Vorlesungen über Quantenmechanik - Vorlesung 16

Jochen Geppert / Didaktik der Physik

Wintersemester

Abstract. In dieser Vorlesung wird nun ausführlich das BOHR-Atommodell behandelt.

1. Das BOHR-Atommodell (1913)[1]

Maple-Dateien zur Vorlesung :
- QMV16Pr1.mws (Klassisches Zweikörperproblem, Animation der Bewegung)
- QMV16Pr2.mws (BOHR-Korrespondenzprinzip)

Das Dilemma der Physiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts war, dass es auf der einen Seite experimentell hinreichend gesicherte Ergebnisse über die Atome gab (Linienspektren, Atomaufbau), aber keinerlei Erklärungen für diese Phänomene. Alle auf klassischen Gesetzen aufbauenden Modelle des Atoms waren nicht in der Lage, die experimentellen Ergebnisse zu erklären. Der Prüfstein für eine Theorie des Atoms war die Erklärung dieser diskreten Spektren.
Klassisch kann man sich das Wasserstoffatom als ein Zwei-Körper-Problem vorstellen, die in der Mechanik[2] behandelt werden. Man kann sich die klassische Bewegung und ihre Entwicklung auch im Programm QMVorl17Pr1.mws ansehen. Betrachtet man das H-Atom aus diesem klassischen Blickwinkel, so kann man weiter annehmen, dass die Frequenz der vom Atom emittierten Strahlung gleich der Frequenz ist, mit der Elektron um den Kern fliegt. Klassisch gesehen, strahlt ein solches beschleunigtes Elektron tatsächlich, jedoch gibt es dabei kontinuierlich Energie ab, so dass es in den Kern stürzen muss. Wir haben diesen Fall bereits eingehend untersucht[3] und die von Maple gelieferten Bilder analysiert. Der Vorgang des Hineinstürzens geschieht in sehr kurzer Zeit, so dass man nicht postulieren kann, der Zusammenbruch des Weltalls stehe infolge dieser Absturzbewegung noch bevor! Weiter würden wir in dieser klassischen Betrachtung auch ein kontinuierliches Spektrum erwarten und keine diskrete Verteilung. So versagen die großen klassischen Theorien von NEWTON und MAXWELL bereits vor dem Spektrum des einfachsten Atoms, des H-Atoms. Nicht einmal die Existenz von Spektrallinien können sie vorhersagen, geschweige denn konkrete Wellenlinien.
Es war also an der Zeit für eine grundlegend neue Theorie!
1913, also zwei Jahre nach den Streuexperimenten RUTHERFORDs schlug der dänische Theoretiker Niels BOHR ein Modell für das Wasserstoffatom vor, das nicht nur die Existenz der Spektrallinien berücksichtigte, sondern auch ihre Wellenlängen mit einer sehr großen Genauigkeit vorhersagte[4]. Für die bekannten Linien gab es

[1] Ergebnisse, die in dieser Vorlesung vorgestellt sind, stammen aus Halliday / Resnick : Physik, Bd. 2, de Gruyter Verlag 1994, ISBN 3-11-013897-2

[2] Eine schöne Darstellung findet man z.B. in Brandt / Dahmen: Physik Bd.1 , Springer 1984, ISBN 3-540-13806

[3] Siehe Skript 11 zur *Einführung in die Quantenphysik.*

[4] So sagte BOHR die LYMAN-Serie voraus!

bereits die empirisch gefundene verallgemeinerte BALMER-Formel[5]. BOHRs Herausforderung war es, ein mathematisches Modell zu finden, dass diese Formel begründete. BOHR, dem bereits klar war, dass die klassische Physik beim Problem des H-Atoms in einer Sackgasse war, stellte zwei kühne Postulate auf. Beide enthalten Züge, die in vollem Umfang auch den heutigen Vorstellungen entsprechen. Sie sind darüber hinaus ganz allgemein gehalten und auch auf andere atomare, molekulare oder nukleare Systeme anwendbar.

Die BOHR-Postulate:

1. **Das Postulat der stationären Zustände**: BOHR nahm an, dass das H-Atom in einer Anzahl von stationären (d.h. zeitlich nicht veränderlichen) Zuständen wohlbestimmeter Energie existieren kann, ohne Energie abzustrahlen! Diese Annahme steht in krassem Widerspruch zur klassischen Physik, doch Not macht halt erfinderisch. Man beachte, dass dieses Postulat nichts darüber aussagt, wie diese Zustände aussehen. Zum Beispiel ist von Bahnen nicht die Rede[6]!

2. **Das Frequenzpostulat**: BOHR postulierte, dass das Wasserstoffatom Strahlung nur dann emittieren oder absorbieren kann, wenn das Atom von einem stationären Zustand in einen anderen übergeht. Dabei ist die Energie des emittierten (oder absorbierten) Photons[7] gleich der Differenz der Energien dieser beiden Zustände. Geht also ein Atom von einem Anfangszustand mit der Energie E_n in einen Endzustand mit der (niedrigeren) Energie E_m über, so ist die Energie des emittierten Photons:

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m \tag{1}$$

Diese Hypothese verbindet zwei neue Vorstellungen - EINSTEINs Photonenhypothese und die PLANCK-Energiequantisierung - mit einer alten Idee -der Energierhaltung.

BOHR versuchte nun auf der Grundlage dieser beiden Hypothesen die empirische BALMER-Formel:

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = R \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{2}$$

zu begründen. Wir formen diese Gleichung nun um, mit $c = \lambda\nu$ folgt:

$$\begin{aligned}
\nu_{nm} &= R \cdot c \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\
h\nu_{nm} &= R \cdot h \cdot c \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\
h\nu_{nm} &= \left(-\frac{R \cdot h \cdot c}{n^2}\right) - \left(-\frac{R \cdot h \cdot c}{m^2}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Ein Vergleich mit dem zweiten BOHR-Postulat ergibt dann das folgende Ergebnis für die stationären Energien des Wasserstoffatoms:

$$E_n = -\frac{R \cdot h \cdot c}{n^2} \text{ , n = 1,2,3,...} \tag{4}$$

[5] Siehe Skript 15 zur *Quantenmechanik*, Gleichung (6).

[6] Allerdings läuft die Betrachtung des einfachsten Atoms, des H-Atoms dann doch auf Elektronenbahnen hinaus.

[7] BOHR verwendete also EINSTEINs Photonenhypothese - siehe Skript 14 zur *Einführung in die Quantenphysik*.

Das negative Vorzeichen der Energie bereitet dabei keine Schwierigkeiten, wenn man bedenkt, dass man Energie aufwenden muss, um Elektron und postiven Kern zu trennen.
BOHR war an dieser Stelle allerdings noch nicht fertig, denn die RYDBERG-Konstante kann zu diesem Zeitpunkt der Entwicklung wiederum nur empirisch bestimmt werden. Es wäre jedoch eine sehr starke Bestätigung der neuen Theorie, wenn man sie aus der neuen Theorie herleiten und den hergeleiteten Wert dann in Übereinstimmung mit dem empirisch gemessenen finden würde.

