

## Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 17

J. GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

### 1. DE BROGLIE-WELLEN

**1.1. BRAGG-Reflexion.** Die Natur liefert Gitter, deren räumliche Perioden von der Größenordnung von einigen Ängström ( $1\text{\AA} \sim 10^{-10}\text{m}$ ) liegen: Kristallgitter. Es handelt sich hierbei um Raumgitter. Wir betrachten in dieser Vorlesung nur eine stark vereinfachte Theorie der Raumgitterinterferenzen, die aber die Beobachtungen hinreichend gut beschreibt.

Experimentell bestrahlt man solch ein Gitter mit Röntgenstrahlung einer bestimmten Wellenlänge und Intensität, wobei die Richtung der einfallenden Strahlung variiert werden kann. Die Intensität der reflektierten Strahlung wird unter verschiedenen Winkeln gemessen.

Man beobachtet, dass an der Ebene ein geringer Teil der Strahlung nach dem Reflexionsgesetz "Einfallswinkel = Reflexionswinkel" zurückgeworfen wird. In den anderen Richtungen wird keine gestreute Strahlung festgestellt. Werden verschiedene Einfallswinkel der Strahlung benutzt, so findet man unter ganz bestimmten Winkeln einen stark reflektierten Strahl.

Zur Erläuterung dieser Beobachtungen, betrachte das folgende Bild<sup>1</sup>:

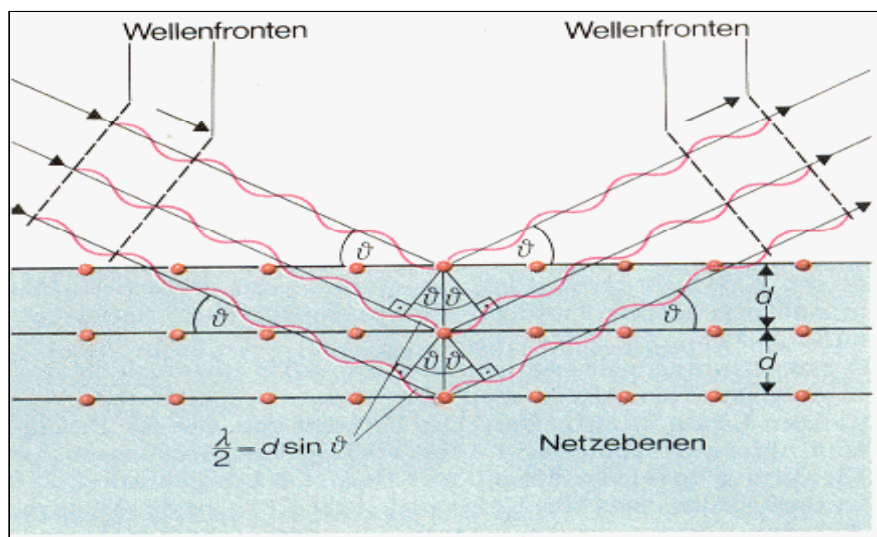


Figure 1: Reflexion von Röntgenstrahlen an einem Paket von Netzebenen. Dargestellt ist der Fall, dass der Gangunterschied zwischen benachbarten Wellen gerade eine Wellenlänge beträgt.

<sup>1</sup>Diese Abbildung stammt aus Metzler: Physik, Schroedel-Verlag 1992, S.327.

Die Gitterpunkte sollen mit gleichen Atomen besetzt sein. Diese Struktur ist natürlich rein hypothetisch, es gibt kein chemisches Element, das in dieser einfachen Struktur kristallisiert, seinen Wert erhält es aus der Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung.

Im Feld der einfallenden Welle werden die Elektronen zu erzwungenen Schwingungen angeregt<sup>2</sup>, die eine feste Phasenbeziehung mit der einfallenden Welle besitzen. Man spricht in diesem Fall von **kohärenter Strahlung**, die Atome des Gitters schwingen alle in Phase. Der Zustand der Materie bleibt dabei unverändert, es kommt also nicht zu einem Phasenübergang<sup>3</sup>. Ein Interferenzmaximum kommt in der im Bild dargestellten Situation dann zustande, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind<sup>4</sup>:

1. Die Sekundärwellen der Atome auf jeder Reihe parallel zur horizontalen Achse müssen konstruktiv interferieren.  
Für einen beliebigen Einfallswinkel  $\vartheta_E$  bedeutet dies:  $\vartheta_E = \vartheta_R$
2. Die Sekundärwellen der Atome auf Reihen parallel zur vertikalen Achse müssen konstruktiv interferieren.

Beide Bedingungen sind erfüllt, wenn<sup>5</sup>

$$2d \cdot \sin \vartheta = n \cdot \lambda, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Das ist die Bedingung für **BRAGG-Reflexion** an einer Schar von parallelen Netzebenen<sup>6</sup>, deren Abstand  $d$  beträgt. Um die Logik verstehen zu können, muss man sich vorstellen, dass man Kristalle mit Röntgenstrahlen- also einer elektromagnetischen Welle - bestrahlt hat. Man beobachtete dabei auf einer Photoplatte Interferenzmaxima. Obige Formel liefert dann die theoretische Begründung.

---

<sup>2</sup>Wir kennen diese Modellvorstellung bereits, siehe Vorlesung 10 zur Einführung in die Quantenphysik.

<sup>3</sup>Das Gitter soll z.B. nicht so intensiv bestrahlt werden, dass z.B. ein Übergang fest-flüssig stattfindet.

<sup>4</sup>Man kann sich ein schwingendes Atom als schwingenden Dipol vorstellen (negative Hülle, positiver Kern), der dann elektromagnetische Wellen abstrahlt, siehe das Modell in Vorlesung 10.

