

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 9

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Es werden Experimente vorgestellt, die eine Bestätigung der MAXWELL-Wellentheorie des elektromagnetischen Felds darstellen.

1. EXPERIMENTELLE ERZEUGUNG UND MESSUNG ELEKTROMAGNETISCHER WELLEN

Maple-Datei zur Vorlesung:

QPVorl9Pr1.mws (Gewöhnliche Differenzialgleichungen, Gleichung des el. Schwingkreises)

1.1. Mathematische Vorkenntnisse: Gewöhnliche Differenzialgleichungen.

Differenzialgleichungen sind für den Ingenieur und Naturwissenschaftler ein unentbehrliches Hilfsmittel. Zahlreiche Naturgesetze und technische Vorgänge lassen sich durch sie beschreiben. Die folgenden beiden Beispiele sollen einen ersten Eindruck von den Problemen vermitteln, die typisch für die Theorie der Differenzialgleichungen sind¹.

Beispiel 1: Der radioaktive Zerfall

Es soll der zeitliche Ablauf des Zerfalls von radioaktiven Substanzen beschrieben werden. Hierzu sei $m(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge eines radioaktiven Stoffes und $h > 0$ ein "kleiner" Zeitabschnitt. Die Erfahrung zeigt²:

$$m(t+h) - m(t) \sim m(t) \cdot h \quad (1)$$

also, mit dem Proportionalitätsfaktor³ $k > 0$:

$$m(t+h) - m(t) = -k \cdot m(t) \cdot h \quad (2)$$

Nach Division durch $h \neq 0$ erhält man:

$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} = -k \cdot m(t) \quad (3)$$

Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert dann:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \dot{m}(t) = -k \cdot m(t) \quad (4)$$

¹Maple ist ein sehr leistungsstarkes Werkzeug, um gewöhnliche Differenzialgleichungen exakt oder numerisch zu lösen. Aus diesem Grund soll die Theorie nicht vorgestellt werden. Es ist ausreichend, zu verstehen, was eine gewöhnliche Differenzialgleichung ist und in welchen Problemsituationen sie auftritt.

²Mit $f \sim g$ drückt man aus, dass die beiden Funktionen bis auf eine multiplikative Konstante gleich sind.

³Man beachte, dass die Menge abnimmt, somit also gilt:

$$m(t+h) < m(t)$$

Diese Gleichung stellt ein mathematisches Modell für den zeitlichen Ablauf des Zerfalls eines radioaktiven Stoffes mit der Zerfallskonstanten k dar. In der Physik ist es üblich, die Ableitung nach der Zeit t durch einen Punkt anzudeuten.

Beispiel 2: Der freie Fall

Wird ein zunächst festgehaltener Körper plötzlich losgelassen, so bewegt er sich unter dem Einfluss der Schwerkraft senkrecht nach unten⁴. Der Verlauf dieses Vorganges wird mathematisch beschrieben durch eine Funktion:

$$s = s(t) \quad (5)$$

die angibt, welchen Weg s der Körper - genauer sein Schwerpunkt - zur Zeit t bereits zurückgelegt hat. Weitere interessierende Größen sind die zur Zeit t herrschende Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}(t) \quad (6)$$

sowie die Beschleunigung:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \ddot{s}(t) \quad (7)$$

Die Mechanik lehrt, dass die Beschleunigung konstant ist und zwar ist sie gleich der Erdbeschleunigung g . Die Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ genügt also der gewöhnlichen Differenzialgleichung 2. Ordnung⁵:

$$\ddot{s}(t) = g \quad (8)$$

Hier ist es leicht, alle Lösungen zu finden. Mit Schulkenntnissen sieht man sofort:

$$\ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = g \Rightarrow v(t) = gt + C_1 \quad (9)$$

wobei C_1 die Integrationskonstante ist. Weiter kann man sofort erkennen:

$$\dot{s}(t) = v(t) = gt + C_1 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ sind konstant}) \quad (10)$$

Damit ist also das vollständige Integral dieser Gleichung (8) gefunden.

Um aus dieser Vielfalt von Lösungen der Gleichung (6) - für jede beliebige Wahl der Konstanten hat man ja eine Lösung - diejenige herauszufinden, die den physikalischen Vorgang beschreibt, bedarf es der Kenntnis weiterer Bedingungen, der sogenannten *Anfangsbedingungen*. Nehmen wir etwa an, der Körper befinde sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe und werde dann losgelassen. Die entsprechenden Anfangsbedingungen lauten dann:

$$s(0) = 0 \text{ und } \dot{s}(0) = v(0) = 0 \quad (11)$$

Aus der ersten Bedingung erhält man dann $C_2 = 0$ und aus der zweiten folgt: $C_1 = 0$. Man erhält also in diesem speziellen Fall die Lösung:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad (12)$$

⁴Wind oder andere Störfaktoren werden in diesem Beispiel ausgeschlossen.