2. Das BOHR-Korrespondenzprinzip

Es gelang BOHR, die RYDBERG-Konstante R durch bekannte Größen auszudrücken, in dem er das **Korrespondenzprinzip** postulierte und in seine Theorie ein bezog:

> **Die Quantentheorie stimmt für den Grenzfall der klassischen Physik überein, bei dem die klassische Physik vom Experiment bestätigt wird.**

Gemeint ist hierbei eine Übereinstimmung in den Wahrscheinlichkeitsaussagen, denn andere Aussagen kann die Quantenmechanik nicht leisten[8]! BOHR formulierte sowohl einen klassischen als auch einen quantenmechanischen Ausdruck für die Frequenz. Diese Ausdrücke sind im allgemeinen Fall verschieden voneinander. Das Korrespondenzprinzip verlangt jedoch, dass sie übereinstimmen müssen, wenn man sie auf Systeme anwendet, die sehr viel größer als ein normales Atom sind. Wir werden im Folgenden sehen, wie BOHR diese Forderung ausnutzte[9].
Nach dem klassischen Atommodell (RUTHERFORD) trägt der Kern eines Atoms mit der Ordnungszahl Z eine positive Ladung der Größe Z·e . Für $Z = 1$ erhalten wir das Wasserstoffatom, für $Z = 2$ ein einfach ionisiertes Heliumatom und für $Z = 3$ ein doppelt ionisiertes Lithiumatom. Dieses klassische Modell führt für makroskopische Verhältnisse, d.h. wenn der Radius der Elektronenbahn $r \to \infty$ geht, zu korrekten Ergebnissen. Dazu stellen wir uns vor, wir betrachten ein Elektron auf einer Kreisbahn im festen sehr großen Abstand r vom positiven Atomkern. Vernachlässigt man die Strahlungskraft[10], so erhält man aus der Äquivalenz der Coulombkraft zur Zentripetalkraft die Frequenz des umlaufenden Elektrons:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (2\pi \cdot \nu)^2 = \frac{Z \cdot e^2}{4\pi \cdot m_e \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \\ \nu\,(r) &= \sqrt{\frac{Z \cdot e^2}{16\pi^3 \cdot m_e \cdot \varepsilon_0} \frac{1}{r^3}} \qquad (5) \end{aligned}$$

und für seine potenzielle Energie:

$$E\,(r) = -\frac{Z \cdot e^2}{8\pi \cdot \varepsilon_o \cdot r} \qquad (6)$$

[8] Damit wird nicht postuliert, dass die Quantenmechanik in die klassische Mechanik notwendigerweise übergeht, oder die Quantenmechanik gar die übergeordnete Theorie ist.

[9] Der quantenmechanische Ausdruck für die Frequenz ist eine Wahrscheinlichkeitsaussage über die wahrscheinlichste Frequenz! Problematisch am Korrespondenzprinzip bleibt, das BOHR nur selten wirklich deutlich gemacht hat, was er darunter versteht.

[10] Siehe Skript 11 und 12 zur *Einführung in die Quantenphysik*.

die aus der klassischen Elektrodynamik stammen (für eine Herleitung der Energieformel[11]). Betrachten wir die beiden Graphen für im Verhältnis zu den atomaren Größen wirklich sehr große r:

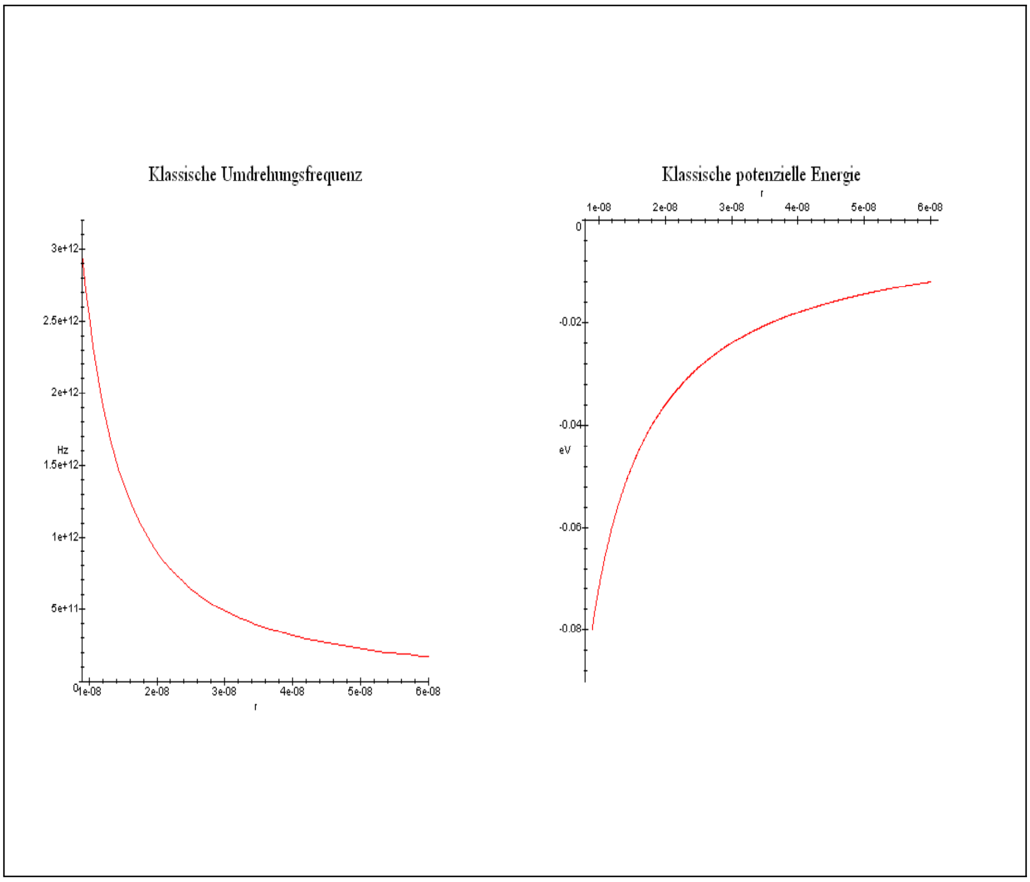

Figure 1: Auf klassischem Wege errechnete Umdrehungsfrequenz und potentielle Energie des Elektrons im H-Atom.

Beide Ausdrücke (5) und (6) enthalten keine Aussage über eine Quantisierung des Systems. Das Elektron strahlt nun allerdings in der klassischen Betrachtung ein kontinuierliches Frequenzband an Strahlung ab, da es Energie verliert und sich so ständig seine Frequenz ändert. Mit abnehmender Frequenz bewegt es sich auf einer spiralförmigen Bahn in Richtung Kern, in den es dann auch stürzen muss. Klassisch betrachtet, wäre das H-Atom überhaupt nicht stabil!
Betrachte dazu die folgenden Darstellungen, die die Veränderungen des Abstands von Elektron zum Kern und seine Umlauffrequenz[12] in Abhängigkeit von der Zeit

[11] Leisi, H.J.: Klassische Physik II,
Verlag der Fachvereine an den schweizerischen Hochschulen und Techniken, Zürich, 1989.

