

## Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 7

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Inhalt dieser Vorlesung ist die Beschreibung und Lösung der MAXWELL-Wellengleichung in Kugelkoordinaten.

### 1. DIE MAXWELL-WELLENGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

#### Maple-Programme zur Vorlesung:

- QPVorl7Pr1.mws (Lösung der freien MAXWELL-Gleichung)
- OPVorl7Pr2.mws (Animation eines kugelsymmetrischen Feldes)

**1.1. Einleitung: Wellengleichung und ihre Lösung.** Die in den letzten beiden Vorlesungen diskutierten ebenen Wellen stellen nur einen speziellen, allerdings sehr wichtigen Lösungstyp der homogenen Wellengleichung:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

dar. Eine andere Klasse von Lösungen bilden die Kugelwellen. Sie erhält man, wenn man den LAPLACE-Operator in (1) in Kugelkoordinaten formuliert<sup>1</sup>:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} \quad (2)$$

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3)$$

Einschränkend sollen im folgenden kugelsymmetrische Lösungen:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(r, t) \Rightarrow \Delta_{\vartheta, \varphi} \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

betrachtet werden. Setzt man diesen Lösungstyp in (1) ein, so erhält man:

$$\Delta \Phi(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \Phi(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(r, t) \quad (5)$$

Maple liefert<sup>2</sup> über einen Separationsansatz die folgende Lösung:

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} \left[ e^{i(kr + \omega t)} + e^{i(kr - \omega t)} \right], \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (6)$$

#### Bemerkungen:

1. Man kann durch Einsetzen in (1) leicht zeigen, dass alle Funktionen:

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} \left[ v_+(kr + \omega t) + v_-(kr - \omega t) \right], \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (7)$$

---

<sup>1</sup>Sie Skript zur 5.Vorlesung, Gleichung (46).

<sup>2</sup>Die Rechnung wird im ersten Programm zur Vorlesung: QPVorl7Pr1.mws vorgestellt.

Lösung der homogenen Wellengleichung sind<sup>3</sup>.

## 2. Die Phase

$$\varphi_{\pm} = kr \pm \omega t \quad (8)$$

hängt nur vom Betrag des Ortsvektors ab. Zu einer festen Zeit  $t = t_0$  sind die Punkte gleicher Phase und damit gleichen  $\Phi$ -Wertes, Werte mit gleichem Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems, liegen damit also auf Kugelflächen vom Radius  $r$ . Die folgende Abbildung zeigt einen typischen Verlauf<sup>4</sup>:

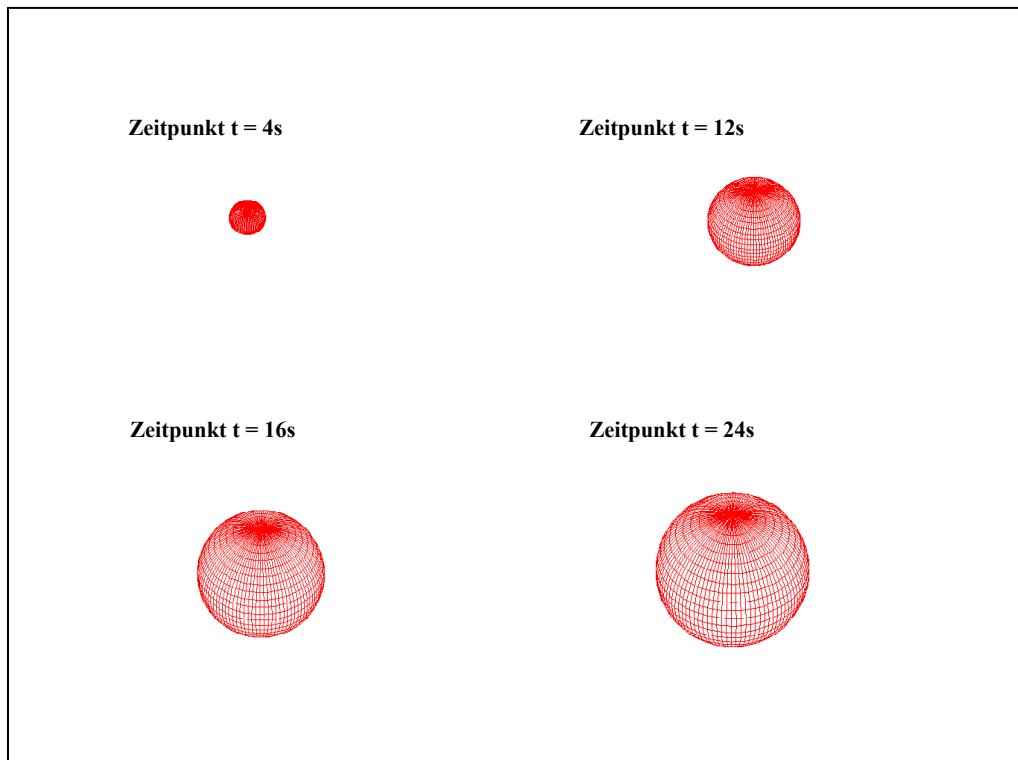


Figure 1: Phasenfläche einer auslaufenden Kugelwelle.

3. Falls  $v_{\pm}(kr - \omega t)$ , wie in unserer Lösung (6), zusätzlich periodisch ist, spricht man von **Kugelwellen**:

$$\Phi_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{A_{\pm}}{r} e^{i(kr \pm \omega t)} \quad (9)$$

4. Die Flächen konstanter Phase:

$$\varphi_{\pm} = kr \pm \omega t = \text{const.} \quad (10)$$

bewegen sich mit der **Phasengeschwindigkeit**:

$$\frac{dr}{dt} = \mp \frac{\omega}{k} = \mp u = \mp \frac{c}{n} \quad (11)$$

<sup>3</sup>Die zugehörige Rechnung wird mit Maple im Programm QPVorl7Pr1.mws gezeigt.

<sup>4</sup>Die Bilder stammen aus einer Animation aus dem Programm QPVorl7Pr1.mws.

wobei im Programm QPVorl7Pr1.mws der Brechungsindex  $n$  immer Eins gesetzt wird, da wir Vakuumwellen betrachten. Die Lösung (9) stellt die Ausbreitung einer Störung mit kugelförmigen Wellenfronten mit der Phasengeschwindigkeit  $u$  dar:

$$kr + \omega t = \text{const.} : \text{einlaufende Kugelwelle} \quad (12)$$

$$kr - \omega t = \text{const.} : \text{auslaufende Kugelwelle} \quad (13)$$

5. Kugelwellen gleicher Phase haben zu einer festen Zeit  $t = t_0$  den radialen Abstand:

$$k \cdot \Delta r = 2\pi \cdot n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (14)$$

der kürzeste Abstand ( $n = 1$ ) definiert die:

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (15)$$

wie bei den ebenen Wellen. Hält man den Ort fest, so ändert sich die Phase periodisch mit der Periode:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

ebenfalls wie bei den ebenen Wellen.

