

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 13

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Inhalt dieser Vorlesung sind stehende mechanische und elektromagnetische Wellen.

1. STEHENDE MECHANISCHE WELLEN: DAS PROBLEM DER SCHWINGENDEN SAITE

1.1. Allgemeine Vorbemerkungen: Zur Lösbarkeit der Wellengleichung mit Maple. Maple-Datei zu diesem Abschnitt:

-QPVorl13Pr1.mws (Allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung, stehende mechanische Wellen)

Die nachfolgenden Wiederholungen von Kenntnissen aus der Mechanik und Elektrodynamik sollen die Grundlage zum Verständnis der Überlegungen SCHRÖDINGERS zur Entwicklung seiner berühmten Gleichung bilden.

Die allgemeine Wellengleichung hat die folgende Gestalt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1)$$

Diese Gleichung lässt sich mit Maple einfach über den "pdesolve"-Befehl lösen und Maple präsentiert die folgende allgemeine Lösung:

$$u(x, t) = F_1(tc + x) + F_2(-tc + x) \quad (2)$$

wobei die Funktionen F_1 und F_2 beliebig gewählt werden dürfen. Räumliche eng begrenzte Lösungen wie z.B. die GAUSS-Glockenkurve:

$$u(x, t) = u_0 \cdot e^{-\frac{(-ct+x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

nennt man **Soliton**. Dabei beschreiben:

$$\begin{array}{ll} u_0 & : \text{Höhe der Glocke} \\ \sigma & : \text{Breite der Glocke} \end{array}$$

$$x_M := ct + x_0 : \text{Maximum in Abhängigkeit von der Zeit } t$$

Im Programm "QPVorl13Pr1.mws" werden Bilder und eine Animation einer solchen Glockenkurve zu sehen.

Die folgende Darstellung vermittelt einen Eindruck der Bewegung eines solchen GAUSS-Solitons:

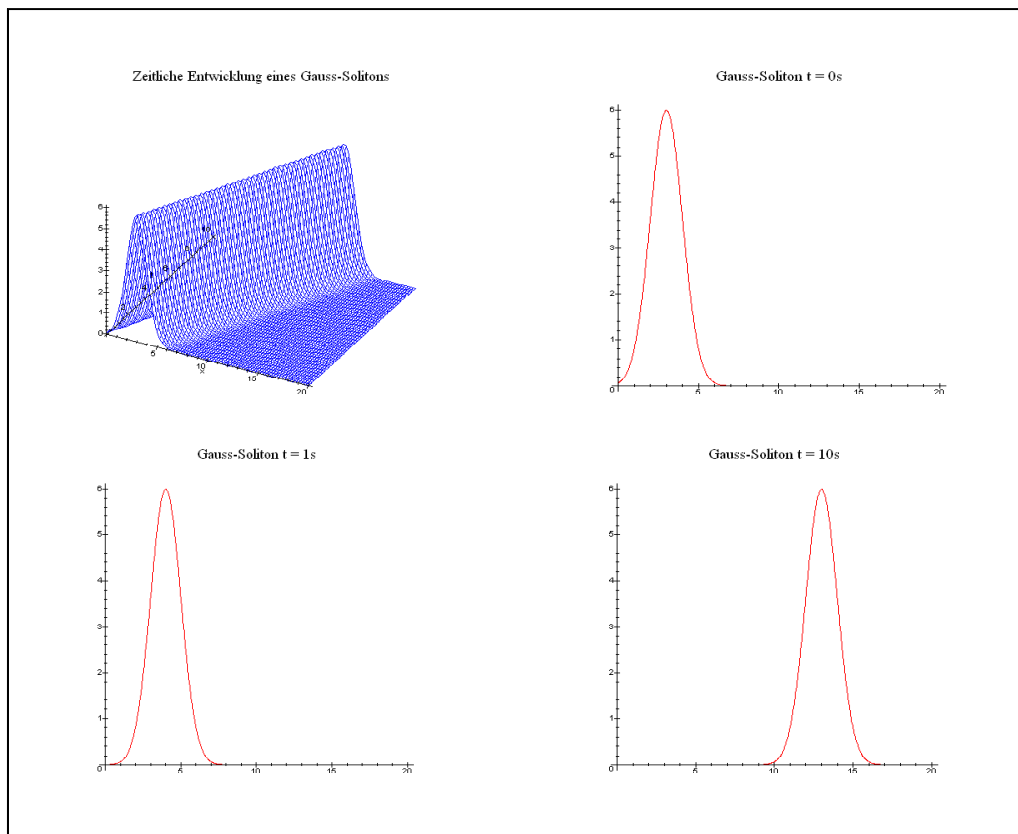


Figure 1: Zeitliche Entwicklung einer Glockenkurve.

Die Geschwindigkeit, mit der sich eine solche Wellenformation endlicher Ausdehnung ausbreitet, nennt man **Gruppengeschwindigkeit**¹.

¹Diese Gruppengeschwindigkeit wird noch eine wichtige Rolle in der Beschreibung quantenphysikalischer Objekte, wie Elektronen, Protonen etc. spielen.

Die schwingende Saite: Einführung. Maple-Datei zu diesem Abschnitt: -QPVorl13Pr1.mws (Allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung, stehende mechanische Wellen)

Wir betrachten nun das Problem der Beschreibung einer schwingenden Saite eines Musikinstrumentes. Die Saite soll dabei die Länge L haben und an beiden Enden fest eingespannt sein². Die Ruhelage der Saite ist somit der Abschnitt $[0, L]$ auf der x -Achse. Wir beschränken uns auf die Auslenkung der Saite in einer Richtung, die in der folgenden Abbildung durch die vertikale Achse gegeben ist:

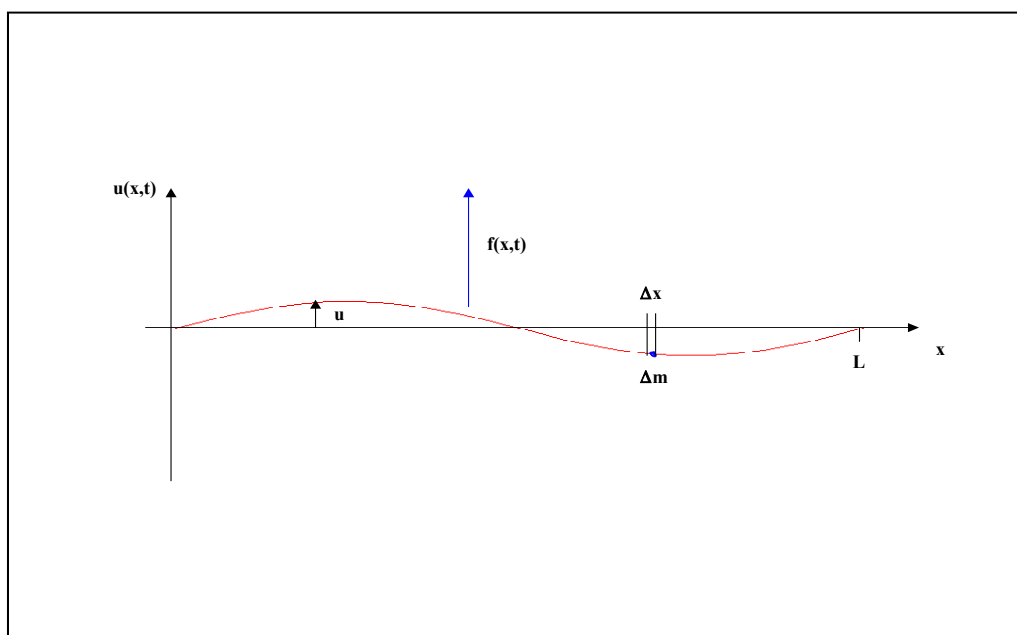


Figure 2: Zwischen $x = 0$ und $x = L$ ist eine Saite eingespannt. Wenn keine äußeren Kräfte $f(x, t)$ wirken, ist die Ruhelage der Saite die x -Achse. Die Länge, um die die Saite senkrecht zur x -Achse ausgelenkt ist, wird mit $w(x, t)$ bezeichnet. Die Abbildung stellt eine mögliche Auslenkung zu einer bestimmten Zeit t dar.

An der Stelle x sei die Saite um eine bestimmte Länge w ausgelenkt. Die Auslenkung hängt im allgemeinen von der Zeit t ab, so dass

$$u = u(x, t) \text{ , Auslenkung der Saite} \quad (4)$$

²Es handelt sich bei diesem Problem um eines der großen und fruchtbaren Probleme der Mathematik. Seine Lösung gab der Entwicklung der Analysis einen mächtigen Impuls. Seine erste Behandlung geht zurück auf d'ALEMBERT (1717-1783). Physikalisch betrachtet handelt es sich hierbei um ein Problem aus der Kontinuumsmechanik. Sie beschreibt die Dynamik von elastischen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen. An die Stelle der Bahnen für Massenpunkte treten Felder für kontinuierliche Masseverteilungen. Eine anschauliche Einführung, allerdings aufbauend auf der Lagrange-Mechanik findet man in Fliessbach: Mechanik, B.I. Verlag 1991. Diesem Text entstammen zum großen Teil auch die nachfolgenden Überlegungen.

eine Funktion von x und t ist³.

³Die Auslenkung der Saite ist ein einfaches Beispiel für ein Feld. Unter einem Feld versteht man in der Physik eine physikalische Größe, die vom Ort und im allgemeinen Fall auch von der Zeit abhängt. Die Auslenkung $w(x, t)$ der Saite ist ein einfaches Feld (im Gegensatz z. B. zum elektrischen oder magnetischen Feld), weil sie nur von einer Ortskoordinate abhängt und zudem noch eine skalare Größe ist.

Gesamtenergie der schwingenden Saite. Zur Beschreibung der Gesamtenergie der schwingenden Saite geht man in einer ersten Näherung von der Vorstellung aus, dass die Saite aus einem System von endlichen Massenpunkten besteht - siehe Abbildung 2. Dazu teilt man das Intervall $[0, L]$, in dem die Saite ruht, in $N \gg 1$ gleich große Intervalle I_i ein:

$$I_i = [(i-1) \cdot \Delta x, \Delta x] , \Delta x = \frac{L}{N} , i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5)$$

In jedem Intervall befindet sich eine Masse der Größe:

$$\rho \cdot \Delta x \quad (6)$$

wobei ρ die Massendichte⁴ der Saite ist. Nun ersetzt man diese Massenelemente durch Massenpunkte:

$$\Delta m_i \text{ bei } x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x , i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7)$$

$$\Delta m_i = \Delta m = \rho \cdot \Delta x \quad (8)$$

Für diese Massenpunkte lassen wir nun wie in der 2. Abbildung angedeutet eine vertikale Auslenkung zu, die mit

$$u_i(t) = \text{Auslenkung des } i\text{-ten Massenpunkts} \quad (9)$$

bezeichnet wird. Die kinetische Energie des gesamten Systems aus N Massenpunkten ist dann gleich der Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massenpunkte:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sum_{i=1}^N E_{kin,i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot \dot{u}_i(t)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \Delta m \cdot \dot{u}_i(t)^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta x \cdot \dot{u}_i(t)^2 \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta x \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Um die potentielle Energie der Saite zu berechnen, simuliert man die elastischen Eigenschaften der Saite durch Federn zwischen den benachbarten Massenpunkten. Der Abstand zwischen dem i -ten und $(i+1)$ -ten Massenpunkten ist:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2} = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{(\Delta x)^2}} \simeq \Delta x \cdot \left(1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2(\Delta x)^2}\right) \quad (11)$$

In dieser Näherung⁵ wird vorausgesetzt, dass die Steigung der Saite klein ist. Die Vorspannung der Saite bedeutet, dass die Feder bereits in der Ruhelage - hier beträgt der Abstand zwischen den Massenpunkten Δx - mit einer bestimmten Kraft K

⁴Für die Saite der Quotient aus Masse und Länge.

⁵Für kleine Werte von x gilt:

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$$

wie man leicht über die Entwicklung einer Taylorreihe zeigen kann.

vorgespannt wurde. Eine Vergrößerung des Abstands von Δx auf Δs ergibt dann den potentiellen Energiebeitrag

$$K \cdot (\Delta s - \Delta x) = K \cdot \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2(\Delta x)^2} \quad (12)$$

Summiert man diese Energiebeiträge auf, so erhält man die potenzielle Energie der Saite⁶:

$$E_{pot} = \sum_{i=1}^{N-1} K \cdot \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2(\Delta x)^2}$$

Durch den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ wird dieses Modell der Saite nun auf die tatsächliche, kontinuierliche Massenverteilung der Saite erweitert. Durch die $u_i(t)$ ist die Position der Saite, also das gesuchte Feld an den Punkten $u(x, t)$ zunächst an den diskreten Punkten x_i festgelegt:

$$u(x_i, t) = u_i(t) \quad (13)$$

Für $N \rightarrow \infty$ ist dadurch das Feld $u(x, t)$ definiert.