⁵In einer gewöhnliche treten im Gegensatz zur einer partiellen Differenzialgleichung nur gewöhnliche Ableitungen auf. Die Ordnung einer gewöhnlichen Differenzialgleichung ist gleich der Ordnung der höchsten in ihr auftretenden Ableitung.

Andere Anfangsbedingungen führen in entsprechender Weise zu anderen Lösungen. Da wir mit Maple ein starkes Hilfsmittel zur Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen zur Verfügung haben, ist es nicht notwendig tiefer in die Theorie einzudringen. Ihre Behandlung mit Maple ist Inhalt des Programms QPVorl9Pr1.mws.

1.2. Der elektrische Schwingkreis. Im folgenden werde ein Stromkreis mit einer zeitlichen abhängigen Spannung $U_e(t)$ einer Induktivität L ⁶ (eine Spule), einer Kapazität C (ein Kondensator) und einem ohmschen Widerstand R . In dem Kreis fließe ein fadenförmiger Strom $I(t)$:

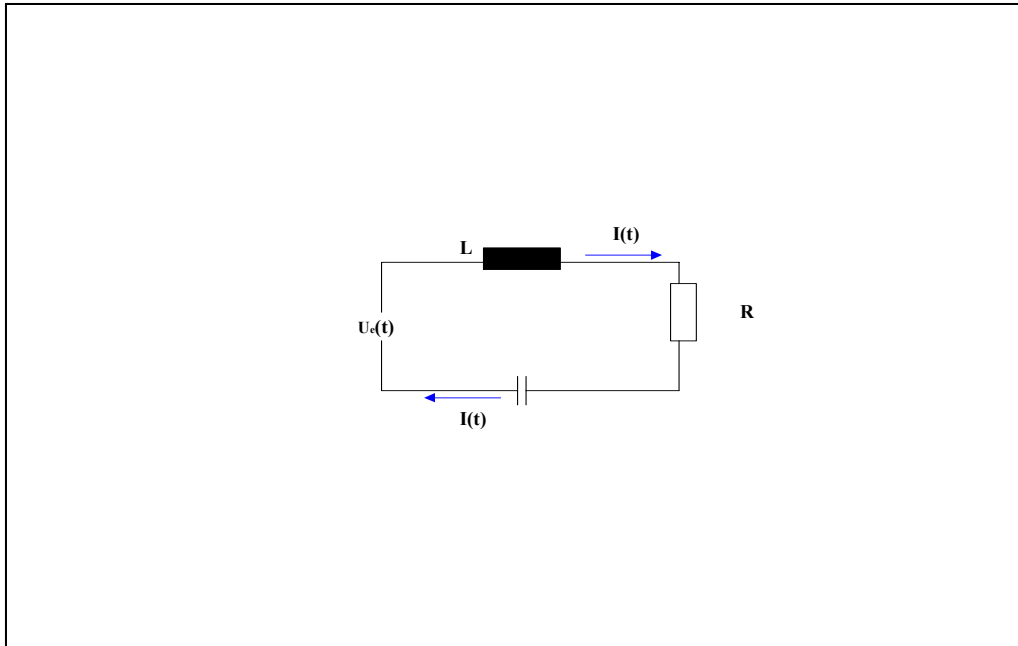


Figure 1: Prinzip eines Stromkreises bestehend aus ohmschen Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C . Die angelegte Spannung kann dabei auch zeitabhängig sein.

Die Beziehungen zwischen den an den einzelnen Bauteilen abfallenden elektrischen Spannungen sind aus der Schule bekannt. Es gilt:

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \text{ , OHMsches Gesetz} \quad (13)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (14)$$

$$U_L(t) = -L \cdot \frac{dI(t)}{dt} \quad (15)$$

Weiter ist bekannt:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (16)$$

Da es sich bei obiger Schaltung um eine Reihenschaltung der einzelnen Bauteile handelt, teilt sich die angelegte elektrische Spannung auf:

$$U_e(t) = U_R(t) + U_C(t) - U_L(t) \quad (17)$$

⁶Die Induktivität einer Spule sowie die Kapazität eines Kondensators sind aus dem Physikunterricht der Schule bekannt.

$$U_e(t) = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} + L \cdot \frac{dI(t)}{dt}$$

