

## Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 2

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Inhalt dieser Vorlesung sind weitere Grundkenntnisse der Elektrodynamik (GAUSS-Satz, magn. Feld, Kraftwirkung eines Magnetfeldes).

### 1. WIEDERHOLUNG VON KENNTNISSEN AUS DER ELEKTRODYNAMIK II

#### Maple-Dateien zur Vorlesung:

- QPVorl2Pr1.mws (Gradient, Divergenz und Rotation)
- QPVorl2Pr2.mws (B-Feld, Berechnung von Bahnen geladener Teilchen im B-Feld)
- QPVorl2Pr3.mws (Kreisbahn eines Elektrons in einem konstanten B-Feld)

#### 1.1. Wiederholung mathematischer Kenntnisse.

**Gradient eines Skalarfeldes.** Den Nabla-Operator in **kartesischen Koordinaten**:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$

haben wir schon in der ersten Vorlesung kennengelernt<sup>1</sup>. Die Anwendung dieses Operators auf eine skalare Funktion, z.B.

$$g(x, y, z) = \sin(x) \cdot y^2 + \ln(z) \quad (2)$$

führt zu einem Vektor:

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x) \cdot y^2 + \ln(z)) \\ \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x) \cdot y^2 + \ln(z)) \\ \frac{\partial}{\partial z} (\sin(x) \cdot y^2 + \ln(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot y^2 \\ \sin(x) \cdot 2y \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Eine Vorstellung von der Bedeutung des Gradienten gewinnt man besonders leicht für Funktionen, die nur von 2 Variablen (z.B. x und y) abhängen. Man kann dann:

$$g(\mathbf{r}) = g(x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y)$$

als Fläche im dreidimensionalen Raum darstellen. Die Richtung, entlang der die Funktion f am stärksten wächst ist die Richtung des Gradienten. Er zeigt an jedem Ort der Fläche in die Richtung des steilsten Anstiegs.

**Beispiel:**

$$g(x, y) = 0.5x^2 + 3 \cos(x) - 2 \sin(y) \Rightarrow \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} x - 3 \sin(x) \\ -2 \cos(y) \end{pmatrix}$$

Die folgenden Bilder, die aus dem Programm **QPVorl2Pr1.mws** stammen, zeigen die Fläche sowie die Niveaulinien und eine Darstellung des Gradienten.

---

<sup>1</sup> Siehe Skript zur Vorlesung 1 Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (34).