<sup>5</sup>Betrachtet man die Abbildung 1, so erkennt man, dass der Gangunterschied benachbarter Strahlen  $\Delta s = 2d \cdot \sin \vartheta$  beträgt. Für  $\Delta s = n \cdot \lambda$  erhält man eine maximale Verstärkung der Wellen.

<sup>6</sup>Im Bild senkrecht zur y-Achse.

## 2. REFLEXION AN EINER OBERFLÄCHE

Man betrachte das folgende Bild:

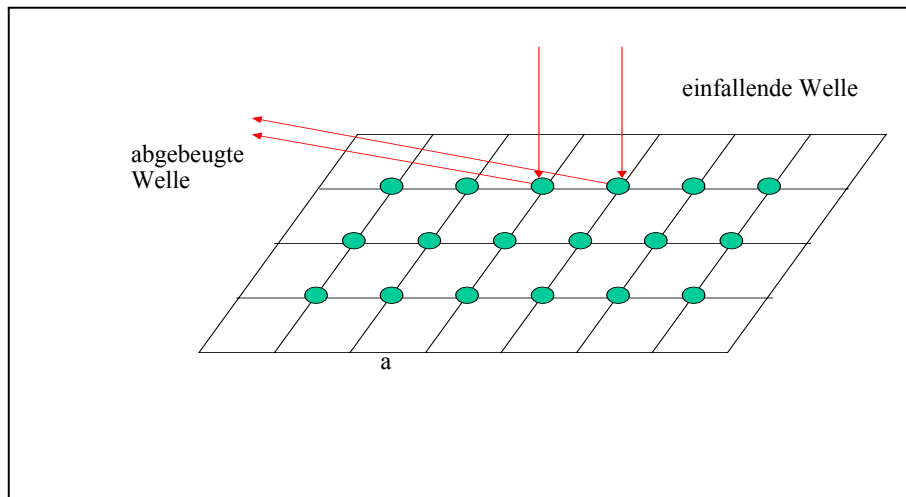


Figure 2: Darstellung der Reflexion einer Welle an der Oberfläche eines Kristalls.

und das zweite zur Erläuterung :

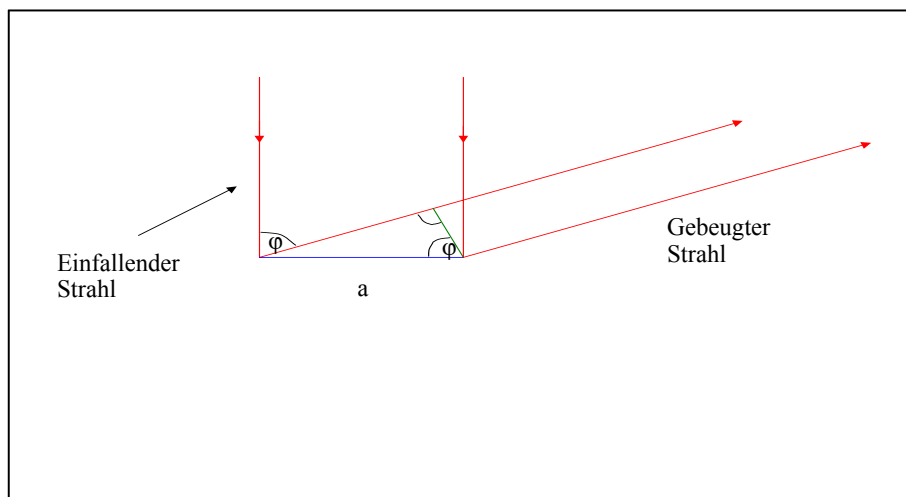


Figure 3: Zur Reflexion der einfallenden Welle.

Die Atomreihen an der Oberfläche bilden ein Reflexionsgitter. Wenn die einfallende Strahlung Wellencharakter hat und an diesem Gitter gebeugt wird, dann müssen Maxima und Minima der reflektierten Strahlung auftreten, wenn die von den einzel-

nen Atomreihen gestreuten Wellen interferieren, d.h. wenn

$$a \cdot \sin \varphi = n \cdot \lambda \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

gilt.

**2.1. DE BROGLIEs Hypothese<sup>7</sup>.** Inzwischen ist das seltsame physikalische Verhalten des Lichts - Wellen- wie auch Teilcheneigenschaften - deutlich geworden. Dass nun jedoch auch Elektronen Welleneigenschaften besitzen sollen, wirkt dennoch befremdend. Elektronen sind uns bisher als Teilchen bekannt<sup>8</sup>. Dies beruht darauf, dass uns bisher nur die Teilcheneigenschaften der Elektronen wie Masse, Impuls, Bahn usw. bekannt sind und dass ihre Welleneigenschaften, wie wir sehen werden, außerordentlich schwer nachzuweisen sind.

Im Jahre 1923 behauptete DE BROGLIE, wenn dem Licht sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften zukommen, dann sollten aus Symmetriegründen bewegte Materieteilchen, z.B. Elektronen, umgekehrt auch Welleneigenschaften zeigen.

Ausgangspunkt seiner ungewöhnlichen Überlegungen ist die aus der Relativitätstheorie folgende wichtige Äquivalenzbeziehung zwischen Energie und Masse. Danach repräsentiert ein Teilchen der Ruhemasse  $m_0$  eine Energie:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (3)$$

Bewegt sich die Masse  $m_0$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , dann vergrößert sich die Masse auf<sup>9</sup>

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (4)$$

und dementsprechend ihre Energie auf

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5)$$

**DE BROGLIE ging davon aus, dass alle Arten von Energie, also auch die Ruheenergie des Teilchens auf Bewegungsenergie zurückführbar sei.**

Dies ist das entscheidende Motiv seiner Überlegungen. Aber wie kann man sich dies vorstellen? Wenn man sich z.B. ein ruhendes Elektron als eine auf einen sehr kleinen Raumbereich begrenzte Struktur denkt, dann erhebt sich ja sofort die Frage, was bei diesem Objekt sich denn in diesem Zustand überhaupt als Bewegung zeigen kann. Es ruht doch! DE BROGLIE ordnete dem Teilchen in diesem Ruhezustand eine „*vibration périodique interne*“, d.h. eine „innere periodische Vibration“ zu. Quantitativ

---

<sup>7</sup>Die didaktisch anschauliche Herleitung wurde aus einer Arbeit von KUHN übernommen. Siehe in KUHN u.a.: Handbuch der experimentellen Physik, Bd. 8. Sek. II, Aulis-Verlag 1996.