Differenziert man beide Seiten dieser Gleichung nach t und beachtet man anschließend (4), so erhält man:

$$\frac{dU_e(t)}{dt} = R \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} + L \cdot \frac{d^2I(t)}{dt^2} \quad (18)$$

eine gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung für $I(t)$. Z.B. erhält man im Falle einer rein periodischen Generatorspannung:

$$U_e(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (19)$$

die Gleichung:

$$L \cdot \ddot{I}(t) + R \cdot \dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C} = -U_0 \omega \sin(\omega t) \quad (20)$$

Zur Lösung dieser Gleichung benutzt man einen komplexen Ansatz:

$$U_e(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (21)$$

mit der Lösung:

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (22)$$

$$\dot{I}(t) = I_0 i \omega e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (23)$$

$$\ddot{I}(t) = -I_0 \omega^2 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (24)$$

wobei als physikalisch relevant wiederum nur der Imaginärteil angesehen wird⁷. Die Größe I_0 wird aus der Anfangsbedingung ermittelt. Die Phasenverschiebung ist vom einzelnen Bauteil abhängig⁸.

Im folgenden wird nun die Situation diskutiert, die der homogenen Differenzialgleichung⁹:

$$L \cdot \dot{I}(t) + R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (25)$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) \quad (26)$$

entspricht. Dazu wird ein aufgeladener Kondensator als Spannungsquelle parallel zu einer Reihenschaltung bestehend aus einer Induktivität L sowie eines OHMschen Widerstands R geschaltet. Alle Verluste eines Stromkreises - bedingt durch die Wärmeverluste des elektrischen Stromes in der Schaltung - werden in diesem Modell als im OHMschen Widerstand R zusammengefasst betrachtet.

⁷Siehe hierzu das Skript zur 5. Vorlesung Einführung in die Quantenphysik / Komplexe Zahlen und ihre Darstellung.

⁸Die weitere Betrachtung an dieser Stelle führt in die Theorie der Wechselstromnetzwerke, die im weiteren nicht wichtig sind.

⁹In einer homogenen Differentialgleichung findet man keinen Summanden, in dem die gesuchte Lösungsfunktion nicht vorkommt.

Die folgende Abbildung zeigt die schaltungstechnische Realisierung:

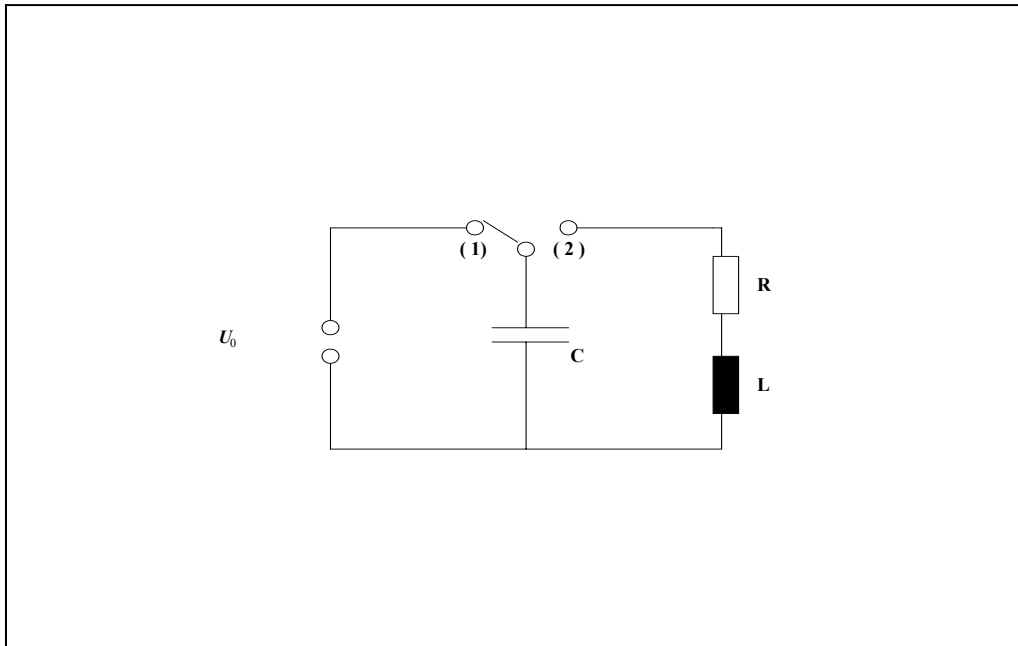


Figure 2: Zur Betrachtung des Schwingkreises.