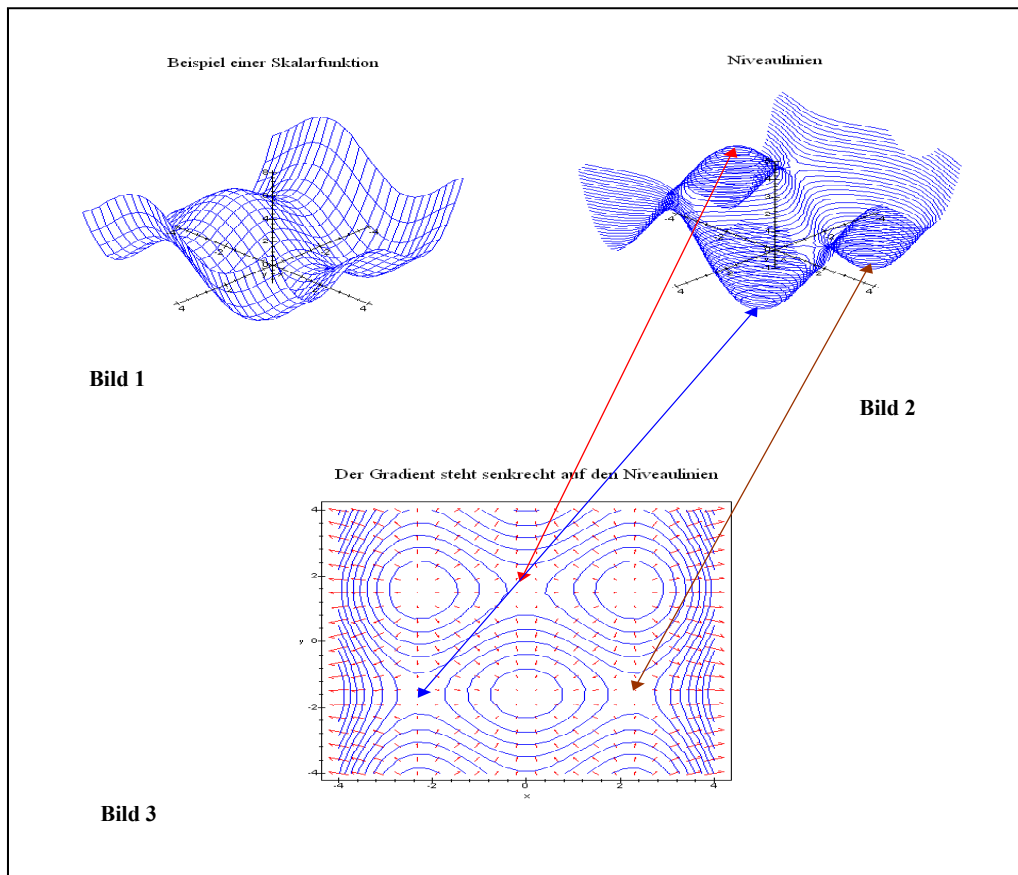


Figure 1:

**Bild 1** zeigt die Fläche  $g(x,y)$  im  $x,y,g$ -Raum.

**Bild 2** zeigt die Niveaulinien der Fläche, also die Linien, die als Lösung der Gleichung  $g(x,y) = \text{const.}$  Die Konstante variiert und ihr Wert wird gleichzeitig als Höhe in der Darstellung verwendet.

**Bild 3** zeigt eine Draufsicht auf Bild 2. Man kann erkennen, dass der Gradient senkrecht auf den Niveaulinien steht. Zur Verdeutlichung des graphischen Zusammenhangs sind drei markante Punkte herausgegriffen worden, man kann erkennen, dass die Fläche in unmittelbarer Nähe eines Extremums nur noch wenig wächst bzw. fällt.

Man beachte in der Darstellung der Niveaulinien, dass die Dichte dieser Linien ein Maß für die Stärke der Änderung der Fläche  $g(x,y)$  im Raum ist.

Der **Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten** hat die folgende Gestalt:

$$\nabla = \mathbf{e}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

Im ersten zur Vorlesung gehörenden Programm wird der Befehl zur Berechnung des Gradienten in Zylinder- sowie in Kugelkoordinaten zur Verfügung gestellt und an Beispielen demonstriert. Es ist möglich, beliebige Funktionen einzugeben und den

Gradienten zu berechnen. In **Kugelkoordinaten** hat der **Nabla-Operator** dann die folgende Gestalt:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (5)$$

**Divergenz eines Vektorfeldes.** Das Skalarprodukt zwischen einem Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  und dem Nabla-Operator definiert man als **Divergenz** des Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) := \text{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] \quad (6)$$

### 1. Kartesische Koordinaten:

In kartesischen Koordinaten hat das Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  die Gestalt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 v_k(x, y, z) \mathbf{e}_k \quad (7)$$

wobei jetzt gelten soll:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und man erhält dann für die **Divergenz in kartesischen Koordinaten**:

$$\text{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_3(x, y, z)}{\partial z} \quad (8)$$

### 2. Zylinderkoordinaten:

In Zylinderkoordinaten hat das Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  die folgende Darstellung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_\perp(r_\perp, \varphi, z) \cdot \mathbf{e}_\perp + v_\varphi(r_\perp, \varphi, z) \cdot \mathbf{e}_\varphi + v_z(r_\perp, \varphi, z) \cdot \mathbf{e}_z \quad (9)$$

und man erhält nun für die **Divergenz des Vektorfeldes in Zylinderkoordinaten**:

$$\text{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} (r_\perp \cdot v_\perp(r_\perp, \varphi, z)) + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi(r_\perp, \varphi, z) + \frac{\partial}{\partial z} v_z(r_\perp, \varphi, z) \quad (10)$$

