

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 4

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Behandelt wird das Ampère'sche Gesetz, danach werden alle bisher behandelten Gesetze zusammengefasst. Am Ende der Vorlesung wird dann die Maxwell'sche Ergänzung motiviert und eingeführt.

1. DAS AMPÈRE-GESETZ FÜR STATISCHE EL. STRÖME

Nach dem experimentell klar war, dass ein elektrischer Strom ein Feld der magnetischen Induktion - also ein \mathbf{B} -Feld - erzeugt, wurde die Frage aufgeworfen, welche Gestalt denn das Magnetfeld \mathbf{B} eines gegebenen elektrischen Stroms hat.

Der statische Fall¹ ist die Situation konstanter Ströme, wobei wir uns vorstellen müssen, dass im Draht eine große Anzahl bewegter Ladungen vorkommen. In diesem Fall kann man sich eine konstante Stromdichte²:

$$j = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Ladungsmenge}}{\text{Fläche} \times \text{Zeiteinheit}} \quad (1)$$

vorstellen.

AMPÈREs experimentell belegtes Ergebnis für diesen statischen Fall besagt, dass der Stromfluss durch eine Fläche A gleich dem Linienintegral des \mathbf{B} -Feldes über den geschlossenen Rand von A ist:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \mu_0 \iint_A \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A}' \quad (2)$$

Beispiel: *Homogen durchflossener Draht*

Maple - Datei: QPVorl4Pr1.mws

Als Anwendung des AMPÈRE-Gesetzes betrachten wir einen zylindrischen Draht mit Radius R , der homogen vom konstanten elektrischen Strom I durchflossen wird. Die Symmetrieachse des geraden unendlich langen³ Drahtes sei die z -Achse. Dann ist die el. Stromdichte:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_z \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{\pi R^2}, r'_\perp \leq R \\ 0, r'_\perp > R \end{array} \right\} \quad (3)$$

Die Symmetrie des Problems legt die Verwendung von Zylinderkoordinaten⁴ r_\perp, φ, z nahe. Die physikalische Situation verändert sich nicht, wenn man den Draht um die z -Achse - also um den Winkel φ - dreht. Ebenso ist das Problem invariant gegenüber Verschiebungen auf der z -Achse.

¹Nur für diesen Fall gelten die nachfolgenden Überlegungen!

²Siehe auch das Skript zur Vorlesung 2: Einführung in die Quantenphysik.

³Experimentell kann dieser Fall durch einen sehr langen geraden Draht approximiert werden.

⁴Siehe Skript zur Vorlesung 1: Einführung in die Quantenphysik. Dass die Zylinderkoordinaten hier mit einem Strich versehen sind, hat den Sinn Integrationsvariablen von Ortsvektoren an denen das \mathbf{B} -Feld berechnet wird, zu unterscheiden.

Betrachte die folgende Abbildung:

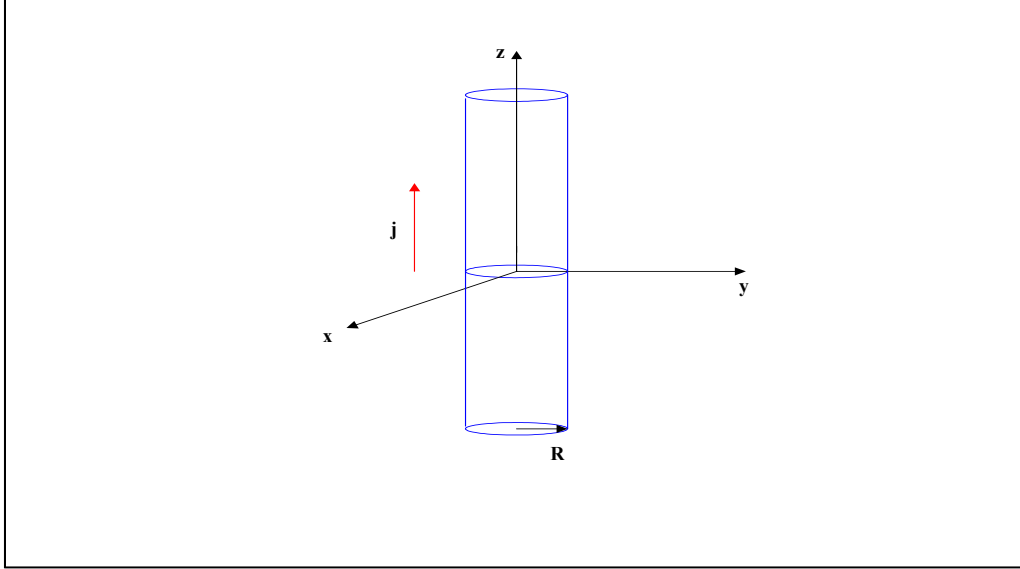


Figure 1: Ausschnitt aus dem als unendlich lang angenommenen Draht.

Diese Symmetriüberlegungen führen dazu, dass das B-Feld nicht von φ und z abhängig sein kann:

$$B(r_{\perp}, \varphi, z) \rightarrow B(r_{\perp}) \quad (4)$$

Der konstante Strom fließe in z -Richtung, A sei eine Kreisfläche mit Radius r_{\perp} , sie liege in der x - y -Ebene, also senkrecht zur Stromrichtung.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}' &= dr' \cdot \mathbf{e}_{\varphi'} \\ d\mathbf{A}' &= r'_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z \cdot dr'_{\perp} \cdot d\varphi' \end{aligned} \quad (5)$$

Das zu berechnende B-Feld hat in Zylinderkoordinaten die Komponenten - beachte Gleichung (4):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(r'_{\perp}, \varphi', z') = B_1(r'_{\perp}) \cdot \mathbf{e}_{r'_{\perp}} + B_2(r'_{\perp}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi'} + B_3(r'_{\perp}) \cdot \mathbf{e}_{z'} \quad (6)$$

Da wir $\mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ berechnen wollen, fallen zwei Komponenten weg (B_1 und B_3 stehen senkrecht auf $d\mathbf{r}'$). Man erhält somit:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = B_2(r'_{\perp}) \cdot dr' \quad (7)$$

Aus diesem Grund ist der folgende Ansatz sinnvoll:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = B(r'_{\perp}) \cdot \mathbf{e}_{\varphi'} \quad (8)$$

1. Anwendung des AMPÈRE-Gesetzes für $r_{\perp} \leq R$ ergibt:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} B(r_{\perp}) \mathbf{e}_{\varphi'} \cdot r_{\perp} \cdot \mathbf{e}_{\varphi'} \cdot d\varphi' = 2\pi \cdot r_{\perp} \cdot B(r_{\perp}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= \mu_0 \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A}' = \int_{r'_{\perp}=0}^{r_{\perp}} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z \cdot r'_{\perp} \cdot d\varphi' \cdot dr'_{\perp} \\ &= 2\pi \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \\ 2\pi \cdot r_{\perp} \cdot B(r_{\perp}) &= 2\pi \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{2} r_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Also erhält man:

$$B(r_{\perp}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R^2} \cdot r_{\perp}, \quad r_{\perp} \leq R \quad (11)$$

innerhalb des Drahtes.

2. Anwendung des AMPÈRE-Gesetzes für $r_{\perp} > R$:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int_{\varphi'=0}^{2\pi} B(r_{\perp}) \mathbf{e}_{\varphi'} \cdot r_{\perp} \cdot \mathbf{e}_{\varphi'} \cdot d\varphi' = 2\pi \cdot r_{\perp} \cdot B(r_{\perp}) \\ &= \mu_0 \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A}' = \int_{r'_{\perp}=0}^R \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{e}_z \cdot r'_{\perp} \cdot d\varphi' \cdot dr'_{\perp} \\ &= 2\pi \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{2} R^2 \\ 2\pi \cdot r_{\perp} \cdot B(r_{\perp}) &= \mu_0 \cdot I \end{aligned}$$

Somit erhält man außerhalb des Drahtes:

$$B(r_{\perp}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_{\perp}}, \quad r_{\perp} > R \quad (12)$$

Zusammengefasst:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R^2} \cdot r_{\perp}, \quad r_{\perp} \leq R \\ \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_{\perp}}, \quad r_{\perp} > R \end{array} \right\} \quad (13)$$

Man erhält also ein kreisförmiges Vektorfeld um die z-Achse des Koordinatensystems. Innerhalb des Drahtes nimmt seine Stärke - der Betrag des Feldes - mit wachsendem Abstand von der Symmetrieachse zu. Außerhalb des Drahtes nimmt das Feld dagegen mit zunehmendem Abstand vom Draht ab.