In der Schalterstellung (1) wird der Kondensator durch die Gleichspannungsquelle auf die Spannung U_0 gebracht. Durch Umlegen des Schalters in die Position (2) wird der Stromkreis kurz geschlossen und die Spannungsquelle abgekoppelt. Den Zeitverlauf des Stromes kann man z.B. am Oszilloskop über die an R abfallende Spannung:

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \quad (27)$$

betrachten. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt am einfachsten für die am Kondensator abfallende Spannung $U_C(t)$ formulieren:

$$\begin{aligned} U_C(0) &= U_0 \\ \dot{U}_C(0) &= \frac{1}{C} \dot{Q}(0) = \frac{1}{C} I(0) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Aus diesem Grund schreibt man die Gleichung (25) auf $U_C(t)$ um:

$$\begin{aligned} I(t) &= \dot{Q}(t) = C \cdot \dot{U}_C(t) \\ LC \cdot \ddot{U}_C(t) + RC \cdot \dot{U}_C(t) + U_C &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Mit den Definitionen:

$$2\beta \quad : \quad = \frac{R}{L} \quad (30)$$

$$\omega_0^2 \quad : \quad = \frac{1}{LC} \quad (31)$$

erhält man die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dU_C(t)}{dt} + \omega_0^2 U_C(t) = 0 \quad (32)$$

Im Programm QPVorl9Pr1.mws wird diese Gleichung mit Maple gelöst und alle vorkommenden Fälle¹⁰ diskutiert. Der uns an dieser Stelle interessierende Fall ist der schwacher Dämpfung. Die folgende Darstellung zeigt die mit Maple berechneten Lösungen für die Spannung am Kondensator und dem elektrischen Strom im Schwingkreis:

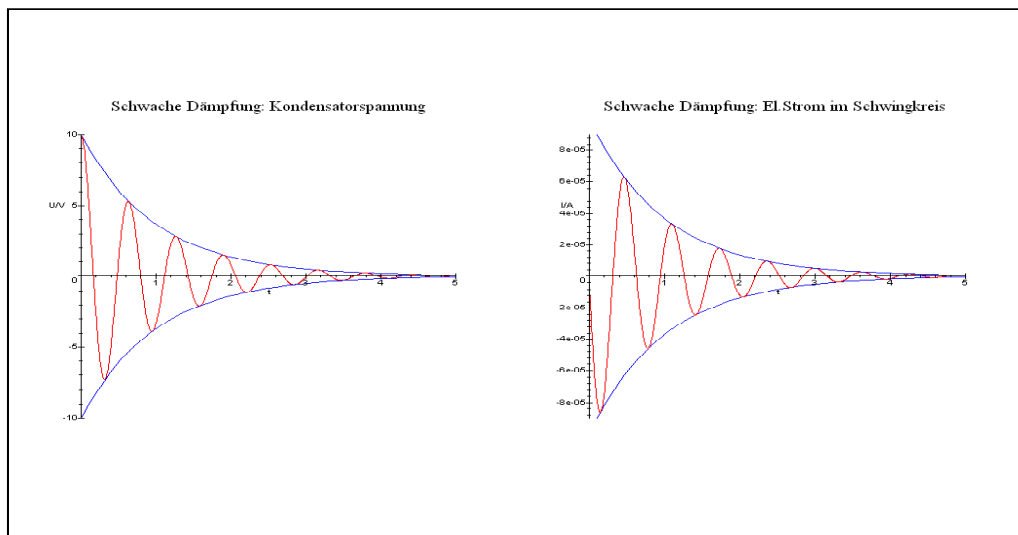


Figure 3: Kondensatorspannung und el. Strom in einem Schwingkreis mit schwacher Dämpfung: $U_0 = 10V$, $C = 1\mu F$, $L = 10000H$, $R = 20k\Omega$.

¹⁰Man spricht im Falle:

$$\beta^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow R^2 < 4\frac{L}{C}$$

von **schwacher Dämpfung (Schwingfall)**, im Falle:

$$\beta^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow R^2 = 4\frac{L}{C}$$

von der **kritischen Dämpfung (aperiodischer Grenzfall)** und im Falle:

$$\beta^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow R^2 > 4\frac{L}{C}$$

von **starker Dämpfung (Kriechfall)**.