### 3. Kugelkoordinaten:

In Kugelkoordinaten hat das Vektorfeld natürlich die folgende Darstellung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{e}_r + v_\varphi(r, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{e}_\varphi + v_\vartheta(r, \varphi, \vartheta) \cdot \mathbf{e}_\vartheta \quad (11)$$

und man erhält nun für die **Divergenz des Vektorfeldes in Kugelkoordinaten**:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot v_r(r, \varphi, \vartheta)) + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi(r, \varphi, \vartheta) + \\ & + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot v_\vartheta(r, \varphi, \vartheta)) \end{aligned} \quad (12)$$

Die **geometrische Interpretation der Divergenz** wird verständlich, wenn man den **Fluss eines Vektorfeldes durch eine Oberfläche** betrachtet. Das anschaulichste Vektorfeld ist das Feld der Fließgeschwindigkeit einer Strömung<sup>2</sup>:

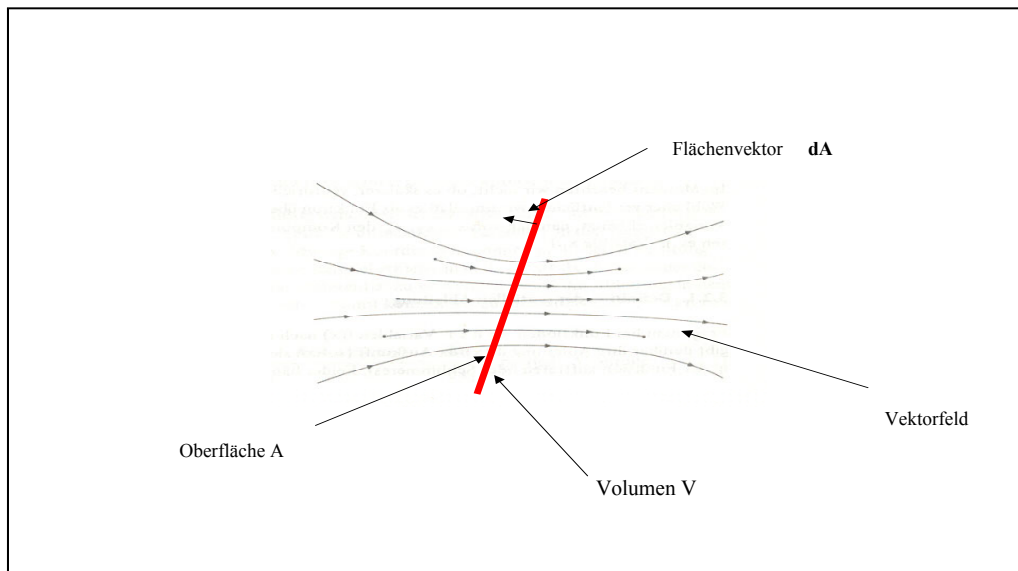


Figure 2:

Um die Lage einer Fläche im Raum beschreiben zu können, wird das **orientierte Flächenelement**:

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot d\Delta(\mathbf{r}) \quad (13)$$

eingeführt. Der Vektor  $\mathbf{e}$  steht dabei auf der Fläche senkrecht und zeigt von der Fläche nach außen<sup>3</sup>. Unter dem Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  durch die Fläche  $A$  versteht man

<sup>2</sup>Ein weiteres anschauliches Beispiel zeigt die Wetterkarte im Fernsehen. Dort werden Windrichtung und -stärke durch Pfeile veranschaulicht. Die Richtung der Pfeile zeigt die erwartete Windrichtung an und die Länge der Pfeile ist proportional zur Windstärke bzw. der Geschwindigkeit des Windes.

<sup>3</sup> $\mathbf{r}$  beschreibt dabei die Orte der Oberfläche, die Abhängigkeit von  $\mathbf{r}$  drückt aus, dass das orientierte Flächenelement sich von Ort zu Ort einer Fläche ändern kann.

nun die Summe der Skalarprodukte:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \quad (14)$$

Im Grenzwert werden die orientierten Flächenelemente infinitesimal klein und gehen über in den orientierten Flächenvektor  $d\mathbf{A}$ . Man erhält dann ein **Oberflächenintegral**:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) = \iint_A \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (15)$$

