

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 3

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Behandelt werden das Gesetz von der Erhaltung der Ladung, sowie das FARADAY-Induktionsgesetz.

1. DAS GESETZ VON DER ERHALTUNG DER LADUNG

Maple-Datei zur Vorlesung:

- QPVorl3Pr1.mws: Beispiel zum FARADAY-Induktionsgesetz

Unter dem elektrischen Strom¹ kann man sich bewegte elektrische Ladungen, in einer sehr vereinfachenden Analogie also winzige kleine geladene Kügelchen, vorstellen². Unter der Stromstärke eines elektrischen Stroms versteht man dann die bewegte Gesamtladung, die pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließt. Dabei ist die Größe des Querschnitts für die reine Stärke des Stromes unerheblich: ob pro Sekunde 10 Elektronen durch einen Querschnitt 1m^2 fließen oder durch einen Querschnitt von 1cm^2 ist egal - es bewegen sich pro Sekunde 10 el. Ladungen (Elektronen) durch den Querschnitt. Allerdings ist die "Dichte" des Stromes unterschiedlich! Die Dichte eines elektrischen Stroms definiert man über³:

$$j = \frac{\text{Ladungen}}{\text{Zeit}} \cdot \frac{1}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} \quad (1)$$

Es ist ja anschaulich klar, dass ein Strom von 10 Ladungen pro Sekunde durch einen Querschnitt von 1m^2 weniger dicht ist, als ein Strom von 10 Ladungen pro Sekunde durch einen Querschnitt von 1cm^2 .

\mathbf{j} definiert man als Vektor mit dem Betrag von obigem j und der technischen Fließrichtung des elektrischen Stromes⁴.

Nun kann man auch umgekehrt vorgehen und den el. Strom als Produkt aus der Stromdichte und der von dieser durchflossenen Fläche auffassen, d. h. als Gesamtfluss durch eine Querschnittsfläche:

$$\text{Strom} = I = \iint_A \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \quad (2)$$

Bemerkung:

Für Leser dieser Vorlesung, denen der Begriff des in Gleichung (2) verwendeten Oberflächenintegrals nicht geläufig ist, kann eine Einheitenbetrachtung aus Gleichung (1)

¹Zur Definition der elektrischen Stromstärke siehe Gleichung (43) im Skript zur Vorlesung 2: Einführung in die Quantenphysik.

²Im physikalischen Verhalten besteht ansonsten ein erheblicher Unterschied zwischen elektrischen Ladungen, die durch einen Festkörper fließen und der Vorstellung von Murmeln die sich durch ein Rohr bewegen.

³Siehe auch das Skript zur 2. Vorlesung Einführung in die Quantenphysik.

⁴Die vom Pluspol der Quelle zum Minuspol weist.

helfen. Multipliziert man dort die Stromdichte \mathbf{j} (Einheit : $\frac{A}{m^2}$) mit der Fläche (Einheit m^2), so erhält man die Einheit Ampère des el. Stroms. Nichts anderes geschieht durch das Oberflächenintegral auch⁵, man summiert hier über alle Produkte aus Stromdichte mal Flächenelement. Hinzu kommt, dass das Flächenstückchen $d\mathbf{A}$ im Raum beliebig orientiert sein kann und auch die Richtung der Stromdichte eine beliebige Orientierung im Raum besitzen kann. Das vollständige Oberflächenintegral über dA ergäbe wieder die Oberfläche.

Beispiel: *Oberflächenintegral*

Das Flächenelement auf einer Kugel mit dem Radius R besitzt in Kugelkoordinaten die Gestalt:

$$dA = R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad (3)$$

Das vollständige Oberflächenintegral der Kugeloberfläche ∂V_K ergibt dann:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V_K} dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \cdot d\vartheta \\ &= R^2 2\pi \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\pi} = 4\pi R^2 \\ \iint_{\partial V_K} dA &= 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (4)$$

wie erwartet die Kugeloberfläche.