Die Spannung am Kondensator vollzieht eine gedämpfte Schwingung mit exponentiell abklingender Amplitude. Man kann zeigen, dass sie die folgende Gestalt besitzt:

$$A_{U_C}(t) = U_0 \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} e^{-\beta t} \quad (33)$$

Den Abstand zweier Minima bzw. Maxima nennt man τ . Man kann zeigen, dass für τ gilt:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (34)$$

Durch Ableitung der Kondensatorspannung nach der Zeit kann man den elektrischen Strom im Schwingkreis bestimmen. Dieser ist natürlich exponentiell gedämpft, wobei **die Dämpfung mit wachsendem R zu und mit wachsendem L abnimmt**. Die abklingende Amplitude hat die folgenden Gestalt:

$$A_I(t) = -\frac{U_0}{L\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} e^{-\beta t} \quad (35)$$

Der elektrische Stromläuft der Kondensatorspannung um etwa $\frac{\pi}{2}$ voraus. Man kann die zeitlichen Verläufe näherungsweise darstellen durch:

$$U_C(t) \approx U_0 e^{-\beta t} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (36)$$

$$I(t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \pi) \quad (37)$$

Der schaltungstechnische Aufbau bewirkt einen dauernden Austausch zwischen elektrischer Feldenergie W_e (Kondensator) und magnetischer Feldenergie W_m (Spule):

$$W_e(t) = \frac{1}{2} C U_C(t)^2 \sim e^{-2\beta t} \cos^2(\omega_0 t) \quad (38)$$

$$W_m(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2 \sim e^{-2\beta t} \sin^2(\omega_0 t) \quad (39)$$

Man erhält:

$t = 0$:

$$I = 0, U_C \text{ maximal} \Rightarrow W_m = 0 \text{ nur } W_e \neq 0$$

$t = \frac{\tau}{4}$:

$$U_C = 0, I \text{ maximal} \Rightarrow W_e = 0, \text{ nur } W_m \neq 0$$

$t = \frac{\tau}{2}$:

$$I = 0, U_C \text{ maximal (Kondensator entgegengesetzt zum Fall } t = 0 \text{ aufgeladen)} \Rightarrow W_m = 0 \text{ nur } W_e \neq 0$$

$$t = \frac{3}{4}\tau :$$

$$U_C = 0, I \text{ maximal (dem Strom bei } t = \frac{\tau}{4} \text{ aber entgegengerichtet)}$$

$$\Rightarrow W_e = 0, \text{ nur } W_m \neq 0$$

Über den ohmschen Widerstand R wird Feldenergie in JOULEsche Wärme umgewandelt. Die folgende Darstellung zeigt die zeitlichen Entwicklungen der Feldenergien im Kondensator bzw. der Spule und die im Widerstand R umgesetzte elektrische Verlustleistung:

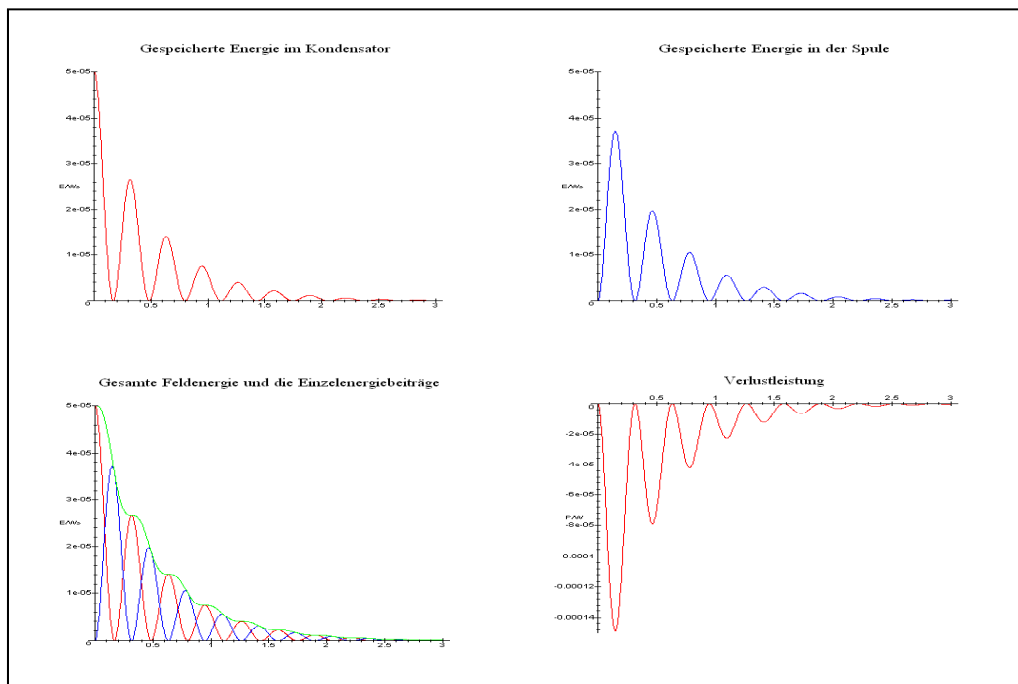


Figure 4: Feldenergien bzw. Verlustleistung in einem elektrischen Schwingkreis mit schwacher Dämpfung.

