Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 12

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Anschließend an das letzte in der Vorlesung 11 behandelte mathematische Modell wird nun das RUTHERFORD-Modell mit Maple behandelt - es zeigt sich, das auch die Ergebnisse klassischer Anwendungen auf atomphysikalische Problemstellungen zu neuen Konzepten führen mussten.

1. DAS RUTHERFORD-ATOMMODELL

Maple-Datei zur Vorlesung:
- QPVorl12Pr1. mws

Im RUTHERFORD-Atommodell des H-Atoms umkreist ein Elektron auf einer Kreisbahn ein Proton[1]. Die ungestörte Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluss der Coulomb-Kraft wird beschrieben durch:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{1}$$

Da wir eine Kreisbahn betrachten - mit der Kreisfrequenz ω in der x-y-Ebene -, bleibt $|\mathbf{r}| = const.$ Man kann diesen Wert aus dem Zusammenhang zwischen der Coulomb- und der Zentripetalkraft:

$$\mathbf{F}_Z = -m\omega^2\mathbf{r}$$

bestimmen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_C| &= |\mathbf{F}_Z| \\ \left|-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right| &= \left|-m\omega^2\mathbf{r}\right| \Longleftrightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{4\pi\varepsilon_0 m\omega^2}{e^2} \end{aligned}$$

Man erhält also - ohne Berücksichtigung der Strahlungskraft - die folgende Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = -m\omega^2\mathbf{r} \Longleftrightarrow m \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) + m\omega^2\mathbf{r} = 0 \tag{2}$$

Lösung dieser Differezialgleichung ist:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} \cdot e^{i\omega t},\ \mathbf{A} = \mathbf{r}(0) \tag{3}$$

also die Bewegung eines Elektrons auf einer Kreisbahn.
Natürlich beschreibt diese Gleichung die Bahn des Elektrons nicht korrekt, denn die Strahlungskraft[2] wurde nicht berücksichtigt.

[1] Es soll in dieser Vorlesung keine Begründung hierfür gegeben werden, die Ergebnisse der Streuexperimente RUTHERFORDs sind aus der Schule bekannt, werden aber auch in Vorlesung 16 wiederholt.
[2] Siehe Vorlesung 11 zur *Einführung in die Quantenphysik.*

Unter Berücksichtigung der Strahlungskraft $\mathbf{F}_{\text{Str}}$ erhält man die folgende Bewegungsgleichung, die in der Physik unter dem Namen "**ABRAHAM-LORENTZ-Differenzialgleichung** " bekannt ist:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = -m\omega^2\mathbf{r} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{4}$$

Um diese Gleichung als mathematisches Modell verwenden zu können[3], muss gelten:

$$|\mathbf{F}_C| \gg |\mathbf{F}_{\text{Str}}| \tag{5}$$

Mit[4]:

$$\begin{aligned} m &= m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ \omega &= 4 \cdot 10^{16} \text{ Hz (Umdrehungsfrequenz im H-Atom)} \\ |\mathbf{r}| &= 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m (BOHR-Radius)} \end{aligned}$$

erhält man:

$$|\mathbf{F}_C| = \left|-m\omega^2\mathbf{r}\right| = 1.46 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \frac{1}{s^2} \tag{6}$$

Für den Betrag der Strahlungskraft erhält man:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_{\text{Str}}| &= \left|\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\ddot{\mathbf{r}}(t)\right| \\ e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \\ \varepsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \\ c &= 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Man erhält (beachte $1V = 1\frac{\text{Nm}}{\text{As}}$):

$$|\mathbf{F}_{\text{Str}}| \approx 5.7 \cdot 10^{-54} \text{kg} \cdot s \cdot \left|\frac{\partial}{\partial t}\ddot{\mathbf{r}}(t)\right| \tag{7}$$

und damit eine Bestätigung für die Anwendbarkeit des Modells[5].
Damit ist klar, dass

$$|\mathbf{F}_C| \gg |\mathbf{F}_{\text{Str}}|$$

gilt und somit die Bewegungsgleichung richtig angesetzt ist. Da die Strahlungskraft so klein ist, wird die Lösung der ABRAHAM-LORENTZ-Gleichung auch nur wenig von der Lösung der Kreisbewegung abweichen. Diese "Abweichung" verstecken wir in der Variablen δ:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) \cdot e^{i\omega t(1+\delta)} \tag{8}$$

[3] Siehe Vorlesung 11 zur Einführung in die Quantenphysik.