Für die **kinetische Energie der eingespannten Saite** erhalten wir dann⁷:

$$E_{kin} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta x \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t)^2 = \frac{\rho}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t)^2 \cdot \Delta x = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (14)$$

Um die potenzielle Energie zu berechnen, ist nur

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_i + \Delta x, t) - u(x_i, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial x_i} \quad (15)$$

zu beachten. Man erhält dann für die **potenzielle Energie der eingespannten Saite**:

$$E_{pot} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} K \cdot \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{2(\Delta x)^2} = \frac{K}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (16)$$

Damit ist die **Gesamtenergie der eingespannten Saite**:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (17)$$

⁶In der folgenden Summe fehlt der Beitrag zwischen dem ersten und dem N-ten Massenpunkt und dem zugehörigen Einspannpunkt. Da aber im Folgenden der Grenzwert $N \rightarrow \infty$ gebildet wird, spielen diese Beiträge keine Rolle.

⁷Zu beachten ist

$$N \rightarrow \infty \doteq \Delta x \rightarrow 0$$

Die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite. Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite aus der Energieerhaltung hergeleitet. Dabei handelt es sich nicht um einen ausführlichen und strengen Nachweis, denn die notwendigen Analysis-Kenntnisse können nicht vorausgesetzt werden. Ausgangspunkt ist die Energieerhaltung der Bewegung:

$$E = E(t) = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \text{const.} \quad (18)$$

Ein solches Integral bezeichnet man als **Parameterintegral**, wobei t der Parameter des Integrals ist. Damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} = 0$$

Man kann nun Differentiation und Integration unter der Voraussetzung vertauschen, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

gleichstetig in t ist⁸. Den strengen Nachweis führen wir an dieser Stelle nicht, klar ist jedoch, dass diese Eigenschaft daraus folgt, dass $u(x,t)$ die Auslenkung einer Saite beschreibt. Man kann also Integration und Differentiation vertauschen und erhält⁹:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right\} = \rho \cdot \ddot{u}(x,t) \cdot \dot{u}(x,t) + K \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,t) \cdot \left(\rho \cdot \ddot{u}(x,t) + K \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}} \right) &= 0 \\ \rho \cdot \ddot{u}(x,t) + K \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Unter Beachtung von

$$\frac{\partial a}{\partial b} = - \frac{\frac{\partial z}{\partial b}}{\frac{\partial z}{\partial a}} \quad (21)$$

erhält man dann die folgende Plausibilitätsableitung:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \ddot{u}(x,t) - K \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \frac{\partial t}{\partial x} &= 0 \\ \rho \cdot \ddot{u}(x,t) - K \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (22)$$

⁸Siehe z.B. in Heuser, H. Analysis I, S.575, B.G. Teubner 1980.

⁹Das Verschwinden des neuen Integranden folgt dann ebenfalls aus der Gleichstetigkeit.

Über eine Einheitenbetrachtung

$$\left[\frac{K}{\rho} \right] = \frac{\frac{kgm}{s^2}}{\frac{kg}{m}} = \left(\frac{m}{s} \right)^2$$

erhält man die bereits bekannte Wellengleichung, hier der freien Saite:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (23)$$

Zur Lösung des Problems der eingespannten Saite sind noch die Randbedingungen zu beachten. Mathematisch beschreibt man diese Randbedingungen an die obige Wellengleichung durch:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (24)$$

Die Lösung der Wellengleichung (23) erhält man in diesem Fall über einen sogenannten **Separationsansatz**:

$$u(x, t) := v(x) \cdot w(t) \quad (25)$$

Ein solcher Ansatz ist eine klassische Lösungsmethode zur Berechnung einer partiellen Differenzialgleichung. Man sucht eine Lösungsfunktion $u(x, t)$, die sich als Produkt einer nur von x abhängigen und v und einer nur von t abhängigen Funktion w darstellen lässt. Für eine solche Funktion $u(x, t)$ - falls sie denn überhaupt existiert - ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= v(x) \cdot \ddot{w}(t) \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \cdot w(t) \end{aligned}$$

Gleichung (23) geht damit über in

$$v(x) \cdot \ddot{w}(t) = c^2 v''(x) \cdot w(t) \Leftrightarrow \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)} \quad (26)$$

sofern $w(t) \neq 0$ und $v(x) \neq 0$ ist. Die letzte Gleichung kann aber, da ihre linke Seite allein von t und ihre rechte Seite allein von x abhängt, nur bestehen, wenn beide Seiten konstant sind. Man kann also annehmen, dass mit einer bestimmten Konstanten $-k^2$ gilt¹⁰:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -k^2 \Rightarrow \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = -c^2 k^2$$

Auf diese Weise erhält man zwei gewöhnliche Differenzialgleichungen¹¹:

$$v''(x) = -k^2 \cdot v(x) \quad (27)$$

$$\ddot{w}(t) = -\omega^2 \cdot w(t), \quad \omega := c \cdot k \quad (28)$$

¹⁰ Diese Form der Konstanten ergibt sich eigentlich erst nachträglich! Würde man zum ersten Mal diese Gleichung lösen, würde man die Konstante mit k ansetzen.

¹¹ Genaus diese Reduktion einer meistens schwierig direkt zu lösenden partiellen auf leichter zu lösende gewöhnliche Differenzialgleichungen ist das Ziel des Separationsansatzes.