[12] Die Umlauffrequenz entspricht dann der Frequenz der abgestrahlten elektromagnetischen Welle.

beschreiben:

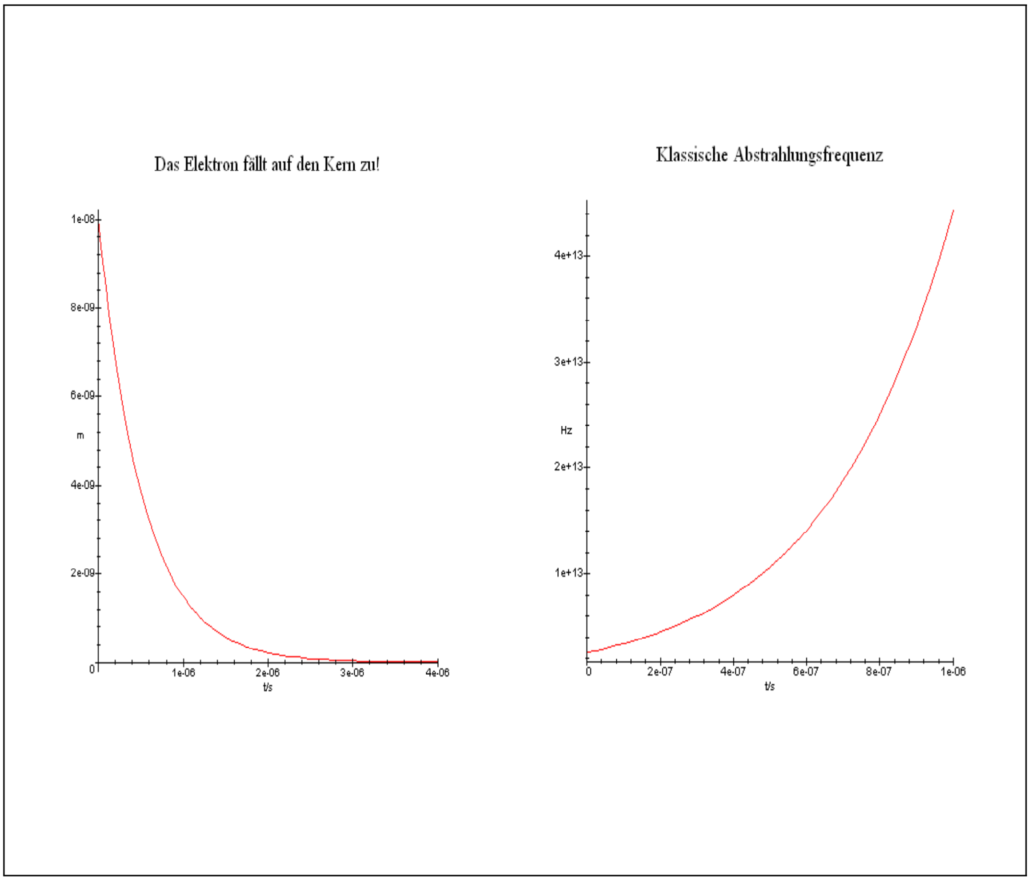

Figure 2: Klassisch betrachtet, nähert sich das Elektron mit zunehmender Abstrahlungsfrequenz dem Kern.

Man kann nun die Gleichung (5) nach r auflösen und dann in Beziehung (6) einsetzen, wobei man dann den Zusammenhang zwischen Energie und klassischer Umdrehungsfrequenz erhält:

$$\nu_{kl} = \sqrt{-\frac{32 \cdot Z \cdot \varepsilon_0^2 \cdot E^3}{m_e \cdot e^4}} \tag{7}$$

Das Ergebnis ist nicht überraschend: Die Abstrahlung elektromagnetischer Energie in Form von Wellen der Frequenz ν_{kl} führt zu einem Energieverlust. Die Umdrehungsfrequenz steigt mit abnehmender Energie des Elektrons kontinuierlich an.

Die folgende Darstellung vermittelt einen Eindruck:

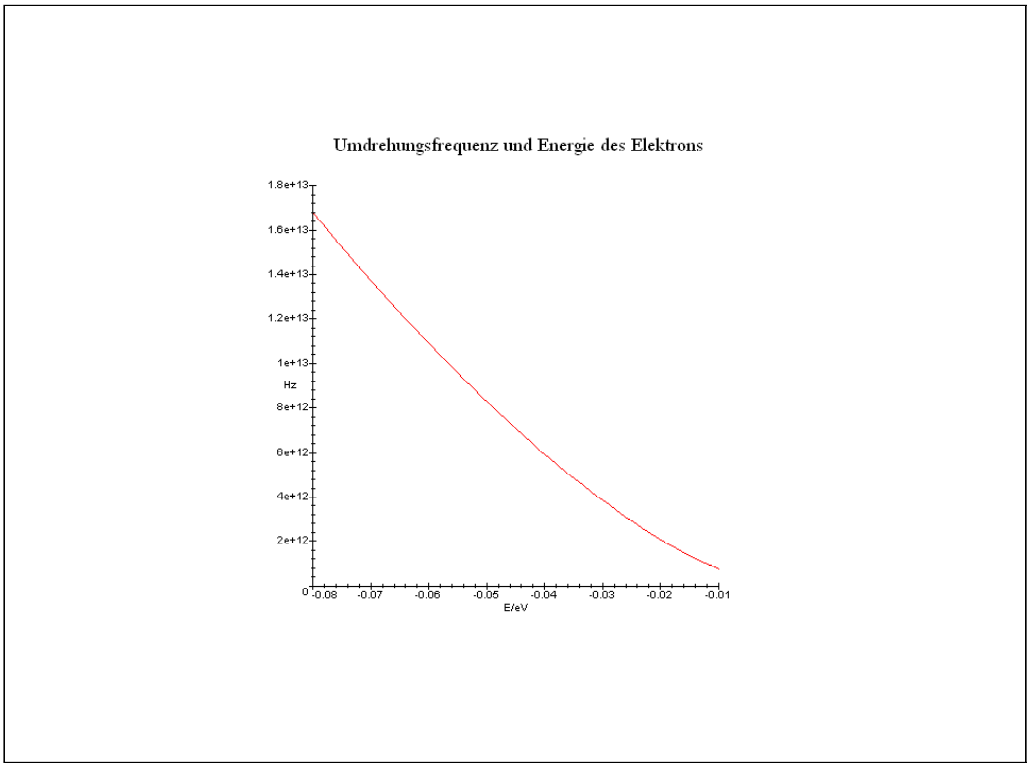

Figure 3: Mit abnehmender Energie nimmt die Umdrehungsfrequenz des Elektrons stetig zu.