[4] Den Wert für ω bzw. ein Wert in der Größenordnung des BOHR-Radius' konnte man zur Zeit RUTHERFORDs schon bestimmen.

[5] Benutzen wir die Kreisbewegung, so erhalten wir z.B. $\left|\frac{\partial}{\partial t}\ddot{r}\right|_{t=0} = A\omega^3 \sim 10^{38}\frac{m}{s^3}$, mit anderen Worten, die Strahlungskraft ist verschwindend klein.

Über:

$$\begin{aligned} x_R(t) &= \mathrm{Re}\{x(t)\} \\ y_R(t) &= \mathrm{Im}\{y(t)\} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

stimmen die Anfangsbedingungen. Durch Einsetzen dieses Ansatzes erhält man die folgende Bestimmungsgleichung für δ:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) \cdot e^{i\omega t(1+\delta)} \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{r}(0) \cdot i\omega \cdot (1+\delta) \cdot e^{i\omega t(1+\delta)} \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\mathbf{r}(0) \cdot \omega^2 \cdot (1+\delta)^2 \cdot e^{i\omega t(1+\delta)} \\ \frac{\partial}{\partial t}\ddot{\mathbf{r}}(t) &= -i \cdot \mathbf{r}(0) \cdot \omega^3 \cdot (1+\delta)^3 \cdot e^{i\omega t(1+\delta)} \end{aligned}$$

mit:

$$d := \frac{e^2}{m \cdot 6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^3}$$

erhält man:

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \omega^2 \cdot \mathbf{r}(t) = d \cdot \frac{\partial}{\partial t}\ddot{\mathbf{r}}(t)$$

Um nun δ zu bestimmen, reicht es aus, nur mit einer Komponenten von $\mathbf{r}(t)$ zu rechnen. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} -x(0) \cdot \omega^2 \cdot (1+\delta)^2 + \omega^2 \cdot x(0) &= d \cdot (-i) \cdot x(0) \cdot \omega^3 \cdot (1+\delta)^3 \\ id\omega \cdot (1+\delta)^3 - (1+\delta)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

mit den realen Werten:

$$\begin{aligned} r(0) &= |\mathbf{r}(0)| = 0.53 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \\ \omega &= 4 \cdot 10^{16} \frac{1}{s} \\ d &= \frac{e^2}{m \cdot 6\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^3} = 6.3 \cdot 10^{-24} \end{aligned}$$

erhält man die folgende Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} i \cdot 6.3 \cdot 10^{-24} \cdot 4 \cdot 10^{16} \frac{1}{s} \cdot (1+\delta)^3 - (1+\delta)^2 + 1 &= 0 \\ i \cdot 25 \cdot 10^8 \cdot (1+\delta)^3 - (1+\delta)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

die Maple im Programm löst. Maple berechnet drei Werte für δ :

$$\begin{aligned} \delta_1 &\approx -2.0 + i \cdot 0.126 \cdot 10^{-6} \\ \delta_2 &\approx -1 - i \cdot 0.4 \cdot 10^{-7} \\ \delta_3 &\approx -0.4 \cdot 10^{-13} + i \cdot 0.126 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

von denen einer, nämlich die Lösung für δ_2 als unphysikalisch verworfen wird[6]. Die anderen Lösungen zeigen, dass das Elektron nach sehr kurzer Zeit in den Kern stürzt.

[6] Das Elektron entfernt sich vom Proton - dies wird natürlich in der Natur ohne äußere Einflüsse nicht beobachtet.

1.1. Bahnkurven für die drei möglichen Lösungen. Betrachten wir im Folgenden eine physikalisch sinnvolle Lösung bzw. die Graphen, die von Maple entwickelt werden.
Im Falle der Lösung $\delta_1$erhält man die folgende Raumkurve:

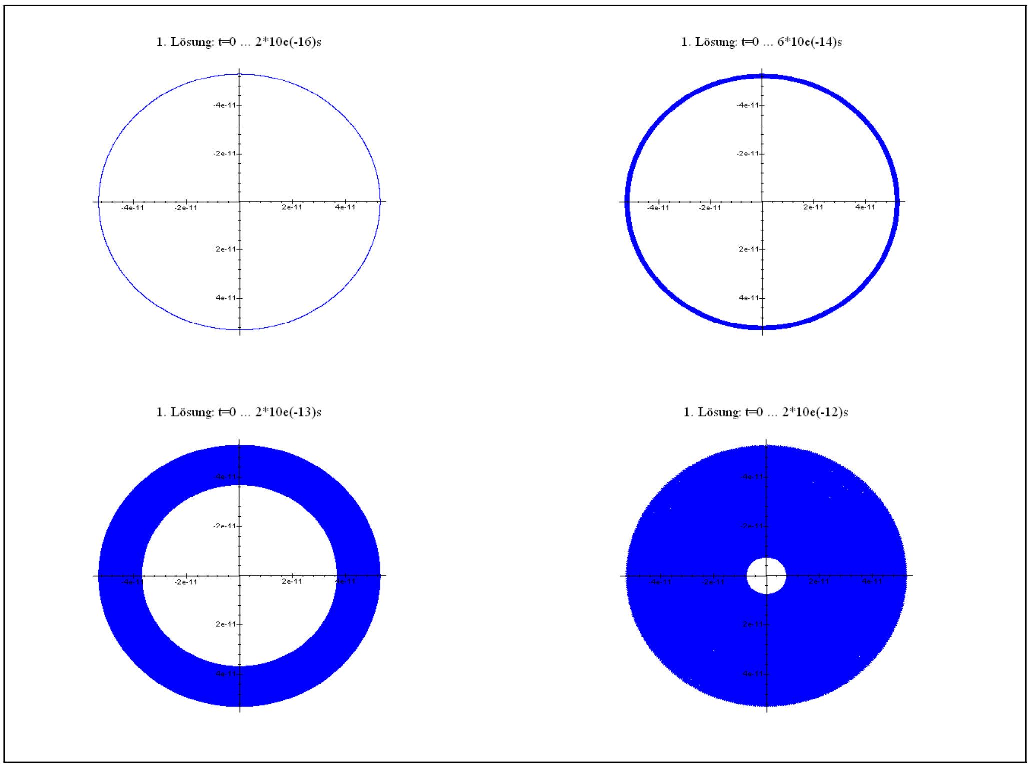

Figure 1: Das Elektron bewegt sich in einer Spirale auf das Proton im Ursprung zu. Die Einheit der Achsen ist Meter.

Man kann deutlich erkennen, dass das Elektron sich von außen auf den Kern in einer Spirale zubewegt. Dieser Prozess geschieht, wie das betrachtete Zeitintervall zeigt, sehr schnell. Diese Zeitspanne ist erheblich kürzer als die Lebensdauer des Universums, so dass ein quasi zerfallendes Universum nicht postuliert werden kann. Darüber hinaus müsste man für atomaren Wasserstoff ein permanentes Spektrum ausgesendeter elektromagnetischer Wellen erwarten. Experimentell misst man allerdings nur ein Linienspektrum. Dieser offensichtliche Widerspruch zwischen experimenteller Beobachtung und der bisherigen erfolgreichen Theorie führte schließlich zur Entwicklung völlig neuer Konzepte, die einen klaren Bruch mit alten Vorstellungen beinhalteten. So postulierte BOHR in seinem Modell strahlungsfreie Bahnen des Elektrons im völligen Widerspruch zur klassischen Elektrodynamik.

Mathematisches Beispiel: *Zur Verdeutlichung der Lösung* δ_1
Um das Verhalten des Elektrons etwas deutlicher zu erkennen[7], wird im Programm "QPVorl12Pr1.mws" eine Funktion diskutiert, die die Spirale deutlicher erkennen lässt:

$$\delta = -2 + i \cdot 0.01 \tag{9}$$

Als Ausgangsradius wurde $r\,(0) = 10$ angenommen. Man erhält dann die folgende Raumkurve:

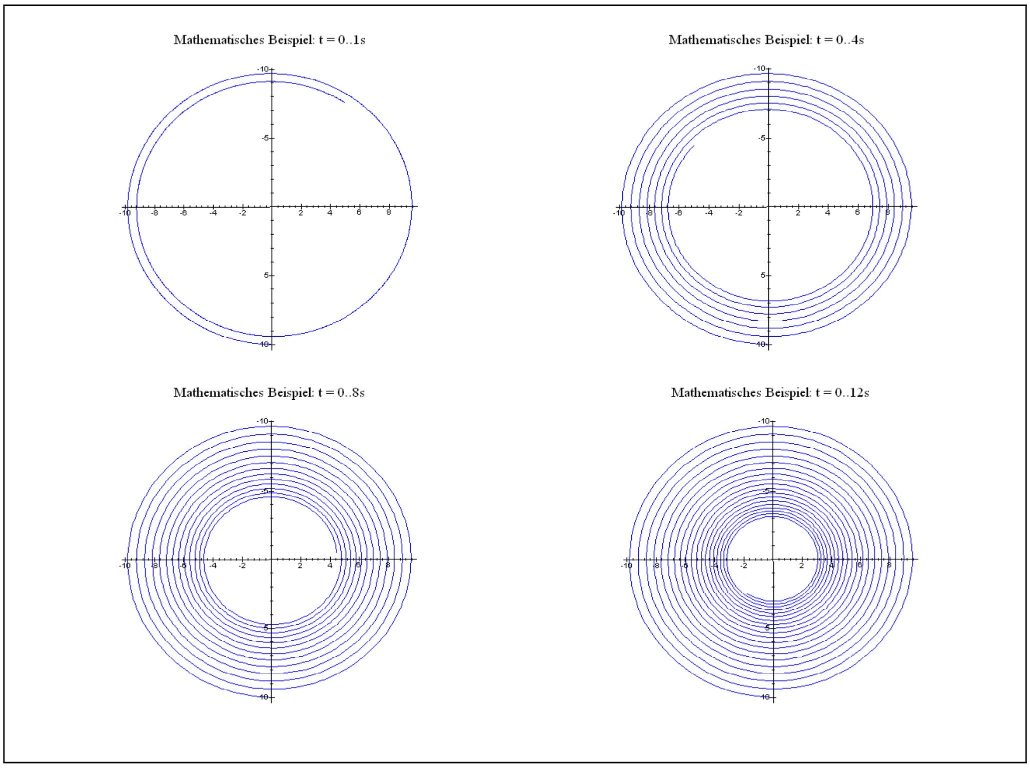

Figure 2: Entwicklung der Raumkurve für das mathematische Beispiel. Die Einheit der Achse ist Meter.

Die zweite Lösung für δ_2 ergibt eine Raumkurve, bei der sich das Elektron auf einer geradlinigen Bahn vom Proton weg bewegt. Mit anderen Worten also, dass das H-Atom zerfällt. Da ein derartiges Verhalten in der Natur nicht beobachtet wird, verwirft man diese Lösung.

[7] Der Imaginärteil der Lösung für δ_1 wie auch für die gleichartig aussehende Lösung δ_3 ist sehr klein. Aus diesem Grund ist die Spirale auf der sich das Elektron in den Kern stürzt sehr eng und man kann sie aus diesem Grund nicht so deutlich erkennen.

Die folgende Darstellung zeigt die erhaltene Bahnkurve in diesem Fall:

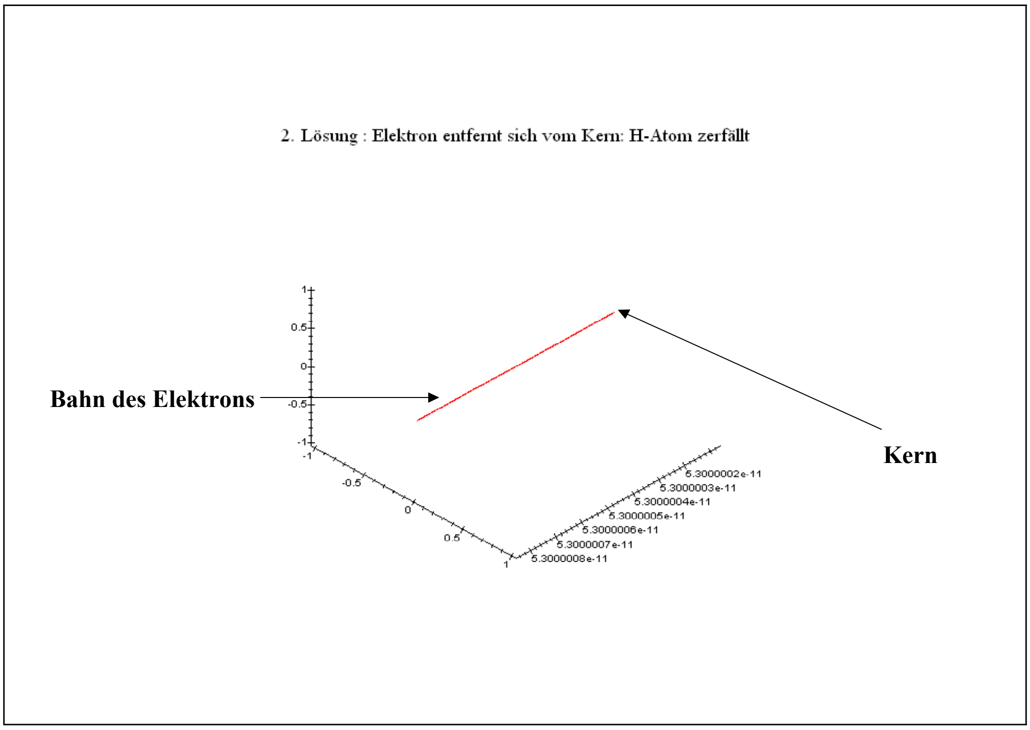

Figure 3: Unphysikalische Bahnkurve im Falle der Lösung für δ_2. Die Einheit der Achsen ist Meter.

Die Lösung im Fall δ_3 ergibt das gleiche Verhalten des Elektrons wie im ersten Fall: Das Elektron stürzt in einer Spiralbewegung in den Kern.

1.2. Betrachtung der Geschwindigkeitskurve für die Lösung δ_1. Betrachten wir nun den Graphen des Geschwindigkeitsbetrages des Elektrons auf seinem Weg Richtung Proton:

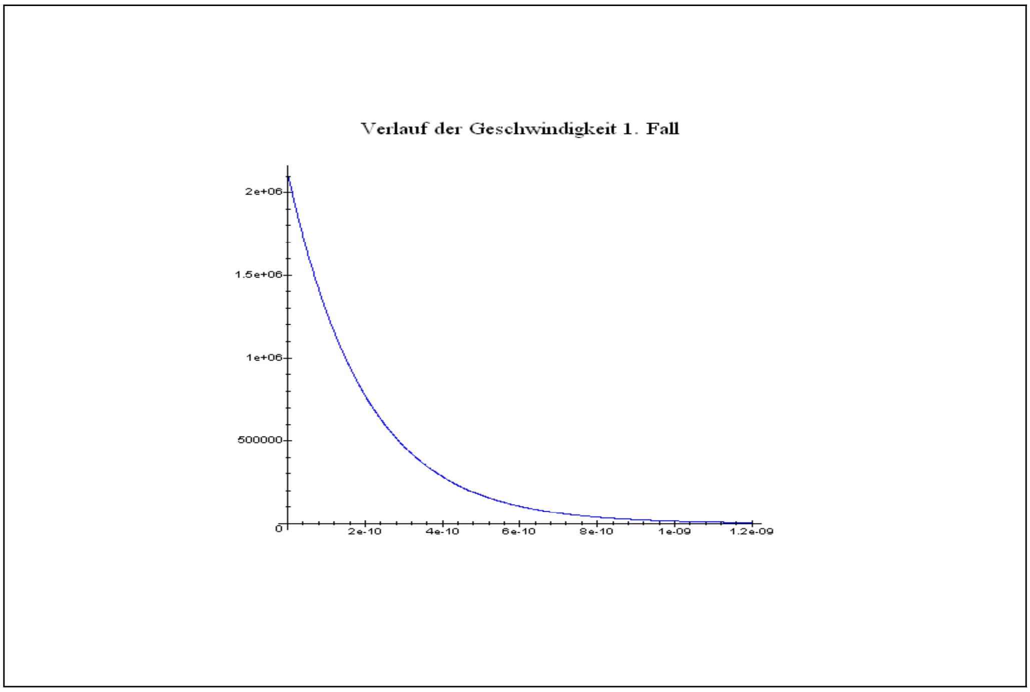

Figure 4: Geschwindigkeitskurve im Falle der ersten Lösung. Die Einheit der vertikalen Achsen ist Meter pro Sekunde, die der horizontalen Achsen ist Sekunde.

