

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 10

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Gegenstand dieser Vorlesung ist die mathematische Diskussion der Wirkung elektromagnetischen Wellen, die auf geladene Teilchen treffen. In diesem Zusammenhang wird über die LIÉNARD-WIECHERT verdeutlicht, dass beschleunigte geladene Teilchen elektromagnetische Wellen abstrahlen.

1. MODELL 1: ELEKTROMAGNETISCHE WELLE TRIFFT AUF RUHENDES ELEKTRON

Maple-Dateien zur Vorlesung:

- QPVorl10Pr1.mws (Modell 1)
- QPVorl10Pr2.mws (LIÉNARD-WIECHERT-Potenzial für ein gleichmäßig beschleunigtes Elektron)

Wir betrachten die folgende Situation:

Ein Elektron ruhe im Ursprung des Koordinatensystems, d. h. es gilt:

$$\mathbf{r}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ trifft eine ebene elektromagnetische Welle¹, die sich in positiver z -Richtung (d. h. $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_z$) durch den Raum bewegt auf das Elektron.

Es gilt dann²:

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)} = (E_{0x}\mathbf{e}_x + E_{0y}\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)} = \frac{1}{c} (-E_{0y}\mathbf{e}_x + E_{0x}\mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$$

Beachte, dass (4) aus $\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega}$ folgt³. Wir setzen:

$$E_{0y} = 0 \quad (4)$$

und erhalten damit das folgende elektromagnetische Feld:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_{0x}\mathbf{e}_x \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} E_{0x}\mathbf{e}_y \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ \mathbf{k} &= k \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

¹Wie sie entstanden ist wissen wir bereits, in weiter Entfernung schwinde ein elektrischer Dipol.

²Siehe Skript zur Vorlesung 7 Einführung in die Quantenphysik.

³Siehe Skript 5 zur Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (63).

Man erhält dann die folgende Bewegungsgleichung⁴:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) : \text{LORENTZ - Kraft} \quad (5)$$

Unter Beachtung von: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$:

$$m_e \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = -q \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (6)$$

Unter Beachtung von:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_{0x}}{c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{z}(t) \cdot \frac{E_{0x}}{c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \\ \dot{x}(t) \cdot \frac{E_{0x}}{c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \end{pmatrix}$$

erhält man in Komponentenschreibweise:

$$m_e \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = -q \left(\begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{z}(t) \cdot \frac{E_{0x}}{c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \\ \dot{x}(t) \cdot \frac{E_{0x}}{c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \end{pmatrix} \right) \quad (7)$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

also ein **Anfangswertproblem (AWP)** für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2-ter Ordnung⁵. Man kann sofort erkennen, dass

$$y(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (8)$$

folgt. Übrig bleibt somit das folgende AWP:

$$\ddot{x}(t) + q \frac{E_{0x}}{m_e} e^{i(kz - \omega t)} - q \cdot \dot{z}(t) \cdot \frac{E_{0x}}{m_e c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{z}(t) + \dot{x}(t) \cdot q \frac{E_{0x}}{m_e c} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = 0$$

$$x(0) = z(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

Maple kann dieses AWP numerisch lösen. Im Programm "QPVorl10Pr1. mws" werden die folgenden Konstanten verwendet⁶:

$$\begin{aligned} q &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \\ m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ E_{0x} &= 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{C}} \\ \omega &\approx 628 \frac{1}{\text{s}} \end{aligned} \quad (10)$$

⁴Siehe auch Skript 2 zur Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (53).

⁵Die Ordnung einer Differentialgleichung entspricht dem Grad der höchsten in ihr vorkommenden Ableitung.

⁶Ein zu großes ω konnte numerisch mit der Maple-Studentenversion nicht bearbeitet werden. Dies ist allerdings im Hinblick auf das didaktische Ziel dieser Rechnung unerheblich.

Man erhält den folgenden Bahnverlauf:

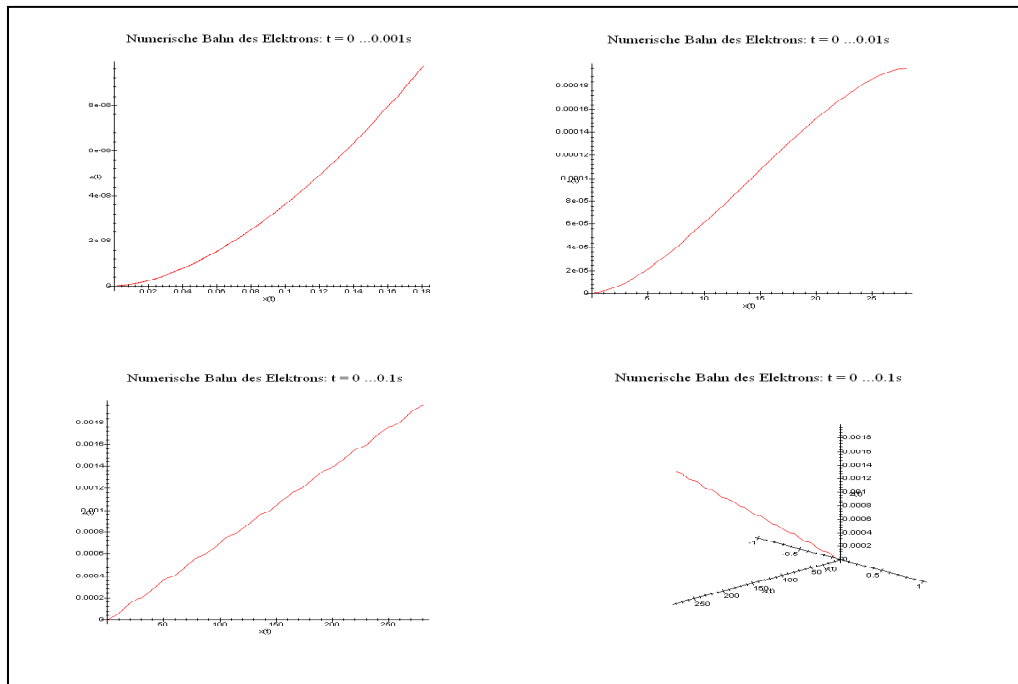


Figure 1: Numerisch errechneter Bahnverlauf. Die Einheit der Achsen ist Meter.

Das theoretische Ergebnis unserer Modellrechnung ist folgendes: das Elektron wird verschoben, mit anderen Worten, dass elektromagnetische Feld leistet Arbeit am Elektron und zwar in Richtung der einfallenden Welle. Dem Elektron wird also Energie zugeführt. Diese Energie kann aber nur aus der elektromagnetischen Welle kommen, d.h. theoretisch postulieren wir an dieser Stelle: **Elektromagnetische Wellen transportieren Energie!**

Diese Energie wird vom Elektron völlig unabhängig von der Frequenz der einfallenden Welle absorbiert⁷. Vernachlässigt wird in diesem Modell, dass das beschleunigte Elektron als beschleunigtes Elektron wiederum eine elektromagnetische Welle abstrahlt, also Energie verliert, mit anderen Worten also eine abbremssende Kraft erfährt.

Das dieses, bisher nur mathematisch anhand unseres Modells, postulierte Ergebnis physikalische Relevanz besitzt, kann man an zwei Beobachtungen erkennen. Die eine

⁷Dieser Punkt spielt noch in eine Rolle bei der experimentellen Betrachtung Absorptionsspektren, siehe Skript 13 zur *Quantenmechanik*.

ist die, das Licht⁸ unsere Haut erwärmt, mit anderen Worten also Energie überträgt. Die andere Beobachtung ist historisch von V. HELMHOLTZ gemacht worden, dem es in den achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts gelang einen Sender elektromagnetischer Wellen zu konstruieren (nämlich einen schwingenden Dipol) und einen Empfänger, einen Dipol in einiger Entfernung, der vom ersten schwingenden Dipol ebenfalls zu Schwingungen angeregt wurde, dieses Experiment stellt die Grundlage der Radio- und Fernsehtechnik dar⁹.

Das elektromagnetische Feld (in unserem Modell) existiert bis zum Zeitpunkt $t = 0$ im Raumbereich

$$-\infty < x < 0, -\infty < y < 0, -\infty < z < 0$$

Es ist daher nicht sinnvoll die Energie einer elektromagnetischen Welle zu untersuchen, denn es müsste über einen unendlichen Raum integriert werden. Stattdessen betrachtet man die Energiedichte, also die Energie pro Raumeinheit, man bezeichnet sie mit u . Die Energie, die durch den Raum in Form einer elektromagnetischen Welle strömt, verteilt sich auf die einzelnen Felder (**E,B**):

$$u = u_E + u_B \quad (11)$$

Wobei:

$$\begin{aligned} u_E &: \text{Energiedichte des elektrischen Feldes} \\ u_B &: \text{Energiedichte des magnetischen Feldes} \end{aligned}$$

bedeuten soll. Es gilt für alle Lösungen der MAXWELL-Gleichungen (ohne Beweis!):

$$u_E = u_B \quad (12)$$

Es gilt (ohne Beweis¹⁰):

$$u_{em}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (13)$$

Um den Fluss der elektromagnetischen Energie darzustellen, sei S der Energietransport pro Zeiteinheit quer durch eine Einheitsoberfläche, also:

$$[S] = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \times \text{Fläche}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}$$

Man erhält für den zeitlichen Mittelwert¹¹:

$$\langle S(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \cdot |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)| \cdot |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)| \quad (14)$$

⁸Wir werden Licht in einer der nächsten Vorlesungen als elektromagnetische Welle identifizieren.