Betrachte zum Verständnis von Gleichung (2) die nächste Abbildung:

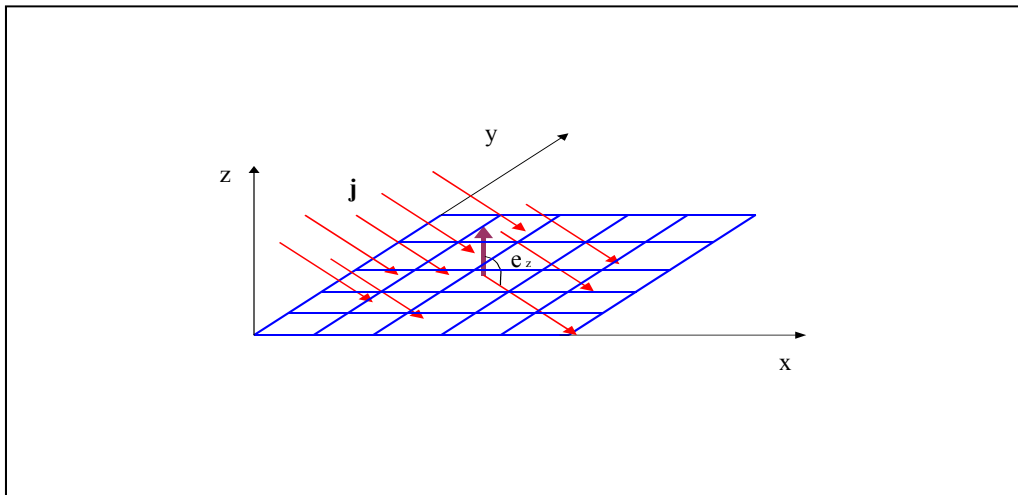


Figure 1: Fluss des Vektorfelds der el. Stromdichte durch eine orientierte Fläche. Der Winkel zwischen \mathbf{j} und $d\mathbf{A}$ wird bestimmt durch den Flächenvektor \mathbf{n} , der durchaus von Punkt zu Punkt auf der Oberfläche eine unterschiedliche Richtung besitzen kann - z.B. auf der Kugel.

⁵Das Oberflächenintegral wird im Skript 2 zur Vorlesung Einführung in die Quantenphysik eingeführt, siehe insbesondere Gleichung (15).

Natürlich wird, analog zu den Überlegungen zur Entwicklung des GAUSS-Gesetzes⁶ dieser Fluss durch eine geschlossene Oberfläche abhängig davon sein, ob sich innerhalb des Volumens eine Quelle oder Senke für Ladungen befindet, d. h. ob dort die Ladungsmenge pro Zeiteinheit abnimmt⁷ oder ob dort die Ladungsmenge pro Zeiteinheit zunimmt⁸. Mathematisch drückt man dies durch ein negatives Vorzeichen aus:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \cdot dV \quad (5)$$

wobei

$$\int_V \rho(\mathbf{r}, t) \cdot dV$$

die Gesamtladung innerhalb des Volumens darstellt. In diesem Gesetz steckt die für die Physik fundamentale Annahme der Ladungserhaltung. Ladungen können nicht aus dem Nichts erzeugt oder vernichtet werden - d. h. fließt irgendwo ein elektrischer Strom, dann ist die zeitliche Änderung einer Ladungsmenge die Ursache. Wenden wir die Beziehung (5) auf ein infinitesimal kleines, - zeitlich unveränderliches - Volumen an und beachten wir den GAUSS-Satz der Mathematik⁹:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)] \cdot dV$$

so erhält man über die Gleichsetzung:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \cdot dV = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)] \cdot dV$$

die differentielle Form:

$$\operatorname{div} [\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)] = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

⁶Siehe Skript zur Vorlesung 2: Einführung in die Quantenphysik.

⁷In diesem Falle nimmt der Strom zu, es fließen mehr Ladungen aus dem Volumen heraus als hinein.

⁸In diesem Falle nimmt der Strom ab, es fließen mehr Ladungen hinein als heraus.

⁹Siehe Gleichung (34) im Skript 2 zur Vorlesung Einführung in die Quantenphysik.

2. DAS FARADAY-INDUKTIONSGESETZ

2.1. Einleitung: Experimentelle Beobachtungen und mathematische Formulierung. Es gibt kein magnetisches Gegenstück zur elektrischen Ladung¹⁰. Es existieren also keine Quellen und Senken des \mathbf{B} -Feldes, so dass natürlich damit der Fluss des \mathbf{B} -Feldes durch eine geschlossene Oberfläche immer verschwindet¹¹:

$$\oint_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (7)$$

Hierbei spielt eine Zeitabhängigkeit des \mathbf{B} -Feldes natürlich überhaupt keine Rolle, so dass wir diese in der Formel zulassen. Betrachte hierzu das folgende Bild:

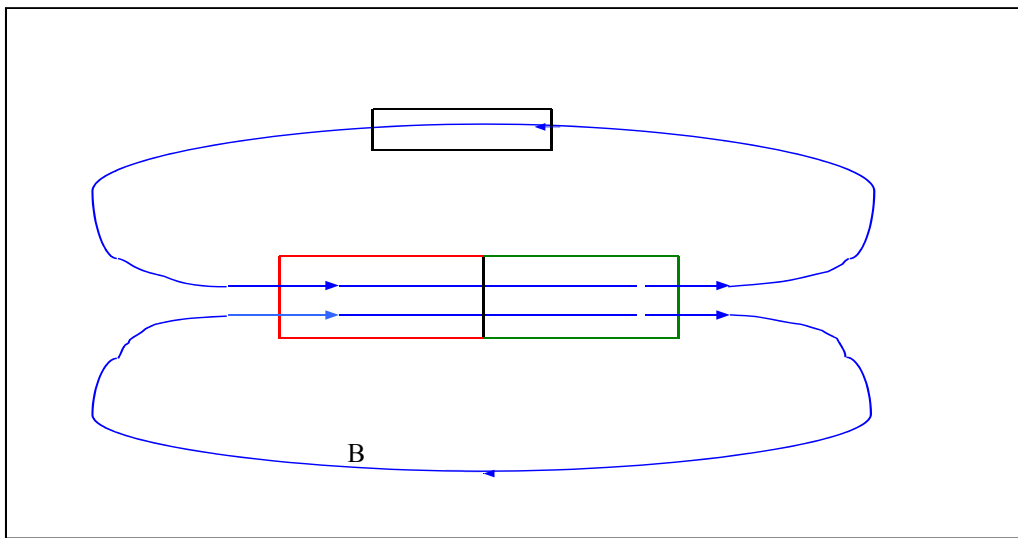


Figure 2: Magnetfeld eines Stabmagneten. Man kann erkennen, dass der Gesamtfluss des \mathbf{B} -Feldes durch das Probekörper (Kästchen) verschwindet.

Wendet man auf Gleichung (7) den GAUSS-Satz der Mathematik an:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot dV$$

so erhält man:

$$\operatorname{div} (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (8)$$

Geometrisch bedeutet diese mathematische Aussage, dass \mathbf{B} -Linien keinen Anfang¹² und kein Ende¹³ besitzen, somit also geschlossen sind.

Sobald gegen Anfang des 19. Jahrhunderts verstanden war, dass elektrische Ströme

¹⁰Obwohl man selbst in Mondproben nach solchen gesucht hat, hat man bisher keine magnetischen Monopole, also etwa einen reinen Süd- oder einen reinen Nordpol, gefunden.

¹¹Siehe als Beispiel hierfür *Figure 10* auf S. 13 von Skript 2 zur Einführung in die Quantenphysik.

¹²Denn das wäre eine Quelle - also ein Monopol.

¹³Denn das wäre eine Senke - also ein entgegengesetzter Monopol.

Magnetfelder erzeugen, wurde auch vermutet, dass Magnetfelder elektrische Ströme erzeugen können¹⁴.

Es wurden verschiedene Experimente durchgeführt. So wurden z.B. zwei Drähte parallel und isoliert voneinander gelegt und dann durch einen ein elektrischer Strom geschickt. Man hoffte auf diese Weise auch einen Strom im anderen Draht zu erzeugen. Man vermutete, dass das um den ersten Draht entstehende Magnetfeld die Elektronen im zweiten Draht zu einer Bewegung "animieren" - also auf diese Elektronen eine Kraft ausüben würde. Diese Versuche scheiterten auch bei den stärksten Strömen. Ebenfalls zum Scheitern verurteilt waren Versuche mit starken Permanentmagneten, die man in der Nähe eines Drahtes aufstellte. Michael FARADAY entdeckte 1831 das entscheidende Charakteristikum, damit elektrische Effekte auftreten. FARADAY machte die folgenden Beobachtungen:

1. Führt einer von zwei voneinander isolierten, aber parallelen Drähten einen zeitlich veränderlichen Strom, so misst man im anderen Draht einen elektrischen Strom, man sagt er wird dort "induziert".
2. Bewegt man einen Draht durch ein Magnetfeld, so stellt man ebenfalls im Draht einen elektrischen Strom fest.
3. Genau den gleichen Effekt entdeckt man, wenn man einen Permanentmagneten über einen Draht hinweg bewegt.