<sup>8</sup>Alle Ergebnisse der Elektrodynamik, die bisher behandelt wurden, gehen implizit von einer Teilcheneigenschaft des Elektrons aus. Diese manifestiert sich insbesondere in der Vorstellung, dass das Elektron eine Masse, einen Impuls besitzt und insbesondere auf einen kleinen Raum - nahezu einen Punkt - konzentriert ist.

<sup>9</sup>Dieses grundlegend neue Ergebnis der Speziellen Relativitätstheorie wurde 1974 am Linearbeschleuniger der Universität in Stanford experimentell überprüft. Dort wurden Elektronen durch sehr starke Felder beschleunigt. Nach klassischer Rechnung hätte ihre Geschwindigkeit nach Durchlaufen des Beschleunigungsfeldes ein Mehrfaches der Lichtgeschwindigkeit betragen müssen. Innerhalb der Messgenauigkeit wurden jedoch nur Lichtgeschwindigkeit gemessen. Man kann dieses experimentelle Ergebnis nur verstehen, wenn man annimmt, dass die Elektronen mit zunehmender Geschwindigkeit ihrer weiteren Beschleunigung einen Widerstand entgegensetzen. Ihre Masse muss ständig zunehmen und bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit so groß werden, dass sie nicht weiter beschleunigt werden können.

ist eine solche Schwingung durch ihre Frequenz  $\nu_0$  gekennzeichnet. DE BROGLIE gelingt es, diese charakteristische Größe zu bestimmen, indem er die fundamentale Energiebeziehung PLANCKs mit der Masse-Energie-Äquivalenzrelation EINSTEINs in Verbindung zu bringt:

$$h\nu = m_0c^2 \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{m_0c^2}{h} \quad (6)$$

Im Rahmen der Relativitätstheorie bereiten die weiteren Überlegungen nun Interpretationschwierigkeiten. Fasst man nämlich die „innere periodische Bewegung“ als eine Art „innere Uhr“ mit der Frequenz  $\nu_0$  auf, dann registriert ein ruhender Beobachter, an dem das Teilchen mit der Geschwindigkeit  $v$  vorbei zieht, aufgrund der relativistischen Zeitdilatation nicht mehr die Frequenz  $\nu_0$ , sondern eine verlangsamt gehende „innere Uhr“ der Frequenz  $\nu_1 < \nu_0$ . Nach der Relativitätstheorie ergibt sich diese zu<sup>10</sup>

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (7)$$

Andererseits berechnet sich für den gleichen Beobachter aufgrund der Masse-Energie-Relation (3)

$$\begin{aligned} mc^2 = h\nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 &= \frac{mc^2}{h} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{c^2}{h} = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \nu_2 &= \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

also  $\nu_2 > \nu_0$  liefert.

Diese Diskrepanzen der Frequenzen (5) und (6), die aus zwei grundlegenden Gesetzen der Relativitätstheorie resultieren, hat DE BROGLIE lange vor große Probleme gestellt. Die Frage, wie die beiden Frequenzen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  zusammenhängen, beantwortete er in überraschender Weise durch sein „*Théorème de l'harmonie des phases*“. **Es postuliert, dass die von einem ruhenden Beobachter registrierte „innere Frequenz“ der bewegten Korpuskel  $\nu_1$  stets in Phase<sup>11</sup> ist mit der**

<sup>10</sup>Ein weiteres Ergebnis der Speziellen Relativitätstheorie ist die Aussage, dass wenn sich eine Uhr an einem Satz synchronisierter Uhren vorbeibewegt, wobei diese in einem Inertialsystem ruhen, die bewegte Uhr ein anderes Zeitintervall anzeigt als die ruhenden Uhren. Bewegt sich die Uhr mit der Geschwindigkeit  $v$  zum Zeitpunkt  $t_0$  an der ersten ruhenden Uhr vorbei - beide Uhren sowie die dritte werden hierbei synchronisiert - und trifft sie zum Zeitpunkt  $t_1$  an der zweiten Uhr an, so liest ein Beobachter auf der zweiten ruhenden Uhr die verstrichene Zeit  $\Delta t = t_1 - t_0$  ab. Die bewegte Uhr zeigt dagegen die Zeit

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

an. Diese Ergebnis wurde experimentell eindeutig bestätigt! Z.B. ist der Zerfall instabiler Elementarteilchen experimentell eine besonders wichtige Uhr. Experimentell ist eindeutig belegt, dass die mittlere Lebensdauer instabiler Teilchen gemäß obiger Formel zunimmt, wenn sie bewegt werden.

<sup>11</sup>Die Phase ist in der Schwingungs- und Wellenlehre ganz allgemein die Bezeichnung für eine Größe, durch die der Schwingungszustand einer Schwingung zu jedem Zeitpunkt bzw. der Schwingungszustand einer Welle zu jedem Zeitpunkt *und* an jedem Ort bestimmt ist.