⁹Siehe Skript 9 zur Einführung in die Quantenphysik.

¹⁰Siehe aber zur Herleitung z.B. in Brandt, S. u. Dahmen, H.D.: Physik, Bd.2, Springer-Verlag 1986, S.466.

¹¹Siehe ebenfalls in Brandt / Dahmen, Bd.2, S.467.

und wir werden die nun plausible Annahme machen, die für alle isotropen Medien gilt, dass nämlich die Energie in Richtung der Wellenfortpflanzung fließt. Der entsprechende Vektor ist dann¹²:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (15)$$

der sogenannte **POYNTING-Vektor**.

Für unser mathematisches Modell erhalten wir:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_{0x}^2}{c} e^{2i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_z \quad (16)$$

Man kann im Bild erkennen, dass $|\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)|$ zwischen dem Maximum und Null hin und her oszilliert.:

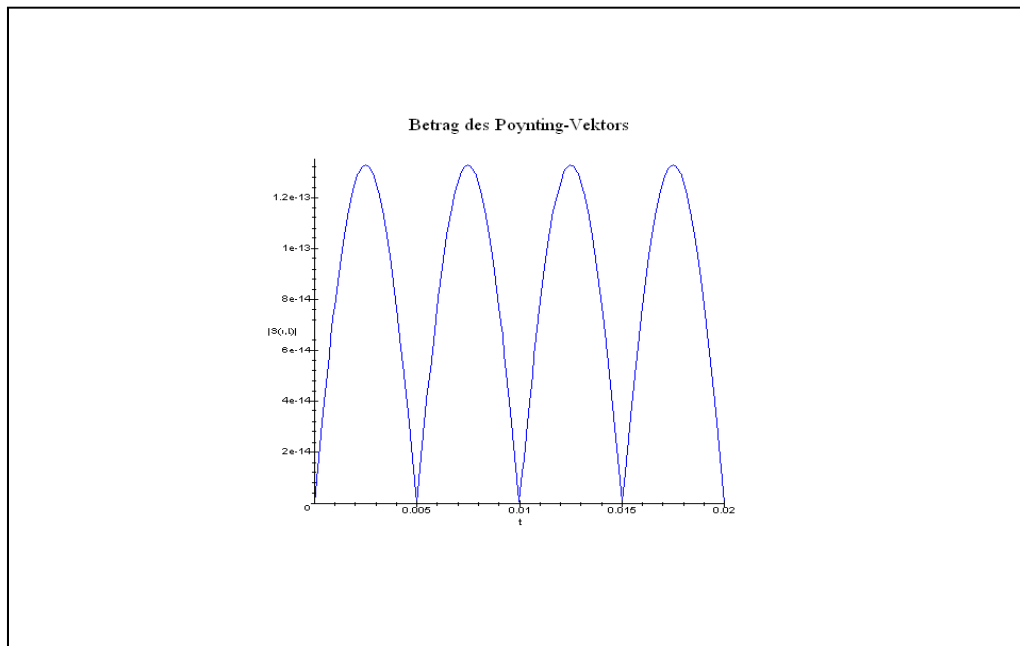


Figure 2: Betrag des POYNTING-Vektors für das gewählte Beispiel. Die Einheit der vertikalen Achse ist $\frac{J}{m^2s}$.

Man kann sehr gut die Schwankungen der Energiestromdichte erkennen. Setzt man z.B. eine Zinkplatte dem Einfluss einer elektromagnetischen Welle aus¹³, dann dauert

¹²Siehe Brandt / Dahmen, Bd.2, S.467.

¹³Man bestrahlt sie z.B. mit Licht aus einer Hg-Lampe.

es bestimmte Zeit, bis sich die maximale Energie der Welle auf der Zinkplatte "angesammelt" hat¹⁴. Bei hohen Frequenzen ist $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ eine extrem schnell veränderliche Funktion der Zeit und daher ist sein Momentanwert praktisch nicht messbar. Dies legt eine zeitliche Mittelung nahe. Der zeitliche Mittelwert des Betrages des POYNTING-Vektors, symbolisiert durch $\langle S \rangle$, ist ein Maß für die sehr nützliche Größe, die man "**Bestrahlungsstärke I** " oder "**Intensität**" nennt.

