# Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 6

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Behandelt wird die MAXWELL-Wellengleichung für den Fall einer Abhängigkeit von zwei Ortsvariablen. Diskutiert wird ferner der Aspekt der Polarisation und der Bildung von Wellenpaketen.

## 1. ZWEIDIMENSIONALE MAXWELLGLEICHUNGEN IM VAKUUM

**Maple-Datei zur Vorlesung**:
- QPVorl6Pr1.mws (Zweidimensionale Maxwell-Gleichung)
- QPVorl6Pr2.mws ( Polarisation)
- QPVorl6Pr3.mws (Wellenpakete)

Anknüpfend an die Ergebnisse aus der 5. Vorlesung zur Einführung in die Quantenphysik wird die zweidimensionale homogene Wellengleichung mit Maple gelöst und die Ergebnisse graphisch dargestellt.
Wiederum wird nur die MAXWELL-Gleichung für eine Feldkomponente betrachtet, wobei aber nur zugelassen wird, dass diese von den zwei Ortsvariablen x,y abhängig ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,y,t) = c^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,y,t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}E(x,y,t)\right\} \tag{1}$$

Über einen im Programm durchgeführten Separationsansatz[1] erhält man die Lösung:

$$E(x,y,t) = E_0 \cdot e^{i(k_1x+k_2y-\omega t)}, \omega^2 = c^2 \cdot \left(k_1^2 + k_2^2\right) \tag{2}$$

setzt man:

$$\mathbf{k} := \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \mathbf{r} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

so erhält man die kompaktere Schreibweise:

$$E(x,y,t) = E_0 \cdot e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \omega = c \cdot |\mathbf{k}|, \lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}, \nu = \frac{\omega}{2\pi}, |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \tag{3}$$

Den Vektor **k** bezeichnet man dabei als Richtungsvektor der ebenen Welle. Die Komponenten $k_1, k_2$ steuern also die Ausbreitungsrichtung der Welle, für $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$ läuft die ebene Welle in x-Richtung und für $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$ in y-Richtung - also jeweils in Richtung wachsender Werte.
Unter der Phasengeschwindigkeit $v = \frac{\omega}{k}$ versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich die Information ausbreitet.
MAXWELL sagte voraus, das sich die elektromagnetischen Wellen mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortpflanzen müssten. Der Wert war zunächst unbekannt.

[1] Man studiere diesen Lösungsweg ausführlich, denn diese Methode werden wir noch in verschiedenen Situationen einsetzen!

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER haben im Jahre 1856 den Wert der "kritischen Geschwindigkeit" zuerst bestimmt. Sie haben einen Kondensator aufgeladen und anschließend wieder entladen. Die dem Kondensator zugeführte Ladung ist:

$$Q = C \cdot U \Rightarrow [C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F = \text{Farad}$$

wobei die Kapazität C ein Maß für das Fassungsvermögen des Kondensators für elektrische Ladung ist. Diese Ladungsmenge wurde bei der Entladung elektromagnetisch durch Ablenkung einer Magnetnadel in einer Spule gemessen. Die gleiche Ladungsmenge des Kondensators wurde also einmal bei der Aufladung im elektrostatischen System und dann bei der Entladung im elektromagnetischen Maßsystem gemessen:
Der Kondensator wird plötzlich kurzgeschlossen, somit fließt nur ein Stromimpuls - der während seiner Existenz als konstant angenommen werden kann - , also eine Spitze durch den Draht, es gilt somit die Beziehung[2]:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

$$[j] = \frac{A}{m^2} = \frac{\frac{m}{s} \cdot As}{m^3} = \frac{[v] \cdot [Q]}{m^3} \tag{5}$$

Über den Zeigerausschlag wurde $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ gemessen. Das Verhältnis von j zu Q unter Beachtung des Drahtvolumens ergibt die Einheit $\frac{m}{s}$ der Geschwindigkeit.
Das Verhältnis beider Messungen (also Q und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$) ergibt eine Größe von der Dimension einer Geschwindigkeit. Der Versuch ergab den Wert der Lichtgeschwindigkeit - dies ist nun als Geschwindigkeit des elektrischen Stromes, nicht aber der el. Ladungen, im Leiter zu verstehen[3].
Dieses Ergebnis führte MAXWELL zur Idee, **dass elektromagnetische Wellen und das Licht von gleicher Natur sind**. Es lassen sich experimentelle Hinweise für diese Hypothese finden[4], so dass man die **Hypothese MAXWELLs** zusammenfassend so darstellen kann:

**Licht ist eine elektromagnetische Welle!**

Dieses Ergebnis stellt den Höhepunkt der klassischen Physik dar! MAXWELL gelingt eine Zusammenfassung zweier bisher getrennter Gebiete der Physik: der Beobachtung optischer sowie der Beobachtung elektromagnetischer Phänomene.
Analog zur eindimensionalen Welle führt eine Erhöhung von $|\mathbf{k}|$ zu einer Erhöhung der Frequenz[5] $\omega$ bzw. $\nu$ und zu einer Verkürzung der Wellenlänge $\lambda$. Die Überlagerung

[2] AMPÈRE's Gesetz für den statischen Fall, siehe Skript 4, Gleichung (17), zur Einführung in die Quantenphysik.

[3] Eine anschauliche Vorstellung ist, dass die Lichtgeschwindigkeit die Geschwindigkeit des von Elektron zu Elektron weitergegebenen Impulses entspricht. Die einzelnen Elektronen bewegen sich dagegen sehr viel langsamer durch den Draht.

[4] Die genaue Theorie sowie ihr experimenteller Beleg sind sehr schwierig, da eine elektromagnetische Welle eine vektorielle Welle ist! Dennoch lassen sich mit Licht eindeutig Wellenphänomene wie Beugung,Interferenz und Polarisation beobachten, die die Hypothese MAXWELLs plausibel erscheinen lassen.