**Frequenz  $\nu_2$  der an ihm "vorüberziehenden Welle.** Das ist aber nur dann der Fall, wenn sich diese Welle mit der *Phasengeschwindigkeit*

$$u = \frac{c^2}{v} \quad (9)$$

ausbreitet.

Anschaulich kann man sich die Frequenz der „inneren Uhr“ als Frequenz schwingender Federpendel vorstellen. Betrachtet man in diesem Modell die schwingenden Pendelkörper bezüglich eines mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Systems, indem man z.B. die schwingenden Federpendel auf einem Wägelchen mit der Geschwindigkeit  $v$  vorbeiführt, so erscheinen die Schwingungszustände des Pendels dem Beobachter „nacheinander“. Physikalisch sagen wir, sie seien „phasenverschoben“. Der Beobachter sieht also keine „richtige“ Welle, sondern eine sogenannte „Phasenwelle“. Diese Idee der Phasenwelle resultiert letztlich daraus, dass es nach der Relativitätstheorie keine „absolute Zeit“ gibt, sondern auch die Zeitkoordinate eine Transformation erfährt. Bezeichnet man die Zeitkoordinate in dem mit der bewegten Korpuskel festverbundenen Koordinatensystem mit  $t'$  und die Zeitkoordinate in dem System des Beobachters, hinsichtlich dessen die Korpuskel sich mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  bewegt mit  $t$ , dann gilt die relativistische Zeit-Transformation

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (10)$$

Die „innere Vibration“ lässt sich darstellen durch die Formel

$$\psi = \psi_0 \sin(2\pi\nu_0 t') \quad (11)$$

Setzt man die Transformation (8) in (9) ein, so erhält man:

$$\psi = \psi_0 \sin\left(2\pi\nu_0 \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) \quad (12)$$

Wegen (6) und (7) ergibt sich

$$\psi = \psi_0 \sin\left(2\pi\nu_2 \left[t - \frac{x}{u}\right]\right) \quad (13)$$

Dies ist dann aber gerade der mathematische Ausdruck für die Phasenwelle der Frequenz  $\nu_2$ , die sich mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{c^2}{v}$$

ausbreitet. Nun lässt sich auch die Wellenlänge  $\lambda$  der Phasenwelle ermitteln. Für den Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u$ , Frequenz  $\nu_2$  und der Wellenlänge  $\lambda$  gilt allgemein:

$$u = \lambda \cdot \nu_2$$

Setzt man hier nach (7)

$$u = \frac{c^2}{v}$$

nach (6)

$$\nu_2 = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

so erhält man:

$$\lambda = \frac{u}{\nu_2} = \frac{\frac{c^2}{v}}{\frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}} = \frac{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v \cdot \nu_0}$$

Setzt man hier aus (4)

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

dann erhält man

$$\lambda = \frac{c^2}{v} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{m_0 c^2} h = \frac{1}{v} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{m_0} h$$

Unter Berücksichtigung von (2)

$$m_0 = m \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

ergibt sich schließlich die Wellenlänge der Phasenwelle:

**DE BROGLIE-Beziehung:**

**Einem Teilchen der Masse  $m$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist eine Phasenwelle der Wellenlänge**

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \quad (14)$$

**und eine Phasengeschwindigkeit  $u = \frac{c^2}{v}$  assoziiert.**

In der Literatur wird die den bewegten Teilchen assoziierte Phasenwelle auch als „Materiewelle“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist etwas unglücklich; denn sie kann leicht die falsche Vorstellung wecken, als würde bei der DE BROGLIE-Welle irgend etwas „materielles“ schwingen oder sich „wellen“. Die obige Ableitung hat gezeigt, dass dies gerade nicht der Fall ist! Dass es sich bei DE BROGLIEs Phasenwellen um eine neuartige physikalische Beschreibung handelt, zeigt bereits der Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit  $u = \frac{c^2}{v}$ . Da die Geschwindigkeit eines materiellen Teilchens  $v$  stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  sein muss, ist die Phasengeschwindigkeit  $u$  immer größer als die Lichtgeschwindigkeit, was auf den ersten Blick dem Grundpostulat der Relativitätstheorie zu widersprechen scheint, nach dem die Lichtgeschwindigkeit eine nicht überschreitbare Grenzgeschwindigkeit darstellt. Aber dieses Postulat gilt nur für Lichtwellen, deren Ausbreitung mit dem Energietransport



verbunden ist<sup>12</sup>. Die Formel  $u = \frac{c^2}{v}$  steht dazu nicht im Widerspruch.

Für DE BROGLIE gab es keinerlei experimentelle Hinweise, die seine Hypothese über den Wellencharakter der Elektronen gerechtfertigt hätten. Er konnte nicht die Existenz dieser "Materiewellen" aus einer gesicherten Theorie heraus ableiten, wie dies z.B. für die Existenz der elektromagnetischen Wellen aus der Theorie MAXWELLS gelingt. DE BROGLIE war nur in der Lage zu sagen, dass, falls eine solche Welle existiert, sie eine Wellenlänge gemäß seiner Hypothese besitzen müsste. Im Fall des Lichts ist die Interferenz der wesentliche Beleg für das Wellenmodell. Ein wellenartiges Verhalten von Materieteilchen (Elektronen) sollte somit zu ähnlichen Interferenzerscheinungen führen. Das Experiment wird damit zum entscheidenden Kriterium über die Richtigkeit seiner Hypothese.

Im Jahre 1927 beobachteten DAVISSON und GERMER bei der Entwicklung von Elektronenröhren in einem amerikanischen Industrielabor eine unerwartete Intensitätsverteilung reflektierter Elektronen. Sie dachten jedoch nicht daran, diese Erscheinung als Interferenzmuster zu deuten und dies mit einer Wellennatur ihres Elektronenstrahls in Verbindung zu bringen, sondern hielten das Muster lediglich für eine Abbildung der atomaren Struktur ihrer mit Elektronen beschossenen Probe. Erst als sie die Theorie DE BROGLIES kennengelernt hatten, deuteten sie ihre Entdeckung als Interferenzmuster und Beleg für die Wellennatur der Elektronen, mit denen sie ihre Probe beschossen hatten.