1.3. Nachweis elektromagnetischer Wellen. Die Vorhersage der elektromagnetischen Wellen durch MAXWELL und ihre Erzeugung und Beobachtung durch HERTZ ist eine der größten wissenschaftlichen Leistungen überhaupt. Elektromagnetische Wellen unterscheiden sich durch ihre Wellenlänge λ , die über $\nu \cdot \lambda = c$ mit der Frequenz ν und der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c verknüpft sind. HERTZ erzeugte in seinem ursprünglichen Experiment Wellenlängen von ca. 1m. Auf seinen Experimenten beruht die gesamte Rundfunk- und Fernsehtechnik, die einen Wellenbereich im Meterbereich benutzt. Sehr viel kurzwelligere elektromagnetische Strahlung wird von einzelnen Atomen¹¹ oder beschleunigten Einzelladungen (z.B. Elektronen oder Protonen) ausgesandt. Einen Überblick über die verschiedenen Wellenlängenbereiche gibt die folgende Abbildung¹²:

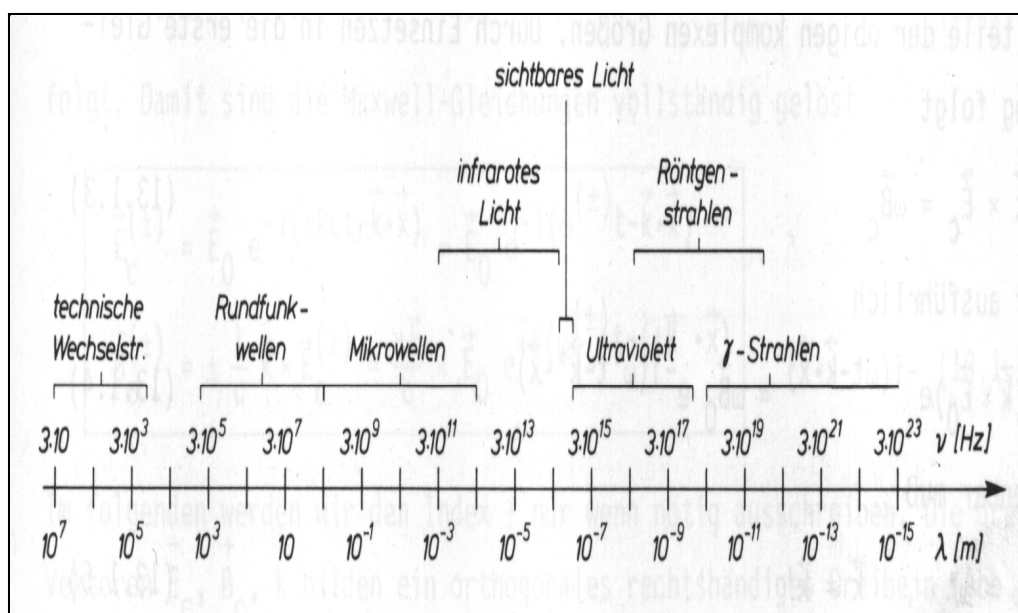


Figure 5: Spektrum elektromagnetischer Wellen

Im folgenden sollen nun eine experimentelle Anordnung beschrieben werden, mit denen sich elektromagnetische Wellen erzeugen und auch messen lassen. Dieses Experiment entspricht im wesentlichen dem berühmten Experiment, das HERTZ 1887 zur Überprüfung der von MAXWELL vorhergesagten elektromagnetischen Wellen durchführte. Der Sender zur Erzeugung von elektromagnetischen Wellen besteht aus einem ungedämpften elektrischen Schwingkreis¹³. Ein Sender für elektromagnetische Wellen besteht nun aus einem (vorzugsweise ungedämpften) elektrischen Schwingkreis, der über eine Leitung mit einer **Dipolantenne** verbunden ist. Eine Dipolan-

¹¹Schwingende Atome können als schwingende Dipole beschrieben werden.

¹²Sie stammt aus Brandt, S. und Dahmen, H.D.: Physik, Bd. 2, Springer-Verlag 1986.