[5] Sofern die Ausbreitungsgeschwindigkeit als konstant angesehen wird, z.B. wenn v = c ist.

der Elementarwellen der Gestalt:

$$\begin{aligned} E_1(x,y,t) &= |E_{01}|\, e^{i\Phi_1} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ E_2(x,y,t) &= |E_{02}|\, e^{i\Phi_2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \end{aligned}$$

führt analog wie im eindimensionalen Fall auf:

$$\begin{aligned} \textbf{konstruktive Interefenz} &: \quad \Phi_1-\Phi_2 = 2n\pi, n=0,1,2,3 \\ \textbf{destruktive Intereferenz} &: \quad \Phi_1-\Phi_2 = (2n+1)\,\pi, n=0,1,2,... \end{aligned} \tag{6}$$

Eine beispielhafte Überlagerung dreier Elementarwellen, die sich alle in die y-Richtung bewegen sollen, zeigt das nächste Bild:

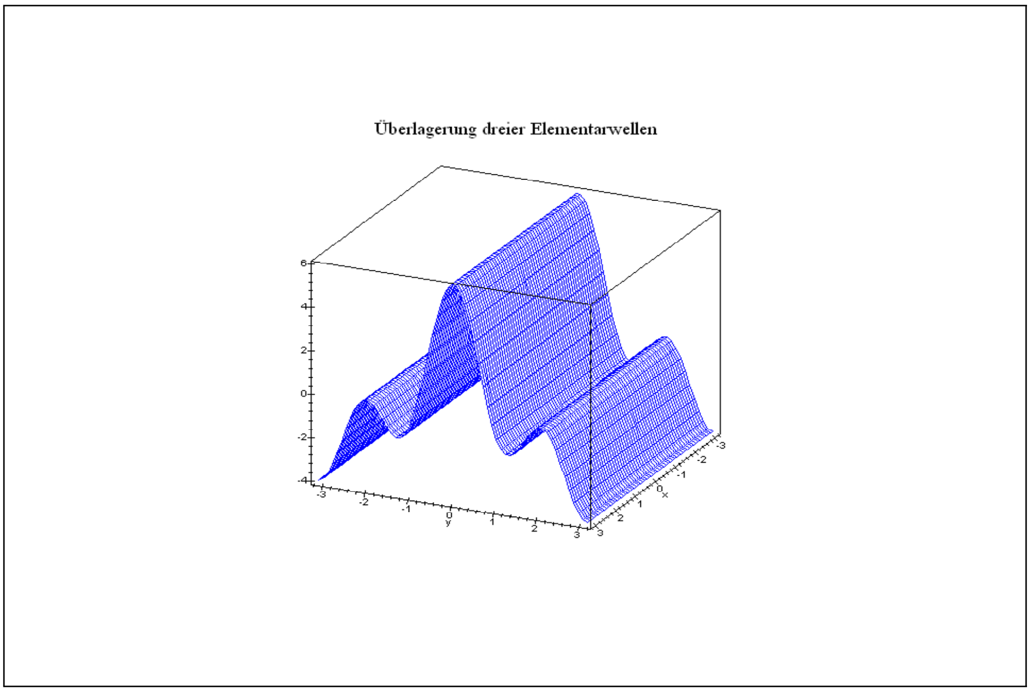


Figure 1: Wellenpaket aus einer Überlagerung von drei Elementarwellen.

## 2. Polarisation ebener Wellen

Die Lösung[6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= (E_{0x}\mathbf{e}_x + E_{0y}\mathbf{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)} \quad (7) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c}E_{0x}\cdot\cos(kz-\omega t)\cdot\mathbf{e}_y \quad (8) \end{aligned}$$

stellt eine sich in positiver z-Richtung fortpflanzende, monochromatische[7] ebene Welle dar. Sie repräsentiert die räumliche Ausbreitung einer harmonischen Schwingung. Offensichtlich ist die elektromagnetische Welle allein durch den **E**-Vektor oder allein durch den **B**-Vektor vollständig bestimmt. Die folgende Betrachtung bezieht sich aus diesem Grund ausschließlich auf den elektrischen Feldstärkevektor **E**.
Zunächst sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die beiden Koeffizienten $\mathrm{E}_{0x}$ und $\mathrm{E}_{0y}$ im allgemeinen um komplexe Größen handelt:

$$E_{0x} = |E_{0x}|\cdot e^{i\varphi}\ ;\ E_{0y} = |E_{0y}|\cdot e^{i(\varphi+\delta)} \quad (9)$$

Damit gilt dann für das experimentell messbare physikalische reelle **E**-Feld:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y \quad (10) \\ E_x &= |E_{0x}|\cdot\cos(kz-\omega t+\varphi) \quad (11) \\ E_y &= |E_{0y}|\cdot\cos(kz-\omega t+\varphi+\delta) \quad (12) \end{aligned}$$

Es lassen sich nun bezüglich der relativen Phase $\delta$ mehrere Fälle unterscheiden:
**1. Fall**: $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$
In diesem Falle gilt dann:

$$\begin{aligned} E &= (|E_{0x}|\,\mathbf{e}_x \pm |E_{0y}|\,\mathbf{e}_y)\cos(kz-\omega t+\varphi) \quad (13) \\ |E| &= \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2} \end{aligned}$$

Der Koeffizient ist ein orts- und zeitunabhängiger Vektor, d.h.die elektrische Feldstärke **E** schwingt relativ zur Ausbreitungsrichtung - der z-Achse - in einer festen Richtung. Man nennt in diesem Falle die Welle **linear polarisiert** und die Richtung von **E** die **Polarisationsrichtung.** Sie ist um den Winkel $\alpha$ gegen die x-Achse geneigt:

$$\tan\alpha = \frac{\pm|E_{0y}|}{|E_{0x}|} \quad (14)$$

**2. Fall**: $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$; $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$
In diesem Fall gilt dann:

$$\mathbf{E} = E\cdot[\cos(kz-\omega t+\varphi)\,\mathbf{e}_x \mp \sin(kz-\omega t+\varphi)\,\mathbf{e}_y] \quad (15)$$

Das obere Zeichen gilt im Falle $\delta = \frac{\pi}{2}$, das untere für den Fall $\delta = -\frac{\pi}{2}$. Für einen festen Raumpunkt z stellt die Klammer die Parameterdarstellung des Einheitskreises

[6] Siehe Gleichungen (67) und (68) Skript zur 5. Vorlesung Einführung in die Quantenphysik.
[7] Mit anderen Worten, sie besitzt eine feste Frequenz.

dar. Der **E**-Vektor durchläuft einen Kreis vom Radius E mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Man nennt die Welle deshalb **zirkular polarisiert**. Je nach Vorzeichen von $\delta$ wird der Kreis in einer der beiden möglichen Richtungen durchlaufen:

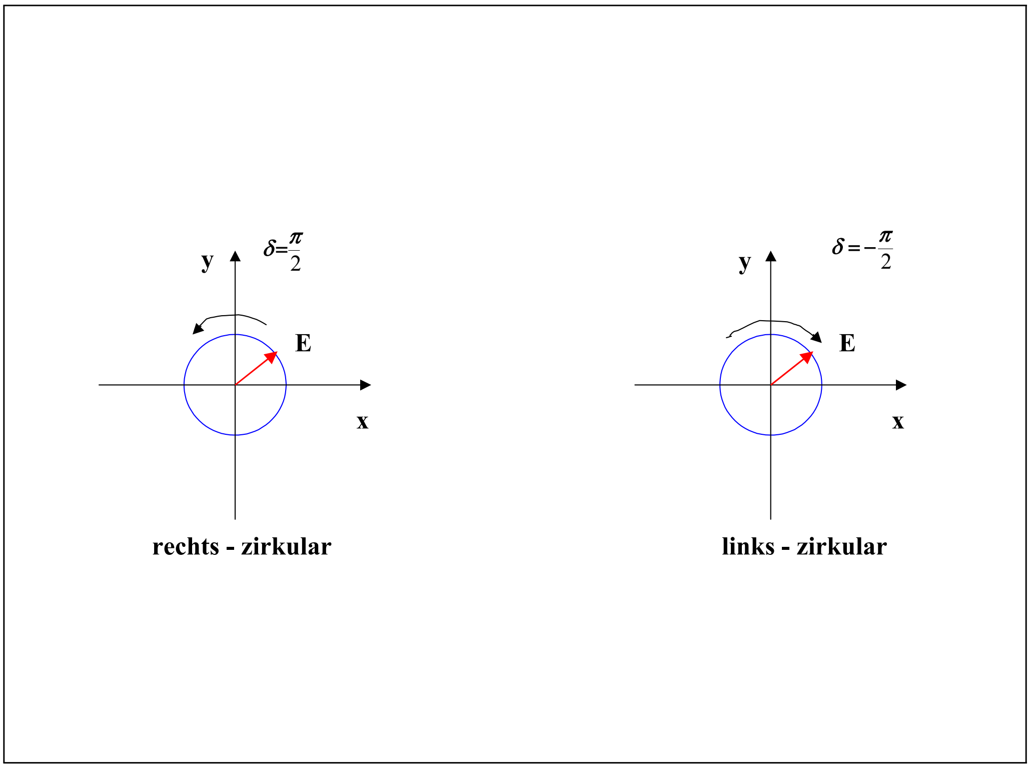


Figure 2: Der k-Vektor zeigt senkrecht aus der Zeichenebene heraus (z-Richtung). Bei Blickrichtung in die positive z-Richtung, d.h. in die Ausbreitungsrichtung, dreht der E-Vektor für $\delta = \frac{\pi}{2}$ nach rechts und für $\delta = -\frac{\pi}{2}$ nach links.

**3. Fall:** $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ , $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$
In diesem Fall erhält man aus den Gleichungen (11) und (12):

$$\begin{aligned} E_x &= |E_{0x}| \cdot \cos(kz - \omega t + \varphi) \\ E_y &= \mp |E_{0y}| \cdot \sin(kz - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Dies lässt sich über den Satz von PYTHAGORAS zusammenfassen zu:

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1 \tag{16}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$, die in x- bzw. y-Richtung liegen. Man spricht deshalb von **elliptisch polarisierten Wellen**.

Der **E**-Vektor durchläuft eine elliptische Spirale, seine Amplitude ist offensichtlich nicht mehr konstant:

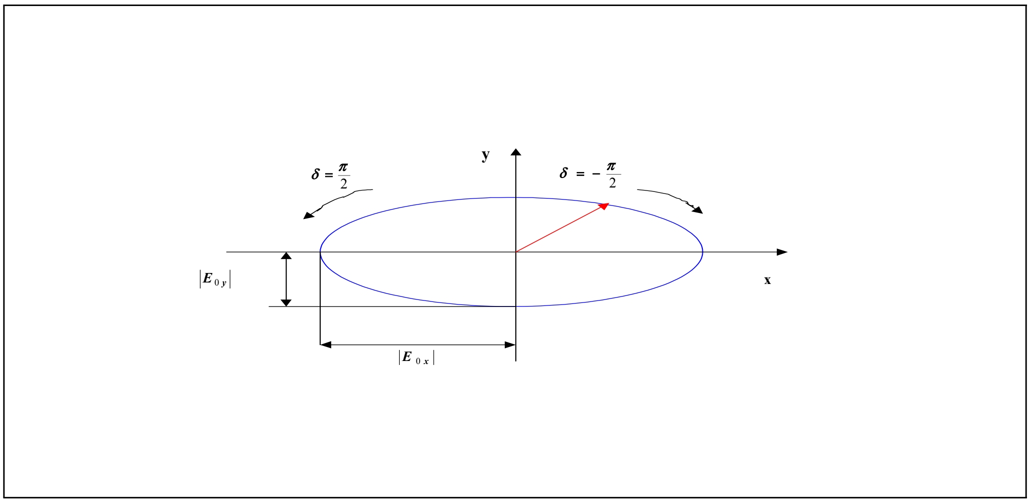


Figure 3: Elliptische Spirale, die der **E**-Vektor durchläuft.