Dieser historische Verlauf einer bedeutenden Entdeckung illustriert beispielhaft EINSTEINS bekannten Satz: „Erst die Theorie bestimmt was gemessen wird“. Aus Beobachtungen und Messdaten lässt sich nicht auf direktem Wege eine Theorie ableiten, sondern Messungen erhalten erst im Rahmen einer Theorie ihre Bedeutung. Dabei erweist sich eine Theorie als brauchbar, wenn die von ihr vorausgesagten Ergebnisse mit den experimentell bestimmten Daten übereinstimmen.

DE BROGLIES Überlegungen waren rein theoretischer Art. Geleitet von seiner Hintergrundüberzeugung, d.h. der *Idee fundamentaler Symmetrieprinzipien* bezüglich Licht und Materie, gelangte er durch „eine Art innerer Erleuchtung“ zu seiner revolutionären These über die Wellennatur der Materie<sup>13</sup>.

### Hypothese von DE BROGLIE:

1. Zu jedem bewegten Teilchen gehört eine Welle, deren Wellenlänge durch  $\lambda = \frac{h}{p}$  gegeben ist.  $h$  ist das Wirkungsquantum, das PLANCK eingeführt hatte und  $p$  der Impuls des Teilchens.
2. Zwischen der Frequenz  $f$  der Welle und der Gesamtenergie  $E$  der Teilchen besteht die Beziehung  $E = hf$ .

Die Wellenlänge, die danach einem bewegten Teilchen, z.B. einem Elektron, zuzuord-

<sup>12</sup> Da nach der speziellen Relativitätstheorie die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  einer Welle stets kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  ist, ist die Phasengeschwindigkeit der "Materiewelle" immer größer als  $c$  und damit gilt:  $v_g \neq v_{ph}$ . "Materiewellen" zeigen somit stets Dispersion.

<sup>13</sup> Ein weiteres Motiv für seine ungewöhnlichen Überlegungen nennt er in seinem Nobelvortrag: „Die Bestimmung der stabilen Bahnen im Atom bringt ganze Zahlen ins Spiel, die bisher in der Physik immer nur zusammen mit den Phänomenen der Interferenz und der Eigenschwingungen aufgetreten waren. Dies brachte mich auf die Idee, dass auch die Elektronen nicht einfach als Teilchen betrachtet werden können, sondern dass ihnen eine Periodizität zugeschrieben werden muss“.

nen ist, lässt sich leicht abschätzen:

$$\begin{aligned}h &= 6.625 \cdot 10^{-34} \text{Js} \\m_{0,e} &= 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \\U &= 4000 \text{ V Beschleunigungsspannung}\end{aligned}$$

Man erhält mit diesem Werten:

$$\frac{1}{2}m_{0,e}v^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m_{0,e}}} \Rightarrow p = m_{0,e}\sqrt{\frac{2eU}{m_{0,e}}} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2e \cdot U \cdot m_{0,e}}} \quad (15)$$

Man erhält eine Wellenlänge der Größe:

$$\lambda = 1.9 \cdot 10^{-11} \text{m} \quad (16)$$

Diese Wellenlänge liegt im Bereich der Wellen von Röntgenstrahlung, so dass ein Nachweis von Welleneigenschaften bewegter Elektronen nur mit Methoden gelingen kann, die auch bei Röntgenstrahlung angewendet werden. Welleneigenschaften der Röntgenstrahlung zeigen sich in Interferenzen bei der Durchstrahlung von Kristallen.

**2.2. Experimentelle Ergebnisse.** In diesem Abschnitt wird ein experimenteller Beleg für die Hypothese DE BROGLIEs eingeführt.

**Versuch:**

Auf die durchbohrte Anode einer Elektronenstrahlröhre ist eine dünne Graphitfolie geklebt. Der gebündelte Elektronenstrahl durchläuft eine Spannung von ca. 4000 V, bevor er auf die Graphitschicht trifft<sup>14</sup>:

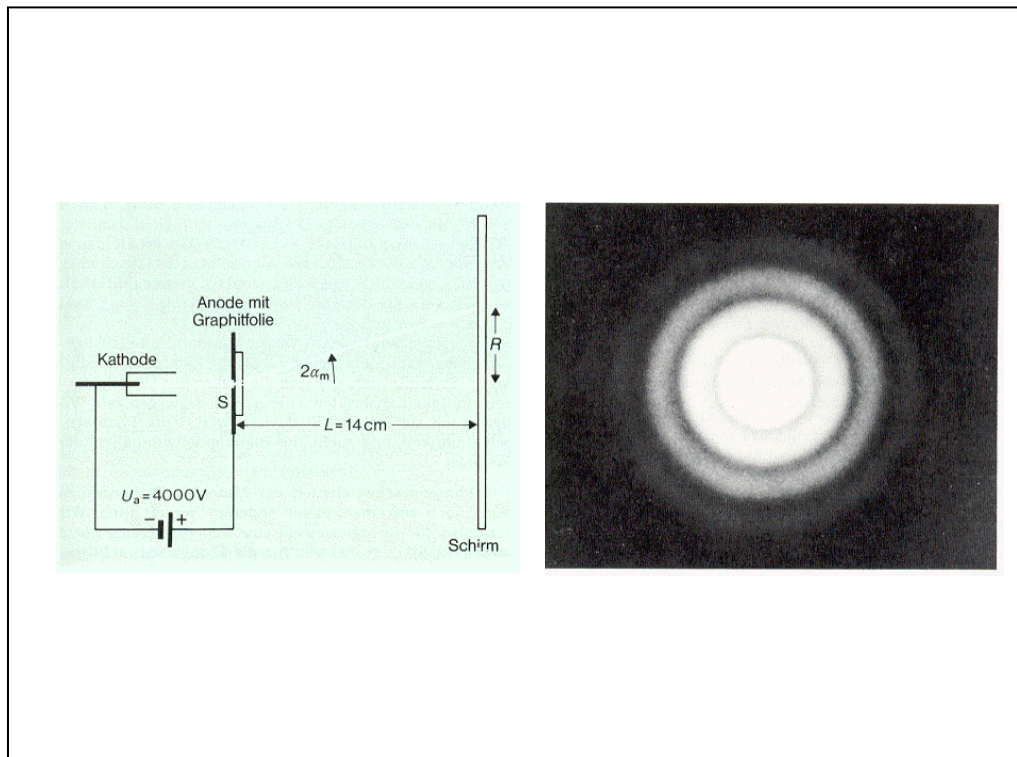


Figure 4: Linkes Bild: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur Elektronenbeugung.

Rechtes Bild: Beugungsbild des Elektronenstrahls.

**Beobachtung:**

Auf dem Leuchtschirm der Röhre erkennt man ein kreisförmiges Bild mit einer ausgedehnten hellen Mitte und zwei deutlich getrennten hellen Ringen -siehe nächste Seite. Da die Elektronen beim Durchdringen der Graphitschicht aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, also gestreut werden, erwartet man auf dem Leuchtschirm eine größere kreisförmige helle Fläche, bei der die Helligkeit von innen nach außen abnimmt<sup>15</sup>. Das Auftreten der Ringe ist jedoch überraschend und deutet auf

<sup>14</sup>Die Abbildungen stammen aus Metzler: Physik, Schroedel 1992, S.377.

<sup>15</sup>Die meisten Elektronen werden nur wenig abgelenkt, gehen also praktisch durch den Kristall hindurch.

eine Interferenzerscheinung hin. Eine ganz ähnliche Figur erhält man beim Durchstrahlen von Metallfolien oder Proben von Kristallpulver mit Röntgenstrahlen, siehe die folgende Abbildung<sup>16</sup>:

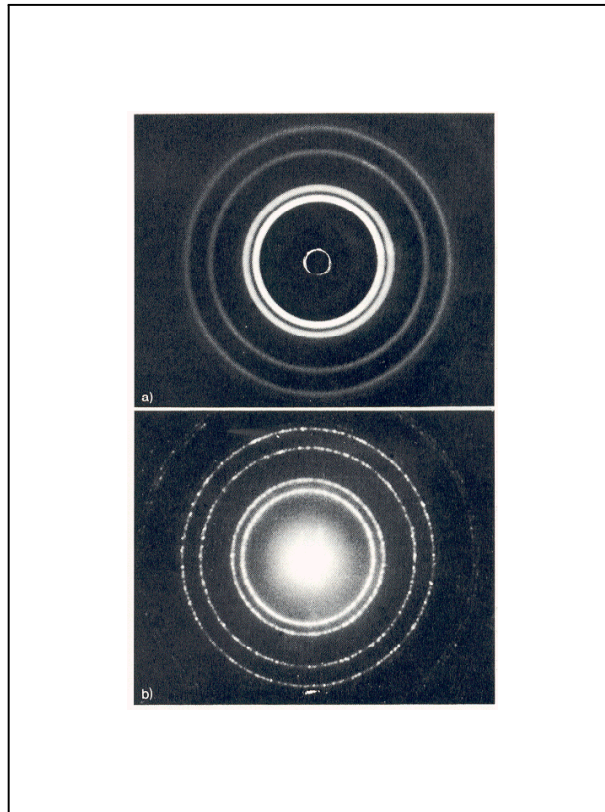


Figure 5: Interferenzbilder, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen (a) bzw. Elektronen (b) durch dieselbe Aluminiumfolie entstehen.

#### Deutung des Versuchsergebnisses:

Unter der vereinfachenden Annahme<sup>17</sup>

$$\tan(2\alpha_m) \approx \sin(2\alpha_m) = 2 \sin(\alpha_m) \quad (17)$$

kann man experimentell die Wellenlänge bestimmen:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2d \cdot \sin(\alpha_m) \approx d \cdot \tan(\alpha_m) \\ \tan(2\alpha_m) &= \frac{R}{L} \\ \lambda &\approx \frac{d \cdot R}{L} \end{aligned} \quad (18)$$

<sup>16</sup>Die Abbildung stammt aus Metzler: Physik, Schroedel, 1992, S. 377.

<sup>17</sup>Siehe Abbildung 1.

Für Interferenzerscheinungen mit Röntgenstrahlen durch Reflexion an Netzebenen gilt die BRAGG-Beziehung:

$$m \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \alpha_m \text{ mit } m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Dabei ist  $d$  der Abstand der Netzebenen und  $\alpha_m$  der Winkel, unter dem die Strahlung auf die Netzebene fällt und reflektiert wird, wenn die Intensität der reflektierten Strahlung ein Maximum erreicht.

Die Interferenzringe kommen folgendermaßen zustande: Die Graphitschicht ist aus vielen einzelnen Mikrokristallen aufgebaut, die ungeordnet nebeneinander liegen. Die Netzebenen der Mikrokristalle bilden mit dem einfallenden Strahl alle möglichen Winkel und u.a. auch stets solche, für die BRAGG-Beziehung erfüllt ist. Einfallender und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene, doch sind alle Ebenen möglich, die den einfallenden Strahl enthalten. Die reflektierten Strahlen liegen also auf dem Mantel eines Kegels, dessen Achse der einfallende Strahl ist und dessen Spitze in der Graphitfolie liegt - siehe Abbildung 2. Auf dem senkrecht zur Kegelachse stehenden Leuchtschirm ergibt sich als Schnittkurve von Kegelmantel und Schirm ein Kreis.