Die zweite Beobachtung können wir über die LORENTZ-Kraft - die zur Zeit FARADAYS noch nicht bekannt war - leicht verstehen. Betrachte dazu die folgende Abbildung:

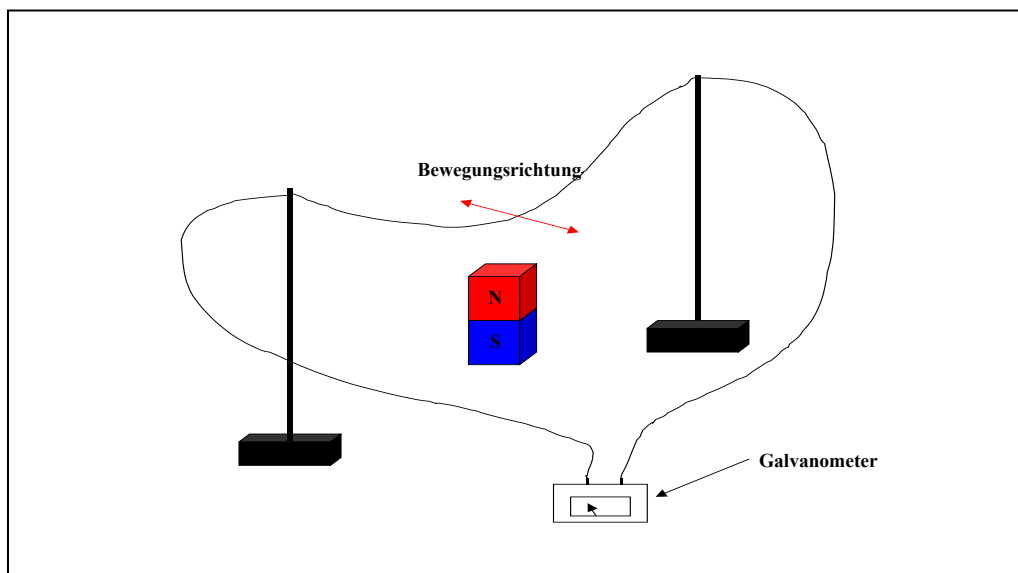


Figure 3: Die Bewegung eines Drahtes durch das Magnetfeld des Stabmagneten führt in ihm zu einem el. Strom, den man im Galvanometer messen kann.

¹⁴Man nahm an, dass Magnetfelder \mathbf{E} -Felder erzeugen würden, die dann über die Bewegung von Ladungen zu elektrischen Strömen führen würden.

Bewegt man den Draht durch das Magnetfeld z.B. eines Stabmagneten, so werden die Elektronen innerhalb des Drahtes ebenfalls bewegt. Sie besitzen also relativ zum Magneten eine Geschwindigkeit \mathbf{v} . Das \mathbf{B} -Feld des Magneten bewirkt somit eine Kraft:

$$\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9)$$

auf die Elektronen, die zu einem Stromfluss innerhalb des Drahtes führt.

Über die LORENTZ-Kraft nicht zu verstehen sind die 1. und die 3. Beobachtung. Sie werden gemeinsam mit der 2. Beobachtung durch das **FARADAY-Induktionsgesetz** erklärt:

$$U_{ind} = \oint_{C(t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \quad (10)$$

Bemerkung:

Das Induktionsgesetz kann man anschaulich so verstehen: die rechte Seite gibt die Änderung des Durchflusses des Magnetfeldes durch eine Fläche $A(t)$ an. Diese kann zeitabhängig sein, wenn wir z.B. eine Leiterschleife über einen Stabmagneten führen. $A(t)$ ist in diesem Falle die Fläche, die vom \mathbf{B} -Feld durchdrungen wird, maximal ist es die ganze von der Leiterschleife umspannte Fläche. $C(t)$ ist der Rand der Fläche $A(t)$, also die Leiterschleife.