Man kann aus dem Ergebnis der obigen Rechnung noch etwas weiters schließen, da nämlich das Elektron eine Kraft erfährt, wurde sein Impuls verändert - woher kommt dieser Impuls? Natürlich aus der elektromagnetischen Welle! Man erhält für die Impulsdichte der elektromagnetischen Welle im Vakuum (ohne Beweis¹⁵):

$$\mathbf{g}(r, t) = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{S}(r, t) \quad (17)$$

2. BEWEGTE PUNKTLADUNGEN - ANMERKUNGEN

Eine Punktladung q , die sich entlang einer Bahn, beschrieben durch den Ortsvektor $\mathbf{R}(t)$ mit der momentanen Geschwindigkeit $\mathbf{V}(t)$ bewegt, verursacht ein elektromagnetisches Feld. Die Entwicklung der Gleichungen ist langwierig und übersteigt das Niveau dieses Kurses. Man kann die Herleitung aber in jedem Buch zur theoretischen Elektrodynamik finden¹⁶. Man berechnet dazu die entstehenden Potentiale $\varphi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, die man für bewegte Punktladungen auch **LIÉNARD-WIECHERT-Potenziale** nennt. Nach der Berechnung dieser Potentiale erhält man über:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (18)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \quad (19)$$

das zugehörige elektromagnetische Feld.

Betrachten wir zuerst zwei Spezialfälle:

a) ruhende Punktladung:

Den Fall einer ruhenden elektrischen Punktladung q beschreibt man durch:

$$\mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 \quad (20)$$

In diesem Fall erhält man das bereits aus der Elektrostatik bekannte Ergebnis:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r |\mathbf{r} - \mathbf{R}_0|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (21)$$

Eine ruhende elektrische Punktladung ist Ursache eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Feldes.

¹⁴Diese Erkenntnis wird im Rahmen der theoretischen Deutung des Photoeffekts noch eine wichtige Rolle spielen. Siehe Skript zur Vorlesung 14: Einführung in die Quantenphysik.

¹⁵Siehe aber in Fliessbach, T.: Elektrodynamik, B.I. Wissenschaftsverlag 1993, S.172.

¹⁶Die Formeldarstellung die hier verwendet wird stammt z.B. aus Nolting, W.: Theoretische Physik, Bd.3, Zimmermann-Neufang 1993.

b) gleichförmig bewegte Punktladung:

Die Beschreibung einer gleichförmigen Bewegung ist aus der Mechanik bekannt:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_0 = \text{const.} ; \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t \quad (22)$$

Hier erhält man mit:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{r} - \mathbf{R}(t) \quad (23)$$

und dem Winkel α , der den Winkel zwischen der Teilchenbahn und dem Vektor $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ bezeichnet.

Betrachte dazu die folgende Darstellung:

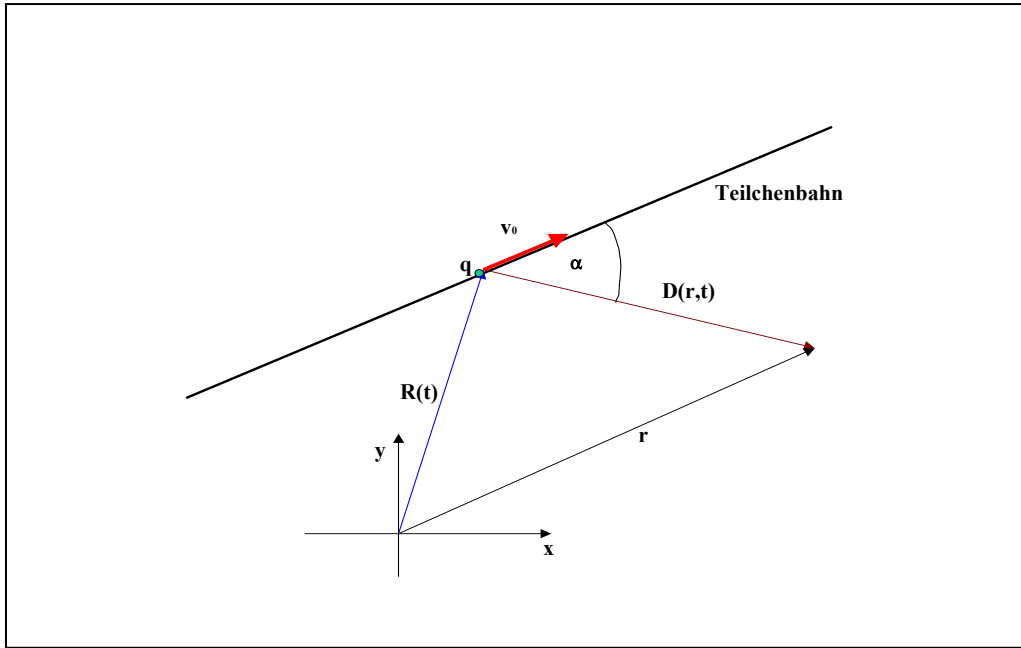


Figure 3: Gleichförmig bewegte elektrische Punktladung

Man erhält die folgende Potenziale:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)|} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{u^2} \sin^2 \alpha}} ; \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{u^2} \mathbf{v}_0 \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

wobei:

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (25)$$

die Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium ist¹⁷. Schon eine gleichförmig bewegte Ladung ist von einem \mathbf{B} -Feld begleitet. Nun, dies ist nicht so verwunderlich, stellt

¹⁷Im Vakuum gilt $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} = 1$.

doch eine gleichförmig bewegte Ladung einen elektrischen Strom dar! Zu beachten ist allerdings, dass diese Effekte umso bedeutsamer werden, je schneller die Punktladung sich bewegt. Die Lichtgeschwindigkeit stellt dabei die Grenzggeschwindigkeit dar, ein Teilchen kann sich nur mit einer Geschwindigkeit bewegen, die kleiner als c ist.

Man definiert:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) : = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)|} \quad (26)$$

$$\kappa(\mathbf{r}, t) : = 1 - \frac{1}{u} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{V}(t) \quad (27)$$

Die in den folgenden Gleichungen auftretende Zeit t_{ret} erhält man als Lösung der Gleichung:

$$t_{ret}(\mathbf{r}, t) = t - \frac{1}{u} |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)| \quad (28)$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man formal die **LIÉNARD-WIECHERT-Potenziale**, elektromagnetischen Potenziale einer bewegten Punktladung q :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \left(|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t_{ret})| - \frac{1}{u} (\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{V}(t_{ret}) \right)} \quad (29)$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0\mu_r q \cdot \mathbf{V}(t_{ret})}{4\pi \left(|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t_{ret})| - \frac{1}{u} (\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \cdot \mathbf{V}(t_{ret}) \right)} \quad (30)$$

Die sich daraus ergebenden elektromagnetischen Felder zerfallen in zwei charakteristische Terme, von denen der eine unabhängig von der Teilchenbeschleunigung ist:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{\kappa_{ret}^3} \frac{(\mathbf{n}_{ret} - \boldsymbol{\beta}_{ret}) (1 - \beta_{ret}^2)}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_{ret})|^2} \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0\mu_r q}{4\pi} \frac{1}{\kappa_{ret}^3} \frac{(1 - \beta_{ret}^2) \cdot (\mathbf{V}(t_{ret}) \times \mathbf{n}_{ret})}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_{ret})|^2} \quad (32)$$

wobei:

$$\boldsymbol{\beta}_{ret} = \frac{1}{u} \mathbf{V}(t_{ret}) \quad (33)$$

$$\kappa_{ret} = \kappa(\mathbf{r}, t_{ret}) \quad (34)$$

Diese beiden Felder nehmen in großem Abstand mit dessen Quadrat ab:

$$\sim \frac{1}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_{ret})|^2} ; \sim \frac{1}{r^2}$$

Sie verhalten sich also wie die statischen bzw. stationären Felder von Punktladungen. Für den Fall $\beta_{ret} \ll 1$ spricht man von **nicht-relativistischer**, bei $\beta_{ret} \leq 1$ von **relativistischer Bewegung**.

Der zweite Feldanteil ist wesentlich durch die Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(t) \quad (35)$$

geprägt:

$$\mathbf{E}_{(a)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{\kappa_{ret}^3} \frac{\mathbf{n}_{ret} \times [(\mathbf{n}_{ret} - \boldsymbol{\beta}_{ret}) \times \frac{\mathbf{a}_{ret}}{u}]}{u \cdot |\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_{ret})|} \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_{(a)} = \frac{\mu_0\mu_r q}{4\pi} \frac{1}{\kappa_{ret}^3} \frac{\mathbf{n}_{ret} \times \{\mathbf{n}_{ret} \times [(\mathbf{n}_{ret} - \boldsymbol{\beta}_{ret}) \times \frac{\mathbf{a}_{ret}}{u}]\}}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_{ret})|} \quad (37)$$

Diese Feldanteile fallen für große Abstände wie $\frac{1}{|\mathbf{D}(\mathbf{r}, t_{ret})|}$ ab, dominieren also in der Fernzone gegenüber den Feldern (31) und (32).