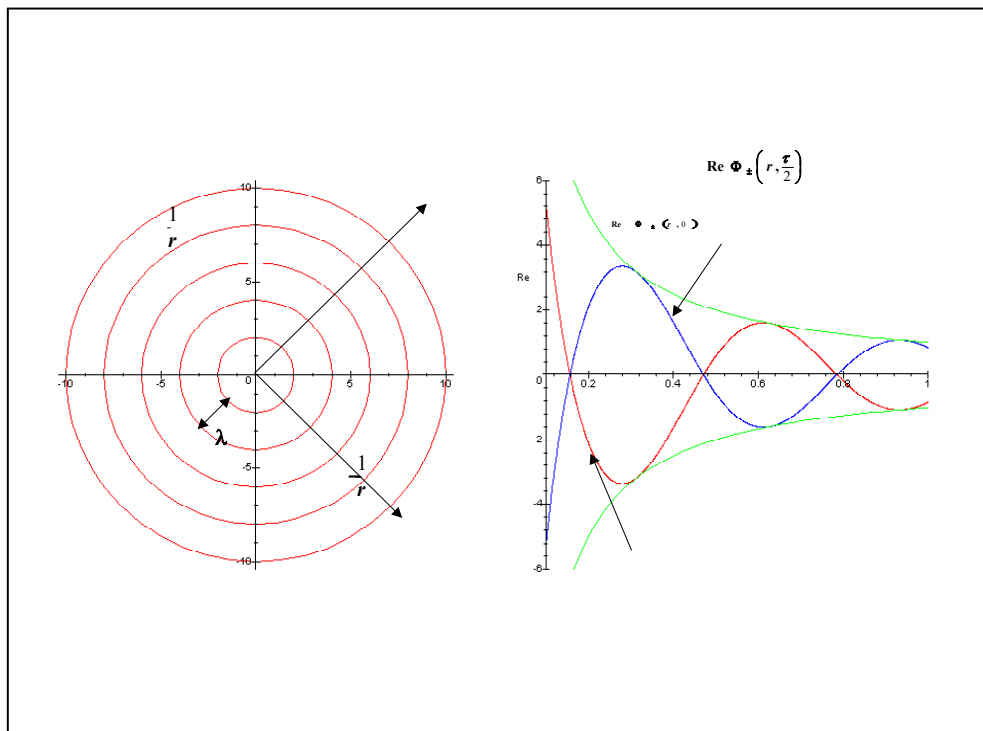


Figure 2: Wellenlänge sowie Realteil von Kugelwellen. Die Kreise stellen die Phasenlinien zweidimensionaler Kugelwellen dar.

**1.2. Hinweise zum Programm QPVorl7Pr1.mws.** In diesem Programm wird die homogene Wellengleichung in Kugelkoordinaten über einen Separationsansatz gelöst. Dieser Rechenansatz, der in vielen Fällen zur Lösung einer partiellen Differenzialgleichung führt, wird dort eingeführt und ausführlich beschrieben. Man erhält die Lösung (6), wobei aber auch noch gezeigt wird, dass (7) die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung in Kugelkoordinaten darstellt. Die folgende Abbildung zeigt:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{r} e^{i(kr + \omega t)} \right) \quad (16)$$

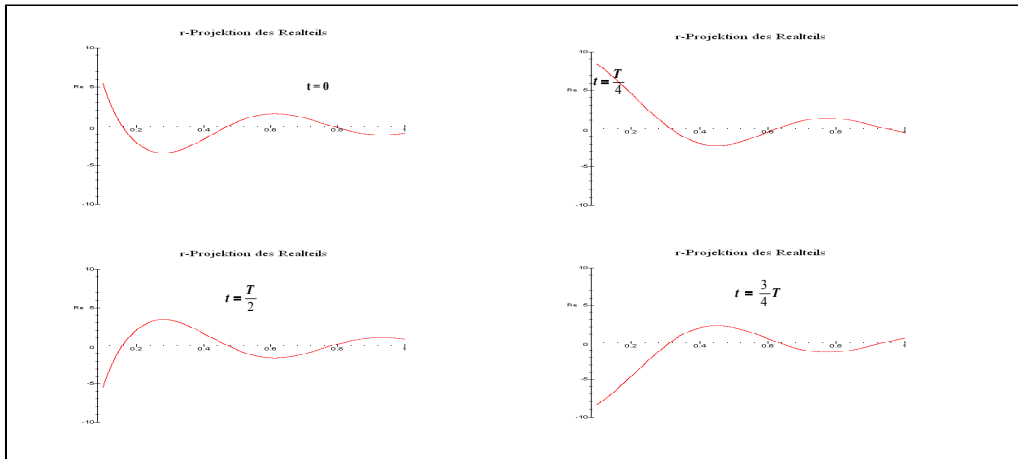


Figure 3: Bilder aus der Animation der r-Projektion des Realteils.

