

# Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 1

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Inhalt dieser Vorlesung sind die Grundbegriffe el. Ladung, el. Ladungsdichte sowie der el. Strom. Über das COULOMB-Gesetz wird das Konzept des elektrischen Feldes eingeführt.

1. WIEDERHOLUNG VON KENNTNISSEN AUS DER ELEKTRODYNAMIK I

**Maple-Datei zur Vorlesung:**

- QPVorl1Pr1.mws (Vektorfelder, insb. el. Feld)
- QpVorl1Pr2.mws (El. Potenzial)

## 1.1. Wiederholung mathematischer Vorkenntnisse.

**Koordinatensysteme.** Ein **kartesisches Koordinatensystem** wird durch drei Basisvektoren<sup>1</sup>  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  dargestellt, die senkrecht aufeinander stehen und ein Rechtssystem bilden:

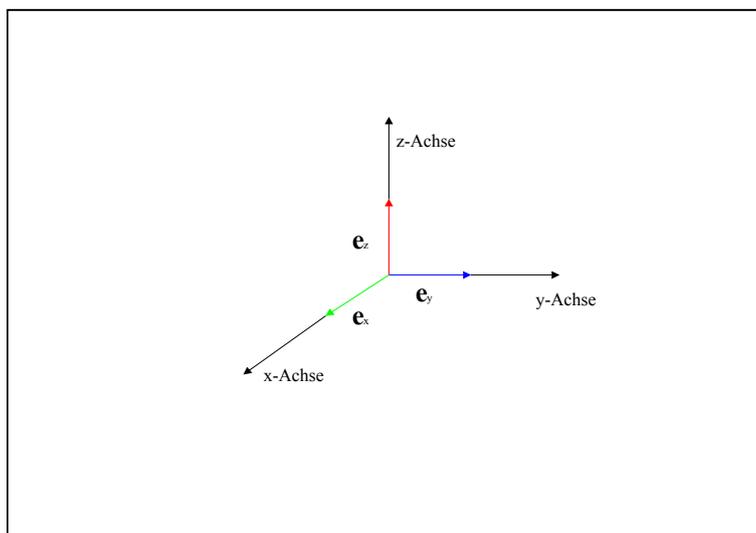


Figure 1: **Kartesisches Koordinatensystem:** Die drei Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_z$  bilden ein **Rechtssystem:** dreht man die x-Achse rechtsherum in Richtung der y-Achse, so bewegt sich eine Rechtsschraube in Richtung der z-Achse.

Die drei Basisvektoren stehen senkrecht aufeinander:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Vektoren werden in der gesamten Vorlesung breit gedruckt dargestellt.

und haben die Länge Eins:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (2)$$

Ein beliebiger Vektor  $\mathbf{r}$  kann nun als Summe dreier Vektoren aufgefasst werden, die die Richtung der Basisvektoren besitzen und geeignete Vielfache dieser Basisvektoren sind:

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z \quad (3)$$

Statt durch seine kartesischen Koordinaten  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$  kann ein beliebiger Vektor auch durch seinen Betrag  $r$  und durch den Polarwinkel  $\vartheta$  und den Azimutwinkel  $\varphi$  dargestellt werden:

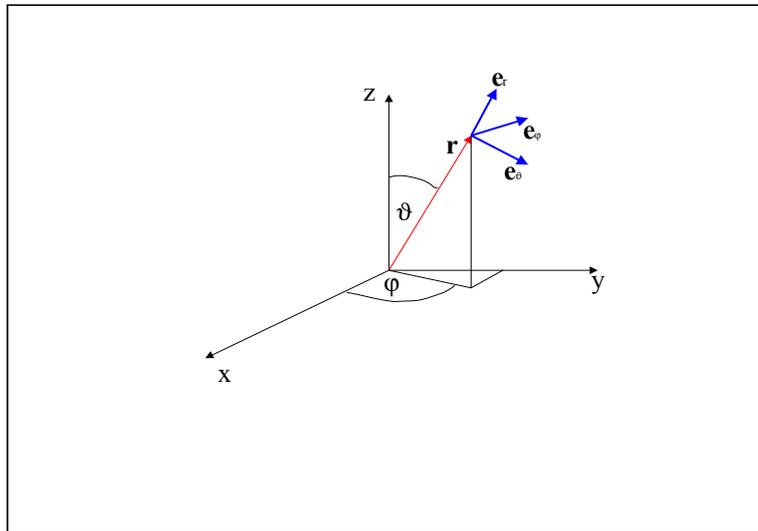


Figure 2: **Kugelkoordinaten:** Man beachte, dass die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  ortsabhängig sind.