¹³Technisch realisiert man den ungedämpften Schwingkreis durch eine MEISSNER- oder eine Dreipunktschaltung. An dieser Stelle ist deren technischer Aufbau nicht weiter wichtig, entscheidend ist, dass man in der Lage ist ungedämpfte elektrische Schwingungen zu erzeugen.

tenne ist eine Anordnung aus zwei Metallstäben der Länge $\frac{l}{2}$, die voneinander isoliert in einer Linie angeordnet sind. Zum Nachweis der vom Sender abgestrahlten Wellen benutzt man **Empfangsantennen**. Richtet man einen stabförmigen Leiter in Richtung der elektrischen Feldstärke aus, so bewirkt diese einen Stromfluss längs des Leiters. Das Wechselfeld einer Welle führt zu einem Wechselstrom im Leiter, der, falls er groß genug ist, eine in der Mitte des Stabes eingefügte Glühlampe zum Leuchten bringt. Diese Anordnung zum Nachweis elektrischer Hochfrequenzfelder nennt man **(elektrische) Dipolantenne**. Hochfrequente **B**-Felder kann man über ihre Induktionswirkung nachweisen. In der einer flachen Spule aus einer oder mehreren Windungen induzieren sie einen Strom, der, falls er stark genug ist, mit einer Glühlampe nachgewiesen werden kann. Solche flachen Spulen heißen **Rahmenantennen** oder **magnetische Dipolantennen**. Die folgende Abbildung zeigt den schematischen Aufbau:

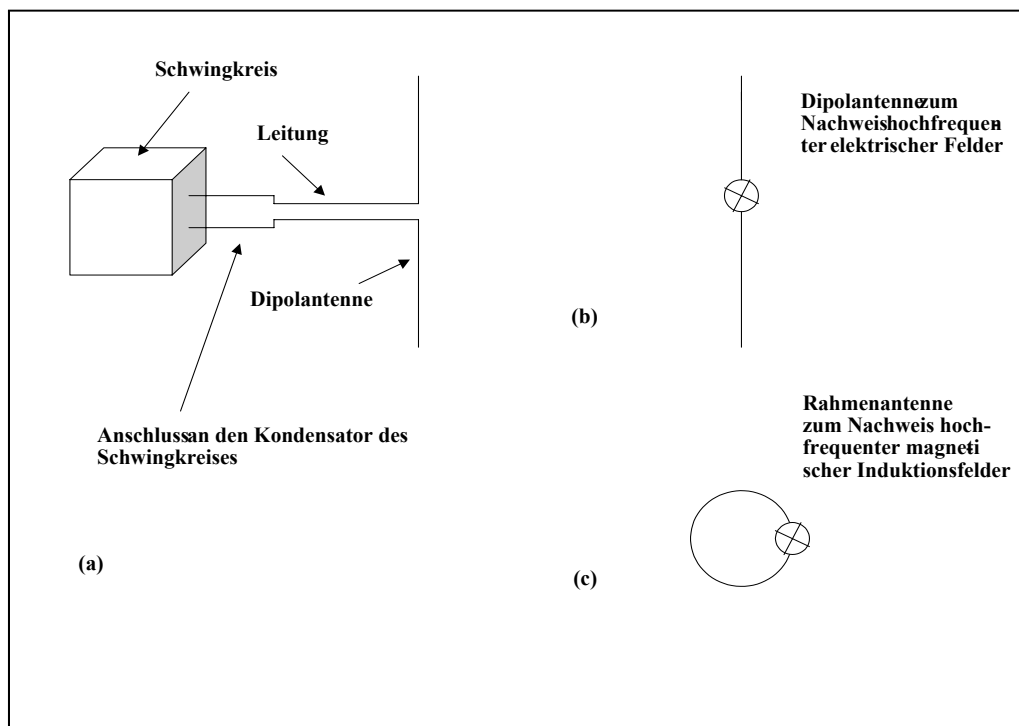


Figure 6: (a) Schema eines Senders für elektromagnetische Wellen
 (b) Dipolantenne
 (c) Rahmenantenne

Die längsten Wellenlängen sind mit $\lambda = 5000$ Erdradien, also einer Frequenz von 10^{-2} Hz, auf der Erdoberfläche nachgewiesen worden. Die elektromagnetischen Wellen mit den kürzesten Wellenlängen kommen aus dem Weltraum. Ihre Frequenz beträgt etwa 10^{23} Hz, d.h. ihre Wellenlänge entspricht etwa 1 fm (10^{-15} m).

Der Mensch ist in seiner Umwelt dauernd elektromagnetischer Strahlung ausgesetzt.