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung lautet, wie man durch Nachdifferenzieren leicht erkennen kann:

$$v(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad (29)$$

Die Randbedingung $v(0) = v(L) = 0$ führen auf:

$$v(0) = C_2 = 0 \quad (30)$$

$$v(L) = C_1 \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Die Konstante k ist reell und man kann sie auf positive Werte beschränken. Damit erhält man für die zweite Gleichung:

$$\ddot{w}(t) = -\omega_n^2 \cdot w(t), \quad \omega_n := c \cdot k_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

die folgende allgemeine Lösung:

$$w(t) = a \cos(\omega_n t) + b \sin(\omega_n t) \quad (33)$$

Damit lautet eine Lösung der Gleichung (23), die den Randbedingungen (24) genügt:

$$u_n(x, t) = C_1 \sin(k_n x) \cdot [a \cos(\omega_n t) + b \sin(\omega_n t)], \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \omega_n := c \cdot k_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Die Konstante C_1 kann man nun auch weglassen und wegen der Linearität der Wellengleichung¹² ist auch jede Linearkombination:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \cdot [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (35)$$

Lösung. Da die Funktionen $u_n(x, t)$ die Randbedingungen erfüllen, gilt dies ebenfalls für die Funktion $u(x, t)$. Gleichung (35) stellt die allgemeine Lösung von (23) unter Berücksichtigung von (24) dar, denn sie lässt beliebige Anfangsbedingungen

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \quad (36)$$

$$g(x) = \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin(k_n x) \quad (37)$$

zu. Natürlich sind hierbei nur Anfangsbedingungen mit

$$\begin{aligned} f(0) &= f(L) = 0 \\ g(0) &= g(L) = 0 \end{aligned}$$

¹²Siehe auch Vorlesung 5 und 6 zur *Einführung in die Quantenphysik*.

möglich. Zu bekannten Anfangsbedingungen f und g erhält man die Koeffizienten über¹³:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin(k_n x) dx \quad (38)$$

$$b_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L g(x) \cdot \sin(k_n x) dx \quad (39)$$

Damit erhält man schließlich **die allgemeine Lösung des Problems "Eingespante schwingende Saite"**:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \cdot \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} g(x) \cdot \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) dx \right] \quad (40)$$

Die einzelnen Summanden von (35) bezeichnet man als stehenden Wellen:

$$w_{gn}(x, t) = w_{gn}^{(0)} \cdot \cos(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x) \quad (41)$$

$$w_{un}(x, t) = w_{un}^{(0)} \cdot \sin(\omega_n t) \cdot \sin(k_n x) \quad (42)$$

Man erhält z.B. für die Lösungen $w_{gn}(x, t)$ Graphen der folgenden Struktur, die im Programm als Animationen gezeigt werden:

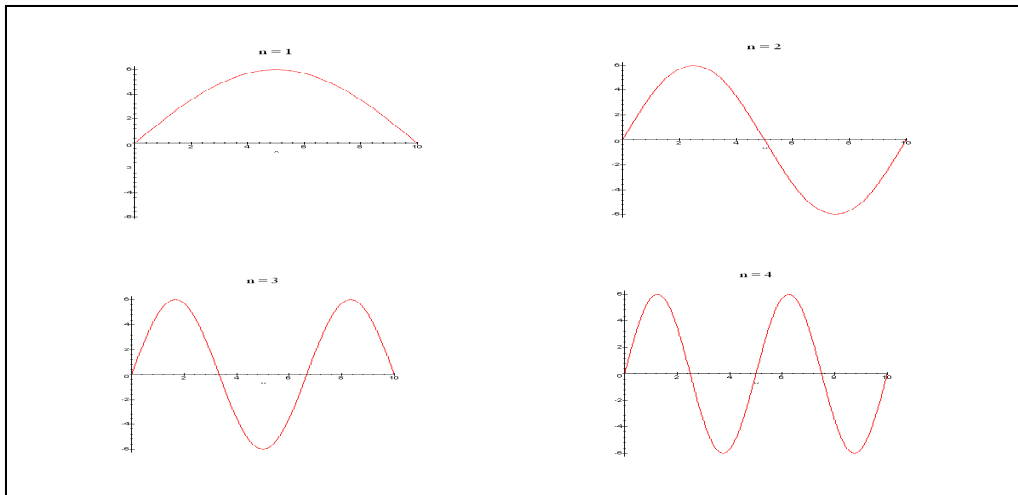


Figure 3: Stehende Wellen für die Wellenzahlen $n = 0$ bis $n = 4$. Die Amplitude ist in allen Fällen $w_{gn}^{(0)} = 6$.

¹³Man weiß aus der Theorie der Fourierreihen, dass jede Funktion h mit $h(0) = h(L) = 0$ nach den Funktionen $\sin(k_n x)$ entwickelt werden kann.

Kennzeichen einer stehenden Welle sind die fixen Positionen der Nulldurchgänge - genannt **Knoten** - und der Maxima bzw. Minima - genannt **Bäuche**. Speziell für die Eigenschwingung einer Saite ist die Amplitude die maximale Auslenkung. Die Eigenfrequenz ω_n bestimmt die Zeitperiode der Schwingung; durch Kopplung der Saite mit dem Schallkörper und der Luft kann man einen Ton dieser Frequenz hören. Bei einer Eigenschwingung sind die Knoten der Saite konstant, das heißt die Punkte x mit $u(x, t) = 0$ liegen immer an den gleichen Stellen. Die Wellenlänge λ_n ist der doppelte Knotenabstand. Die erste Schwingung ($n=1$, Grundschiwingung) mit $\lambda_1 = 2L$ hat keine Knoten¹⁴, die n -te Schwingung hat $n-1$ Knoten. Allerdings kann man dies besser in den Animationen im Programm beobachten. Die stehenden Wellen auf einer Saite oder in einer Luftsäule werden auch **Eigenschwingungen** oder **Eigenmoden** genannt. Die Schwingung der niedrigsten Kreisfrequenz $\omega = \omega_1$ heißt **Grundfrequenz**, die mit $\omega = \omega_2 = 2\omega_1$ heißt **erste Oberschwingung** usw. Aus den Eigenschwingungen lassen sich durch Überlagerung Wellenpakete konstruieren.

Beispiel: *Wellenpaket aus den ersten 10 stehenden Wellen*

Betrachte dazu die folgende Abbildung der zeitlichen Entwicklung¹⁵:

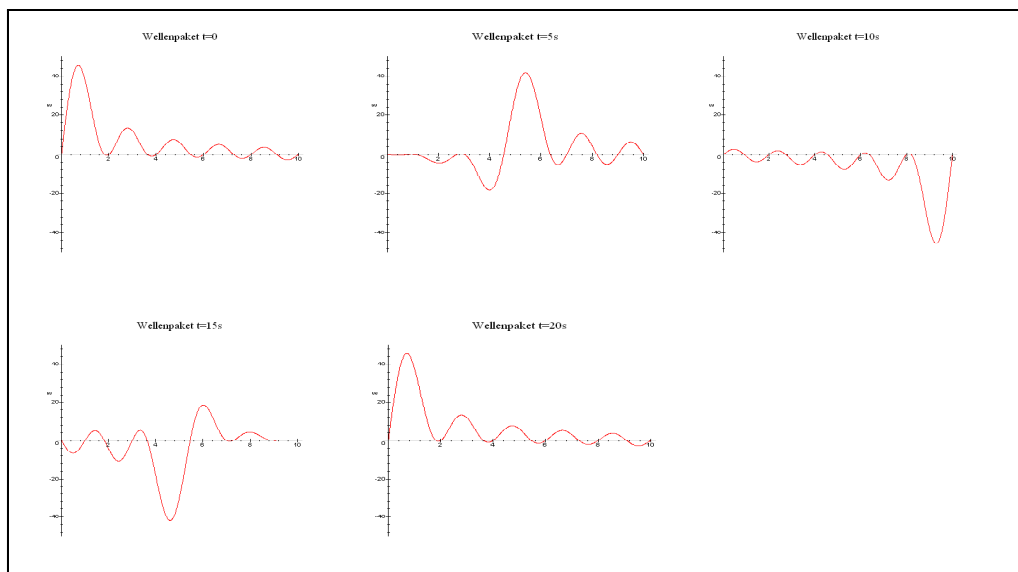


Figure 4: Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets aus den ersten 10 Eigenschwingungen.

¹⁴ Die Einspannpunkte der Saite werden nicht mitgezählt.

¹⁵ Im Programm "QPVor13Pr1.mws" ist eine Animation dieser Bewegung zu sehen. Dort können auch andere Wellenpakete konstruiert werden.

Im dargestellten Wellenpaket:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{10} \sin(k_n x) \cdot [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad (43)$$

wurde zur Vereinfachung

$$a_n = b_n = \text{const.}$$

gesetzt.

Die Energie eines solchen Wellenpakets erhält man aus der Summe der Energien der einzelnen Eigenschwingungen:

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^N \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{K}{2} \left(\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ E &= \sum_{n=0}^N E_{kin, n} + E_{pot, n} = \sum_{n=0}^N E_n \end{aligned} \quad (44)$$

Im Falle des oben betrachteten Wellenpakets erhält man die folgende Darstellung:

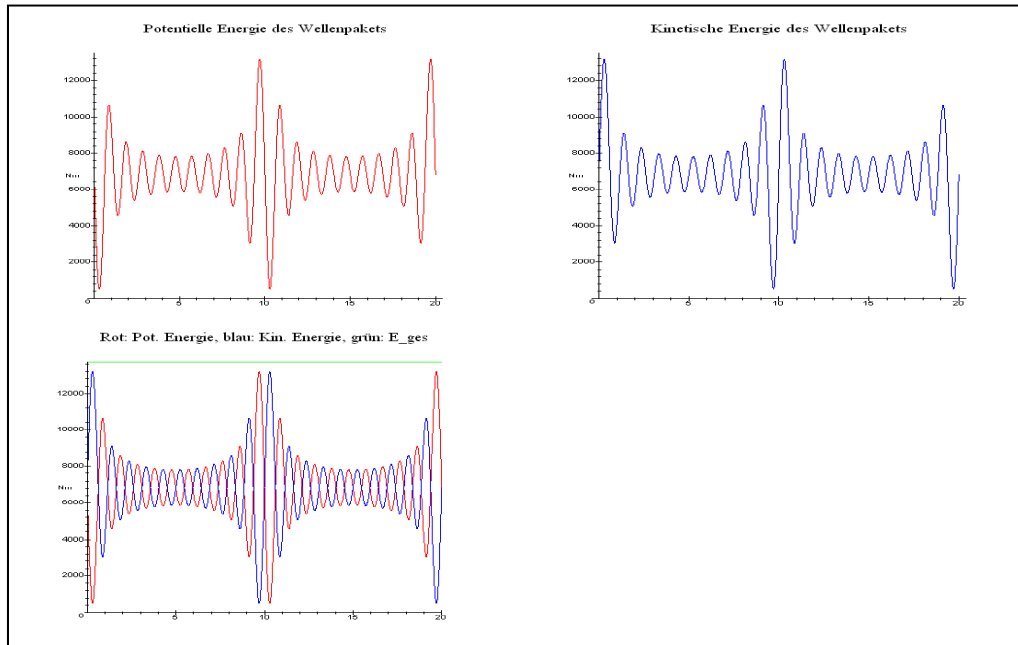


Figure 5: Energie des Wellenpakets aus den ersten zehn Eigenschwingungen. Die horizontale Achse ist die t-Achse mit der Einheit Sekunden.

Bemerkung:

Entscheidend für die weiteren Überlegungen zur Atomphysik ist, dass Eigenschwingungen einer eingespannten Saite immer nur diskreten Energien zugehörig sind. Man kann nicht durch jede beliebige, von außen zugeführte Energie eine Eigenschwingung der Saite anregen. Umgekehrt bedeutet dies, dass Eigenschwingungen einer eingespannten Saite auch nicht jede beliebige Energie abgeben können¹⁶.

¹⁶Man stelle sich eine eingegpannte Saite vor, die zur einer Eigenschwingung angeregt wurde. Dann lässt man sie solange schwingen, bis die Saite wieder ihre Ruhelage einnimmt. Die von der Saite während dieses ganzen Prozesses abgegebene Energie kann nur diskrete Werte annehmen, von Reibungseffekten sehen wir hierbei ab. Dieses Ergebnis aus der klassischen Mechanik wird noch im Rahmen der theoretischen Behandlung des H-Atoms eine zentrale Rolle spielen.