**4. Fall**: $\delta$ beliebig; $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$
Dieser Fall ist der allgemeinste und somit auch der komplizierteste, denn jetzt ist die Ellipse noch, bezogen auf das xy-Achsenkreuz, verdreht:

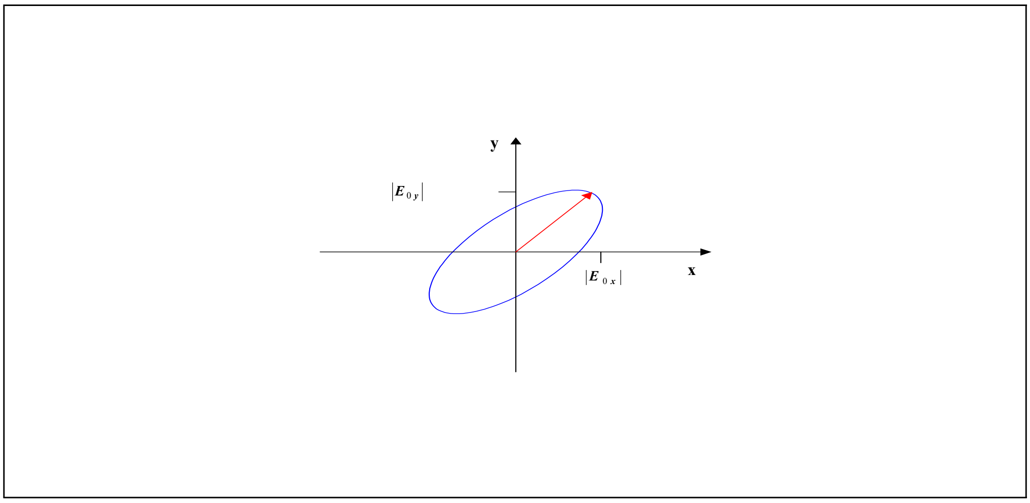


Figure 4: Elliptisch polarisierte Welle: allgemeinster Fall

Auch in diesem Fall nennt man die Welle **elliptisch polarisiert**.

## 3. Uneigentliche Integrale

Aus der Schule und den Grundvorlesungen ist die Integration von beschränkten Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen bekannt. Für das Verständnis der folgenden Überlegungen zu den Wellenpaketen ist eine Ausdehung des Integralbegriffes auf unbeschränkte Intervalle notwendig. Diese Integrale nennt man neben den Integralen für unbeschränkte Funktionen, die aber im weiteren Verlauf keine Rolle spielen, **uneigentliche Integrale**.

**Beispiel**:

Durch die bekannten Integrationsregeln errechnet man sofort:

$$\int_0^t e^{-x}dx = 1 - e^{-t}$$

Für $t \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen 1. Dies wird mathematisch folgendermaßen ausgedrückt:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx := \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}dx = 1$$

Das links stehende Integral von 0 bis $\infty$ ist durch den Grenzwert definiert. Man nennt $\int_0^\infty e^{-x}dx$ ein **uneigentliches Integral**. Der Integrationsbereich $[0,\infty)$ ist hierbei unbeschränkt. Der Wert

$$1 = \int_0^\infty e^{-x}dx$$

kann hierbei als Flächeninhalt der unendlich langen (schraffierten) Fläche in der folgenden Darstellung angesehen werden:

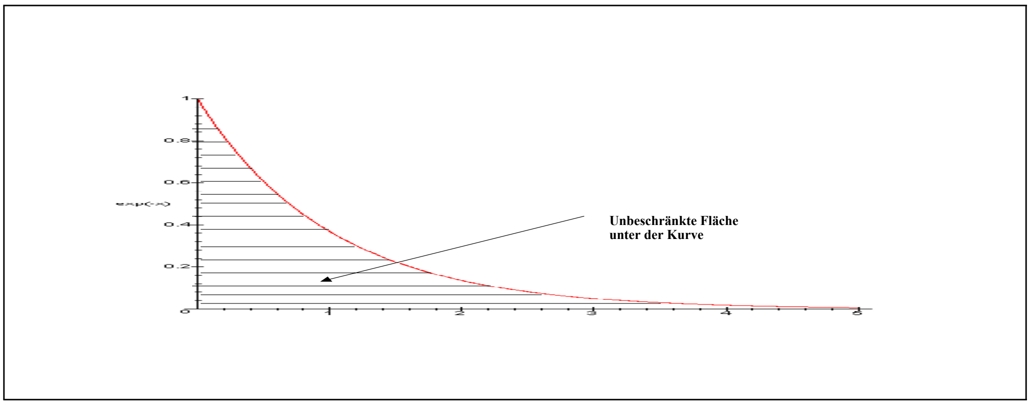


Figure 5: Zum uneigentlichen Integral $\int_0^\infty e^{-x}dx$.

## 4. Wellenpakete

Wir hatten als allgemeine Lösung der Wellengleichung:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\mathbf{r},t) \tag{17}$$

Ausdrücke der Form:

$$f_\pm(kz-\omega t) \tag{18}$$

gefunden, wobei man die Ausbreitungsrichtung mit der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems identifiziert. Dabei haben wir uns bezüglich des Wellenvektors k bzw. der Kreisfrequenz $\omega$ nicht festlegen müssen. Es muss lediglich der Zusammenhang für die Phasengeschwindigkeit c beachtet werden[8]:

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{19}$$

Man kann nun k als unabhängige Variable ansehen, $\omega$ ist dann wegen der obigen Beziehung nicht mehr frei wählbar. Wie wir bereits wissen, ist jede Summe von Elementarlösungen (18)

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot f_\pm(k_i z - \omega_i t) \tag{20}$$

wieder eine Lösung der Wellengleichung, vorausgesetzt (19)

$$c = \frac{\omega_i}{k_i}$$

ist erfüllt.
Eine noch allgemeinere Lösung wäre

$$F_\pm(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(k)\cdot f_\pm(kz-\omega t)\cdot dk \tag{21}$$

mit einer frei wählbaren **Gewichtsfunktion** $a(k)$.
Für praktische Anwendungen ist dieser Ausdruck ein wichtiges Ergebnis. Bisher haben wir nur monochromatische ebene Wellen diskutiert, d.h. Wellen mit scharf definierten k und $\omega$. Für die Praxis ist dies jedoch eine unrealistische Annahme, da keine Quelle rein monochromatisch sendet, sondern nur mehr oder weniger scharfe *Frequenzbündel*. Wegen (21) bedeutet dies jedoch keine prinzipielle Schwierigkeit. Zusatzüberlegungen sind dagegen für **dispersive Medien** notwendig:

$$\textbf{Dispersion} \iff \varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$$

**Einschub**:
Im Rahmen der bisherigen Vorlesung wurde nur das Vakkum betrachtet. Das "-Fassungsvermögen" für elektrische Ladungen des Vakuum-Plattenkondensators mit Plattengröße F und Plattenabstand d ist dann:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{F}{d}$$

[8]Siehe Gleichung (54) aus Skript 5 zur Einführung in die Quantenphysik.