Betrachte zur Veranschaulichung das folgende Bild:

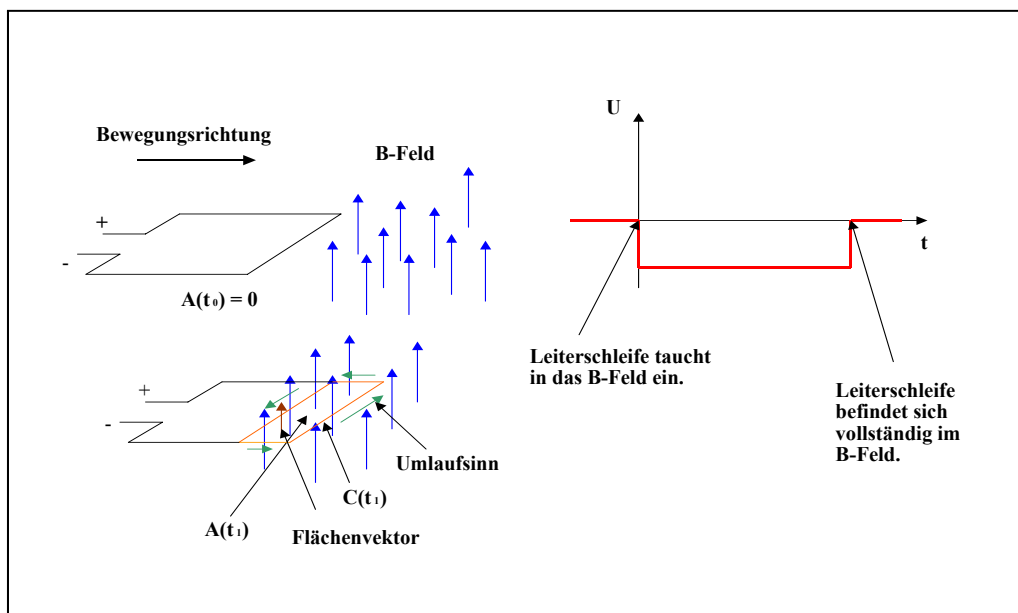


Figure 4: Eine Leiterschleife wird in ein \mathbf{B} -Feld geschoben. Der Graph auf der rechten Seite zeigt die zwischen beiden Polen im Draht induzierte Spannung.

Zum mathematischen Verständnis von Gleichung (10) ist es wichtig, dass der Umlaufsinn entlang dem $C(t)$ integriert wird und der Flächenvektor von $A(t)$ eine Rechtss-

chraube bilden, so wie in der Abbildung angedeutet.

Man kann den identischen Effekt beobachten, wenn man die Leiterschleife einem sich zeitlich verändernden \mathbf{B} -Feld - verursacht z. B. durch einen zeitlich veränderlichen Strom in einer Spule - aussetzt. Die linke Seite von Gleichung (10) gibt dann die in der Schleife induzierte Spannung an, $C(t)$ ist dabei der Rand des Flächenteils von $A(t)$ der gerade vom Feld durchströmt wird.

FARADAY war mittels dieses Zusammenhangs auch in der Lage das Geheimnis der Scheibe ARAGOs zu lüften. Der Franzose ARAGO hatte beobachtet, dass eine rotierende Kupferscheibe eine unmittelbar über ihr befindlichen Magneten ablenkte. FARADAY argumentierte nun, aufgrund seines Induktionsgesetzes, dass die Bewegung der Kupferscheibe unter Einfluss des Magneten Strom in der Scheibe induziere. Dieser wiederum erzeuge ein Magnetfeld, welches den Magneten beeinflusse¹⁵.

Beispiel: Wechselspannungsgenerator

Zur Erzeugung von Wechselspannung benutzt man Generatoren, in denen Spulen in einem Magnetfeld rotieren. Die folgende Abbildung zeigt das Schema des Wechselspannungsgenerators für eine Spulenwindung:

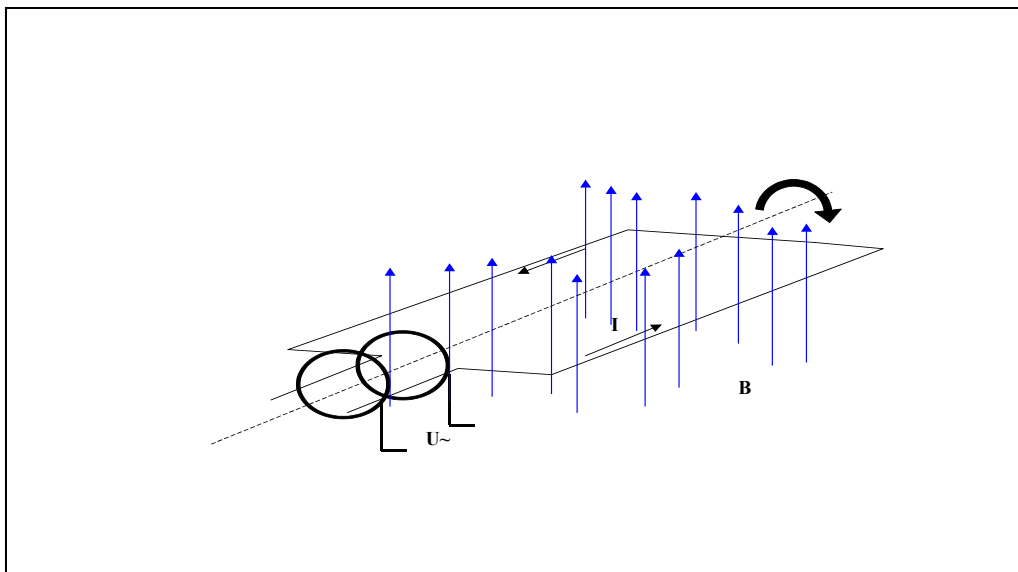


Figure 5: Schema des Wechselspannungsgenerators

Man benutzt eine rechteckige Drahtschleife, die um eine Achse in der Schleifenebene drehbar ist. Senkrecht zur Drehachse ist ein annähernd homogenes \mathbf{B} -Feld orientiert¹⁶. Die Schleife wird durch einen Elektromotor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

¹⁵Weitere Anwendungen der Wechselwirkung zwischen elektrischem und magnetischem Feld sind der Dynamo und der Elektromotor, beide sind aus dem Physikunterricht der Mittelstufe bekannt.

¹⁶Ein solches \mathbf{B} -Feld lässt sich z.B. zwischen zwei HELMHOLTZ-Spulen erzeugen, die aus der Schule bekannt sind.

ω gedreht. An zwei auf der Drehachse angebrachten Schleifringen, die mit den Schleifenenden verbunden sind, kann die induzierte Spannung abgegriffen werden. Man kann sie experimentell direkt auf einen Oszillographen darstellen. Den Verlauf der induzierten Spannung und des elektrischen Stromes zeigt die nächste Abbildung:

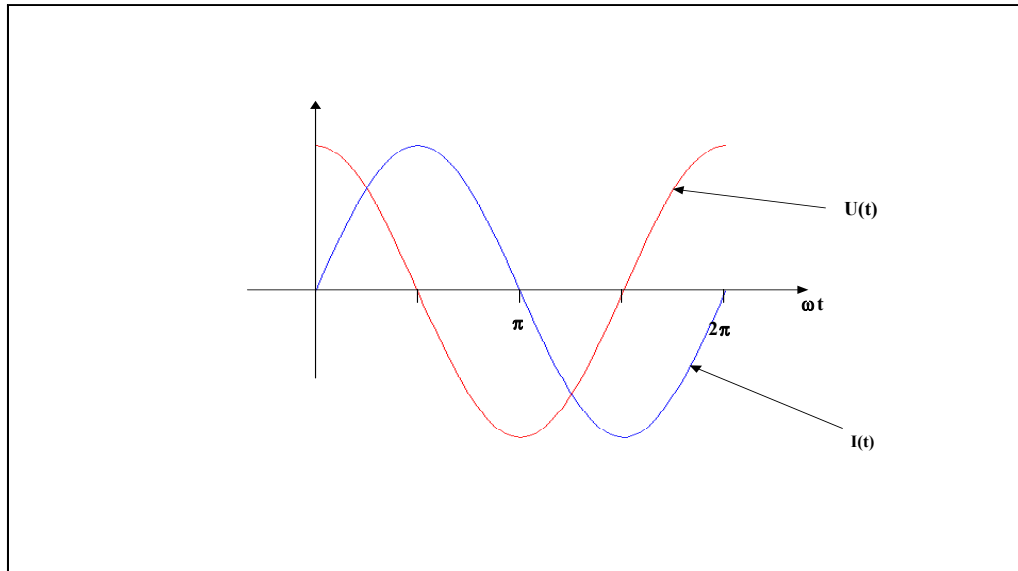


Figure 6: Induzierte Spannung und el. Strom der im \mathbf{B} -Feld rotierenden Leiterschleife.

Da die el. Spannung und der el. Strom periodisch ihr Vorzeichen wechseln, bezeichnet man sie als Wechselspannung bzw. Wechselstrom der Frequenz:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [\nu] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \quad (11)$$

Aufgrund der Trägheit der Elektronen eilt der Strom der Spannung um den Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$ nach, man sagt zwischen Spannung und Strom besteht eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$.