Die folgende Graphik zeigt dann die zugehörige zweidimensionale Kugelwelle in kartesischer Koordinatendarstellung:

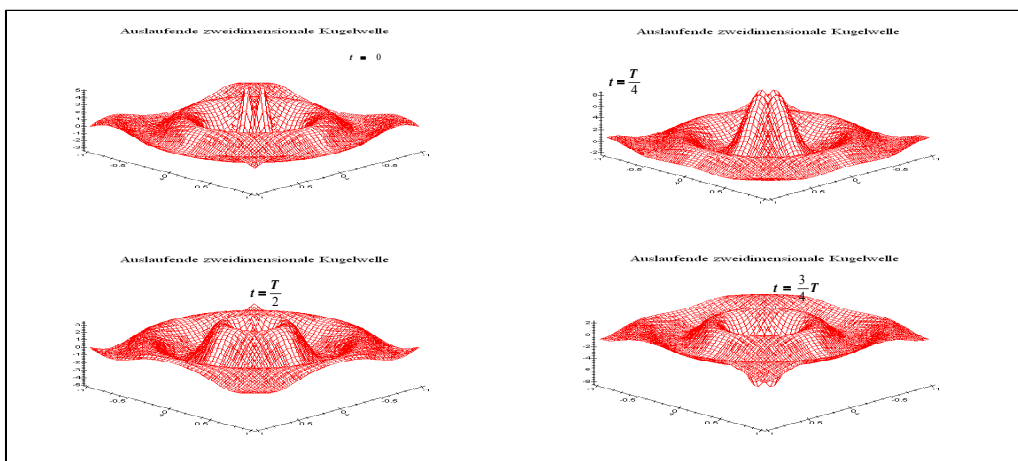


Figure 4: Zweidimensionale auslaufende Kugelwelle (16).

**1.3. Wellenlösungen und die MAXWELL-Gleichung.** Die Lösungen der homogenen Wellengleichung müssen, um Lösungen der homogenen MAXWELL-Gleichung zu sein, schließlich noch die von diesen verlangte Kopplung erfüllen. Für:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (18)$$

müssen z.B.:

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (19)$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (20)$$

erfüllt sein<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= \operatorname{div} \left[ \mathbf{E}_0 \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \right] \\ &= \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \cdot \operatorname{div} [\mathbf{E}_0] + \mathbf{E}_0 \cdot \operatorname{grad} \left[ \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \right] \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot \operatorname{grad} \left[ \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \right] \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[ \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \right] \\ &= \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_r = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_r = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \end{aligned}$$

Die Kopplung erzwingt also:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (21)$$

Dasselbe gilt für die magnetische Induktion. Auch in diesem Falle handelt es sich also um transversale Wellen. Für die Polarisation dieser transversalen Wellen gilt exakt dasselbe wie für die ebenen Wellen. Die Überlegungen der letzten Vorlesung brauchen nicht wiederholt zu werden. Es gilt zusammengefasst:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{k} \quad (23)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{k} \quad (24)$$

Die beiden Felder und der Vektor der Ausbreitungsrichtung bilden ein Rechtssystem.

---

<sup>5</sup>Die hier benutzte Regel lautet:

$$\operatorname{div} [\Omega(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)] = \Omega(\mathbf{r}, t) \cdot \operatorname{div} [\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \operatorname{grad} [\Omega(\mathbf{r}, t)]$$

Siehe z.B. in Bourne / Kendall: Vektoranalysis, Teubner 1988, S.100.