Die folgende Abbildung, die aus dem Programm QPVorl4.Pr1.mws stammt, zeigt diese Ergebnisse:

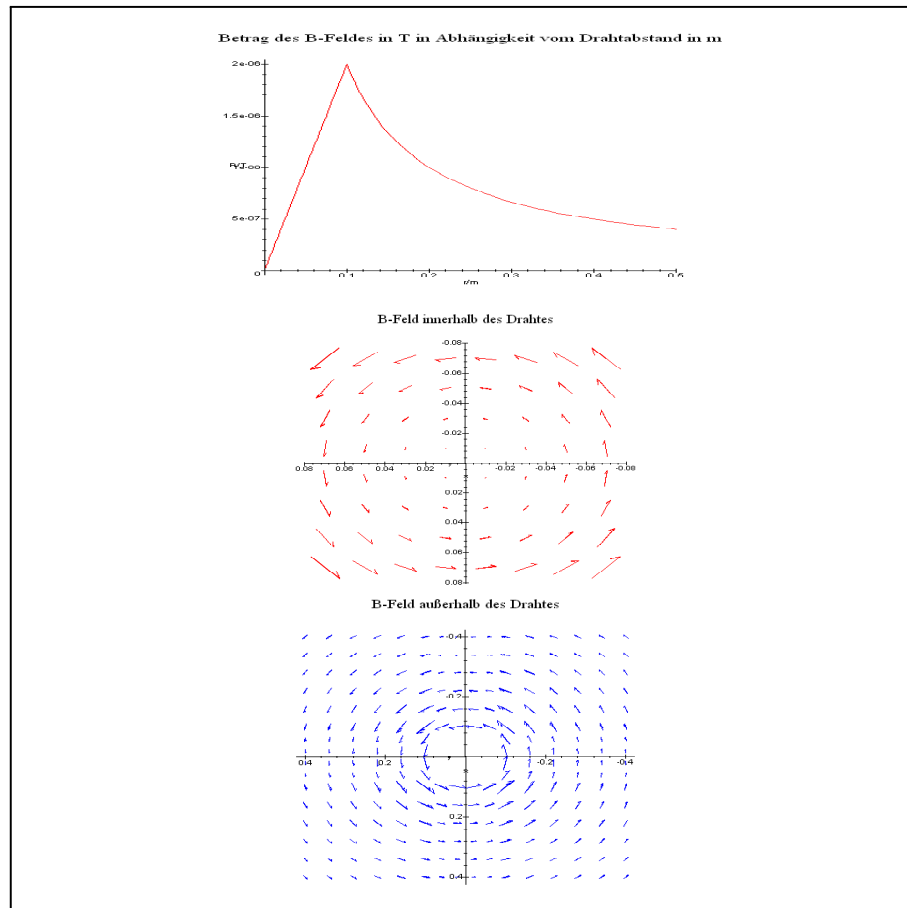


Figure 2:

Die obere Zeichnung zeigt den Betrag des **B**-Feldes in Abhängigkeit vom Abstand zur Symmetrieachse.

Die mittlere Zeichnung zeigt einen Schnitt durch das **B**-Feld innerhalb des Drahtes in der Höhe $z = 0$.

Die untere Zeichnung zeigt den gleichen Schnitt durch das **B**-Feld außerhalb des Drahtes.

Der gewählte Radius des Drahtes ist hier $R = 0.1\text{m}$. Die Achseneinheit ist m.

