta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{k} = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (57)$$

Man bezeichnet den senkrechten Abstand zweier benachbarter Wellenfronten mit demselben f_{\mp} -Wert:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, [\lambda] = m \Rightarrow [k] = \frac{1}{m} \quad (58)$$

als die **Wellenlänge**, \mathbf{k} auch als **Wellenvektor**.

Hält man statt der Zeit den Ort fest, d.h. beobachtet man von einem festen Raumpunkt \mathbf{r}_0 aus, so ändert sich Φ (bzw. f_{\pm}) mit der Zeit t , erreicht aber nach der Zeit:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, [T] = s \quad (59)$$

wieder den ursprünglichen Wert. T heisst aus diesem Grund **Periode (Schwingungsdauer)**,

$$\nu = \frac{1}{T}, [\nu] = \frac{1}{s} = Hz \quad (60)$$

Kombiniert man die letzten drei Gleichungen, so erhält man den wichtigen Zusammenhang:

$$c = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda}{T} \quad (61)$$

Diese allgemeinen Resultate kann man nun auf das eigentlich in diesem Zusammenhang interessierende elektromagnetische Feld übertragen. Dabei kann man alles Wesentliche bereits bei der Betrachtung der Teillösungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \bar{\omega} t)} \end{aligned} \quad (62)$$

studieren. Entscheidend ist nun, dass die ebenen Wellen nicht nur die homogene Wellengleichung erfüllen, sondern gleichzeitig die Kopplung in den MAXWELL-Gleichungen. Aus

$$\text{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

folgt zunächst:

$$i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = i\bar{\omega} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \bar{\omega} t)}$$

Da dieses für alle Raum-Zeit-Punkte gültig sein soll, muss man

$$\omega = \bar{\omega}; \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$$

fordern. Es bleibt noch:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \cdot \mathbf{B}_0 \quad (63)$$

Aus

$$\text{div}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0$$

folgt:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0 \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (64)$$

Aus

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = 0$$

ergibt sich:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0 \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (65)$$

Schließlich bleibt noch die letzte MAXWELL-Gleichung:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

die zu

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (66)$$

führt.

Die Vektoren \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 und \mathbf{k} bilden in dieser Reihenfolge ein orthogonales Rechtssystem, d.h. \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen immer und überall senkrecht auf \mathbf{k} und aufeinander. Man spricht aus diesem Grund von **transversalen Wellen**.

Beispiel: *Elektromagnetische Wellen in z-Richtung*

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Wellenvektor \mathbf{k} in die z-Richtung eines kartesischen Koordinatensystems zeigen möge:

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_z$$

Dann lauten die die MAXWELL-Gleichungen befriedigenden Lösungen der homogenen Wellengleichung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_{0x}\mathbf{e}_x + E_{0y}\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (67)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} (-E_{0y}\mathbf{e}_x + E_{0x}\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (68)$$

Die endgültige Form der Welle ist durch E_{0x} , E_{0y} festgelegt, bei denen es sich allerdings um komplexe Größen handelt.

Beispiel: *Physikalische Lösungen für reelles E_{0x} und E_{0y}*

Dann erhält man:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{0x} \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_x \quad (69)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_{0x} \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_y \quad (70)$$

Die folgende Darstellung zeigt die Situation für einen festen Zeitpunkt⁸:

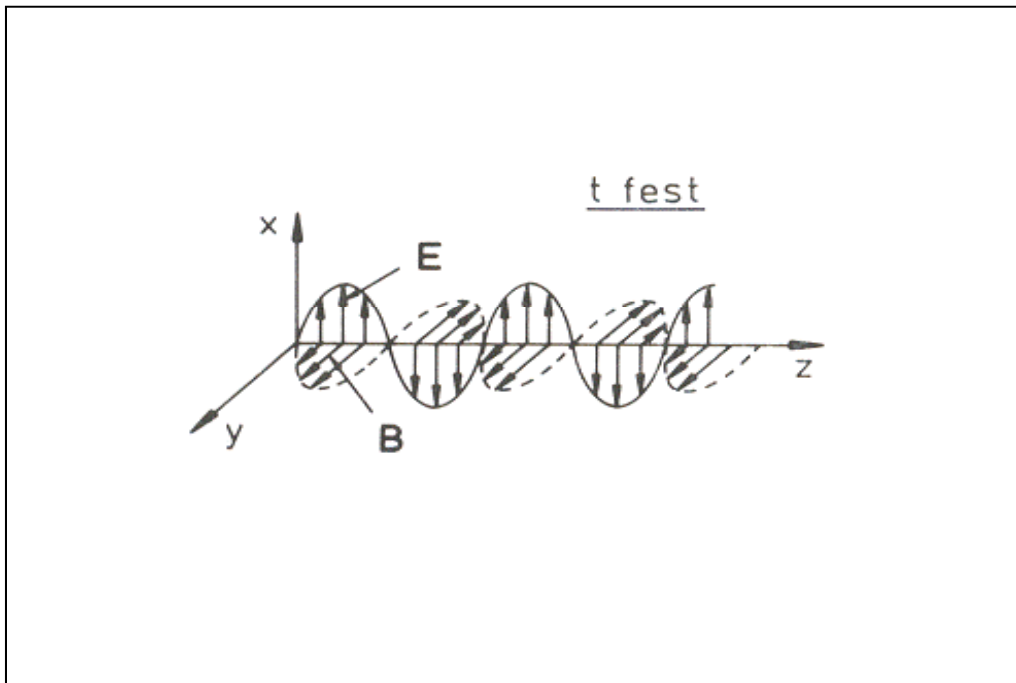


Figure 9: Transversale elektromagnetische Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, betrachtet zu einem festen Zeitpunkt t

⁸Sie stammt aus Nolting, W. Grundkurs Physik, Bd.3, Zimmermann-Neufang 1993, S. 248.