Setzen wir hier nun das Ergebnis von Beziehung (4) ein, so erhalten wir die klassische Frequenzbeziehung:

$$\nu_{kl}\left(n\right) = \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt{\frac{32 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c^3 \cdot R^3}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}} \tag{8}$$

Durch diese Beziehung werden eben für nur spezielle Energiewerte[13]die dazugehörige Umlauffrequenz - die eben auch der Abstrahlungsfrequenz entspricht - bestimmt. Es handelt sich um eine rein klassische Betrachtungsweise, wobei die Abstrahlung den Übergang zwischen zwei unterschiedlichen n bedeutet.

Im BOHR-Modell dagegen, wo ja keine kontinuierliche Energieabstrahlung angenommen wird, gehört zur obigen klassischen Frequenz eine korrespondierende Frequenz ν_{qu}, die den Übergang des Zustands (klassifiziert durch n) zum nächst niedrigeren Zustand (klassifiziert durch n-1) beschreibt. Wir setzen also in Beziehung (2) $m = n-1$

[13] Diese Energiewerte brauchen überhaupt noch keinen quantenmechanischen Hintergrund zu besitzen!

und erhalten für die quantemechanische Frequenz dieses Übergangs:

$$\nu_{qu} = \frac{c}{\lambda} = c \cdot R \cdot \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = c \cdot R \cdot \frac{(2n-1)}{(n-1)^2 \, n^2} \tag{9}$$

Das BOHR-Korrespondenzprinzip verlangt nun, dass im Grenzfall großer Quantenzahlen n beide Frequenzausdrücke übereinstimmen sollen[14]. Für große Quantenzahlen erhält man:

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{qu}(n) = \frac{2 \cdot c \cdot R}{n^3} \tag{10}$$

Vergleichen wir die Werte, die man mit $\nu_{qu}(n)$ und $\nu_{kl}(n)$ erhält, so erkennt man in der folgenden Darstellung, dass sie sich mit wachsendem n immer mehr einander annähern:

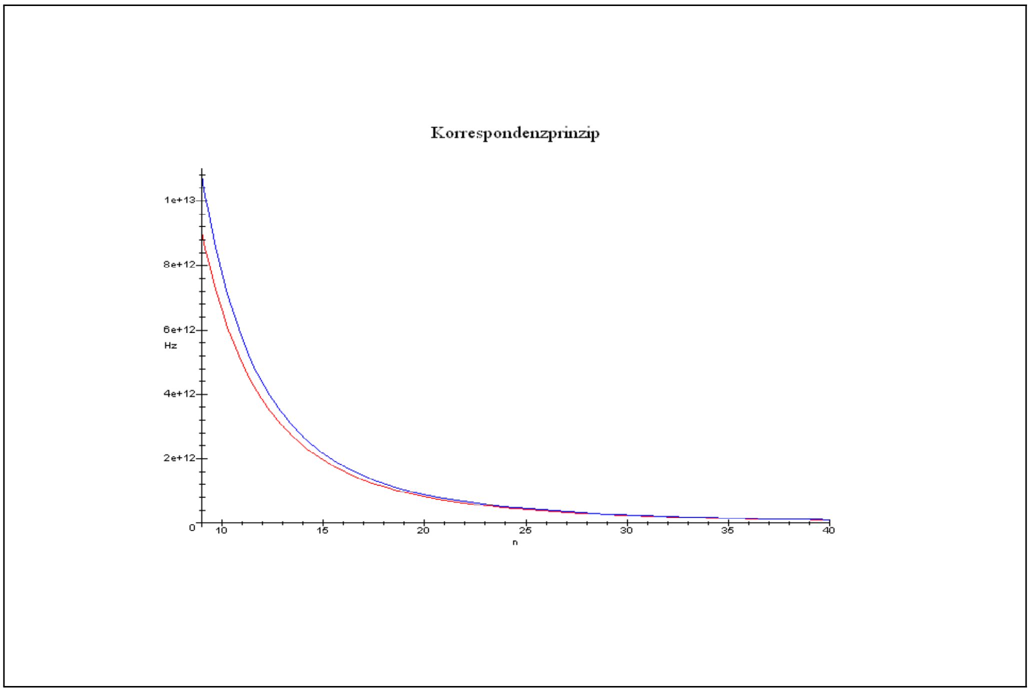

Figure 4: Zum Korrespondenzprinzips BOHRs

Wir können die Entwicklung auch durch konkret berechnete Werte für beide Formeln

[14]Bei der Behandlung des H-Atoms durch die SCHRÖDINGER-Gleichung wird klar werden, dass der Drehimpuls ebenfalls quantisiert ist. Damit ist die Frequenz des Elektrons ebenfalls quantisiert. Der allgemeine Zustand des H-Atoms ist nun eine Überlagerung aller Drehimpulszustände. Das Korrespondenzprinzip postuliert eine Approximation der Wahrscheinlichkeitsaussagen für große Quantenzahlen, die Wellenfunktion "produziert" also für große n Frequenzen, die immer besser mit den klassischen übereinstimmen.

vergleichen:

Quantenzahl / n	$\nu_{kl}(n)$ / Hz	$\nu_{qu}(n)$ / Hz	Differenz in %
2	$8.22{\cdot}10^{14}$	$24.7{\cdot}10^{14}$	67
5	$5.26{\cdot}10^{13}$	$7.40{\cdot}10^{13}$	29
10	$6.58{\cdot}10^{12}$	$7.72{\cdot}10^{12}$	15
50	$5.26{\cdot}10^{10}$	$5.43{\cdot}10^{10}$	3.1
100	$6.58{\cdot}10^{9}$	$6.68{\cdot}10^{9}$	1.5
1000	$6.5797{\cdot}10^{6}$	$6.5896{\cdot}10^{6}$	0.15
10000	$6.5797{\cdot}10^{3}$	$6.5807{\cdot}10^{3}$	0.015
25000	$4.2110{\cdot}10^{2}$	$4.2113{\cdot}10^{2}$	0.007
100000	6.5798	6.5799	0.0007

Aus der Übereinstimmung für sehr große Werte kann man durch Gleichsetzen von Gleichung (8) und Gleichung (10) die RYDBERG-Konstante nun auch theoretisch errechnen:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot c \cdot R}{n^3} &= \frac{1}{n^3} \cdot \sqrt{\frac{32 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c^3 \cdot R^3}{Z^2 \cdot m_e \cdot e^4}} \\ R &= \frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^3 \cdot c} \qquad (11) \end{aligned}$$

Damit haben wir einen theoretischen Ausdruck für die bisher nur experimentell gemessene RYDBERG-Konstante hergeleitet. In diesem theoretischen Ausdruck kommen mehrere Fundamentalgrößen vor und mit den damals bekannten Werten für diese Größen erzielte BOHR eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen experimenteller RYDBERG-Konstante und theoretischem Wert:

$$R_{\text{exp}} = 1.09678 \cdot 10^{-7} \frac{1}{m} \qquad (12)$$

$$R_{th} = 1.0974 \cdot 10^{-7} \frac{1}{m} \qquad (13)$$

$$\frac{\Delta R}{R_{th}} = 0.06\ \% \qquad (14)$$

Setzt man nun die theoretische RYDBERG-Beziehung in Gleichung (4) ein, so erhält man:

$$E_n = -\frac{m_e \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^2} \frac{1}{n^2} \qquad (15)$$

und damit eine rein quantentheoretische Beziehung für die Energien der stationären (das heißt zeitlich unveränderlichen) Zustände des Wasserstoffatoms ($Z = 1$). Die Herleitung dieses Zusammenhangs ist der eigentliche Erfolg des BOHR-Atommodells. Die diesem Zusammenhang zugrundeliegenden Aussagen, das Postulat über die stationären Zustände, das Frequenzpostulat und das Korrespondenzprinzip[15], haben auch in der modernen Quantenmechanik ihre Gültigkeit.