2.2. Der Integralsatz von STOKES. Der Integralsatz von STOKES verknüpft das Linienintegral eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ entlang einer geschlossenen Kurve ∂F mit dem Oberflächenintegral der Rotation dieses Vektorfeldes über der Fläche F , die von ∂F berandet wird. Betrachte dazu die folgende Abbildung:

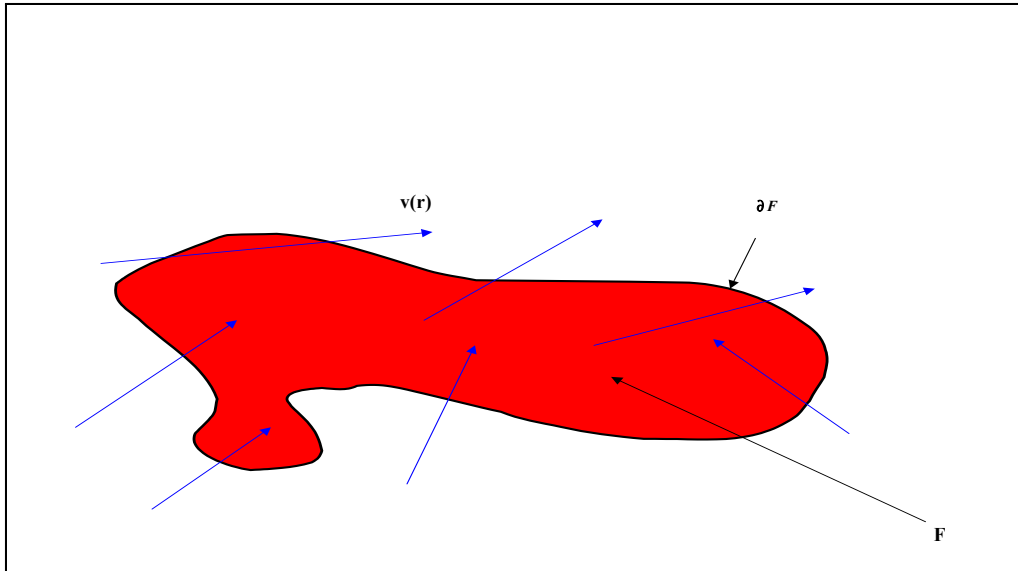


Figure 7: Zum Integralsatz von STOKES: Zu erkennen ist die Fläche F , sowie der Rand ∂F . Das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ kann von Punkt zu Punkt verschieden sein.

Der **Integralsatz von STOKES** hat dann die folgende Gestalt:

$$\oint_{\partial F} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_F \text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{A} \quad (12)$$

Bemerkung:

Der Integralsatz von STOKES zeigt die Äquivalenz der Aussagen:

$$\text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0 \quad (13)$$

in einem Gebiet¹⁷ G und:

$$\oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (14)$$

für alle geschlossenen Wege C in diesem Gebiet. Die zweite Aussage bedeutet insbesondere, dass das Integral zwischen zwei Punkten nicht vom Weg abhängt¹⁸. Damit ist **die Rotationsfreiheit eines Vektorfeldes der Wegunabhängigkeit seines**

¹⁷Dieses Gebiet muss einfach zusammenhängend sein.

¹⁸Man kann jeden Weg zwischen zwei Punkten als halben Weg eines geschlossenen Weges betrachten. Wenn der Wert des Integrals über den einen Weg den Wert E besitzt, dann hat der Wert des anderen - der gewählte Rückweg hat eine bel. Gestalt - immer den Wert $-E$. Das Integral des Rückweges ist somit völlig unabhängig von der Wahl des Weges.

Linienintegrals äquivalent. Für rotationsfreie Vektorfelder $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ kann man also eine skalare Funktion:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (15)$$

definieren, die Potenzial des Feldes \mathbf{v} genannt wird. Der negative Gradient des Potentials φ ist dann das ursprüngliche Vektorfeld \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (16)$$

2.3. Die differentielle Form des Induktionsgesetzes. Wendet man den Integralsatz von STOKES auf das Induktionsgesetz (10) an, so erhält man mit:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \oint_{C(t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A}, \text{ Induktionsgesetz} \\ \oint_{C(t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{A(t)} \text{rot}[\mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{A}, \text{ Integralsatz von STOKES} \end{aligned}$$

die folgende Gleichung¹⁹:

$$\oint_{C(t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \iint_{A(t)} \text{rot}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \quad (17)$$

Zieht man $C(t)$ auf einen Punkt zusammen, so kann man die Zeitableitung in das Doppelintegral hinein ziehen²⁰. Man erhält dann aus der Gleichheit der Integranden:

$$\text{rot}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (18)$$

die **differentielle Form des Induktionsgesetzes**. Das erstaunliche Ergebnis dieser Gleichung ist, dass ein sich zeitlich veränderndes \mathbf{B} -Feld immer zu einem \mathbf{E} -Feld führt²¹!