#### Auswertung des Versuchsergebnisses:

Bei den beiden hellen Ringen handelt es sich um Maxima 1. Ordnung, die durch Reflexionen an Netzebenen mit verschiedenen Abständen entstehen. Für die Wellenlänge ergibt sich also

$$\lambda = 2d \cdot \sin \alpha_1 \quad (20)$$

Aus der Geometrie des Aufbaus - siehe Abbildung 2 - folgt:

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{R}{L} \quad (21)$$

und mit der vereinfachenden Annahme

$$\tan 2\alpha_1 \approx \sin 2\alpha_1 \approx 2 \sin \alpha_1 \quad (22)$$

erhält man:

$$\lambda = \frac{d \cdot R}{L} \quad (23)$$

Mit den Werten  $R = 2 \text{ cm}$  und  $L = 14 \text{ cm}$  aus dem Experiment berechnet man mit

$$d = 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

die DE BROGLIE-Wellenlänge

$$\lambda = 18 \text{ pm} \quad (24)$$

Dieser Wert stimmt recht gut mit dem zuvor nach der Formel

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

bestimmten Wert überein.

Das Experiment ermöglicht es ferner, die Abhängigkeit der Wellenlänge vom Impuls zu zeigen: Eine höhere Beschleunigungsspannung führt entsprechend einer kleineren

Wellenlänge zu Beugungsringen mit kleineren Radien. Insgesamt bestätigt der Versuch die Hypothese DE BROGLIEs:

**Teilchen mit einer Ruhemasse ungleich Null zeigen ebenso Welleneigenschaften wie z.B. Photonen.**

**Bemerkung:** *Relativistischer Fall*

Für Teilchen mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit  $c$  muss bei der Berechnung der DE BROGLIE-Wellenlänge relativistisch gerechnet werden:

Der Impuls ergibt sich aus der uns schon bekannten Beziehung:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \Rightarrow p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} \quad (25)$$

Unter Verwendung von:

$$E = E_0 + E_{kin} = m_0 c^2 + E_{kin} \quad (26)$$

erhält man

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{2m_0 c^2 E_{kin} + E_{kin}^2} \quad (27)$$

und damit schließlich:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{kin} \left(1 + \frac{E_{kin}}{2m_0 c^2}\right)}} \quad (28)$$

**2.3. Elektronenbeugung am Doppelspalt.** Wir haben nun eine Wellenvorstellung für bewegte Teilchen am Beispiel der Elektronen entwickelt. Dass beim Durchgang von Elektronen durch Kristalle Beugungserscheinungen auftreten, ist ein Indiz dafür, dass dieses Vorgehen vernünftig ist. Ein weiterer Versuch, der die Welleneigenschaften von Elektronen zeigt, wurde 1956 von MÖLLENSTEDT und DÜKER durchgeführt:

Da die Elektronen in einem elektrischen Feld zwischen dem positiven Faden und den Spaltkanten abgelenkt werden, entspricht der Versuch dem Doppelspaltversuch mit Licht. Ein Doppelspaltversuch mit Elektronen wurde 1961 von JÖNSSON mit extrem zusammenliegenden und feinen Spalten ( $1$  bis  $2\mu\text{m}$  und  $0.3\mu\text{m}$ ) durchgeführt<sup>18</sup>:

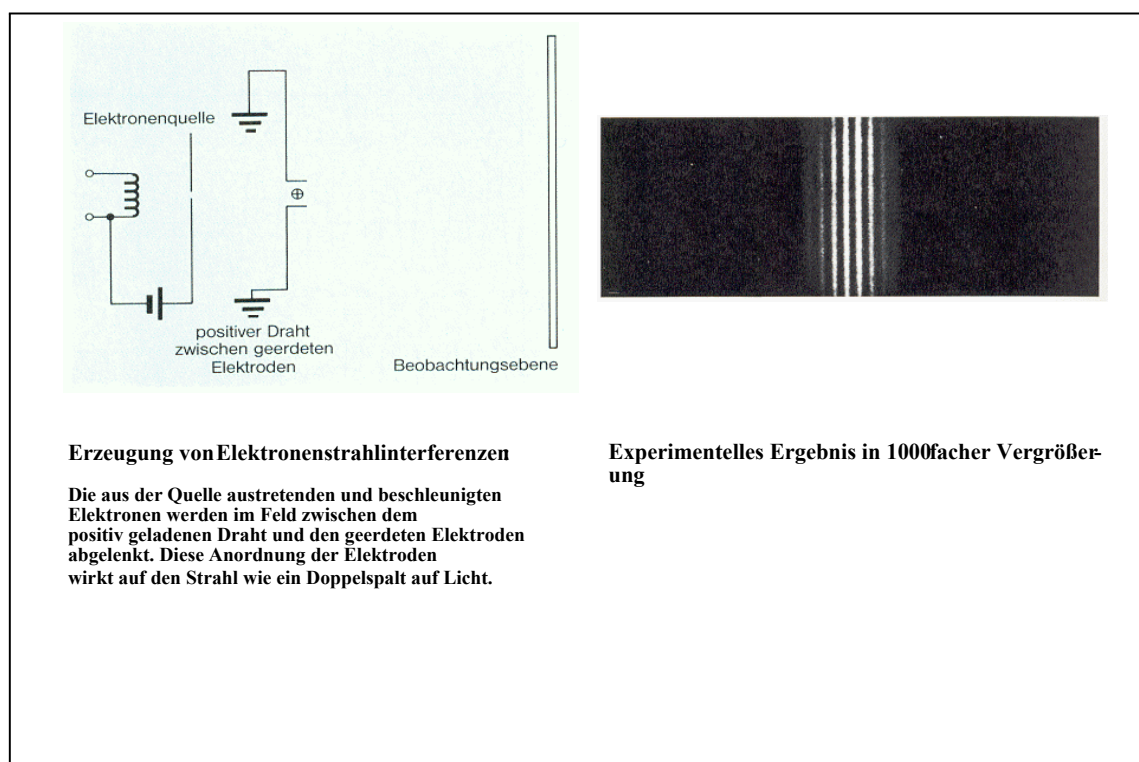


Figure 6: Zum Doppelspaltversuch mit Elektronen.