[15] Es bleibt ein Problem, dass das Verständnis des Korrepsondenzprinzips sich natürlich auch mit der weiteren Entwicklung der Quantenmechanik gewandelt hat! Auf keinen Fall wird damit ohne weiteres ausgesagt, dass die Quantenmechanik in die klassische Mechanik übergeht! Denn dann könnte man fragen, wo die Grenze denn genau sei.

3. Klassisch errechnete Ergebnisse des BOHR-Modells

Wir betrachten nun die Situation eines Elektrons, dass um einen Kern (Kernladungszahl Z) sich auf einer Bahn[16] $\mathbf{r}(t)$ sich bewegt. Um die Strahlungskraft vernachlässigen zu können, stellen wir uns die Situation großer Quantenzahlen n vor. Mit anderen Worten also, dass Elektron befinde sich relativ weit vom Atomkern entfernt. Das diese Vereinfachung gerechtfertigt ist, zeigt die folgende Darstellung, die einen Vergleich zwischen dem Betrag der Strahlungskraft im Abstand $r(0) = 10^{-8}$ und dem Betrag der Coulombkraft zeigt:

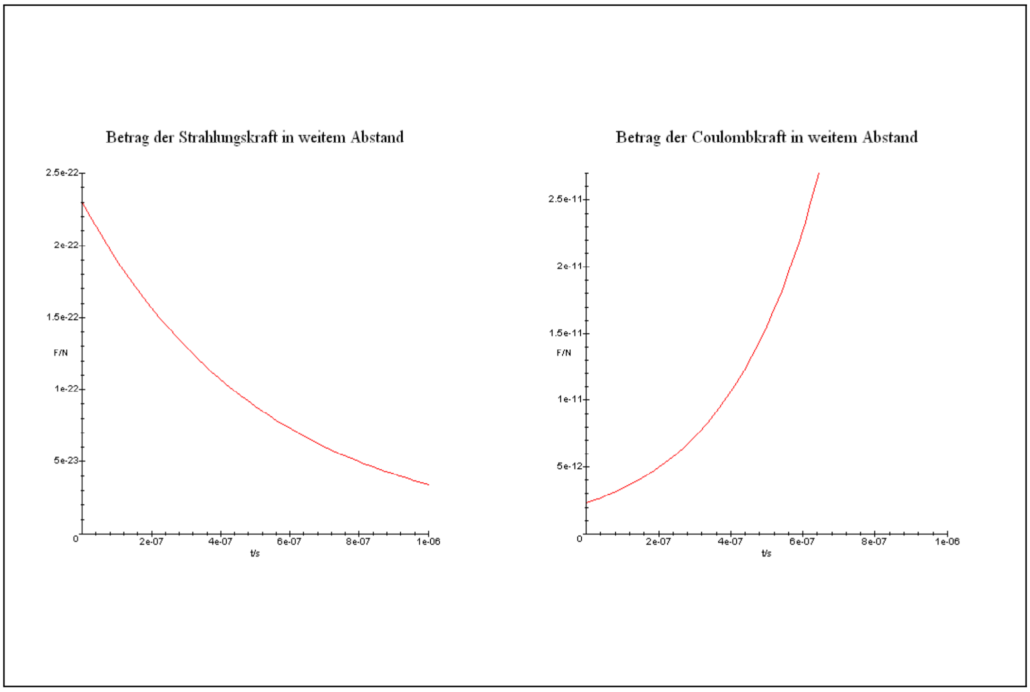

Figure 5: Vergleich zwischen Strahlungskraft und Coulombkraft.

Man kann einen Unterschied von zehn Zehnerpotenzen erkennen[17]! Es ist also gerechtfertigt, für einen weiten Abstand vom Kern nur die Columbkraft für eine kurze Zeitspanne zu berücksichtigen.

Wir wollen weiter annehmen, dass die Masse des Kerns viel größer sei, als die Masse des Elektrons[18]. Aus der Gleichheit von Coulomb- und Zentripetalkraft erhält man:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z\cdot e^2}{r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{Z\cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r}} \tag{16}$$

[16] Beachte, dass diese Vorstellung eine reine klassische ist, quantenmechanisch ist sie falsch!

[17] Die Graphiken werden alle im Programm QMV16Pr2.mws entwickelt und können dort auch vergrößert betrachtet werden.

[18] Damit haben wir die Situation des klassischen Zweikörperproblems, indem die schwere Masse den Schwerpunkt des Gesamtsystems bildet, siehe QMV16Pr1.mws.

Damit erhalten wir die Bahngeschwindigkeit des Elektrons im Abstand r vom Atomkern. Aus dieser Beziehung erhalten wir dann einen Ausdruck für die Umlauffrequenz des Elektrons:

$$\nu\left(r\right) = \frac{v\left(r\right)}{2\pi \cdot r} = \sqrt{\frac{Z \cdot e^2}{16 \cdot \pi^3 \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot r^3}} \tag{17}$$

Die folgende Abbildung zeigen die graphische Darstellung:

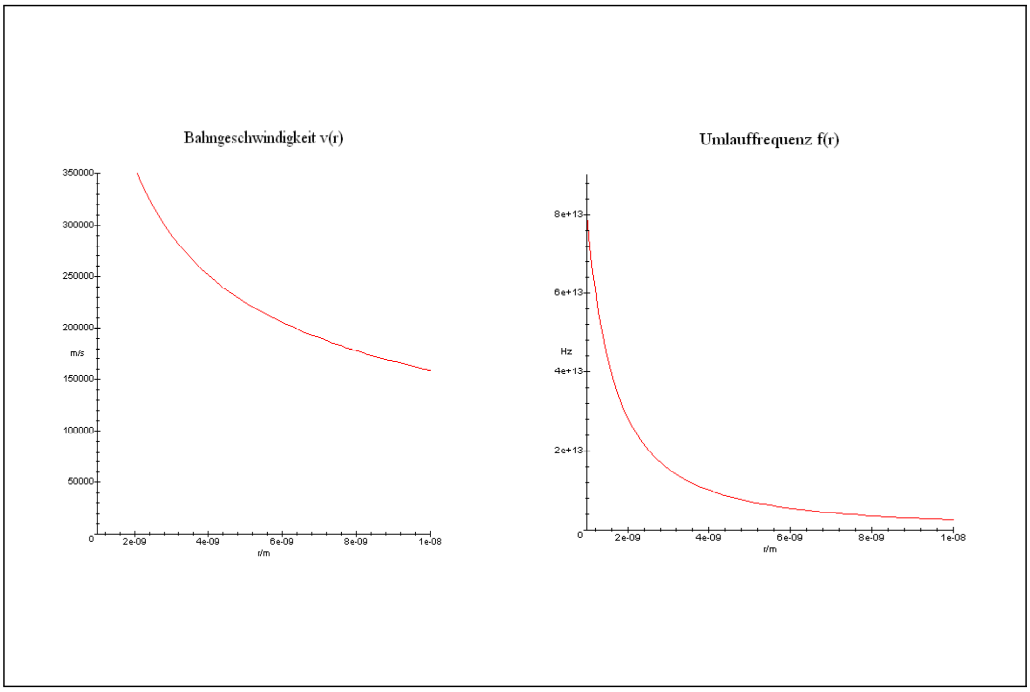

Figure 6: Vergleich zwischen Bahngeschwindigkeit und Umlauffrequenz des Elektrons.

Für die kinetische Energie des Elektrons erhält man dann aus (16):

$$E_{kin}\left(r\right) = \frac{1}{2} m v^2\left(r\right) = \frac{Z \cdot e^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \tag{18}$$

Zusammen mit der potenziellen Energie:

$$E_{pot}\left(r\right) = -\frac{Z \cdot e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \tag{19}$$

erhält man für die Gesamtenergie des Elektrons im Abstand r vom Atomkern:

$$E\left(r\right) = E_{kin}\left(r\right) + E_{pot}\left(r\right) = -\frac{Z \cdot e^2}{8\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \tag{20}$$

Eine Darstellung aller drei Energien zeigt die nächste Abbildung:

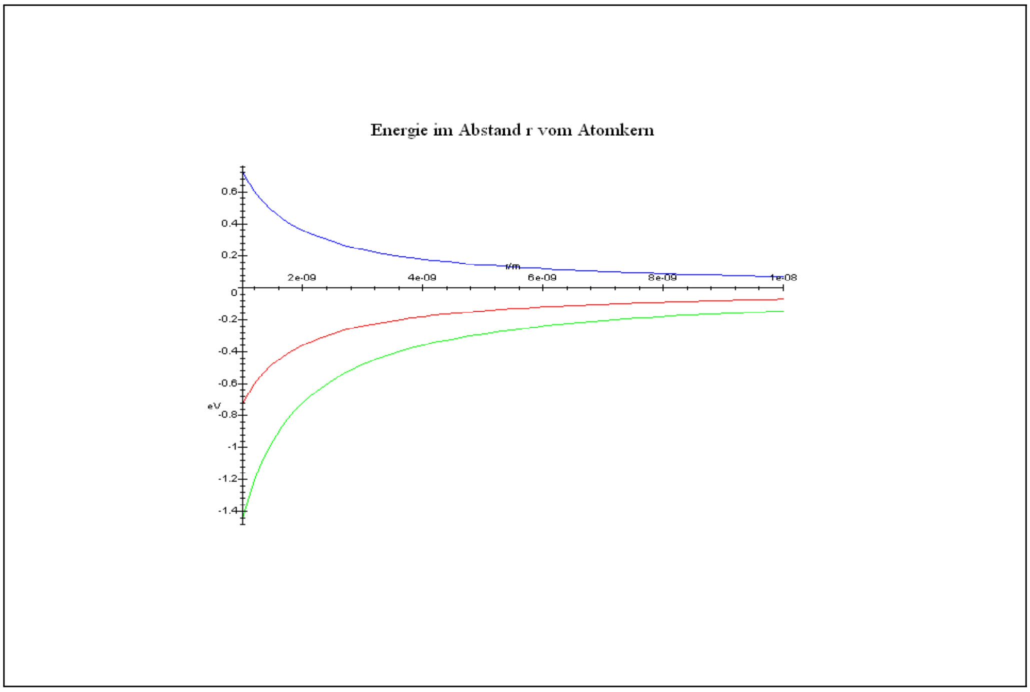

Figure 7: E_{ges}: rot, E_{kin}:blau, E_{pot}:grün

Man kann zum Schluss dann natürlich auch noch sofort den Drehimpuls des Elektrons bzgl. des Atomkerns im Abstand r leicht bestimmen. Man erhält für den Betrag:

$$L(r) = m_e \cdot v(r) \cdot r = \sqrt{\frac{Z \cdot e^2 \cdot m_e \cdot r}{4\pi \cdot \varepsilon_0}} \tag{21}$$

Mit dem Bahnradius sind also die Geschwindigkeit, die Umlauffrequenz, die kinetische Energie, die potenzielle Energie, die Gesamtenergie und der Drehimpuls festgelegt. Ist nun eine dieser Größe quantisiert, so sind es sofort auch die anderen[19]. Natürlich geht aus dieser klassischen Betrachtung nicht hervor, wie nun die Quantisierung aussehen soll.

[19]Manche Darstellungen über das BOHR-Atommodell beginnen deshalb auch mit einer Quantisierungsvorschrift für den Drehimpuls, so z.B. in Lindström, Langkau: Quantenphysik, vieweg - Verlag 1996. Man erhält dann die folgende Quantisierung des Drehimpulses:

$$L = n\left(\frac{h}{2\pi}\right) = n\hbar, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dieses Ergebnis stimmt für den niedrigsten Zustand, den Grundzustand nicht mit den experimentellen Ergebnissen überein, denn in diesem Fall ist der Drehimpuls des Elektrons Null, siehe Vorlesung 18 Gleichung (18).

Elimiminiert man in Gleichung in der klassischen Gleichung:

$$E\left(r\right)=-\frac{Z\cdot e^{2}}{8\pi\cdot\varepsilon_{0}\cdot r}$$

sowie in der quantenmechanischen Gleichung (5) die Energie E, so erhält man einen Ausdruck für die **Radien der quantisierten Bahnen**:

$$r_{n}=n^{2}\left(\frac{\varepsilon_{0}\cdot h^{2}}{Z\cdot e^{2}\cdot\pi\cdot m_{e}}\right)=:n^{2}\cdot a_{0}\text{ , n = 1,2,3,...} \tag{22}$$

Die Größe a_0 heisst **BOHR-Radius**. Sie hat den Wert für Z=1:

$$a_{0}=5.292\cdot10^{-11}m=52.92\text{ pm} \tag{23}$$

Formal kann man sich für das H-Atom in einem halbklassischen Planetenmodell[20] vorstellen, dass a_0 der Radius des Elektrons im Grundzustand des H-Atoms ist. Das BOHR-Atommodell, das heute nicht mehr gebräuchlich ist[21], vermittelt mit diesem Ergebnis zumindest einen Eindruck von der Größenordnung eines Atoms, die auch heute noch experimentell gefunden werden. Erstaunlich bleibt an diesem Ergebnis allerdings, dass BOHR in seine Theorie überhaupt keine Voraussetzungen über die Größenordnung von Atomen eingeführt hatte.