Wendet man den Satz von STOKES⁵:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s}' = \iint_A \text{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{r}')] \cdot d\mathbf{A}' \quad (14)$$

auf das AMPÈRE-Gesetz:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \mu_0 \iint_A \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A}'$$

an, so erhält man:

$$\iint_A \text{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{r}')] \cdot d\mathbf{A}' = \mu_0 \iint_A \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{A}' \quad (15)$$

Ein Vergleich der beiden Integranden liefert:

$$\text{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{r}')] = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (16)$$

Ersetzt man nun gestrichene durch ungestrichene Koordinaten, so folgt:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot}[\mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (17)$$

die differentielle Form des AMPÈRE-Gesetzes im statischen Fall. Dieses Gesetz ist nur für den zeitlich unveränderlichen Fall gültig!

Experimentell nicht bestätigt wird dagegen die Anwendung des AMPÈRE-Gesetzes auf zeitlich veränderliche elektrische Ströme (!!):

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (18)$$

wie wir noch sehen werden.

2. ZUSAMMENSTELLUNG ALLER BISHER BEHANDELTEN GLEICHUNGEN

Die bisher zusammengestellten Gleichungen sind alle hinreichend experimentell bestätigt, sie sollen im folgenden noch einmal zusammengestellt werden und dienen bis zur MAXWELL-Ergänzung als Grundgleichungen⁶:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \text{ "GAUSS-Gesetz"} \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \text{ "Keine magnetischen Monopole"} \quad (20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \text{ "FARADAY's Induktionsgesetz"} \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \text{ "AMPÈRE's Gesetz für den statischen Fall"} \quad (22)$$

⁵Siehe Skript 3 Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (12). Man kann natürlich auch gestrichene Integrationsvariablen benutzen, ohne die Aussage dieses Satzes zu verändern.

⁶Siehe Gleichung (37) im Skript 2 für das GAUSS-Gesetz, Gleichung (51). Für das Induktionsgesetz nach FARADAY siehe Gleichung (18) in Skript 3 zur Vorlesung Einführung in die Quantenphysik.

3. DIE MAXWELL-ERGÄNZUNG

Man hat natürlich versucht, das AMPÈRE-Gesetz auch auf zeitlich veränderliche Felder auszudehnen, aber die naheliegende Verallgemeinerung:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

führt auf einen Widerspruch zur experimentellen Erfahrung.

Aus der Mathematik ist bekannt, dass für ein beliebiges Vektorfeld:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

gilt⁷:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (23)$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die obige naheliegende Verallgemeinerung an, so erhält man:

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \mu_0 \cdot \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

und damit, da $\mu_0 \neq 0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (25)$$

und damit einen Widerspruch zum Gesetz der Ladungserhaltung⁸:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (26)$$

MAXWELL's Hypothese:

MAXWELL schlug die folgende Verallgemeinerung des AMPÈRE-Gesetzes vor:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (27)$$

Diese mathematische Ergänzung hat experimentelle Konsequenzen, die man auch überprüfen kann. Die erste Konsequenz ist die, dass im Vakuum⁹:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (28)$$

gilt. Das heißt, dass eine zeitliche Veränderung eines \mathbf{E} -Feldes - z.B. durch Laden bzw. Entladen eines Kondensators - zur Entstehung eines \mathbf{B} -Feldes führt.

⁷Dieses Ergebnis kann man mit Maple leicht nachrechnen. Etwa durch die folgenden Zeilen:

```
> with (linalg):
> F:=vector ([F1(x,y,z,t),F2(x,y,z,t),F3(x,y,z,t)]);
> curl (F,[x,y,z]);
> diverge ("",[x,y,z]);
```

⁸Siehe Skript zur Vorlesung 3: Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (6).

⁹Das Vakuum ist ladungs- und natürlich auch stromfrei, d. h. $\mathbf{j} = 0$.

