

## Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 8

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Betrachtet wird in dieser Vorlesung das elektromagnetische Feld eines schwingenden Dipols.

### 1. DER SCHWINGENDE DIPOL: ENTSTEHUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

#### Maple-Dateien zur Vorlesung:

- QPVorl8Pr1.mws (Abstrahlung elektromagnetischer Wellen eines schwingenden el. Dipols)

Aus der ersten Vorlesung zur Einführung in die Quantenphysik ist der elektrische Dipol bekannt. Wir betrachten für die folgende Untersuchung zwei Ladungsmengen  $+Q$  und  $-Q$  (realisiert durch zwei entgegengesetzt geladene Metallkugeln), die im Abstand  $a$  auf der  $z$ -Achse eines Koordinatensystems angebracht seien.

Das **E**-Feld dieser Anordnung - wenn sie statisch betrachtet, d.h. zeitlich unveränderlich ist - ist ebenfalls aus der ersten Vorlesung bekannt. Mit:

$$\mathbf{p} := Q \cdot \mathbf{a}, [d] = Cm, \text{ Dipolmoment}$$

erhält man das Feld:

$$\mathbf{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}}{r^3}, r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

Im Gegensatz zur Betrachtung des statischen Falls, soll nun die Richtung des Dipols mit einer Frequenz  $\omega$  auf der  $z$ -Achse hin und her schwingen:

$$k = \frac{\omega}{c}, \lambda = \frac{2\pi}{k}, \mathbf{p}(t) = \mathbf{p} \cdot \cos(\omega t) \quad (2)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass das Vorzeichen der Ladungen sich mit der Frequenz  $\nu$  ändert. Man kann sich das technisch realisiert z.B. in einem Schwingkreis vorstellen<sup>1</sup>, wobei die beiden Platten eines Plattenkondensators den beiden Ladungen des Dipols entsprechen.

**1.1. Einschub: Das Vektorpotential **A**.** Man kann mathematisch zeigen<sup>2</sup>, dass sich das **B**-Feld der magnetischen Induktion als Rotation eines Vektorfeldes **A** schreiben lässt. Für eine gegebene Stromdichteverteilung erhält man dieses Vektorfeld aus:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV, [\mathbf{A}(\mathbf{r})] = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 \text{Tesla} \quad (1T) \quad (3)$$

<sup>1</sup>Ein Schwingkreis besteht im einfachsten Fall aus einer Parallelschaltung einer Spule und eines Kondensators. Man beobachtet bei Anlegen einer Spannung, dass sich die Polarität des Kondensators periodisch ändert.

<sup>2</sup>Jedes gängige Lehrbuch zur theoretischen Physik zeigt diesen Nachweis. An dieser Stelle soll er aber nicht geführt werden.

Für die folgenden Betrachtung ist allerdings nur wichtig, dass ein solches Feld immer existiert. Aus diesem Vektorfeld  $\mathbf{A}$ , dass man in Anlehnung an das skalare elektrische Potential als **Vektorpotential** bezeichnet, erhält man das **B**-Feld über:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot}[\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (4)$$

Die Formel gilt dann auch im zeitabhängigen Fall!

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \quad (5)$$

**Beispiel:** *Zum Vektorpotential*

Für das statische B-Feld:

$$(\mathbf{B}) = B_0 \cdot (\mathbf{e}_z) = B_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

erhält man:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} B_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Die konkrete Gestalt des Vektorpotenzials ist analog wie bei der Bildung der Stammfunktion einer gegebenen Funktion nicht eindeutig. Das Feld in (8) ist eine erlaubte Wahl des Vektorpotenzials, die auf  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot}[\mathbf{A}(\mathbf{r})]$  führt.

Eine häufig verwendete Vereinbarung ist die **COULOMB-Eichung**:

$$\text{div}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (8)$$

Daneben gibt es aber auch die **LORENTZ-Eichung**:

$$\text{div}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9)$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (10)$$

die von besonderem Vorteil bei der Behandlung relativistischer Probleme ist.