Beispiel: Gleichmäßig beschleunigtes Elektron auf der x-Achse

Ein Elektron bewege sich mit der konstanten Beschleunigung $\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{e}_x$ auf der x-Achse. Der Bahnvektor dieser Bewegung lautet somit:

$$(\mathbf{R}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei v_0 bzw. s_0 Anfangsort bzw. Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons beschreiben. In diesem Beispiel setzen wir sie null. Gleichung (28) hat als quadratische Gleichung in diesem Fall zwei Lösungen¹⁸. Beachtet man jedoch, dass $t > t_{ret}$ gelten muss¹⁹ so erhält man die folgenden Graphen der Differenz $t - t_{ret}(x, y, z, t)$ für den Fall $x=0, y=0$ und $z=0$:

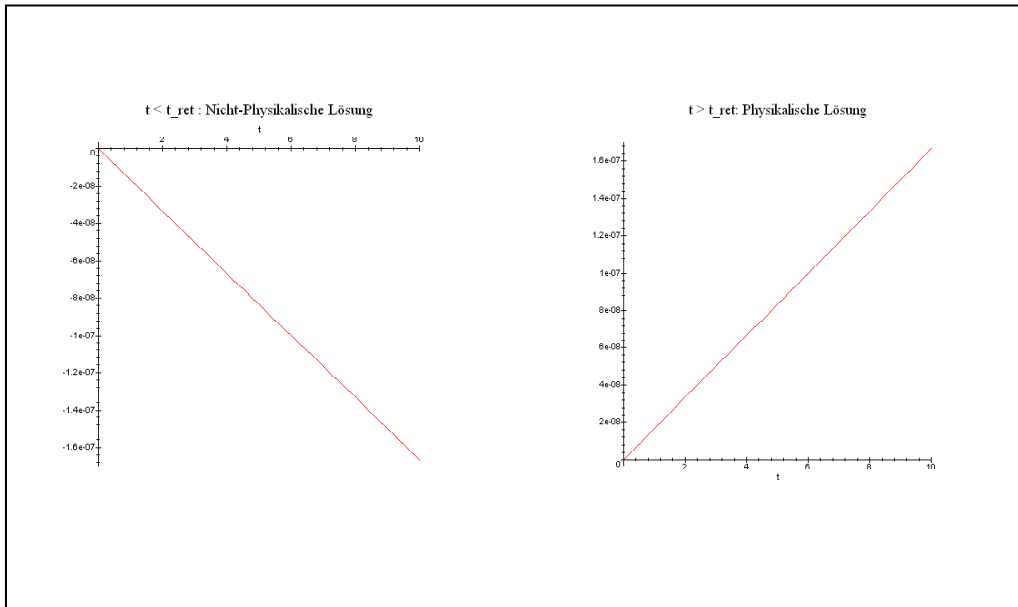


Figure 4: Darstellung von $t - t_{ret}(0, 0, 0, t)$ für beide Lösungen $t_{ret,1}$ und $t_{ret,2}$.

¹⁸Die einzelnen Ergebnisse werden alle im Programm "QPVor10Pr2.mws" dargestellt.

¹⁹Das elektrische Feld pflanzt sich mit der endlichen Lichtgeschwindigkeit c fort - siehe Vorlesung 9 zur Einführung in die Quantenphysik.

Unter der physikalischen Notwendigkeit von $t > t_{ret}(x, y, z, t)$ erhält man nur eine Lösung $t_{ret}(\mathbf{r}, t)$. Im Programm QPVor10Pr2.mws wird allgemein gezeigt, dass für $x > 0$ nur eine Lösung in Frage kommt.

Über diese Lösung kann man dann gemäß Gleichung (29) das elektrische Potenzial bestimmen.

Man erhält die folgende graphische Darstellung, die aus der Animation der Potenzialverteilung im Programm QPVor10Pr2.mws stammt:

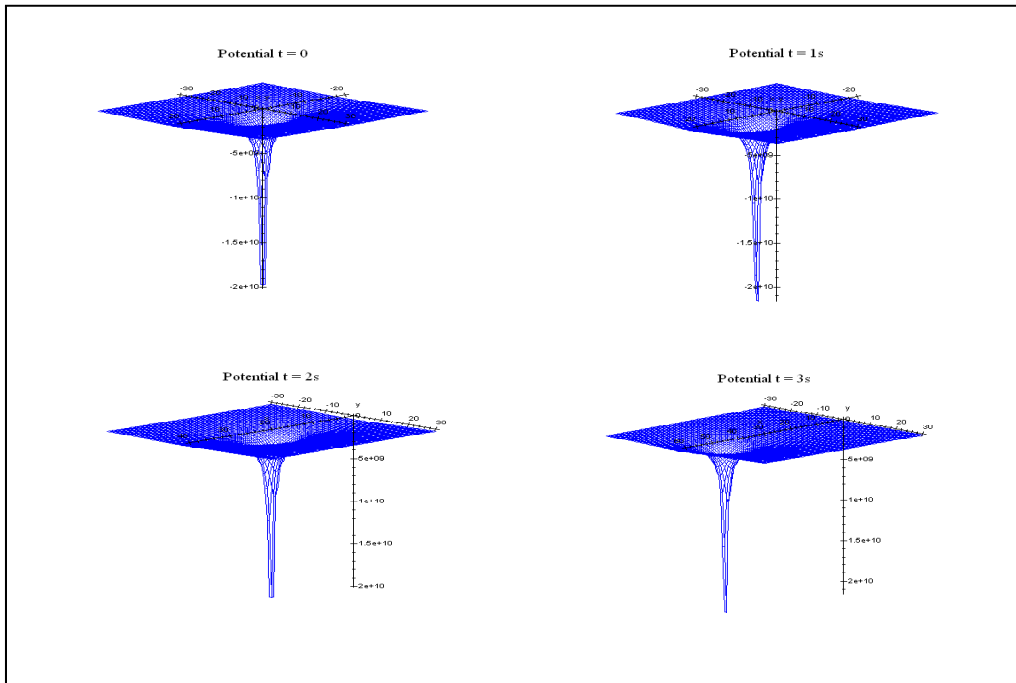


Figure 5: Elektrische Potenzialverteilung für ein auf der x-Achse gleichmäßig beschleunigtes Elektron für $z = 0$. Die Einheit der vertikalen Achse ist Volt, x und y-Achse haben die Einheit m.

Die Bewegung des Elektrons in Richtung fortschreitender x-Werte ist zu erkennen. Die Gleichung (29) des elektrischen Potenzials lässt sich kompakter schreiben durch:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r D_{ret}(\mathbf{r}, t) \kappa_{ret}(\mathbf{r}, t)} \quad (38)$$

wobei:

$$\mathbf{n}_{ret}(\mathbf{r}, t) \quad : \quad = \frac{\mathbf{D}_{ret}(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{D}_{ret}(\mathbf{r}, t)|} \quad (39)$$

$$\kappa_{ret}(\mathbf{r}, t) = 1 - \frac{1}{u} \mathbf{n}_{ret}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{V}(t_{ret}(\mathbf{r}, t)) \quad (40)$$

Das zugehörige **E**-Feld hat die folgende zeitliche Entwicklung, die ebenfalls in einer Animation im Programm gezeigt wird:

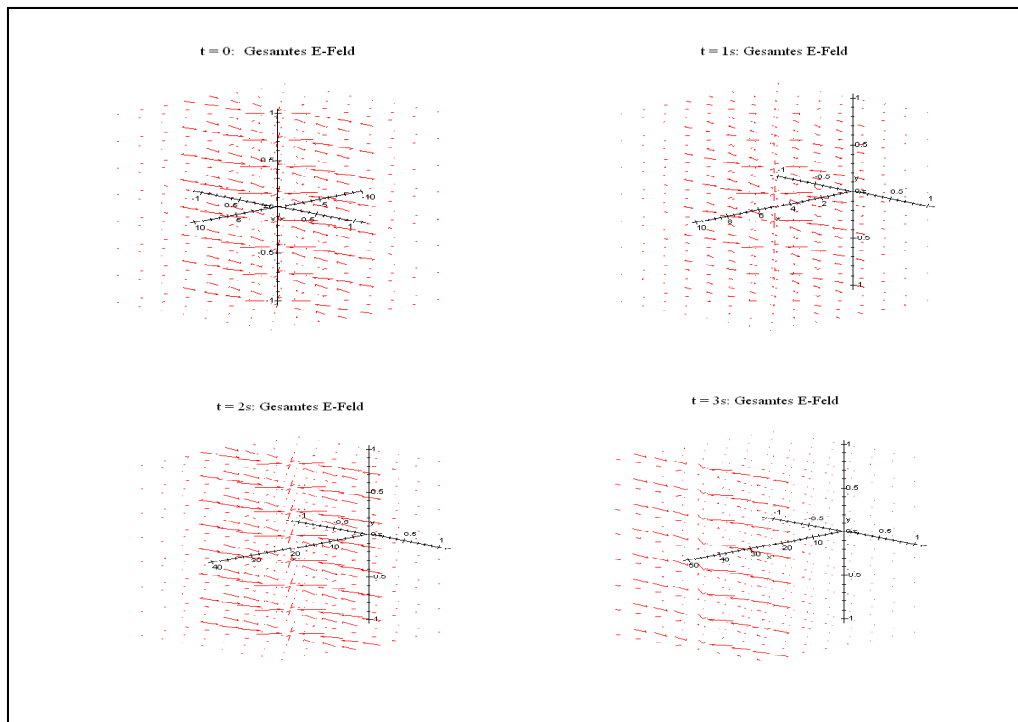


Figure 6: Elektrisches Feld eines gleichmäßig beschleunigten Elektrons auf der x-Achse in der Nähe des Elektrons. Die Einheit der Achsen ist m.