Betrachte dazu die folgende Abbildung¹⁰:

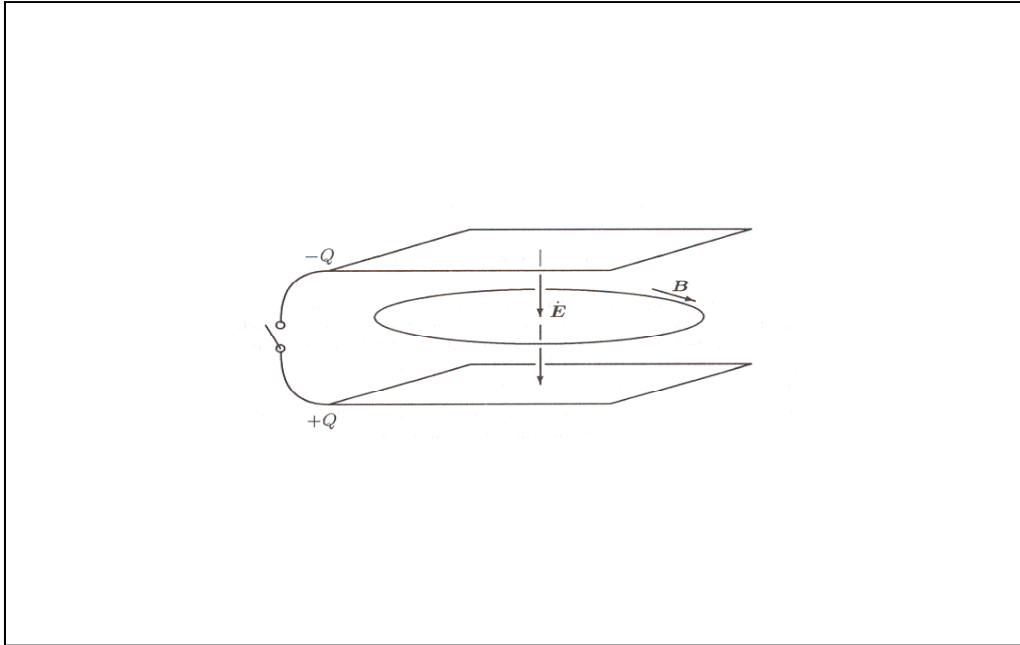


Figure 3: Beim Kurzschließen des Kondensators verändert sich das elektrische Feld. Diese zeitliche Veränderung $\dot{\mathbf{E}} \neq 0$ ruft ein magnetisches Feld mit geschlossenen Feldlinien hervor.

Dieses Phänomen ist messbar¹¹ und damit eine erste Bestätigung der MAXWELL-Hypothese.

Die zweite Hypothese ist allerdings weitaus einschneidender, denn die vier Gleichungen im Vakuum:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

¹⁰Die Abbildung stammt aus Fliessbach: Elektrodynamik, B.I. Verlag 1994, S.168.

¹¹Eine Kompassnadel schlägt beim Laden bzw. Entladen eines Kondensators innerhalb des Kondensators aus.

lassen sich umschreiben in¹²:

$$(\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 E_1(x, y, z, t)}{\partial x_i^2} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 E_2(x, y, z, t)}{\partial x_i^2} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 E_3(x, y, z, t)}{\partial x_i^2} \end{pmatrix} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (29)$$

$$(\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_1(x, y, z, t)}{\partial x_i^2} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_2(x, y, z, t)}{\partial x_i^2} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 B_3(x, y, z, t)}{\partial x_i^2} \end{pmatrix} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (30)$$

und diese beiden Gleichungen die uns in den nächsten Vorlesungen eingehend beschäftigen werden, bedeuten in der Tat etwas Neues, mit experimentellen Konsequenzen gerade für das Verständnis des Phänomens Licht.

4. MATHEMATISCHE ERGÄNZUNGEN

Maple-Datei: QPVorl4Pr2. mws (Schwingungen und Wellen)

Hinweis:

Dieser Abschnitt kann übergangen werden¹³, er fasst nur noch einmal die Ergebnisse aus "QPVorl4Pr2. mws" zusammen.

Unter einer **monochromatischen Welle** versteht man einen Ausdruck der Art:

$$V(t) = A \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (31)$$

$$A : \text{Amplitude} \quad (32)$$

$$\omega : \text{Kreisfrequenz } (\omega = 2\pi\nu : \nu : \text{Frequenz}) \quad (33)$$

$$\varphi : \text{Phasenverschiebung} \quad (34)$$

Zusätzlich definiert man noch:

$$T : = \frac{2\pi}{\omega} : \text{Periode} \quad (35)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Bedeutung der Konstanten:

$$\nu : \text{Anzahl der Schwingungen pro s} \quad (36)$$

$$T : \text{Zeit für eine vollständige Schwingung}$$

$$\varphi : \text{beschreibt eine Verschiebung des Graphen}$$

¹²In der Notation des LAPLACE-Operators Δ in kartesischen Koordinaten sei $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

¹³Wenn das Maple-Programm ausreicht oder die Kenntnisse über Schwingungen schon vorhanden sind.