Man kann also erkennen, das zu Beginn der Bewegung die Geschwindigkeit sehr groß ist und dann bis auf Null abnimmt, wenn das Elektron in den Kern gestürzt ist. Dieses Kurve überrascht nicht, kann man doch die Strahlungskraft als abbremsende Kraft interpretieren! Durch das Abstrahlen von Energie in Form einer elektromagnetischen Welle, verliert das Elektron immer mehr an Geschwindigkeit, bis es schließlich in den Kern stürzt.

1.3. Betrachtung der Strahlungskraft im Falle δ_1. Betrachten wir im nächsten Bild noch den Betrag der Strahlungskraft, die die Abstrahlung der elektromagnetischen Welle durch das Elektron beschreibt:

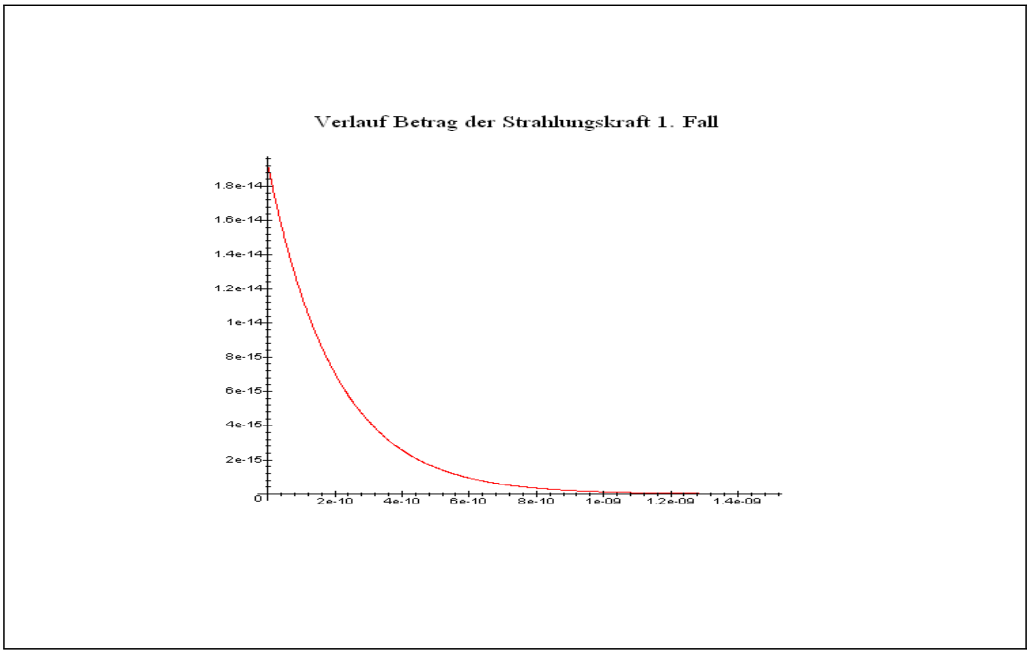

Figure 5: Betrag der Strahlungskraft im ersten Falle. Die Einheit der vertikalen Achse ist Newton, die der horizonatlen Achse ist Sekunde.

Man kann erkennen, das die Strahlungskraft zu Beginn der Bewegung am größten ist und dann mit zunehmender Dauer immer kleiner wird. Dieses Verhalten überrascht nicht, da das Elektron immer langsamer wird, wobei die Änderung der Beschleunigung ebenfalls durch den immer größer werdenden Energieverlust weiter abnimmt.

Betrachtet man die in dieser Vorlesung vorgestellten Ergebnisse, so kann man das Problem verstehen, vor dem die Atomphysik zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts stand. Einerseits wusste man dass das H-Atom stabil ist und im Kern aus einem Proton besteht, während die Hülle des Atoms von einem Elektron gebildet wird. Auf der anderen Seite sah man die Instabilität des klassischen Modells, das direkt aus den RUTHERFORD-Streuversuchen abgeleitet wird.
Historisch gesehen war dieses Problem in der Beschreibung des Atoms der Ausgangspunkt für SCHRÖDINGERs Wellenmechanik[8], deren Zentrum die SCHRÖDINGER-Gleichung ist.

[8] Wie auch für HEISENBERGs äquivalente Matrizenmechanik und somit für die moderne Quantentheorie.