Ist der Raum zwischen den beiden Platten mit einem Medium ausgefüllt (z.B. Metall, Glas oder auch Luft etc.), so wird dieses Medium auf den Einfluss des elektrischen Feldes **E** reagieren. Diese Reaktion ist in der sogenannten **relativen Dielektrizitätskonstante** $\varepsilon_r$ zusammengefasst. Man erhält nun:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{F}{d}$$

Den Einfluss eines B-Feldes auf Materie fasst man in der **relativen Permeabilität** $\mu_r$ zusammen.Bewegt sich eine monochromatische elektromagnetische Welle in einem ungeladenen Isolator, so erhält man für ihre Phasengeschwindigkeit:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_o \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} =: \frac{c}{n} \tag{22}$$

wobei n der **Brechungsindex** des Mediums und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

**In dispersiven Medien wird die Phasengeschwindigkeit** wegen (22) **frequenzabhängig**. In Systemen mit Dispersion muss man deshalb $\omega$ als irgendeine Funktion von k ansehen:

$$\omega = \omega(k)$$

Die $F_\pm$ aufbauenden Teilwellen in (21) breiten sich dann mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. Man kann keine einheitliche Phasengeschwindigkeit angeben. Diese Tatsache wird im folgenden zur Definition einer neuen Geschwindigkeit, der sogenannten **Gruppengeschwindigkeit**, führen.
Von Bedeutung für die Praxis sind in diesem Zusammenhang *gewichtete Überlagerungen von ebenen Wellen*:

$$H_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k) \cdot e^{i(kz \pm \omega t)} dk \tag{23}$$

bei denen die Gewichtsfunktion in einem relativ schmalen Bereich $\Delta k_0$ um ein bestimmtes $k_0$ herum konzentrierte Funktion darstellt. Ein Beispiel hierfür wäre die GAUSS-Funktion:

$$b(k) = e^{-(k-k_0)^2} \tag{24}$$

Der Hauptbeitrag zum obigen Integral (23) stammt dann aus dem Wellenvektorbereich um $k_0$ herum.

Betrachte dazu die folgende Abbildung:

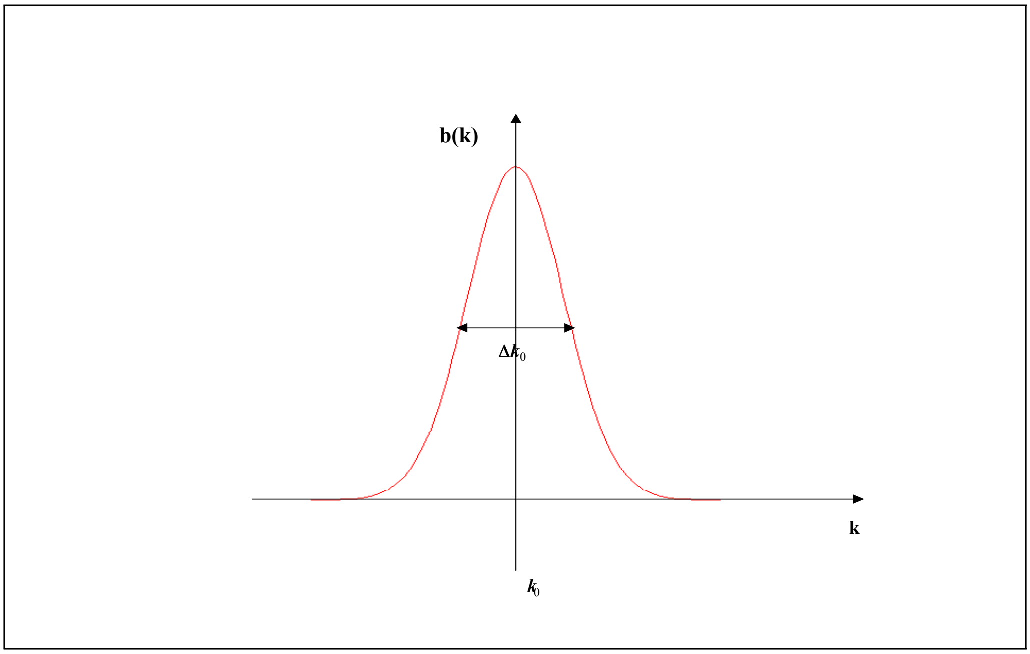


Figure 6: GAUSS-Funktion als Gewichtsfunktion: Man kann die Konzentration der Funktion in einem relativ schmalen Bereich um den Wert von $k_0$ herum erkennen.

Setzt man voraus, das $\omega(k)$ eine gutartige Funktion ist, d.h. eine hinreichend oft differenzierbare Funktion, so kann man sie um $k_0$ in eine TAYLOR-Reihe entwickeln:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\frac{d\omega}{dk}|_{k_0} + ...$$

Setzt man $\omega(k_0) = \omega_0$ und beachtet man, dass die Ableitung $\frac{d\omega}{dk}$ die Einheit einer Geschwindigkeit besitzt, so ist die folgende Definition sinnvoll:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} : \textbf{Gruppengeschwindigkeit} \tag{25}$$

**In dispersionsfreien Medien ist die Gruppengeschwindigkeit gleich der Phasengeschwindigkeit**.
Setzt man die Reihenentwicklung in den Exponenten der e-Funktion ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} e^{i(kz \pm \omega(k)t)} &= e^{i[kz \pm (\omega_0 + (k-k_0)v_g + ...)t]} \\ &= e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} e^{i(k-k_0)(z \pm v_g t)} + ... \end{aligned}$$

Bei einer scharf-gepeakten Gewichtsfunktion in (23) kann man die TAYLOR-Entwicklung für $\omega(k)$ nach dem linearen Term abbrechen, da stärker von $k_0$ abweichende k's wegen