**Beispiel:** *Elektromagnetische Kugelwellen*

Für elektromagnetische Kugelwellen gilt:

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_r \Rightarrow \mathbf{E}_0 = E_0 \cdot \mathbf{e}_\vartheta \wedge \mathbf{B}_0 = B_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi \quad (25)$$

Für die Maple-Darstellung ist es am günstigsten die Vektoren in kartesischen Koordinaten darzustellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\vartheta &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \frac{x}{r \cdot \sin \vartheta} \\ \cos \vartheta \cdot \frac{y}{r \cdot \sin \vartheta} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \cdot \frac{1}{\tan \vartheta} \\ \frac{y}{r} \cdot \frac{1}{\tan \vartheta} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{r} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \begin{pmatrix} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Somit erhält man in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= (\mathbf{E}_0) \frac{1}{r} e^{i(kr-\omega t)} = E_0 \frac{e^{i(k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} \\ (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= E_0 \frac{e^{i(k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t)}}{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = (\mathbf{B}_0) \frac{1}{r} e^{i(kr-\omega t)} = B_0 \frac{e^{i(k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}-\omega t)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Maple liefert die folgenden Bilder, die aus der Animation der Felder in QPVorl7Pr2.mws entnommen sind:

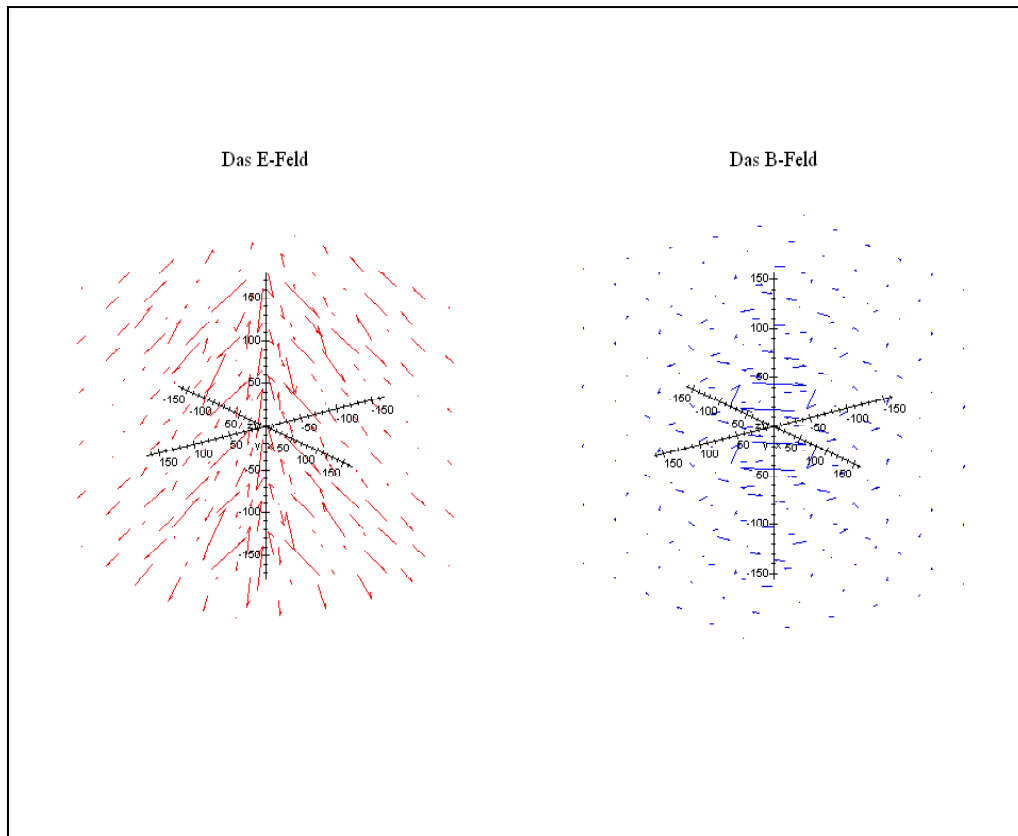


Figure 5: Kugelsymmetrische Lösungen der MAXWELL-Gleichungen zum Zeitpunkt  $t = 0$ .