Den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten geben die folgenden Formeln wieder:

$$r_x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \quad (4)$$

$$r_y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \quad (5)$$

$$r_z = r \cdot \cos \vartheta \quad (6)$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (7)$$

$$\tan \vartheta = \frac{1}{r_z} \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (8)$$

$$\tan \varphi = \frac{r_y}{r_x} \quad (9)$$

Der Einheitsvektor in Richtung wachsender Werte von  $r$  ist:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \Rightarrow (\mathbf{e}_r) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die beiden anderen Einheitsvektoren haben in kartesischen Koordinaten die folgende Darstellung:

$$(\mathbf{e}_\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Natürlich gelten auch für diese Einheitsvektoren die Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1 \quad (13)$$

Eine weitere Möglichkeit der Darstellung eines Vektors besteht darin, die kartesische  $z$ -Komponente beizubehalten, jedoch die beiden anderen kartesischen Koordinaten zu ersetzen:

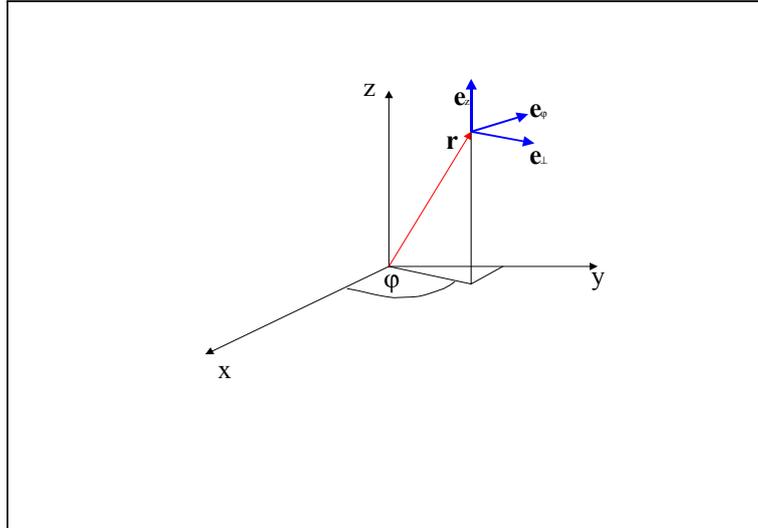


Figure 3: Zylinderkoordinaten: In diesem Koordinatensystem sind die beiden Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_\perp$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  ortsabhängig.

Die Darstellung der Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten hat die folgende Gestalt:

$$(\mathbf{e}_\perp) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Den Zusammenhang zwischen Zylinderkoordinaten und kartesischen Koordinaten erhält man durch:

$$x = r_{\perp} \cdot \cos \varphi \quad (15)$$

$$y = r_{\perp} \cdot \sin \varphi \quad (16)$$

$$z = z \quad (17)$$

$$r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (18)$$

**Flächen- und Volumenintegral.** Aus der Schule ist das Integral einer Funktion  $f(t)$  bekannt als Summe von infinitesimal schmalen Flächenstücken unter der Kurve:

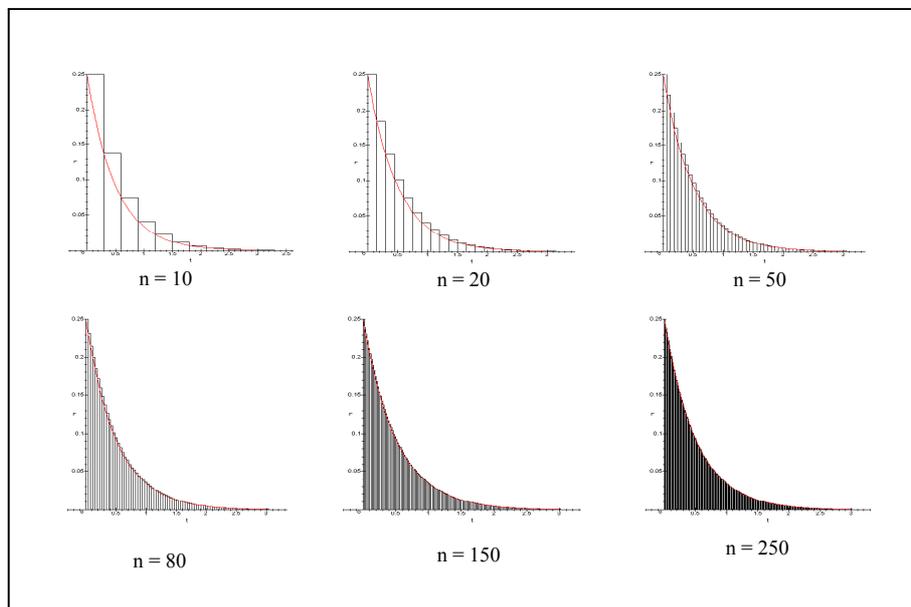


Figure 4: Integration als Grenzwertprozess.