2.4. Hinweise zur Benutzung des Programms QPVorl3Pr1. mws. In dem zur Vorlesung passenden Maple-Programm wird die Gleichung (18) für zwei verschiedene \mathbf{B} -Felder ausgewertet. Das erste \mathbf{B} -Feld besitzt die folgende allgemeine Gestalt²²:

$$(\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

¹⁹Der Integralsatz von STOKES gilt ebenfalls für zeitlich veränderliche Vektorfelder.

²⁰Da die Oberfläche sich auf einen Punkt zusammenzieht geht die totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ über in die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$.

²¹Im allgemeinen ist dieses \mathbf{E} -Feld ebenfalls zeitlich veränderlich.

²²Das \mathbf{B} -Feld innerhalb einer langen Spule hat diese Gestalt.

Über die differentielle Form des Induktionsgesetzes kann man ein zugehöriges induziertes \mathbf{E} -Feld berechnen. Dieses Feld liegt senkrecht zum \mathbf{B} -Feld und kann durch den folgenden Vektor beschrieben werden ²³:

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \frac{B_0 \cdot \omega}{k} \begin{pmatrix} \cos(kz + \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Felder zu einem festen Zeitpunkt, im Programm sind sie auch als Animation zu sehen:

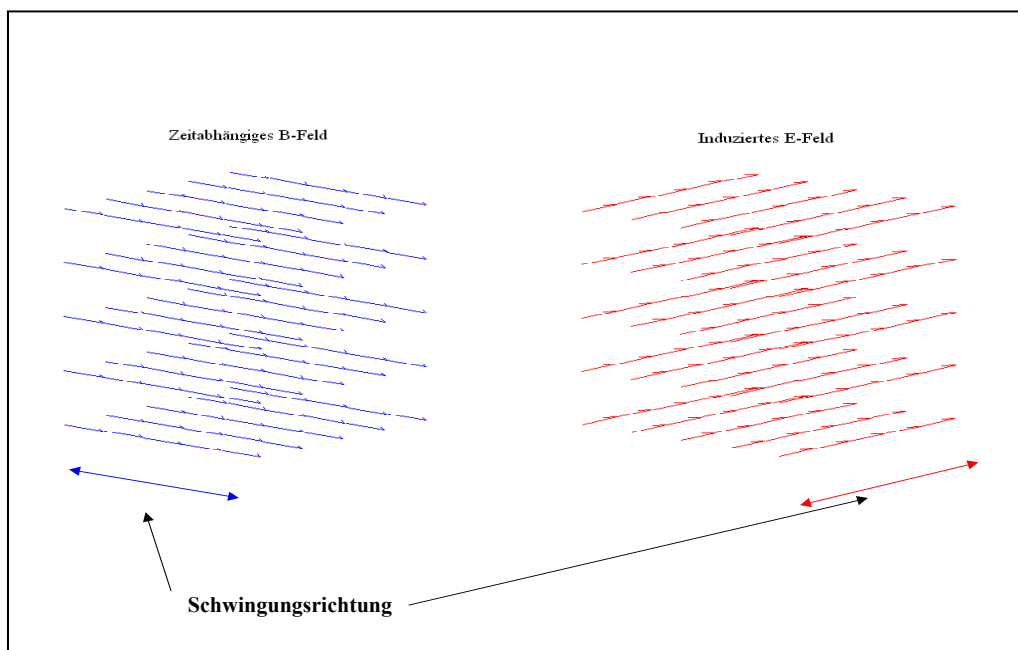


Figure 8: Die Darstellung zeigt einen Ausschnitt der geschlossenen \mathbf{B} -Feldlinien und das durch die zeitliche Veränderung induzierte \mathbf{E} -Feld.

²³ An dieser Stelle kommt es nur auf die geometrische Lage an, die allgemeine Lösung wird günstig eingeschränkt.