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Felder (7) und (8):

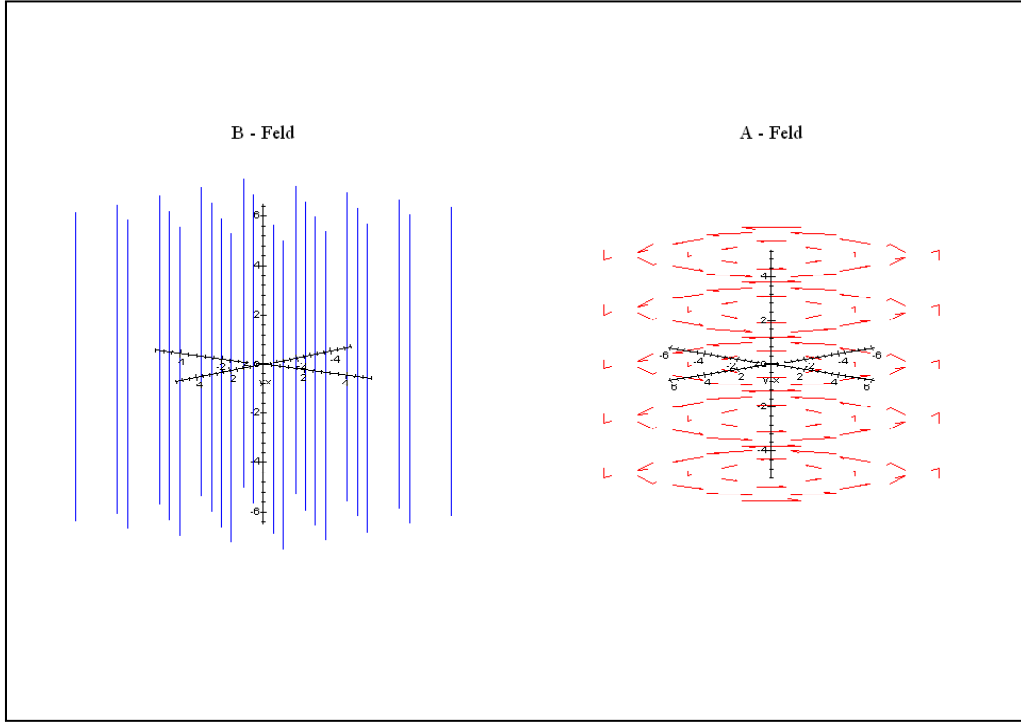


Figure 1: **A**- und **B**- Feld im betrachteten statischen Beispiel.

**1.2. Der schwingende Dipol, Diskussion der Lösung.** Als Ergebnis der Behandlung des idealen schwingenden elektrischen Dipols entlang der MAXWELL-Gleichungen<sup>3</sup> erhält man die folgenden Felder:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}(t')}{r}, \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad (11)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\dot{\mathbf{p}}(t') \cdot \mathbf{r}}{cr^2} + \frac{\mathbf{p}(t') \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right], \quad t' = t - \frac{r}{c} \quad (12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (13)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \mathbf{r}}{cr^2} + \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right] \quad (14)$$

<sup>3</sup>Die Ableitung der Ergebnisse ist zeitaufwendig und schwierig und übersteigt das Niveau dieses Kurses. Man kann die Lösung z.B. in Greiner, W.: Theoretische Physik Bd.3: Klassische Elektrodynamik, Thun 1986 finden.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \quad (15)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \text{grad}[\varphi(\mathbf{r}, t)] \quad (16)$$