Zur Berechnung eines bestimmten Integrals teilt man das gesamte Intervall  $[a, b]$  im allgemeinen in einzelne Intervalle der Länge:

$$\Delta t_n := \frac{b - a}{n} \quad (19)$$

und wertet die Funktion  $f(t)$  an den  $t$ -Stellen:

$$t_{ni} := a + i \frac{b - a}{n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (20)$$

Man bildet dann die Summe:

$$f(t_{n1}) \cdot \Delta t_n + f(t_{n2}) \cdot \Delta t_n + \dots + f(t_{nn}) \cdot \Delta t_n = \Delta t_n \cdot \sum_{i=1}^n f(t_{ni})$$

Das **bestimmte Integral der Funktion  $f(t)$  im Intervall  $[a, b]$**  ist dann definiert als:

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t_n \cdot \sum_{i=1}^n f(t_{ni}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad (21)$$

Überträgt man diesem Prozess auf eine Funktion  $f(x, y)$ , so erhält man ein Flächenintegral. Das Integrationsintervall ist hierbei für ein kartesisches Koordinatensystem eine Fläche auf der x-y-Ebene. Die infinitesimal kleinen Rechtecke gehen für diesen Fall in Quader mit infinitesimal kleiner Grundfläche über. Ein Volumenintegral entsteht dann durch eine formale Übertragung dieses Prozesses auf eine Funktion  $f(x, y, z)$ . Erleichternd kommt hinzu, dass man Flächen- wie auch Volumenintegrale zur Berechnung auf einfache, bestimmte Integrale zurückführen kann. Dazu zwei Beispiele in kartesischen Koordinaten:

1.

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_{x=2}^4 \int_{y=3}^7 xy \cdot dx dy = \int_{x=2}^4 x dx \cdot \int_{y=4}^8 y dy \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 \cdot \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_4^8 \\ &= \left[ \frac{1}{2} 4^2 - \frac{1}{2} 2^2 \right] \cdot \left[ \frac{1}{2} 8^2 - \frac{1}{2} 4^2 \right] \\ &= 6 \cdot 24 \\ &= 144 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{x=3}^6 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 x^2 \cos(yz) dx dy dz \\ &= \int_{x=3}^6 x^2 dx \cdot \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \cos(yz) dy dz \\ &= \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_3^6 \cdot \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \cos(yz) dy dz \\ &= 69 \cdot \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \cos(yz) dy dz \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Doppelintegrals ist nun zu beachten, dass während einer bestimmten Integration, z.B. über die Variable y, die Variable z als Konstante betrachtet wird:

$$\int_{y=0}^1 \int_{z=1}^4 \cos(yz) dy dz = \int_{y=0}^1 \left[ \frac{1}{y} \sin(yz) \right]_0^1 dz$$

$$= \int_{y=0}^1 \frac{1}{y} \sin(y) dz =$$

$$\approx 0.9461$$

Das letzte Integral wurde dabei mit Maple berechnet<sup>2</sup>. Zusammengefasst erhält man somit:

$$\int_{x=3}^6 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 x^2 \cos(yz) dx dy dz \approx 69 \cdot 0.9461 = 65.2809$$

Der Fall, dass nicht alle Integrationsgrenzen Konstanten sind ist komplizierter, wird jedoch in der gesamten Vorlesung nicht behandelt. In den verschiedenen Koordinatensystemen hat das Volumenelement die folgende Gestalt:

	<b>Kart. Koord.</b>	<b>Zylinderkoord.</b>	<b>Kugelkoord.</b>
<b>Volumenelement</b>	$dx \cdot dy \cdot dz$	$r_{\perp} \cdot dr_{\perp} \cdot d\varphi \cdot dz$	$r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta$

**1.2. Ladungen und Ströme.** Die Grundgrößen der klassischen Mechanik,

### Masse, Länge, Zeit

sind mehr oder weniger direkt über unsere Sinnesorgane und unser angeborenes Zeitgefühl erfahrbar. Wir können sie gewissermaßen ohne experimentelle Hilfsmittel wahrnehmen. In der Elektrodynamik tritt als vierte Grundgröße die

### Ladung

hinzu, deren Beobachtung allerdings spezielle Hilfsmittel erfordert. Es gibt kein Sinnesorgan für eine direkte Wahrnehmung elektrischer Erscheinungen.

Bereits THALES VON MILET (625 bis 547 v. Chr) war bekannt, dass bestimmte Körper ihre Eigenschaften ändern, wenn man sie an anderen Körpern reibt. Mit einem Tuch geriebener Bernstein (griechisch: elektron) ist z.B. in der Lage, kleine, leichte Körper (Körner oder Papierschnitzel o.ä.) anzuziehen. Die dabei auftretenden Kräfte können mechanisch nicht mehr erklärt werden. Aus diesem Grund sagt man zunächst einfach, dass geriebene Material befinde sich in einem

### elektrischen Zustand

Man beobachtet weiter, dass sich dieser Zustand durch Berühren von einem zum anderen Körper übertragen lässt, was sich am elegantesten durch Einführen einer substanzartigen Größe, der

### elektrischen Ladung **Q**, Einheit: **C=As**, Bezeichnung: **Coulomb**

erklären lässt. Diese elektrische Ladung wird als Ursache der oben erwähnten Kräfte angesehen. Sie kann bei entsprechendem Kontakt als

### elektrischer Strom **I**, Einheit: **A**, Bezeichnung: **Amperè**

<sup>2</sup>Der Integrationsbefehl zur numerischen Integration lautet:  
> int(1/y\*sin(y),y=0..1);

von einem zum anderen Körper fließen<sup>3</sup>.