1.2. Zweidimensionale stehende Wellen - die schwingende Membran. Analog zur Entwicklung eindimensionaler stehender Wellen lassen sich auch zweidimensionale stehende Wellen entwickeln. Die zweidimensionale Wellengleichung hat die Gestalt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y, t) \quad (45)$$

und wird für das **Problem der eingespannten Membran**¹⁷ mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w(L_x, y, t) &= w(x, L_y, t) = 0 \\ w(0, y, t) &= w(x, 0, t) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

beschrieben. Man erhält über einen Separationsansatz die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} w_{gn_x n_y}(x, y, t) &= \cos(\omega_{n_x n_y} t) \sin(k_{x n_x} x) \sin(k_{y n_y} y) \\ w_{un_x n_y}(x, y, t) &= \sin(\omega_{n_x n_y} t) \sin(k_{x n_x} x) \sin(k_{y n_y} y) \end{aligned} \quad (47)$$

mit:

$$\begin{aligned} k_{x n_x} &= n_x \frac{\pi}{L_x}, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \\ k_{y n_y} &= n_y \frac{\pi}{L_y}, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Für die Eigenfrequenzen erhält man:

$$\omega_{n_x n_y} = c \sqrt{k_{x n_x}^2 + k_{y n_y}^2} \quad (49)$$

und man kann im Programm "QPVorl13Pr1.mws" beliebige Animationen solcher Eigenschwingungen der Membran erzeugen. Die obigen Lösungen sind wieder in der Zeit gerade bzw. ungerade. Ihre nur von den Ortskoordinaten x,y abhängigen Faktoren sind gleich. Sie besitzen $n_x - 1$ Knotenlinien bei:

$$x = m \frac{L_x}{n_x}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n_x - 1 \quad (50)$$

und $n_y - 1$ Knotenlinien bei:

$$y = m \frac{L_y}{n_y}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n_y - 1 \quad (51)$$

Entlang der Knotenlinien verschwindet die Auslenkung für alle Zeiten. Die obigen Lösungen beschreiben stehende Wellen in zwei Raumdimensionen. Sie werden auch **Eigenschwingungen der Membran** genannt. Zu vorgegebenen Zahlen n_x und n_y ist die allgemeine Form der Eigenschwingung:

$$w_{n_x n_y}(x, y, t) = a \cdot w_{gn_x n_y} + b \cdot w_{un_x n_y} \quad (52)$$

¹⁷Sie sei in x-Richtung eingespannt zwischen 0 und L_x , in y-Richtung zwischen 0 und L_y .

Die folgende Darstellung zeigt die ersten Eigenschwingungen¹⁸:

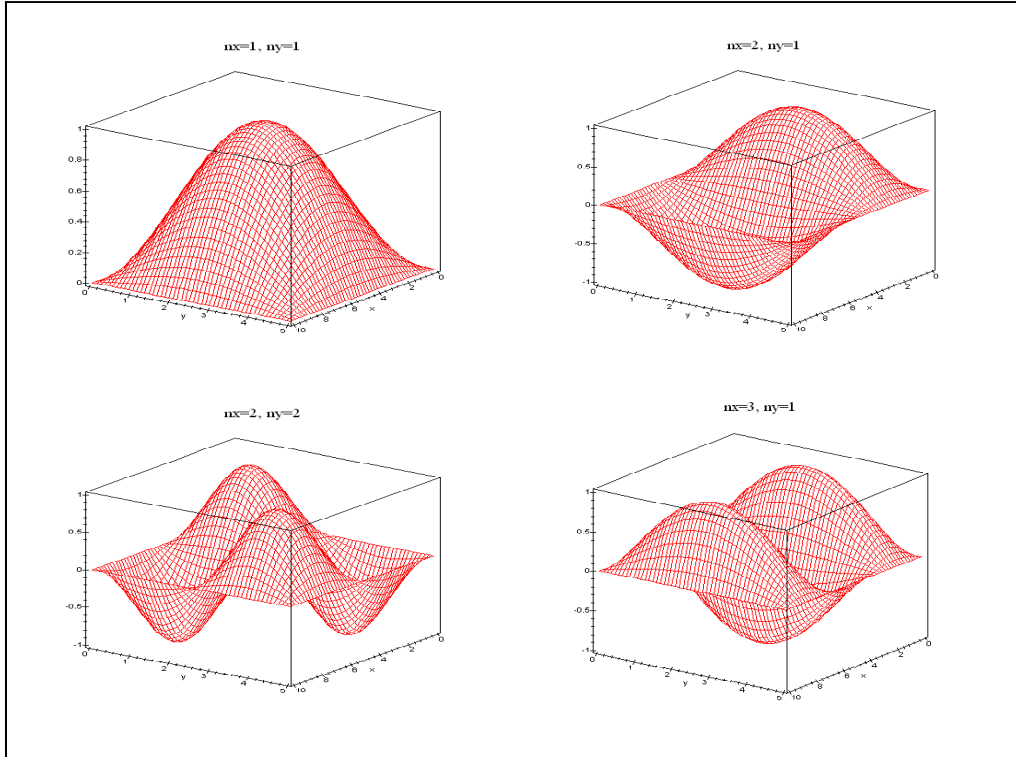


Figure 6: Eigenschwingungen einer eingespannten zweidimensionalen Saite.

Man kann in der Natur solche Eigenschwingungen durch Bestreuen einer Membran mit feinem Sand darstellen. Dazu befestigt man dicht unter der Membran einen Lautsprecher. An einem Frequenzgenerator kann die Tonhöhe, d.h. die Kreisfrequenz ω der vom Lautsprecher abgestrahlten Schallwellen eingestellt werden. Bei bestimmten Kreisfrequenzen bilden sich dann symmetrische Sandmuster auf der Membran aus, wenn sich der Lautsprecher etwa an der Stelle eines Schwingungsbauches, also in der Mitte eines aus den Knotenlinien gebildeten Rechtecks, befindet. Aus Gebieten, in denen die Geschwindigkeit $\frac{\partial}{\partial t} w(x, y, t)$ der Membran einen bestimmten Wert überschreitet, wird der Sand zu weniger stark bewegten Gebieten geschüttelt. Die Grenzen zwischen sandfreien und sandigen Gebieten haben deshalb die Form von Linien. Man

¹⁸Man kann im Programm eine beliebigen Wahl der Wellenzahl n_x bzw. n_y durchführen. Man drehe die entstehenden Bilder, um sich von der Anzahl der Knotenlinien bzw. der Wellenbäuche zu überzeugen.

vergleiche die folgenden Bilder¹⁹:

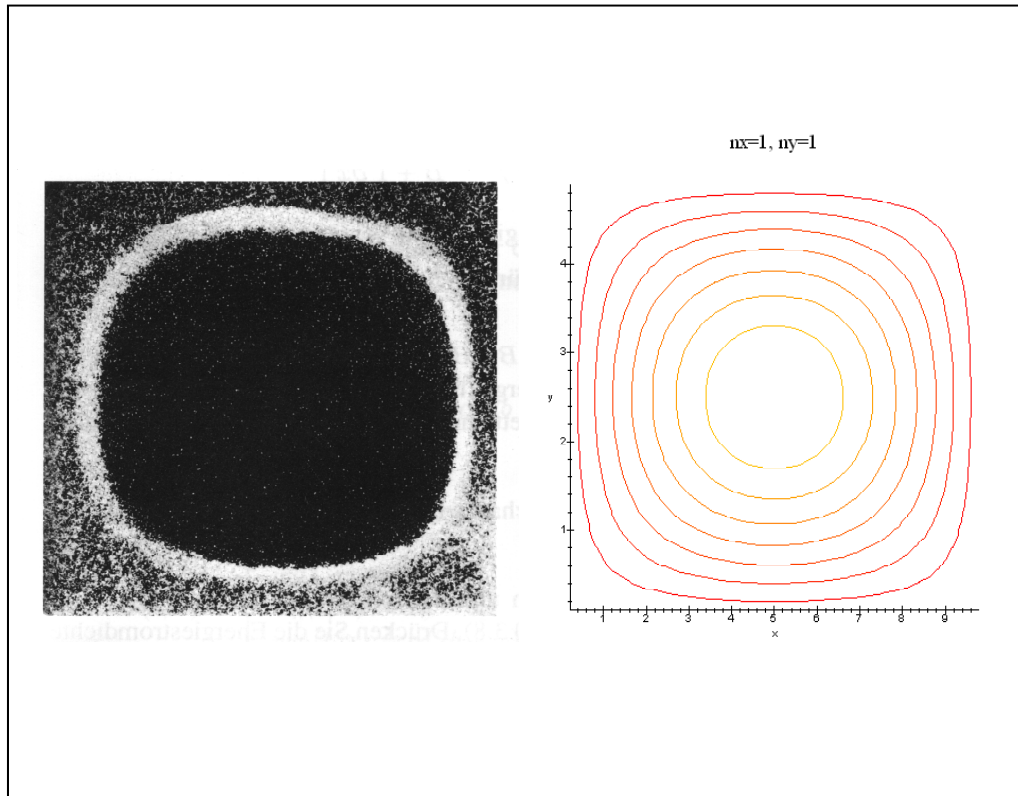


Figure 7: Chladnische Klangfigur und Bild konstanter Linien für den Fall $n_x = n_y = 1$.

¹⁹Die beiden Bilder der Chladnischen Klangfiguren wurden entnommen aus Brandt / Dahmen: Mechanik, Springer-Verlag 1996.

Für einen weiteren Fall ($n_x, n_y = 2, 2$) erhält man die folgenden Bilder:

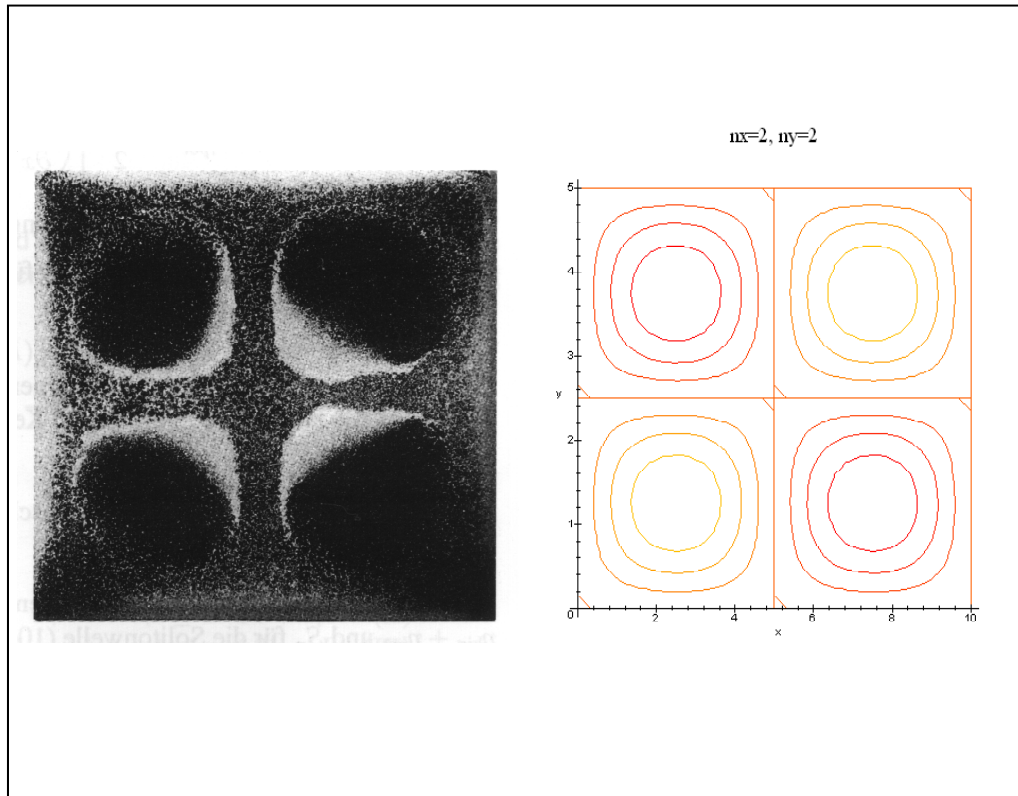


Figure 8: Chladnische Klangfigur und Bild konstanter Linien für den Fall $n_x = n_y = 2$.

Man kann eine deutliche Übereinstimmung zwischen mathematischer Beschreibung und der Realität erkennen! Die entstehenden Figuren nennt man **Chladnische Klangfiguren**.

Bemerkung:

Die für den eindimensionalen Fall besprochenen Ergebnisse über diskrete Energiewerte, wie auch die Möglichkeit der Bildung von Wellenpaketen gelten natürlich entsprechend auch für den zweidimensionalen Fall.