Betrachtet man diese Formeln, so fällt zuerst die Zeit  $t' = t - \frac{r}{c}$  im Argument in den Gleichungen auf. Man spricht von der sogenannten **retardierten Zeit**. Ihr physikalischer Sinn ist die Berücksichtigung der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der elektromagnetischen Wellen. Man kann sich ganz anschaulich vorstellen, dass die Information über den augenblicklichen Schwingungszustand des elektrischen Dipols bis zu einem Punkt im Abstand  $r$  vom Dipol die Zeit  $\frac{r}{c}$  braucht. Mit anderen Worten der Schwingungszustand am Ort  $P$  im Abstand  $r$  vom Dipol läuft um diese Zeit  $\frac{r}{c}$  dem Schwingungszustand im Dipol (Ursprung des Koordinatensystems) hinterher! Diese Tatsache berücksichtigt man durch die Einführung der obigen retardierten Zeit  $t' = t - \frac{r}{c}$ .

Im Programm "QPVorl8Pr1.mws" werden  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feld sowie das elektrische Potential graphisch sowie in Animationen dargestellt<sup>4</sup>. Betrachten wir zuerst eine Darstellung der zeitlichen Entwicklung des elektrischen Feldes sowie des zugehörigen Potentials. Das Dipolmoment schwingt in der Richtung der  $y$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems periodisch hin und her

$$\mathbf{p} = p_0 \cos(\omega t) \cdot \mathbf{e}_y, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (17)$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ruht der Dipol und man erhält die folgende Darstellung:

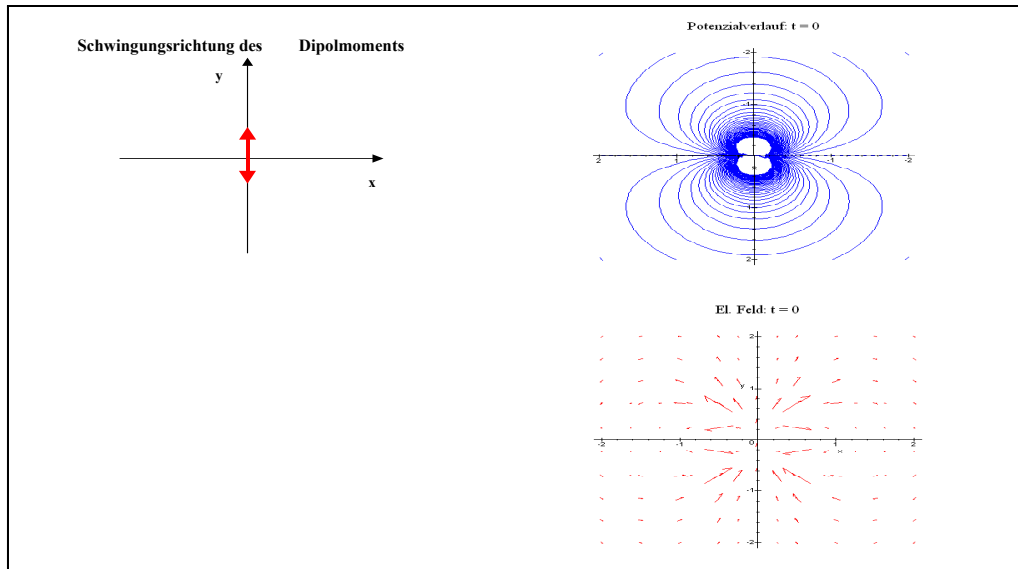


Figure 2: Situation zum Zeitpunkt  $t = 0$ : der Dipol ruht.

<sup>4</sup>Der Dipol schwingt dabei im Vakuum. Bei der Berechnung der Felder wurde die Lichtgeschwindigkeit mit  $c = 1 \frac{m}{s}$  angenommen, da es nur auf den Effekt ankommt. Die Einheit aller Achsen ist m.

Zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  kann man den bereits bekannten statischen Fall erkennen. Eine interessante Veränderung dieses Feldes zeigt die folgende Darstellung:

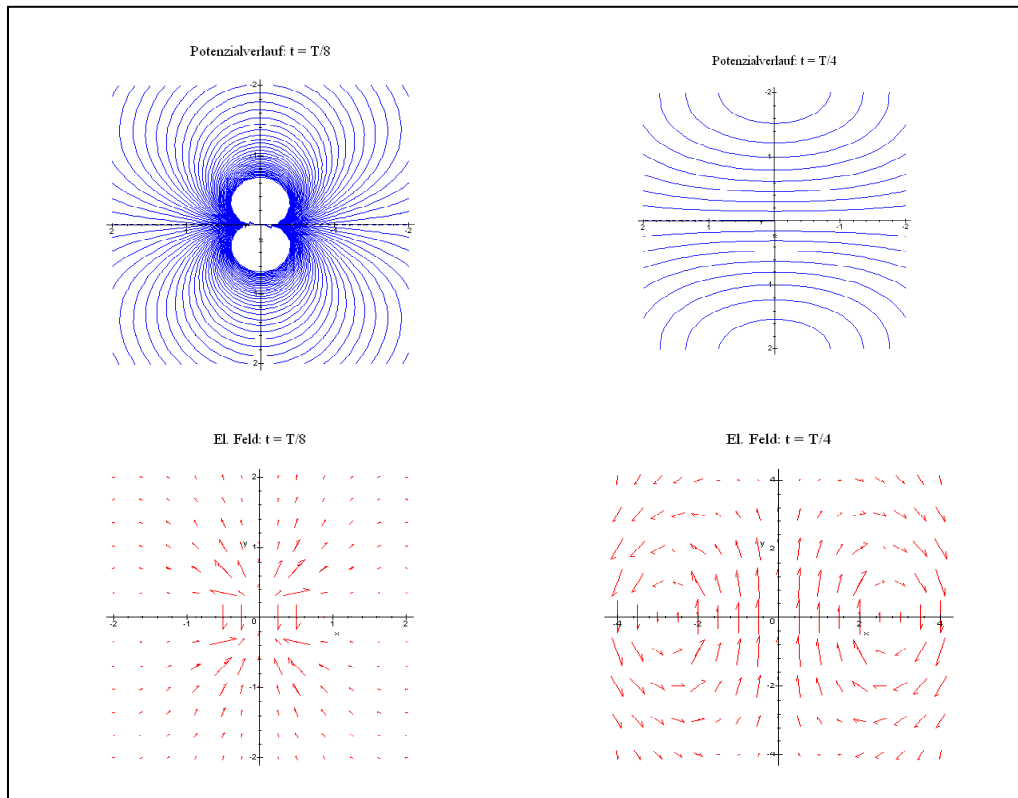


Figure 3: Situation zum Zeitpunkt  $t = \frac{T}{8}$  und  $t = \frac{T}{4}$ . Man beachte insbesondere die geschlossenen Feldlinien zum zweiten Zeitpunkt!

Während man zum Zeitpunkt  $t = \frac{T}{8}$  schon eine leichte Veränderung der Polarität des Dipols erkennen kann, tritt das eigentlich neue physikalische Phänomen zum Zeitpunkt  $t = \frac{T}{4}$  auf. Es bilden sich geschlossene elektrische Feldlinien aus, die überhaupt nicht mit den elektrischen Ladungen des Dipols im Ursprung zusammenhängen! Wir wissen, dass elektrische Feldlinien immer in einer positiven Ladung beginnen und in einer negativen enden. Hier ist der Fall zu beobachten, dass sich geschlossene elektrische Feldlinien ohne elektrische Ladungen bilden. Ursache hierfür ist die Tatsache, dass ein schwingender elektrischer Dipol ein sich zeitlich veränderndes B-Feld erzeugt! Dieses B-Feld induziert gemäß:

$$\text{rot} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (18)$$

ein elektrisches Feld! Man spricht von der **Abstrahlung einer elektromagnetischen Welle**.