Mit der Verschiebung des Graphen ist gemeint, dass der Graph der Funktion:

$$A \cdot \cos(\omega t)$$

für $\varphi > 0$ eine Verschiebung um $\frac{\varphi}{\omega}$ nach links (von der vertikalen Achse aus gesehen) und für $\varphi < 0$ um $\frac{\varphi}{\omega}$ nach rechts erfährt.

Betrachte dazu das folgende Bild :

$$10 \cdot \cos(t) : \text{blau gezeichnet} \quad (37)$$

$$10 \cdot \cos(t - 5) : \text{grün gezeichnet}$$

$$10 \cdot \cos(t + 5) : \text{rot gezeichnet}$$

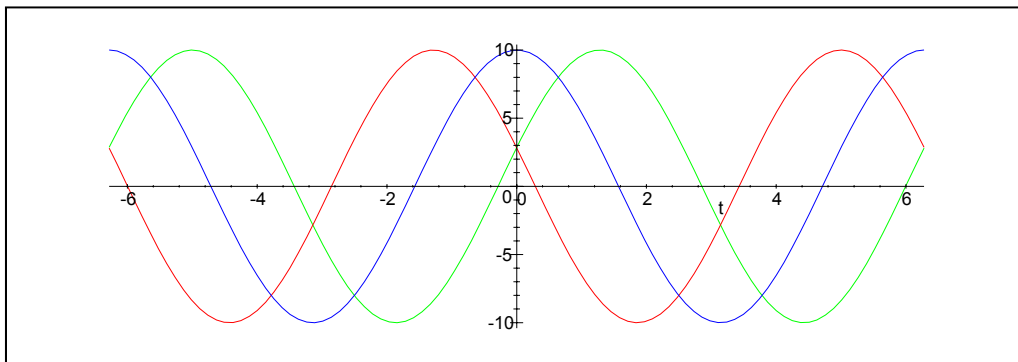


Figure 4:

Monochromatische Wellen behalten bei der Differentiation und Integration ihre Form bei.

- **Differenziation:** Verschiebung um $\frac{\pi}{2\omega}$ links und Multiplikation der Ausgangsamplitude mit ω :

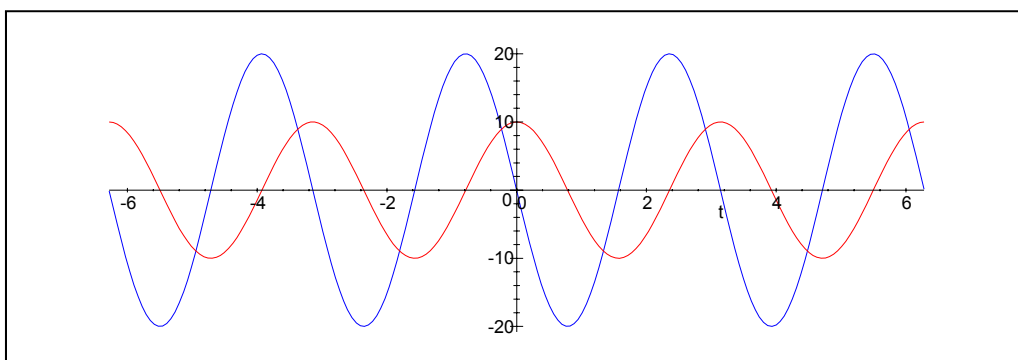


Figure 5: Blau gezeichnet der Ausgangsgraph, in roter Farbe die Ableitungsfunktion.