$b(k) \approx 0$ zum Integral kaum beitragen:

$$
\begin{aligned}
H_{\pm}(z,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(k) \cdot e^{i(kz \pm \omega t)} dk \\
&\approx e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(k_0 + q)\, e^{iq(z \pm v_g t)} dq
\end{aligned}
$$

$$
H_{\pm}(z,t) \approx e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(k_0 + q)\, e^{iq(z \pm v_g t)} dq = e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \cdot \hat{H}_{\pm}(z \pm v_g t) \qquad (26)
$$

wobei

$$
q := k - k_0 \Rightarrow \frac{dq}{dk} = 1 \Rightarrow dq = dk
$$

gilt.
Der Ausdruck (26) stellt eine ebene Welle dar, deren Wellenlänge und Frequenz dem Maximum der Verteilung $b(k)$ entsprechen, moduliert jedoch mit einer orts- und zeitabhängigen Funktion $\hat{H}_{\pm}$. Die **Modulationsfunktion** $\hat{H}_{\pm}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_g$ in positiver bzw. negativer z-Richtung. Eine konstante Modulationsphase bedeutet nämlich:

$$
z \pm v_g t = const. \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \mp v_g \qquad (27)
$$

Eine so modulierte ebene Welle (26) nennt man **Wellenpaket**.
**Beispiel**: *GAUSS-Wellenpaket*
Im folgenden werde als Gewichtsfunktion eine GAUSS-Verteilung angenommen:

$$
b(k) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right)}, \Delta k_0 > 0 \qquad (28)
$$

Bei $k = k_0$ liegt das **Maximum**:

$$
b_{\max} = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \qquad (29)
$$

Der Abstand der symmetrisch zu $k_0$ liegenden Punkte, bei denen $b(k)$ auf den Wert:

$$
\frac{b_{\max}}{e}
$$

abgesunken ist, ist gerade $\Delta k_0$:

$$
\begin{aligned}
b\left(k_0 + \frac{\Delta k_0}{2}\right) &= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} = \frac{b_{\max}}{e} \\
b\left(k_0 - \frac{\Delta k_0}{2}\right) &= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} = \frac{b_{\max}}{e} \\
\Delta k_0 &= k_0 + \frac{\Delta k_0}{2} - \left(k_0 - \frac{\Delta k_0}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Der Parameter $k_0$ bestimmt den k-Wert des Maximums, über $\Delta k_0$ kann man die Breite der Verteilung steuern: Je größer dabei $\Delta k_0 > 0$ gewählt wird, desto schmaler ist die GAUSS-Verteilung.

Betrachte dazu die folgende Abbildung:

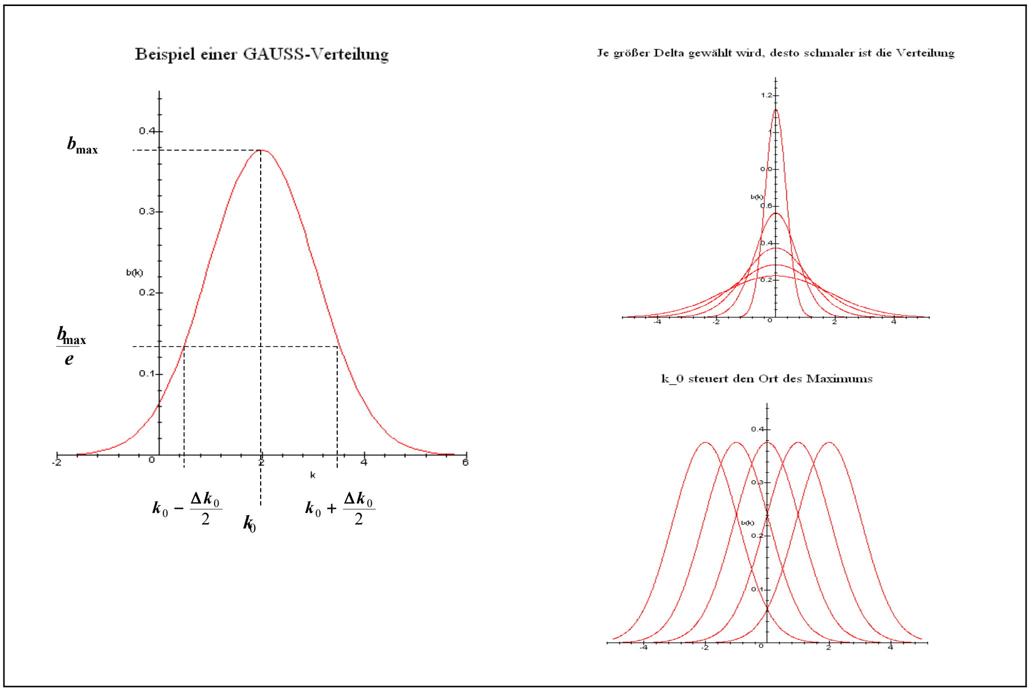


Figure 7: Die GAUSS-Verteilung.

Die Fläche unter der Glocke ist immer 1, denn es gilt:

$$\int\limits_{k=-\infty}^{\infty} b(k) \cdot dk = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} \int\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right)} dk$$

Durch die Substitution:

$$x = 2\frac{k-k_0}{\Delta k_0} \Rightarrow \frac{dx}{dk} = \frac{2}{\Delta k_0} \Leftrightarrow dk = \frac{\Delta k_0}{2} dx$$

so erhält man:

$$\int\limits_{k=-\infty}^{\infty} b(k) \cdot dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Dieses Integral kann man mit Maple lösen, wie im Programm QPVorl6Pr3.mws gezeigt wird:

$$\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{30}$$

Hieraus folgt dann die Behauptung.
Setzt man nun die GAUSS-Funktion $b(k)$ in die Modulationsfunktion $\hat{H}_{\pm}$, so erhält man mit:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\pm}(z \pm v_g t) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(k_0+q)\, e^{iq(z\pm v_g t)} dq \\ b(k) &= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}\right)} \\ &\Rightarrow\ b(k_0+q) = \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4q^2}{\Delta k_0^2}}\end{aligned}$$

$$\hat{H}_{\pm}(z \pm v_g t) = \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4q^2}{\Delta k_0^2}} \cdot e^{iq(z\pm v_g t)} dq = \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{4q^2}{\Delta k_0^2} - iq(z\pm v_g t)\right]} dq \tag{31}$$

Dieses kompliziert aussehende Integral kann man auf das Integral (30) zurückführen. Man kann den Expoenten der e-Funktion nämlich quadratisch geschickt ergänzen[9]:

$$\begin{aligned}\frac{4q^2}{\Delta k_0^2} - iq(z\pm v_g t) &= \left(\frac{2q}{\Delta k_0}\right)^2 - iq(z \pm v_g t) \\ &= \left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z\pm v_g t)\right)^2 - \left(\frac{i}{4}\Delta k_0(z\pm v_g t)\right)^2 \\ \frac{4q^2}{\Delta k_0^2} - iq(z\pm v_g t) &= \left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z\pm v_g t)\right)^2 + \frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)^2 \qquad (32)\end{aligned}$$