Die folgende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen E- und B-Feld zu den Zeitpunkten  $t = \frac{T}{4}$  und  $t = \frac{1}{2}T$ :

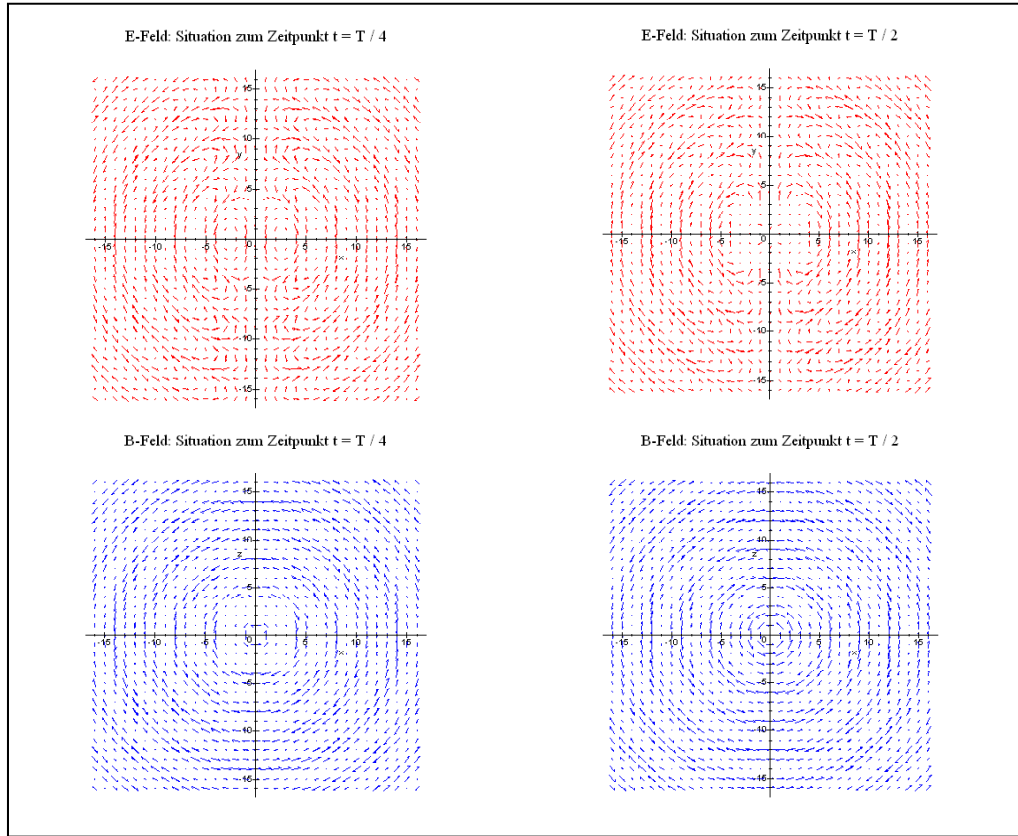


Figure 4: E- und B-Feld zu den Zeitpunkten  $t = \frac{T}{4}$  und  $t = T$ .

Während sich die geschlossenen elektrischen Feldlinien entlang der x-Achse in der x-y-Ebene ausbreiten, entstehen senkrecht dazu in der x-z-Ebene die geschlossenen **B**-Feld-Linien. Sie breiten sich entlang der z-Achse im Raum aus. Diese Ausbreitung erfolgt natürlich dreidimensional, um jedoch die Strukturen besser erkennen zu können, sind in den Darstellungen jeweils Schnitte durch den Raum (für die **E**-Feldlinien  $z = 0$  und für die **B**-Feld-Linien  $y = 0$ ) abgebildet worden.

Das sich zeitlich verändernde **B**-Feld induziert dann gemäß<sup>5</sup>:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(r, t) = \mu_0 \cdot \text{rot} [\mathbf{B}(r, t)] \quad (19)$$

ein elektrisches Feld. Man kann also die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in der Weise verstehen, dass sich die beiden Felder gegenseitig durch den Raum tragen. Die Änderung des einen Feldes führt zur Entstehung des anderen.