Der Hauptanteil stammt von der Sonne, an deren Strahlung sich das Leben auf der Erde angepasst hat. Außerdem empfangen wir noch Strahlung von vielen künstlichen Quellen. Radio- und Fernsehschwellen erfüllen die Erdatmosphäre, Mikrowellen von Radarsendern und Rundfunkrelaisstationen, radioaktive Strahlen des Erdgesteins und von Kernkraftwerken wirken fast ununterbrochen auf uns ein. Ein weiterer Teil elektromagnetischer Strahlung stammt aus extraterrestrischen Quellen und stellt fast die gesamte Information aus dem Weltraum für uns dar:

1. Die 21cm-Linie des Wasserstoffs:

Neutrale Wasserstoffatome im interstellaren Raum unserer Galaxis¹⁴ senden elektromagnetische Strahlung der Wellenlänge 21.1cm ($\nu = 1420$ MHz) aus. Die Anzahldichte beträgt etwa $1/\text{cm}^3$ und ein Wasserstoffatom strahlt im Mittel nur einmal in 10^7 Jahren Energie ab. Diese Strahlung scheint verschwindend klein zu sein und kann wegen der Größe unserer Galaxis dennoch nachgewiesen werden. In den letzten Jahren wurden auch elektromagnetische Strahlungen von Molekülen im interstellaren Raum aufgefangen, darunter befinden sich das Formaldehyd (HCHO), das Ammoniak (NH_3) und das Kohlenmonoxid (CO). Wie diese Strahlung entsteht wird im zweiten Teil der Vorlesung klarer werden¹⁵.

2. Quasare:

1962 wurden quasistellare Radioquellen entdeckt, die neben der elektromagnetischen Strahlung im optischen Bereich auch Radiowellen aussenden. Die Spektren dieser Quasare weisen eine sehr große Rotverschiebung auf, woraus man auf eine riesige Entfernung von der Erde, weit außerhalb von der Milchstraße, schließt. Außerdem müssen sie mit einer unvorstellbar hohen Leistung abstrahlen, da die Energie aus dieser Entfernung noch auf der Erde empfangen werden kann. Quasare sind Gegenstand intensiver Untersuchungen.

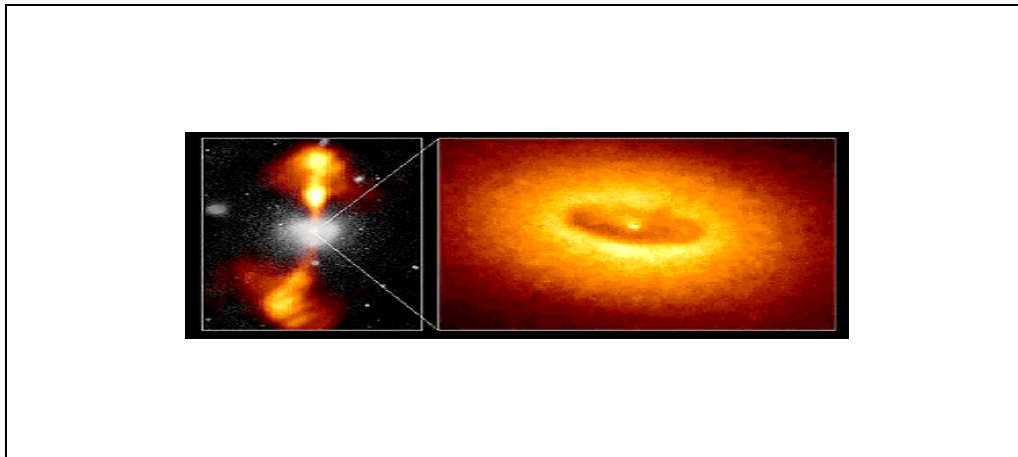


Figure 7: Quasar

¹⁴ Unsere Galaxis, die Milchstraße, hat die Gestalt einer flachen Scheibe mit einem Durchmesser von 10^5 Lichtjahren. Unser Sonnensystem liegt etwa in der Mitte zwischen dem Zentrum der Milchstraße und ihrem Rand.

¹⁵ Speziell in der 14. Vorlesung zur Quantenmechanik.

3. Kosmische Urstrahlung:

Es wird heute allgemein angenommen, dass das Universum ein Alter von etwa 10^{10} Jahren hat. Es entstand vor dieser Zeit durch die Explosion eines verdichteten Komplexes aus Materie und Strahlung (Urknall). Die Trümmer aus dieser Explosion breiteten sich gleichförmig in alle Richtungen aus und konzentrierten sich gelegentlich zu Sternen und Galaxien. Falls sich Strahlungsreste dieser Explosion in einem Radioteleskop nachweisen lassen sollten, wäre dies ein starkes Argument für die Theorie des Urknalls. Tatsächlich konnte eine solche elektromagnetische Strahlung nachgewiesen werden. Diese Hintergrundfrequenz von ca. 10^{11} Hz entspricht einer Temperatur von 3 Kelvin und wird daher auch *3-K-Strahlung* genannt.