Unverständlich bleibt in der BOHR-Theorie, warum die Elektronen auf diesen speziellen Bahnen keine elekromagnetische Energie abstrahlen. Ein Verständnis dafür gelang erst mit der Wellenvorstellung, die DE BROGLIE 1924, also elf Jahre nach der Entwicklung des BOHR-Atommodells, einführte[22]. In dieser Wellenvorstellung[23] kann man nun so argumentieren, dass die das Elektron beschreibende Materiewelle nach jedem Umlauf um den Kern in Phase aneinanderpassen muss, damit sie sich nicht durch destruktive Interferenz auslöscht[24]. Es muss damit der Umfang einer Kreisbahn im H-Atom gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge sein[25]. Diese Forderung bedeutet:

$$n\cdot\lambda=2\pi\cdot r\text{ , n =1,2,3,...} \tag{24}$$

Über die DE BROGLIE-Beziehung $\lambda=\frac{h}{p}$ erhält man dann die BOHR-Quantisierung des Drehimpulses:

$$L=p\cdot r=n\cdot\frac{h}{2\pi}=n\cdot\hbar\text{ , n = 1,2,3,...} \tag{25}$$

Zu beachten bleibt in diesem Ergebnis, dass diese Formel nicht den korrekten Wert des Drehimpulses im Grundzustand angibt! Im Grundzustand des H-Atoms besitzt das Elektron keinen Drehimpuls! Würde man dieses Ergebnis klassisch interpretieren, so müsste man eine Pendelbahn des Elektrons durch den Atomkern

[20] Bei dem das Elektron sich auf Kreisbahnen strahlungsfrei bewegt!

[21] Es verwendet eben falsche Annahmen, eben die der Bahn eines Elektrons, die so heute nicht mehr haltbar ist!

[22] Siehe Skript 17 zur *Einführung in die Quantenphysik*.

[23] Wobei damals überhaupt nicht klar war, was da wellt.

[24] Diese aneinander passenden Wellen spiegeln dann keine beschleunigte Bewegung eines geladenen Teilchens wider. Aus diesem Grund strahlt ein Elektron, in dieser Vorstellung keine Energie in Form elektromagnetischer Wellen ab.

[25] Dies ist eine rein klassische Interpretation dieser gar nicht klassischen Wellenvorstellung!

annehmen! Eine Vorstellung, die natürlich falsch sein muss, da sie die Instabilität des H-Atoms bedeuten würde. Man kann an dieser Stelle den entscheidenden Mangel dieses Modells klar erkennen, es ist wegen der falschen Drehimpulsquantisierung eigentlich nicht in der Lage die Stabilität des H-Atoms im Grundzustand zu erklären[26]! Dennoch war die Wellendarstellung des Elektrons die entscheidende Erklärung der fehlenden Strahlung. Diese Wellendarstellung bisher als Teilchen identifizierter physikalischer Gebilde wurde überhaupt nicht verstanden, da jedoch eindeutige experimentelle Belege für diese Vorstellung[27] existierten, wurde sie schließlich übernommen. Erwin SCHRÖDINGER gelangte über die Wellendarstellung des Elektrons im H-Atom schließlich zu seiner weltberühmten Gleichung, die dann durch die Wahrscheinlichkeitsinterpretation Max BORNs verständlich wurde.

Bemerkung:
Es ist außerordentlich lehrreich, wenn man die gedanklichen Entwicklungen der Atomphysik aus dem Munde ihrer Väter nachvollziehen kann. Auf diese Weise wird der Prozess der Entwicklung einer neuen Theorie besonders deutlich. Man kann die Zweifel der Forscher empfinden, ihr vorsichtiges Herantasten an die Fragestellung.
1920 begann der spätere Nobelpreisträger Werner HEISENBERG sein Physikstudium bei Arnold SOMMERFELD in München und er hatte das Glück von Anfang an in Fragen der Entwicklung der Atomphysik hineingezogen zu werden. Er lernte dort den späteren Nobelpreisträger Wolfgang PAULI kennen und in intensivem Gedankenaustausch wurden im dortigen Seminar die Fragen der sich entwickelnden Quantentheorie diskutiert und weiterentwickelt. HEISENBERG schildert in seinem sehr lesenswerten Buch: "Der Teil und das Ganze"[28] das folgende Gespräch mit PAULI, etwa aus dem Jahre 1921. In einer Diskussion mit PAULI stellte dieser HEISENBERG die Frage[29]:" Glaubst Du eigentlich, dass es so etwas wie Bahnen der Elektronen in einem Atom gibt?" HEISENBERG schreibt: "Meine Antwort mag etwas gewunden ausgefallen sein: 'Zunächst kann man ja doch in einer Nebelkammer die Bahn des Elektrons direkt sehen. Der beleuchtete Kondensstreifen der Nebeltröpfchen zeigt an, wo das Elektron gelaufen ist. Wenn es aber eine Bahn des Elektrons in der Nebelkammer gibt, so muss es doch wohl auch eine im Atom geben. Aber ich gebe zu, dass mir hier auch schon Zweifel gekommen sind. Denn wir berechnen zwar eine Bahn nach der klassischen Newtonschen Mechanik, dann aber geben wir durch die Quantenbedingungen eine Stabilität, die sie nach eben dieser Newtonschen Mechanik nie besitzen dürfte; und wenn das Elektron bei der Strahlung von einer Bahn in die andere springt - das wird ja behauptet -, so sagen wir lieber gar nichts mehr darüber, ob es hier Weitsprung oder Hochsprung oder sonst irgend etwas Schönes macht. Also irgendwie muss doch die ganze Vorstellung von der Bahn des Elektrons im Atom Unsinn sein. Aber was dann?' Wolfgang nickt. 'Das Ganze ist wirklich ungeheuer mystisch.

[26] Eine neue Erkenntnis der Behandlung des H-Atoms durch die SCHRÖDINGER-Gleichung ist, dass die Quantenzahlen für Energie und Drehimpuls des Elektrons unterschiedlich sind. Ein Ergebnis der nächsten Vorlesung wird sein, dass für eine gegebene Energiequantenzahl n, die Drehimpulsquantenzahl von 0 bis l-1 laufen kann.

[27] Siehe Vorlesung 17 zur *Einführung in die Quantenphysik*, insbesondere die Ergebnisse von DAVISSON und GERMER.

[28] Piper-Taschenbuch, 3. Auflage 2001.

[29] Siehe S.49 ff.