Es muss sich um ein Doppelintegral handeln, da ein Flächenlement immer zweidimensional ist. Im kartesischen Fall gilt z.B.:

$$dA = dx \cdot dy \quad (16)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  lässt sich nun beschreiben als Fluss dieses Vektorfeldes durch die Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $\Delta V$ , wobei  $\Delta V$  sich auf einen Punkt, beschrieben durch  $\mathbf{r}$ , zusammenzieht:

$$\text{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (17)$$

Die geometrische Bedeutung der Divergenz verdeutlicht die folgende Abbildung:

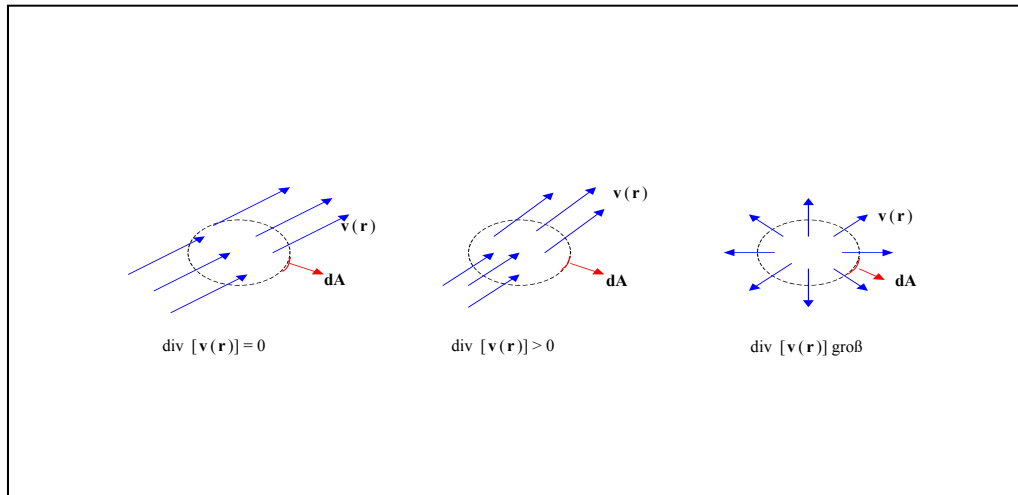


Figure 3: Zur Berechnung der Divergenz wird ein kleines Volumen  $\Delta V$  betrachtet (hier speziell kugelförmig). Wenn  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  im Bereich des Volumens konstant ist (linkes Bild) verschwindet die Divergenz. Nimmt  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  dagegen wie im mittleren Bild zu, so ist die Divergenz positiv. Sie wird maximal, wenn  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  durchweg parallel zum Flächenvektor  $d\mathbf{A}$  steht.

Das Vektorfeld hat in der obigen Abbildung eine Quelle oder mehrere. Im linken Bild kann man erkennen, dass innerhalb des Volumens  $\Delta V$  keine Quelle liegt. In der mittleren Darstellung befindet sich innerhalb des Probevolumens eine Quelle des Feldes, es "fließt" mehr aus  $\Delta V$  heraus, als "hinein fließt". Schließlich befindet sich in der rechten Darstellung innerhalb des Probevolumens eine Quelle des Feldes. Die Divergenz eines Vektorfeldes am Ort  $\mathbf{r}$  ist nun ein Maß für die Quellstärke des Feldes an diesem Ort.

**Rotation eines Vektorfeldes.** Das Vektorprodukt eines Nabla-Operators und eines Vektorfeldes nennt man **Rotation** des Feldes:

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] \quad (18)$$

### 1. Kartesische Koordinaten:

In dieser Koordinatendarstellung erhält man:

$$\text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right) \quad (19)$$

wobei zur übersichtlicheren Darstellung die Abhängigkeiten, wie z.B.  $v_x(x, y, z)$  unterdrückt wurden. Man orientiere sich an der Darstellung des Vektorfeldes im Rahmen der Behandlung der Divergenz.