In der Nähe des Elektrons überwiegt der beschleunigungsunabhängige Anteil (31) des elektrischen Feldes. Im Programm ist dieses sowie das beschleunigungsabhängige elektrische Feld ebenfalls in einer Animation dargestellt.

Ein bewegtes Elektron stellt einen elektrischen Strom dar, es muss somit von einem Magnetfeld begleitet sein. Wie bereits angegeben besteht auch für das **B**-Feld aus zwei Anteilen: einem beschleunigungsunabhängigen und einem beschleunigungsabhängigen Anteil, wobei letztere in der Fernzone dominieren.

Alle **B**-Felder sind im Programm in Animationen zu sehen, die zeitliche Entwicklung des gesamten **B**-Feldes zeigt die folgende Darstellung:

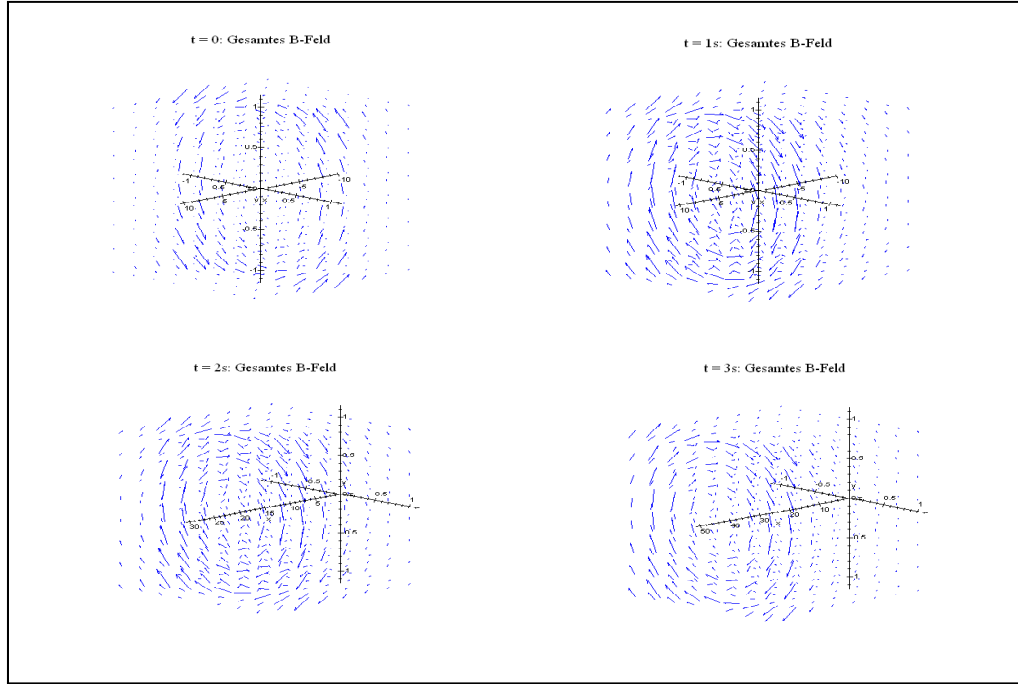


Figure 7: Gesamtes **B**-Feld einer auf der x-Achse gleichmäßig beschleunigten Elektrons. Die Einheit der Achsen ist m.

Die Energieabstrahlung eines bewegten elektrischen Teilchens ist durch den **POYNTING**-Vektor gegeben:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (41)$$

Man kann zeigen²⁰, dass nur die beschleunigungsabhängigen Feldanteile zu einem Energieverlust des Teilchens führen. Diese Energie wird in Form einer elektromagnetischen Welle abgestrahlt und müßte dem Teilchen von außen wieder zur Verfügung gestellt werden. Ein gleichförmig bewegtes Teilchen erzeugt zwar **E**- bzw. **B**-Felder, verliert aber keine Energie durch Strahlung. Ganz anders ist die Situation, wenn sich z.B. ein Elektron auf einer Kreisbahn bewegt, wie dies in einem Synchrotron der Fall ist. In diesem werden Elektronen (aber auch andere Elementarteilchen) annähernd auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Dabei fliegen die Teilchen auf einem Kreis, dessen Durchmesser beispielsweise im Deutschen Elektronensynchrotron (DESY) in Hamburg rund 100m beträgt. Die Bewegung auf einer Kreisbahn ist stets beschleunigt: Selbst wenn sich der Betrag der Elektronengeschwindigkeit nicht ändert, üben

²⁰Zum Beispiel in Nolting, W. Grundkurs Theoretische Physik, Bd. 3, S. 358.

Führungsmagnete ständig eine zum Kreismittelpunkt gerichtete Zentripetalkraft aus. Dadurch kommt es zur Synchrotronstrahlung, die sich je nach Bauart des Synchrotrons vom sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums bis hin zum Gebiet der Röntgenstrahlung erstreckt.