Die experimentelle Erfahrung lehrt, dass es zwei Arten von Ladungen gibt, die man willkürlich, aber zweckmäßig durch die Begriffe **positiv** und **negativ** unterscheidet:

$$\begin{aligned} Q > 0 &: \text{ positive Ladung} \\ Q < 0 &: \text{ negative Ladung} \end{aligned} \quad (22)$$

Das Ladungsvorzeichen ist dabei so festgelegt, dass Reiben eines Glasstabes auf einem Seidenlappen die Ladung  $Q > 0$  auf diesem zurücklässt. Reiben eines Hartgummistabes auf einem Katzenfell lässt dagegen die Ladung  $Q < 0$  auf dem Stab zurück. Diese Festlegung hat zur Folge, dass die Ladung des Elektrons, die man als natürliche Einheit wählt, negativ ist. Bezüglich additiver und multiplikativer Rechenoperationen verhalten sich Ladungen wie gewöhnliche positive und negative Zahlen:

$$\text{Gesamtladung } Q = \sum_{i=1}^n q_i \quad (23)$$

$Q = 0$  bedeutet zunächst nur, dass sich positive und negative Ladungen kompensieren, und nicht notwendig, dass der gesamte Körper aus elektrisch neutralen Bausteinen aufgebaut ist. Abführen von positiver Ladung lässt den Körper negativ geladen zurück und umgekehrt. Für das weitere Verständnis sehr wichtig ist die experimentelle Erfahrung<sup>4</sup>, dass ebenso wie die Materie auch die Ladung eine gequantelte, atomistische Struktur besitzt. Es gibt eine kleinste, nicht mehr teilbare

### Elementarladung $e$ .

Jede andere Ladung lässt sich dann als ganzzahliges Vielfaches von  $e$  schreiben:

$$Q = ne, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (24)$$

Beispiele hierfür sind:

$$\begin{aligned} \text{Elektron} &: n = -1 \\ \text{Proton} &: n = +1 \\ \text{Neutron} &: n = 0 \\ \text{Atomkern} &: n = Z \text{ (Ordnungszahl)} \end{aligned}$$

Ein für das weitere Verständnis der Elektrodynamik grundlegender Begriff ist der der

$$\text{elektrischen Ladungsdichte } \rho \quad (25)$$

Sie ist definiert als Ladung pro Volumeneinheit und hat somit die Einheit:

$$[\rho] = \frac{As}{m^3}$$

<sup>3</sup>Ein el. Strom der Stromstärke 1A transportiert pro Sekunde eine Ladungsmenge von 1Coulomb.

<sup>4</sup>Durch die schon aus der Schule bekannten Versuche der Elektrolyse (FARADAY-Gesetz) und des MILLIKAN-Versuchs.

Aus der Ladungsdichte berechnet sich die Gesamtladung  $Q$  im Volumen  $V$ :

a) Im Falle einer **konstanten Ladungsdichte** über:

$$Q = V \cdot \rho \quad (26)$$

b) Ist die Ladungsdichte im Volumen ortsabhängig, erhält man die Gesamtladung durch Integration:

$$Q = \iiint_V \rho(r') d^3 r' \quad (27)$$

In Analogie zum Modell des Massenpunktes in der klassischen Mechanik führt man in der Elektrodynamik die

### **Punktladung $q$**

dann ein, wenn die Ausdehnung der Ladungsverteilung vernachlässigbar ist<sup>5</sup>.

Die Tatsache, dass geladene Körper aufeinander Kräfte ausüben, kann zur Messung der Ladung ausgenutzt werden (Elektrometer). Man beobachtet, dass sich Ladungen gleichen Vorzeichens abstoßen und ungleichen Vorzeichens anziehen. Diese Beobachtung führen zur Definition der Ladungseinheit:

**Zwei Punktladungen gleichen Betrages, die im Vakuum<sup>6</sup> im Abstand von 1m die Kraft:**

$$\mathbf{F} = \frac{10^{12}}{4\pi \cdot 8.854} \mathbf{N}$$

**aufeinander ausüben, besitzen jeweils die Ladung:**

$$\mathbf{1 \text{ Coulomb (1C)} = 1 \text{ Amperèsekunde (1As)}}$$

Diese Definition hat für die Elementarladung  $e$  zur Folge:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} C \quad (28)$$

---

<sup>5</sup>Diese Abstraktion bedeutet eine starke mathematische Vereinfachung, die man bisweilen auch mit Vorsicht behandeln muss.

<sup>6</sup>Das heißt bei Abwesenheit anderer elektrisch geladener Körper.