Man erhält somit:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\pm}(z\pm v_g t) &= \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0(z\pm v_g t)\right)^2 + \frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)^2\right]} dq \\ &= \frac{2}{\Delta k_0\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z\pm v_g t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0(z\pm v_g t)\right)^2} dq\end{aligned}$$

Substituiert man nun:

$$x := \frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0 (z\pm v_g t) \Rightarrow \frac{dx}{dq} = \frac{2}{\Delta k_0} \Rightarrow dq = \frac{\Delta k_0}{2} dx$$

so lässt sich das Integral auf das Integral (30) zurückführen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2q}{\Delta k_0} - \frac{i}{4}\Delta k_0(z\pm v_g t)\right)^2} dq = \frac{\Delta k_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\Delta k_0}{2}\sqrt{\pi}$$

[9] Die Methode ist aus der Schule bei der Betimmung des Scheitelpunkts einer Parabel bekannt.

und damit:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\pm}\left(z \pm v_g t\right) &= \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z \pm v_g t)^2} \frac{\Delta k_0}{2} \sqrt{\pi} \\ \hat{H}_{\pm}\left(z \pm v_g t\right) &= e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z \pm v_g t)^2} \qquad (33)\end{aligned}$$

Dann erhält man über (26):

$$H_{\pm}(z,t) \approx e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} e^{-\frac{\Delta k_0^2}{16}(z \pm v_g t)^2} \qquad (34)$$

Dies ist eine ebene Welle, deren Amplitude gaußförmig von $(z \pm v_g t)$abhängig. Die GAUSS-Glocke bewegt sich starr mit der Geschwindigkeit $v_g$ in $\mp$z-Richtung. In jedem Wellenpaket läuft die Welle mit der Phasengeschwindigkeit $u = \frac{\omega(k)}{k}$, das Paket dagegen mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g$.
In der folgenden Darstellung wird ein Ausschnitt aus einer Animation aus QPVorl6Pr3.mws gezeigt. Sie zeigt den Fall eines GAUSS-Pakets bei dem Gruppen- und Phasengeschwindigkeit übereinstimmen:

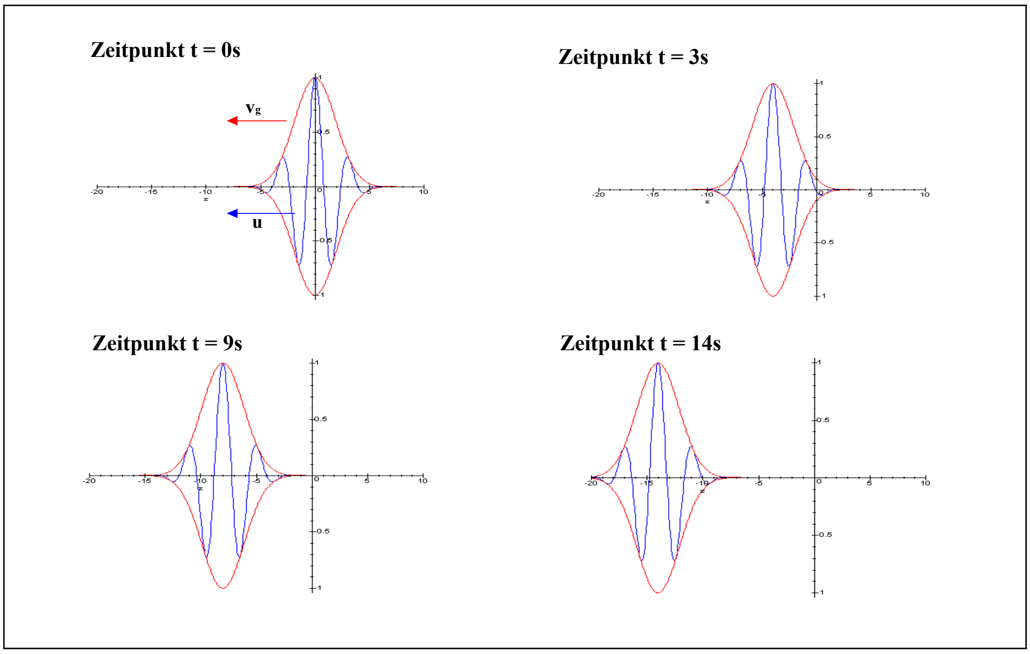


Figure 8: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit stimmen überein. Man beachte, dass sich weder die Form der GAUSS-Funktion, noch die ebene Welle verändern!

Die Breite des GAUSS-Wellenpaketes, definiert analog zu der von $b(k)$, ist offenbar:

$$\Delta z = \frac{8}{\Delta k_0}$$

Dies bedeutet:

$$\Delta z \cdot \Delta k_0 = const. \qquad (35)$$

**Je breiter die k-Verteilung, desto schmaler die z-Verteilung (das Wellenpaket) und umgekehrt**. Eine **scharf lokalisierte Verteilung im k-Raum**[10], d.h.

$$\Delta k_0 \rightarrow 0$$

bedeutet im Ortsraum eine nicht-modulierte ebene Welle,

$$H_{\pm}(z,t) \longrightarrow_{\Delta k_0 \rightarrow 0} e^{i(k_0 z \pm \omega_0 t)} \tag{36}$$

sie ist im Ortsraum also nicht mehr lokalisierbar. **Räumlich scharf lokalisierbar** heißt dagegen:

$$\frac{1}{\Delta k_0} \rightarrow 0 \,\text{oder}\, \Delta k_0 \rightarrow \infty \tag{37}$$

Die Verteilung im k-Raum ist damit völlig verschmiert. Alle Wellenvektoren erscheinen dann mit gleichem Gewicht. Die folgende Abbildung zeigt diesen Sachverhalt noch einmal zusammengefasst:

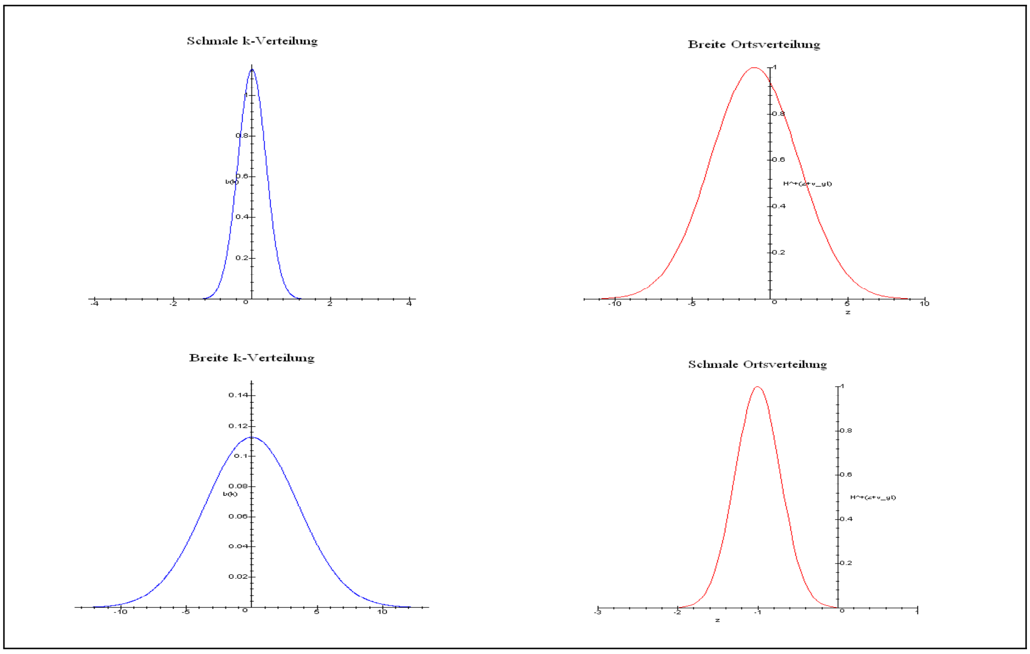


Figure 9: Gegenüberstellung von $b(k)$ und $\hat{H}(z \pm v_g t)$.

Dieser Abschnitt hat gezeigt, dass eine Welle durch zwei Arten von Ausbreitungsgeschwindigkeiten gekennzeichnet ist:

$$\textbf{Phasengeschwindigkeit} \quad : \quad u = \frac{\omega(k)}{k} \tag{38}$$

$$\textbf{Gruppengeschwindigkeit} \quad : \quad v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} \tag{39}$$

[10] Dieser Fall führt auf eine scharfe Wellenlänge, da über $\Delta k_0 \rightarrow 0$ ein scharfes k herausgefiltert wird.

Erstere beschreibt die Ausbreitung einer ebenen Welle, letztere die eines Wellenpaketes. Die Gruppengeschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit, mit der in einer Welle Energie oder Information (Signale) transportiert werden kann. Die Spezielle Relativitätstheorie lehrt, dass die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum für $v_g$ eine obere Schranke darstellt:

$$v_g \leq c \tag{40}$$

Von Dispersion spricht man genau dann, wenn $u \neq v_g$ ist.
Im Programm QPVorl6Pr3.mws kann man eine Animation eines Wellenpaketes für diesem Fall betrachten. Die folgende Abbildung zeigt einige Bilder aus dieser Animation:

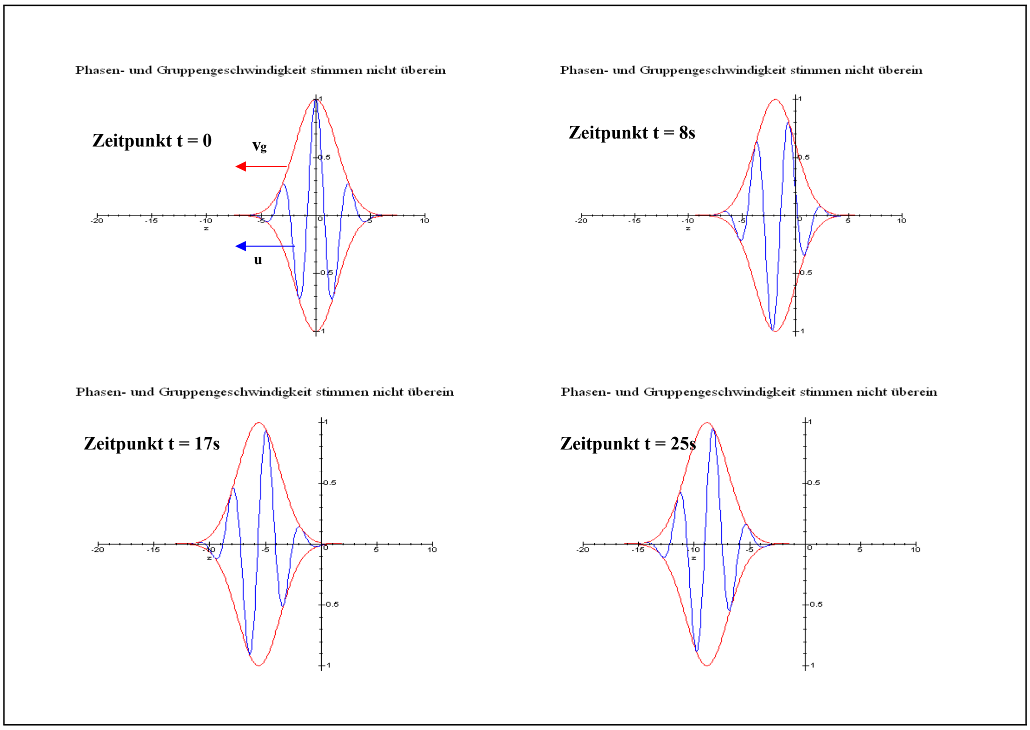


Figure 10: Nun stimmen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit nicht mehr überein. Man kann erkennen, dass sich die Form der modulierten ebenen Wellen imVergleich zum Zeitpunkt t = 0 verschiebt.

Man beachte jedoch, dass das Konzept der Gruppengeschwindigkeit eigentlich nur so lange sinnvoll ist, wie die Näherungen, die von (23) bis (26) vollzogen wurden, auch wirklich erlaubt sind.