- **Integration:** Verschiebung der Ausgangsfunktion um $\frac{\pi}{2\omega}$ nach rechts und Division der Ausgangsamplitude durch ω Komplexe Schreibweise einer monochromatischen

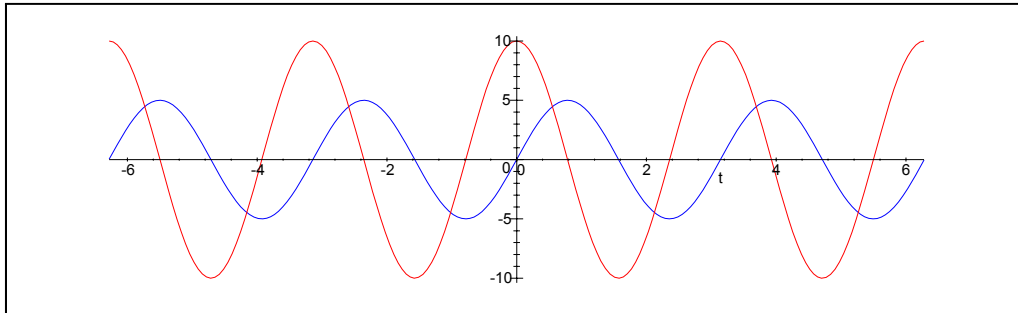


Figure 6: In roter Farbe der Ausgangsgraph, in blauer Farbe die Stammfunktion.

Welle:

$$V_k(t) = A \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} = A \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t} =: U_k \cdot e^{-i\omega t} \quad (38)$$

$$\text{Re}\{V_k(t)\} = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (39)$$

Eine Welle trägt Energie, deren Maß proportional zum Quadrat der Amplitude A ist, bzw. proportional zu $|U_k|^2$.

Unter einer **Quasimonochromatischen Welle** versteht man Funktionen der Art:

$$V(t) = A(t) \cos(\omega t - \varphi) \text{ oder } V_k(t) = U_k(t) e^{i\omega t}, U_k(t) = A(t) e^{-i\varphi} \quad (40)$$

wobei sich $A(t)$ nur langsam ändert.

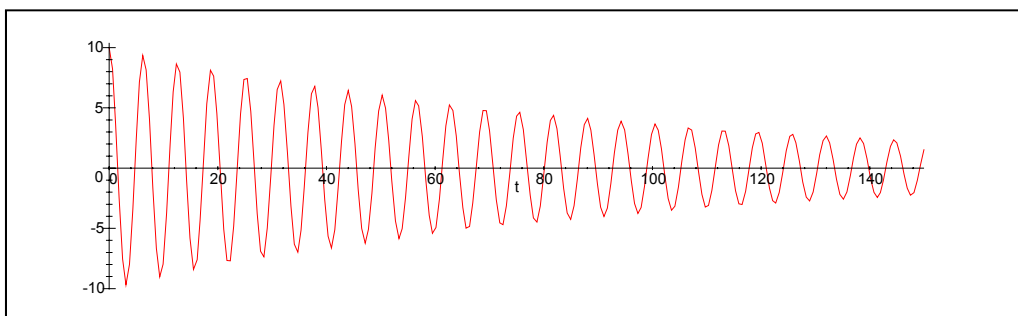


Figure 7: Beispiel einer quasimonochromatischen Welle mit exponentiell abnehmender Amplitude.

Zusammenfassung :

1. Im statischen Fall kann man in besonders symmetrischen Fällen das **B**-Feld einer Stromverteilung über das AMPÈRE-Gesetz bestimmen.
2. Eine Verallgemeinerung des AMPÈRE-Gesetzes auf den Fall zeitlich veränderlicher Stromverteilungen führt zum Widerspruch zum Gesetz der Ladungserhaltung.

3. MAXWELL's Ergänzung führt zu zwei experimentell nachprüfbaren Hypothesen: Einmal sollte im stromfreien Bereich ein sich veränderndes \mathbf{E} -Feld ein \mathbf{B} -Feld induzieren. Diese Hypothese kann man mit einer Kompassnadel zwischen den Platten eines sich langsam entladenden Kondensators bestätigen. Die zweite Hypothese MAXWELL's sagt die Existenz von elektromagnetischen Wellen - die Inhalt der nächsten Vorlesungen sind - voraus.