**1.3. COULOMB-Gesetz, Konzept des elektrischen Feldes.** Betrachte die folgende Abbildung<sup>7</sup>:

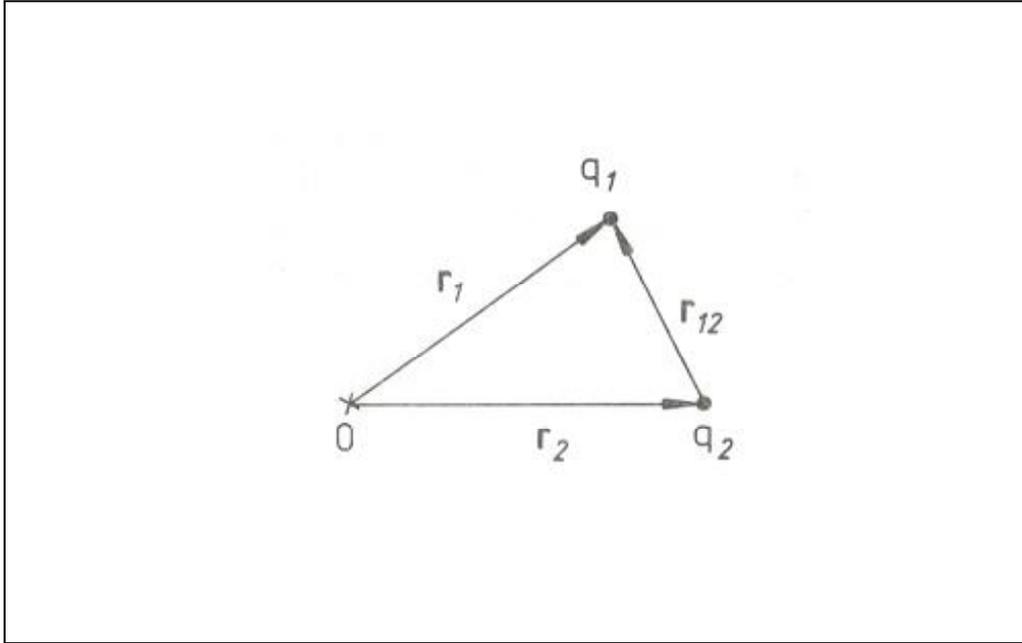


Figure 5: Zur Herleitung des COULOMB-Gesetzes.

Es soll nun genauer untersucht werden, wie **ruhende** geladene Körper miteinander wechselwirken. Dabei kann man sich zur Herleitung des COULOMB-Gesetzes auf die experimentelle Erfahrung stützen.

Die beiden Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  haben den Abstand:

$$r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

Dieser soll viel größer als die Abmessungen der beiden Ladungsverteilungen sein, so dass man diese als Punktladung auffassen kann. Dann findet man experimentell für die Kraftwirkungen der beiden Ladungen aufeinander die folgende Proportionalität, das COULOMB-Gesetz:

$$\mathbf{F}_{12} = k \cdot q_1 \cdot q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = -\mathbf{F}_{21} \quad (29)$$

$\mathbf{F}_{12}$  ist die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübte Kraft. Das COULOMB-Gesetz kann man als experimentell eindeutig verifizierte Tatsache auffassen. Die Konstante  $k$  hängt vom Medium ab, in dem sich die Punktladungen befinden. Sie hat im MKSA-System definiert durch:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (30)$$

<sup>7</sup>Sie stammt aus Nolting, W.: Grundkurs Theoretische Physik, Bd. 3, Zimmermann-Neufang 1993, S. 51.

wobei  $\varepsilon_0$  die **Dielektrizitätskonstante des Vakuums** ist:

$$\varepsilon_0 = (8.85418782 \pm 0.00000007) \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \quad (31)$$

In dieser Definition wurde noch:

$$1V \text{ (Volt)} = 1 \frac{Nm}{As}$$

benutzt.

Für die von mehreren ruhenden Ladungen  $q_j$ ,  $j=2, \dots, N$ , die die Orte  $\mathbf{r}_j$ ,  $j=2, \dots, N$  besitzen, auf eine Ladung  $q_1$  ausgeübte Kraft gilt das **Superpositionsprinzip**:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \sum_{j=2}^N q_j \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|^3} \quad (32)$$

Obwohl man experimentell Kräfte misst, hat es sich als sinnvoll erwiesen, das Konzept des

### elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

einzuführen. Man kann dazu von Gleichung (9) ausgehen, wenn man hierbei den Ort  $\mathbf{r}$  einer Probepunktladung  $q$  variabel lässt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} := q \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (33)$$

Das Verhältnis  $\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q}$  definiert das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Die **Einheit der el. Feldstärke** folgt hieraus sofort:

$$[E] = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$$

Aus Gleichung (10) folgt damit sofort das elektrische Feld von  $N$  ruhenden Punktladungen am Ort  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (34)$$

Speziell für eine einzelne Punktladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (35)$$

Auf M. FARADAY (1791-1867) geht die Idee zurück dieses Feldkonzept zeichnerisch zu verdeutlichen. Man führt Feldlinien ein und versteht darunter die Bahnen, auf denen sich ein kleiner, positiv geladener Körper aufgrund der COULOMB-Kraft fortbewegen würde. Da wir an dieser Stelle von ruhenden elektrischen Ladungen ausgegangen sind, bezeichnet man das elektrische Feld dieser ruhenden Ladungen als **elektrostatisches Feld**, um anzudeuten, dass es keine Veränderungen in der Zeit gibt.

**1.4. Hinweis zur Benutzung der Maple-Datei QPVor1Pr1.mws.** Das zu dieser Vorlesung ge-hörende Programm QPVor1.mws enthält eine Reihe von vorgegebenen Vektorfeldern, sowie die Möglichkeit selbstständig zwei-, bzw. dreidimensionale Vektorfelder zu programmieren. Durch Anklicken der Abbildungen mit der PC-Maus ist es möglich, bei festgehaltener linker Maustaste die dreidimensionalen Vektorfelder beliebig im Raum zu drehen. Man nutze diese Möglichkeit, um die Struktur der Felder zu verstehen.