<sup>5</sup>Siehe Gleichung (27) in Skript 4 zur Einführung in die Quantenphysik. Man muss in dieser Gleichung nur  $j = 0$  setzen, da wir hier den Fall des Vakuums betrachten.

**1.3. Richard Feynman über Vorstellungsvermögen in der Naturwissenschaft.** Der amerikanische Physiker und Nobelpreisträger Richard FEYNMAN beschreibt in seinen didaktisch herausragenden Vorlesungen<sup>6</sup> die Schwierigkeiten, die anspruchsvollen Theorien an das menschliche Vorstellungsvermögen stellen mit den folgenden, an seine Leser gerichteten Worten<sup>7</sup>: "Ich habe Ihnen gesagt, dass Sie sich diese elektrischen und magnetischen Felder anschaulich vorstellen sollen. Wie tun Sie das? Wissen Sie wie? Wie stelle ich mir das elektrische und magnetische Feld vor? Was sehe ich in Wirklichkeit? Was sind die Voraussetzungen für ein anschauliches Vorstellungsvermögen in der Naturwissenschaft? [...] Ich habe kein Bild dieses elektromagnetischen Feldes, das einigermaßen genau wäre. Das elektromagnetische Feld ist mir seit langem vertraut [...]. Wenn ich nun anfangen, die Ausbreitung des Magnetfeldes über den Raum zu beschreiben, von den **E**- und **B**-Feldern spreche und dabei glücklich die Arme schwenke, dann glauben Sie wohl, dass ich diese **E**- und **B**-Felder sehe. Ich werde Ihnen sagen, was ich sehe. Ich sehe so etwas wie schwimmende, schwingende, undeutliche Linien - hier und da erkenne ich die Buchstaben E und B auf ihnen und auf einigen Linien auch Pfeile - ein Pfeil hier und dort, aber er verschwindet, wenn ich genau hinsehe. Wenn ich von Feldern spreche, die durch den Raum zischen, verursache ich eine fürchterliche Verwirrung zwischen den von mir benützten Symbolen zur Beschreibung der Objekte und den Objekten selbst. Ich kann tatsächlich kein Bild zustande bringen, das den wirklichen Wellen auch nur annähernd entspricht. Fällt es Ihnen schwer, sich ein solches Bild zu machen - seien Sie unbesorgt, Ihre Schwierigkeit ist nicht außergewöhnlich.

Unsere Naturwissenschaft stellt erhebliche Anforderungen an das Vorstellungsvermögen. Das erforderliche Maß an Vorstellungskraft geht weit über das früherer Zeiten hinaus. Moderne Ideen sind viel schwerer vermittelbar. Allerdings stehen uns viele Hilfsmittel zur Verfügung<sup>8</sup>. Wir verwenden mathematische Gleichungen und Regeln und stellen vieles graphisch dar. Wenn ich jetzt über das elektromagnetische Feld im Raum spreche, wird mir klar, dass ich eine Art Überlagerung aller Diagramme sehe, die ich je vor Augen hatte. Ich sehe kleine Bündel von Feldlinien umherlaufen, weil es mich beunruhigt, dass die Bündel verschwinden könnten, wenn meine Geschwindigkeit eine andere wäre. Ich sehe nicht einmal immer die elektrischen und magnetischen Feldstärken, denn manchmal denke ich, ich hätte mir das vektorielle und das skalare Potential vorstellen müssen, denn vielleicht sind das die physikalisch bedeutungsvolleren schwingenden Objekte.

Vielleicht sehen Sie die letzte Rettung in einem mathematischen Standpunkt. Aber was ist ein mathematischer Standpunkt? Mathematisch gesehen gibt es an jedem Punkt im Raum einen elektrischen und magnetischen Feldvektor; das bedeutet, dass jedem Punkt sechs Zahlen zugeordnet sind. Können Sie sich vorstellen, wie jedem Punkt im Raum sechs Zahlen zugeordnet sind? Das ist zuviel des Guten! Können Sie sich auch nur *eine* Zahl vorstellen, die jedem Punkt zugeordnet ist? Ich nicht! Ich kann mir so etwas wie die Temperatur an jedem Punkt im Raum vorstellen. Das erscheint verständlich. Es gibt Hitze und Kälte, die sich von Ort zu Ort ändern. Aber die Idee einer *Zahl* an jedem Ort ist mir wirklich unverständlich.