Wenn es eine Bahn des Elektrons im Atom gibt, so läuft dieses Elektron offensichtlich mit einer bestimmten Frequenz periodisch um. Dann folgt nach den Gesetzen der Elektrodynamik, dass von der periodisch bewegten Ladung elektrische Schwingungen ausgehen, das heißt, dass einfach Licht in dieser Frequenz ausgestrahlt wird. Davon soll aber wieder keine Rede sein; sondern die Schwingungsfrequenz des ausgestrahlten Lichts liegt irgendwo in der Mitte zwischen der Bahnfrequenz vor dem mysteriösen Sprung und der nach dem Sprung. Das alles ist im Grund doch heller Wahnsinn.'
'Ist es auch Wahnsinn, hat es doch Methode' zitierte ich. 'Ja vielleicht. Niels Bohr behauptet jetzt für das ganze Periodische System der chemischen Elemente in jedem einzelnen Atom die Elektronenbahnen zu kennen, und wir beide glauben hier, wenn wir ehrlich sind, überhaupt nicht an Elektronenbahnen. Sommerfeld glaubt vielleicht noch dran. Aber eine Elektronenbahn in einer Nebelkammer, die können wir trotzdem alle sehr gut sehen. Wahrscheinlich hat Niels Bohr in irgendeinem Sinne recht; aber wir wissen eben noch nicht in welchem Sinn.' "
Diese Zitat belegt in welche gedanklichen Verzweiflungen die Frage nach der Struktur eines Atoms die Physiker damals stürzte und welche intellektuelle Herausforderung die Lösung dieses Rätsels darstellte. Etwas später lernte HEISENBERG dann den Nobelpreisträger Niels BOHR in Göttingen während seiner dortigen Vortragsreihe persönlich kennen. Auf einem Spaziergang der beiden, den HEISENBERG als den eigentlichen Startpunkt seiner wissenschaftlichen Entwicklung (er war 21!) bezeichnet, kam es zu einem langen und tiefen Gespräch zwischen den beiden, in dem BOHR versuchte seinen Weg zur eigenen Theorie des Atoms zu erklären. Auch diese Begebenheit ist äußerst instruktiv und wird von HEISENBERG im oben erwähnten Buch beschrieben[30]: "Bohr begann das Gespräch, indem er auf die Diskussion am Vormittag zurückkam: '...[] Ich muss gleich sagen, Ihre Zweifel sind mir durchaus verständlich; und ich glaube ich sollte Ihnen etwas ausführlicher erklären, wie ich zu diesen ganzen Problemen stehe. Ich bin im Grund nämlich viel mehr einig mit Ihnen, als Sie denken, und ich weiss sehr wohl, wie vorsichtig man bei allen Behauptungen über die Struktur der Atome sein muss. Vielleicht darf ich zuerst etwas über die Geschichte dieser Theorie erzählen. Der Ausgangspunkt war ja nicht der Gedanke, dass das Atom ein Planetensystem im Kleinen sei und dass man hier die Gesetze der Astronomie anwenden könnte. So wörtlich habe ich das nie genommen. Sondern für mich war der Ausgangspunkt die Stabilität der Materie, die ja vom Standpunkt der bisherigen Physik aus ein reines Wunder ist. Ich meine mit dem Wort Stabilität, dass immer wieder die gleichen Stoffe mit den gleichen Eigenschaften auftreten, dass die gleichen Kristalle gebildet werden, die gleichen chemischen Verbindungen entstehen usw. Das muss doch bedeuten, dass auch nach vielen Veränderungen, die durch äußere Einwirkungen zustande kommen mögen, ein Eisenatom schließlich wieder ein Eisenatom mit genau den gleichen Eigenschaften ist. Das ist nach der klassischen Mechanik unbegreiflich, besonders dann wenn ein Atom Ähnlichkeit mit einem Planetensystem hat[31]. ...[]..Die Existenz einheitlicher Stoffe, das Vorhandensein fester Körper, alles das beruht auf der Stabilität der Atome; ebenso die Tatsache, dass wir

[30] Siehe S. 51ff.

[31] Schlägt z.B. ein riesiger Meteor in den Mond ein und verschiebt seine Bahn nur um einen winzigen Betrag bricht unser ganzes Sonnensystem auseinander! Es kann dann nicht wieder durch eine äußere Einwirkung zusammengebracht werden.

zum Beispiel von einer Leuchtröhre, die mit einem bestimmten Gas gefüllt ist, auch immer wieder Licht der gleichen Farbe, ein leuchtendes Spektrum mit genau den gleichen Spektrallinien bekommen. Das alles ist keineswegs selbstverständlich, wenn man den Grundsatz der Newtonschen Physik, die strenge kausale Determiniertheit des Geschehens, annimmt, wenn der jetzige Zustand jeweils durch den unmittelbar vorhergehenden und nur durch ihn eindeutig bestimmt sein soll. Dieser Widerspruch hat mich sehr früh beunruhigt. ..[]...Durch die ganze Entwicklung[32], die ich unmittelbar miterlebt habe, ist eine Frage gestellt worden, der man in unserer Zeit nicht mehr ausweichen konnte; nämlich die Frage, wie alles zusammenhängt. Die Theorie, die ich versucht habe, sollte also auch nichts anderes tun, als diesen Zusammenhang herstellen. Nun ist das aber eigentlich eine ganz hoffnungslose Aufgabe; eine Aufgabe ganz anderer Art, als wir sie sonst in der Wissenschaft vorfinden. Denn in der bisherigen Physik oder in jeder anderen Naturwissenschaft konnte man, wenn man ein neues Phänomen erklären wollte, unter Benützung der vorhandenen Begriffe und Methoden versuchen, das neue Phänomen auf die schon bekannten Erscheinungen oder Gesetze zurückzuführen. In der Atomphysik aber wissen wir ja schon, dass die bisherigen Begriffe dazu sicher nicht ausreichen. Wegen der Stabilität der Materie kann die Newtonsche Physik im Innern des Atoms nicht richtig sein, sie kann bestenfalls gelegentlich einen Anhaltspunkt geben. Und daher wird es auch keine anschauliche Beschreibung der Struktur eines Atoms geben können, da eine solche - eben weil sie anschaulich sein sollte - sich der Begriffe der klassischen Physik bedienen müsste, die aber das Geschehen nicht mehr ergreifen. Sie verstehen, dass man mit einer solchen Theorie eigentlich etwas ganz Unmögliches versucht. Denn wir sollen etwas über die Struktur des Atoms aussagen, aber wir besitzen keine Sprache, mit der wir uns verständlich machen könnten. ...[]...Diese Bilder[33] sind ja aus Erfahrungen erschlossen, oder, wenn Sie wollen erraten, nicht aus irgendwelchen theoretischen Berechnungen gewonnen. Ich hoffe, dass diese Bilder die Struktur der Atome so gut beschreiben, aber eben auch *nur* so gut beschreiben, wie dies in der Sprache der klassischen Physik möglich ist.' ...[].. Ich fragte Bohr daher: 'Wenn die innere Struktur der Atome einer anschaulichen Beschreibung so wenig zugänglich ist, wie Sie sagen, wenn wir eigentlich keine Sprache besitzen, mit der wir über diese Struktur reden könnten, werden wir dann die Atome jemals verstehen?' Bohr zögerte einen Moment und sagte dann: 'Doch. Aber wir werden dabei gleichzeitig erst lernen, was das Wort 'verstehen' bedeutet.' "

[32] Gemeint sind die Ergebnisse der Versuche RUTHERFORDs.
[33] Gemeint ist sein Modell des Atoms.