Ein Beispiel einer solchen Maple-Zeichnung zeigt die folgende Abbildung:

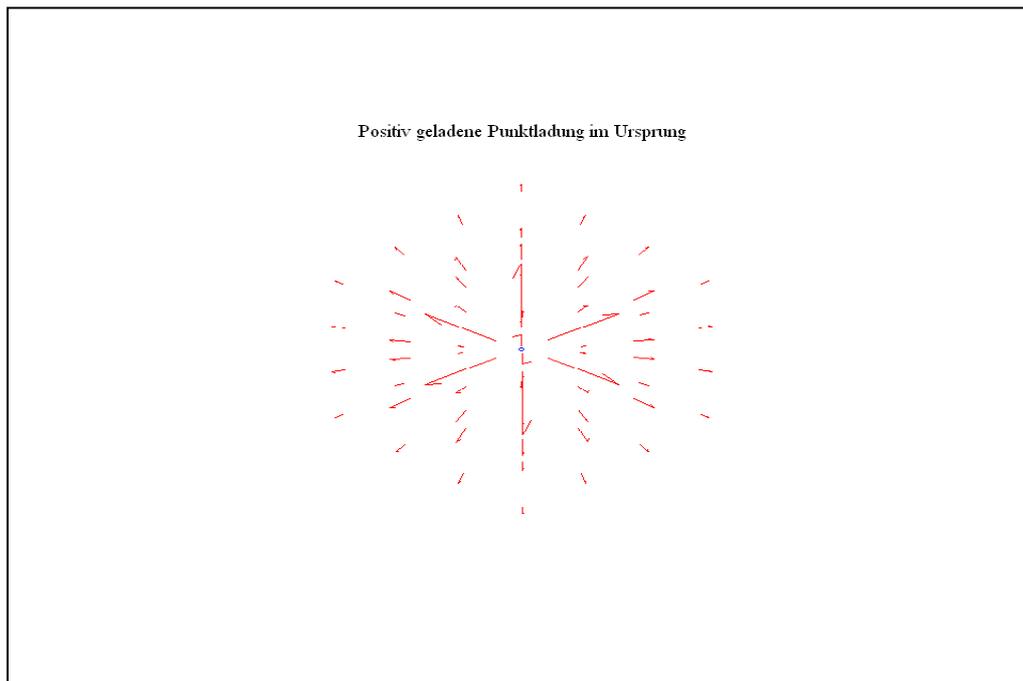


Figure 6: Elektrisches Feld einer positiv geladenen Punktladung. Maple-Zeichnung aus dem Programm QPVor1Pr1.mws.

Im Programm lässt sich die Pfeildichte des Vektorfeldes über die grid-Einstellung verändern.

Ebenfalls zu sehen ist im Programm das elektrische Feld zweier Punktladungen: Nähert man 2 Punktladungen einander, so beeinflussen sich die Kraftlinien, da der die Linien durch seine Bahn definierende Probekörper nun unter dem Einfluss beider Punktladungen steht.

Aus der Definition der Feldlinie als Bahn eines positiv geladenen Probekörpers folgt:

**Feldlinien schneiden sich nie!**

Sie beginnen in positiven und enden in negativen Ladungen.

**1.5. Das skalare elektrische Potenzial.** In der Mechanik lässt sich jede konservative Kraft über einen Differenzierungsprozess aus einem Potenzial gewinnen. Dieses Potenzial beschreibt die potenzielle Energie eines Körpers, der sich am Ort  $\mathbf{r}$  befindet:

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$$

Die Kraft  $\mathbf{F}$ , leistet Arbeit am Körper auf dem Weg  $r_1 \rightarrow r_2$ , wenn sich dabei die potenzielle Energie verringert. Man denke hierbei an das Fallenlassen eines Steines. Um die potenzielle Energie eines Körpers zu erhöhen, muss Arbeit gegen die Kraft  $\mathbf{F}$  geleistet werden. Man denke an das Hochheben eines Steins gegen die Gravitationskraft.

Die Kraft  $\mathbf{F}$  erhält man aus dem Potenzial über den **Gradienten**:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (36)$$

In **kartesischen Koordinaten** ist der Gradient definiert als<sup>8</sup>:

$$(\nabla) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Es gilt dann:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{r})) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} V(\mathbf{r}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich nun in der Elektrodynamik ein skalares elektrisches Potenzial definieren, wobei gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad (39)$$

Die Einheit dieses Potenzials ist:

$$[\Phi] = \text{Volt (V)} \quad (40)$$

Die elektrischen Feldlinien stehen auf den Äquipotenzialflächen, das sind die Flächen, für die das Potenzial einen festen Wert annimmt.

---

<sup>8</sup>Diese sogenannten partiellen Ableitungen werden genauso berechnet, wie die gewöhnlichen. Die Abweichung besteht darin, dass wenn z.B.  $\frac{\partial}{\partial x}$  gebildet werden soll, alle anderen Variablen als Konstante betrachtet werden.