Am Beispiel des Doppelspaltversuchs soll noch einmal grundsätzlich die Teilchen- und Wellenvorstellung bei Elektronen betrachtet werden. Die Elektronen werden aufgrund des glühelektrischen Effekts aus der Metalloberfläche emittiert, in einem elektrischen Feld beschleunigt, treffen auf die Doppelspaltanordnung und werden dann auf einem Film registriert. Bei der Emission und beim Auftreffen der Elektronen auf dem Film stellt man sich die Elektronen als einzelne Teilchen vor. Dann wäre es auch naheliegend, sich vorzustellen, dass die Elektronen genauso als kleine Teilchen durch den Raum zum Doppelspalt gelangen und dort entweder durch den einen oder den

<sup>18</sup>Die Abbildung stammt aus Metzler: Physik, Schroedel, S. 380.

anderen Spalt gegangen sind. Doch genau dann, wenn man davon ausgeht, dass die Elektronen entweder durch den einen oder den anderen Spalt fliegen, lässt sich die Interferenzerscheinung nicht mehr erklären<sup>19</sup>:

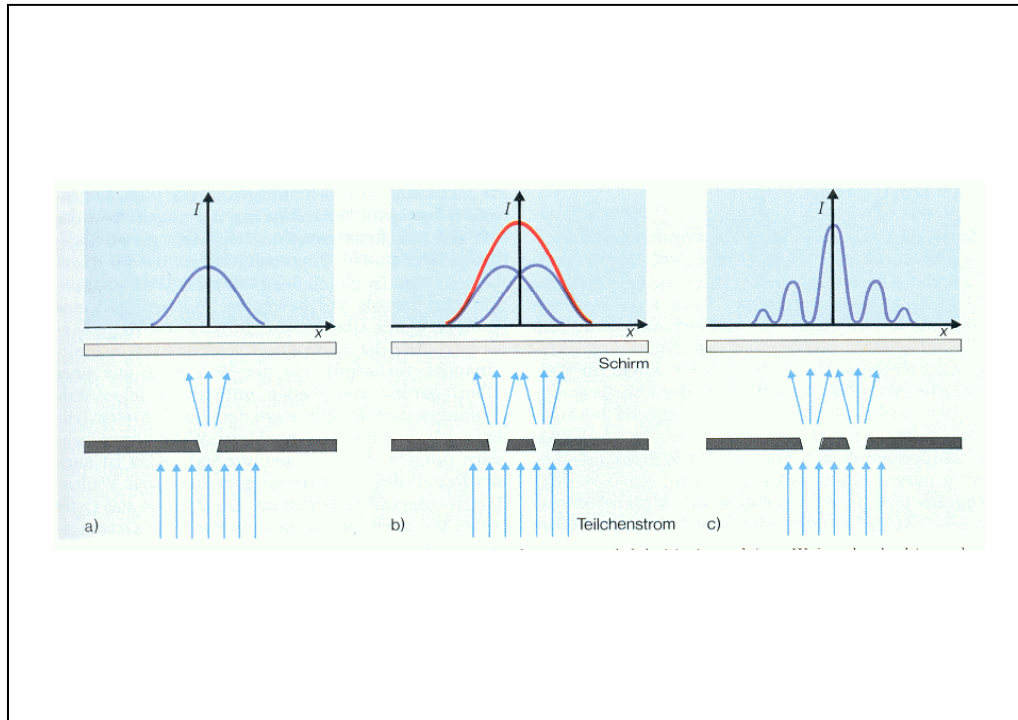


Figure 7: Zur Interpretation des Doppelspaltversuchs mit Elektronen.

Die Abbildung a zeigt, wie man sich die Verteilung von Teilchen, die durch einen schmalen Spalt fliegen und dabei ein wenig abgelenkt werden, vorstellt. Sind nun beide Spalte offen, so müsste die Summe der beiden Verteilungen die neue Verteilung ergeben. Genau das ist aber nicht der Fall, sondern es ergibt sich ein Interferenzbild. Es ist also falsch, anzunehmen, dass ein Elektron durch einen bestimmten Spalt geht, denn dies würde zu der absonderlichen Vorstellung führen, dass das Elektron wissen müsste, ob der andere Spalt offen oder geschlossen ist. (Ist nur ein Spalt offen, so treffen Elektronen in Punkten auf dem Schirm auf, in denen sich bei zwei offenen Spalten keine Elektronen nachweisen lassen.) Wie beim Licht kann man das Verhalten von Elektronen nur dann völlig beschreiben, wenn man die Wellen- und Teilcheneigenschaften nebeneinander verwendet.

Zur Beschreibung des Verhaltens von Elektronen in der Mikrophysik benötigt man eine Wellenfunktion deren Amplitudenquadrat proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen ist. Auf die Frage, ob Elektronen Teilchen oder Wellen sind, kann man mit dem Physiker FEYNMAN nur antworten: Elektronen sind keines von beiden.

<sup>19</sup>Die Abbildung stammt aus Metzler: Physik, Schroedel, 1992, S.381.