<sup>6</sup>Feynman, Leighton, Sands: Vorlesungen über Physik, Bd. I - III, Oldenbourg Verlag 1991.

<sup>7</sup>Bd II, S. 382 - 384.

<sup>8</sup>Nicht zuletzt eben auch das System Maple.

Vielleicht sollten wir deshalb fragen: Können wir das elektrische Feld durch etwas darstellen, das eher so etwas wie die Temperatur ist, beispielsweise eine Verzerrung in einer Portion Gelee? Nehmen Sie an, dass wir uns zunächst vorstellen, die Welt sei mit dünnem Gelee angefüllt und die Felder stellten irgendeine Verzerrung dar - zum Beispiel eine Dehnung oder Verdrillung des Gelees. Dann könnten wir vom Gelee abstrahieren. Genau das hat man viele Jahre versucht. Maxwell, Ampère, Faraday und andere bemühten sich, den Elektromagnetismus auf diese Weise zu verstehen. (Zuweilen haben sie diese abstrakte Idee „Äther“ genannt.) Es zeigte sich aber, dass man der Entwicklung damit ein Hindernis in den Weg stellte, dass man sich das elektromagnetische Feld so vorzustellen versucht. Wir sind leider auf Abstraktionen angewiesen, auf Instrumente, mit denen wir das Feld ausmessen und auf mathematische Symbole, mit denen wir es beschreiben, usw. Trotzdem sind die Felder in gewissem Sinn wirklich, denn wir haben genug mit den mathematischen Gleichungen herumgespielt - mit oder ohne Bilder oder Zeichnungen oder den Versuch, sich die Angelegenheit anschaulich vorzustellen, so können wir immer noch erreichen, dass die Instrumente die Signale vom Raumschiff Mariner II ermitteln<sup>9</sup> und uns über Galaxien in einer Entfernung von Milliarden von Kilometern unterrichten.

Das ganze Problem des anschaulichen Vorstellungsvermögens in den Naturwissenschaften wird von Leuten aus anderen geistigen Disziplinen oft missverstanden. Sie versuchen, unser Vorstellungsvermögen auf folgende Weise zu prüfen. Sie sagen, „Hier sehen Sie Menschen in einer bestimmten Situation. Was wird Ihrer Vorstellung nach als nächstes passieren?“ Wenn wir antworten, „ich kann es mir nicht vorstellen“, dann zweifeln sie womöglich an unserer Vorstellungskraft. Sie übersehen die Tatsache, dass alles, was wir uns in der Wissenschaft vorstellen *dürfen, mit allem anderen konsistent sein muss, was wir wissen*: das es sich bei elektrischen Feldern und Wellen, von denen wir sprechen, nicht um exaltierte Ideen handelt, die mit allen uns bekannten Gesetzen der Physik konsistent sein müssen. Es ist unmöglich, dass wir uns ernsthaft Dinge vorstellen, die offensichtlich im Widerspruch zu bekannten Naturgesetzen stehen. Unsere Form von Vorstellung ist daher eine heikle Sache. Man muss sich etwas anschaulich vorstellen können, dass nie zuvor gesehen oder gehört worden ist. Gleichzeitig stecken unsere Gedanken in einer Zwangsjacke, denn sie werden von Bedingungen eingeschränkt, die auf unserer Kenntnis der Natur und Wirklichkeit beruhen. Es ist extrem schwierig, etwas Neues hervorzubringen, dass mit allem bereits Erkanntem konsistent ist.“

---

<sup>9</sup> Im Raumschiff befindet sich ein schwingender elektrischer Dipol - ein starker Sender elektromagnetischer Wellen.