**1.6. Hinweis zur Benutzung der Maple-Datei: QPVor1Pr2.mws.** Dieses Programm zeigt verschiedene Potenzialverläufe (Monopol, Dipol, Quadrupol) und die zugehörigen el. Felder.

Das folgende Maple-Bild stammt aus dem Programm QPVor1Pr2.mws und zeigt einen Schnitt durch das Potenzial sowie das elektrische Feld einer positiven Ladung im Ursprung eines Koordinatensystem:

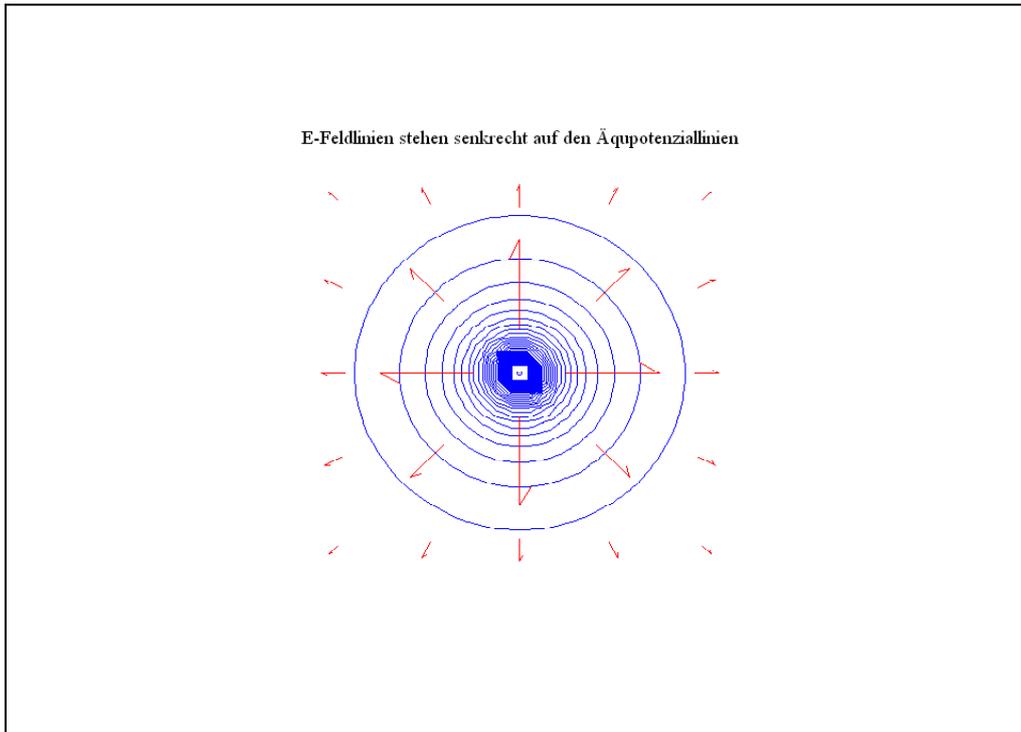


Figure 7: Draufsicht auf das el. Potenzial sowie das elektrische Feld einer positiven Punktladung im Ursprung.

Man erhält für das Potenzial am Ort  $\mathbf{r}$  einer Ladung  $q$  die Ort  $\mathbf{r}_0$  sich befindet:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (41)$$

Aus dem Superpositionsprinzip (30) folgt für das Potenzial einer Anzahl von Punktladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$ ,  $i=1, \dots, N$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (42)$$

Unter einem **elektrischen Dipol** versteht man eine Anordnung zweier entgegengesetzt geladener gleich großer Punktladungen vom Betrag  $Q$ . Der elektrische Dipol besitzt damit keine resultierende Gesamtladung mehr! Ist  $\mathbf{b}$  der Abstand der beiden

Punktladungen, so erhält man für das Potenzial des elektrischen Dipols:

$$\Phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{b}}{2} \right|} + \frac{-Q}{\left| \mathbf{r} + \frac{\mathbf{b}}{2} \right|} \right) \quad (43)$$

und in erster Näherung:

$$\Phi_D(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (44)$$

wobei man mit:

$$\mathbf{d} := Q \cdot \mathbf{b}, \quad [d] = Cm \quad (45)$$

das **elektrische Dipolmoment** des elektrischen Dipols definiert. Das **elektrische Feld** erhält man wieder durch Bildung des Gradienten des Potenzials (41):

$$\mathbf{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{d}}{r^3} \quad (46)$$

Im Gegensatz zum Monopolfeld ist das **Dipolfeld nicht kugelsymmetrisch**:

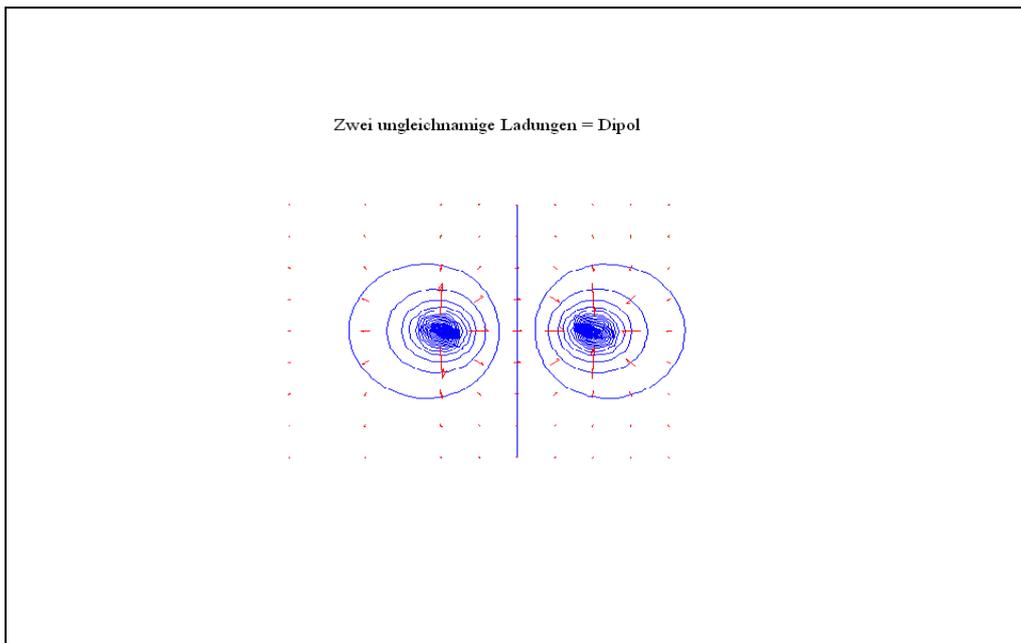


Figure 8: Draufsicht auf das el. Potenzial und das el. Feld eines Dipols.

Ein **elektrischer Quadrupol** besteht aus vier gleich großen Punktladungen, wobei jeweils zwei ein gleiches Vorzeichen besitzen. Der **elektrische Quadrupol** besitzt somit wie der elektrische Dipol **keine resultierende Gesamtladung** und daneben auch **kein elektrisches Dipolmoment** mehr. Das Potenzial des elektrischen Quadrupols kann entweder aus der Überlagerung von vier Punktladungspotenzialen oder aus der Überlagerung zweier Dipolpotenzial konstruiert werden.

Man erhält eine Figur wie die folgende, die ebenfalls aus dem Programm "QMVor11Pr2.mws" stammt:

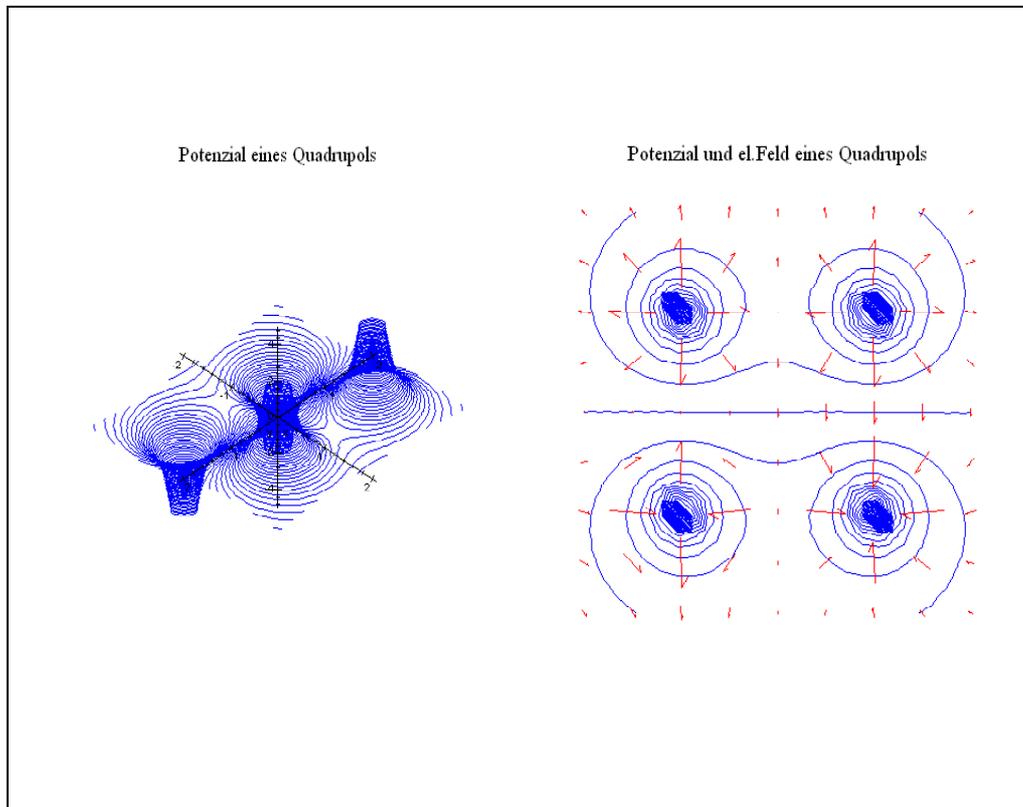


Figure 9: Darstellung der Potenziellinien und des elektrischen Feldes eines Quadrupols.