1.3. Stehende elektromagnetische Wellen. Maple-Datei zu diesem Abschnitt:

- "QPVorl13Pr2.mws" (Stehende elektromagnetische Wellen)

In diesem Abschnitt sollen nun stehende elektromagnetische Wellen untersucht werden, die sich in einem Volumen ausbilden, das durch Metallwände begrenzt wird. Innerhalb des Volumens sollen die freien MAXWELL-Gleichungen²⁰ gelten. Die freie Verschiebbarkeit von Ladungen im Metall bedeutet, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes am Rand verschwindet²¹. Da das Magnetfeld senkrecht auf dem elektrischen Feldvektor steht, bedeutet dies, dass die Normalkomponente des B-Feldes auf dem Rand verschwindet. Wir betrachten im folgenden ein quaderförmiges Volumen:

$$0 \leq x \leq L_1$$

$$0 \leq y \leq L_2$$

$$0 \leq z \leq L_3$$

Über einen Separationsansatz erhält man unter Berücksichtigung der Randbedingungen die folgenden Lösungen²²:

$$E_1(x, y, z, t) = A_1 \cos\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_3}\right) e^{-i\omega_{lmn}t} \quad (53)$$

$$E_2(x, y, z, t) = A_2 \sin\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_3}\right) e^{-i\omega_{lmn}t} \quad (54)$$

$$E_3(x, y, z, t) = A_3 \sin\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{L_3}\right) e^{-i\omega_{lmn}t} \quad (55)$$

Die Wellenzahlen l, m und n können die Werte 0,1,2,3,... annehmen. Nur eine Wellenzahl darf allerdings Null sein; denn sonst ergäbe sich $\mathbf{E}=0$ und damit auch $\mathbf{B}=0$. Die Wellenzahlen bestimmen die Frequenz:

$$\omega_{lmn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}\right)} \quad (56)$$

Zwei Amplituden können frei gewählt werden²³, die dritte liegt dann über:

$$A_1 \frac{l\pi}{L_1} + A_2 \frac{m\pi}{L_2} + A_3 \frac{n\pi}{L_3} = 0 \quad (57)$$

fest. Die Komponenten des B-Feldes ergeben sich dann aus:

$$B_1(x, y, z, t) = -\frac{ic}{\omega_{lmn}} \left(\frac{\partial}{\partial y} E_3(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial z} E_2(x, y, z, t) \right) \quad (58)$$

²⁰ Siehe Skript zur Vorlesung Nr.4.

²¹ Nach Voraussetzung sollen die Wände nicht stromdurchflossen sein, wäre die Tangentialkomponente ungleich Null, so würden die Ladungen innerhalb der Hohlraumwände noch verschoben, es käme also zu einem el. Stromfluss in ihnen.

²² Die Herleitung findet man beispielsweise in Fliessbach, T.: Elektrodynamik, B.I. Verlag 1993. Die Herleitung übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung und wird deshalb an dieser Stelle nicht vorgeführt.

²³ Dies entspricht den zwei Polarisationsrichtungen der freien Welle.

$$B_2(x, y, z, t) = -\frac{ic}{\omega_{lmn}} \left(\frac{\partial}{\partial z} E_1(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial x} E_3(x, y, z, t) \right) \quad (59)$$

$$B_3(x, y, z, t) = -\frac{ic}{\omega_{lmn}} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_2(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial y} E_1(x, y, z, t) \right) \quad (60)$$

Die Randbedingungen des Hohlraums lassen also nur ganz bestimmte **Eigenfrequenzen** ω_{lmn} zu. Die dazugehörigen Lösungen für das E- wie B-Feld sind stehende Wellen, d.h. die Position der Wellenberge und -täler ist zeitlich konstant. Die Anzahl der Knoten ist $l-1$, $m-1$ und $n-1$. Jeder Richtung kann eine Wellenlänge - gleich dem Abstand zwischen zwei Maxima - zugeordnet werden:

$$\lambda_1 = \frac{2L_1}{l} \quad (61)$$

$$\lambda_2 = \frac{2L_2}{m} \quad (62)$$

$$\lambda_3 = \frac{2L_3}{n} \quad (63)$$

Im Programm "QPVorl13Pr2.mws" kann man den Realteil beliebiger stehender elektromagnetische Wellen eingeben und in einer Animation betrachten. Die beiden folgenden Bilder geben einen Eindruck²⁴ für die Wahl $m, n = 1, 1, 1$:

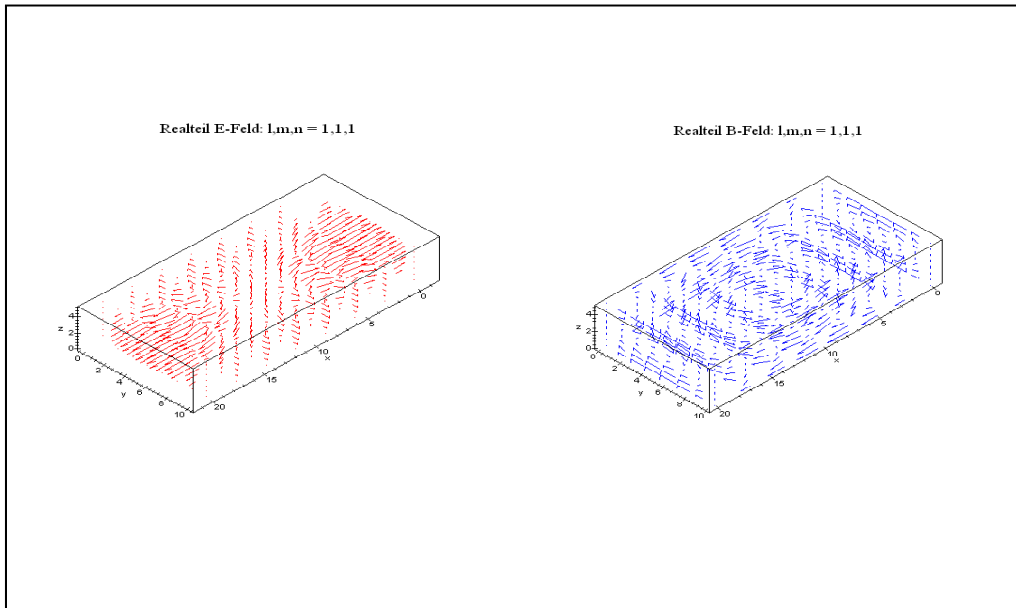


Figure 9: Realteil des elektromagnetischen Feldes einer stehenden elektromagnetischen Welle.

²⁴ Eine wirkliche Anschaulichkeit entsteht aber erst durch die Animation im Programm. Es sind dort beliebige Kombinationen programmierbar.

Bemerkung:

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes hat im Vakuum die folgende einfache Gestalt²⁵:

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (64)$$

Die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes innerhalb des Hohlkörpers erhält man dann durch Integration:

$$W = \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=0}^{L_z} w(\mathbf{r}, t) \cdot d^3r \quad (65)$$

Man kann erkennen, dass genauso wie im Fall der eingespannten Saite auch stehende elektromagnetische Wellen nur durch diskrete Energien - z.B. durch die Temperatur der Hohlraumwände - angeregt werden können.

²⁵Die im folgende Aussage über diskrete Energieniveaus gilt auch im Nichtvakuum.