### 2. Zylinderkoordinaten:

In diesem Falle erhält man für die Rotation:

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = & \mathbf{e}_\perp \frac{1}{r_\perp} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} v_z - \frac{\partial}{\partial z} (r_\perp \cdot v_\varphi) \right] + \mathbf{e}_\varphi \left[ \frac{\partial}{\partial z} v_\perp - \frac{\partial}{\partial r_\perp} v_z \right] + \\ & + \mathbf{e}_z \frac{1}{r_\perp} \left[ \frac{\partial}{\partial r_\perp} (r_\perp \cdot v_\varphi) - \frac{\partial v_\perp}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

### 3. Kugelkoordinaten:

Für diese Darstellung erhält man die folgende Formel:

$$\begin{aligned} \text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = & \mathbf{e}_r \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\varphi \cdot \sin \vartheta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\vartheta \right\} + \\ & + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} v_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\varphi \sin \vartheta) \right\} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} r \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

Zur geometrischen Interpretation der Rotation muss das sogenannte Linienintegral eines Vektorfeldes über einen Weg eingeführt werden. Unter dem Linienintegral eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  entlang eines Weges C versteht man den Limes ( $N \rightarrow \infty$ ) der Summe:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (22)$$

entlang einer Folge von Vektoren  $\mathbf{r}_i$ , die alle auf einem Kurvenstück C mit den Endpunkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  liegen:

$$\int_{\mathbf{r}_1, C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (23)$$

Hierbei gilt:

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i + \Delta t) - \mathbf{r}(t_i) \quad (24)$$

$$N \rightarrow \infty \stackrel{\circ}{=} \Delta t \rightarrow 0 \quad (25)$$

Betrachte dazu die folgende Abbildung:

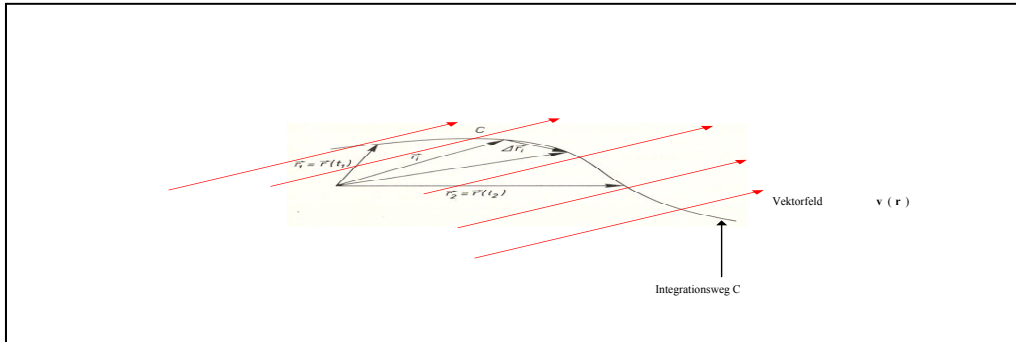


Figure 4: Integrationsweg C eines Linienintegrals

Wir betrachten nun spezielle Wege C. Diese seien geschlossen und besitzen keinen Doppelpunkt<sup>4</sup>. Unter der **Zirkulation des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  entlang des Weges C** versteht man dann das Linienintegral entlang dieses geschlossenen Weges:

$$Z_C(\mathbf{v}) = \oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (26)$$

Man versteht das Integral mit einem Kringel, um anzudeuten, dass der Weg C geschlossen ist.

Die Zirkulation ist nun in anschaulicher Weise ein Maß für die Wirbelstärke des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  innerhalb der vom geschlossenen Weg C umschlossenen Fläche.

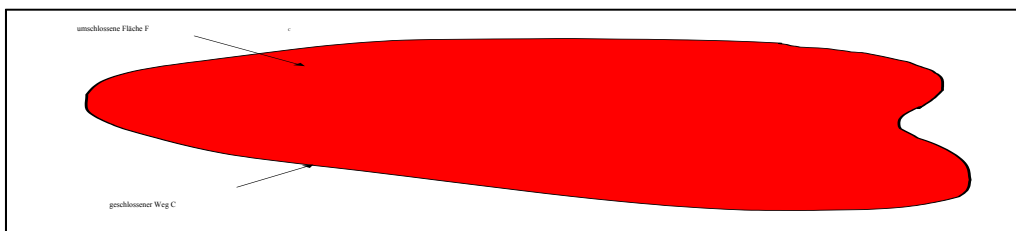


Figure 5: Geschlossener Weg C und umschlossene Fläche  $F_C$ .

<sup>4</sup>Kein Punkt des Weges wird also zweimal angetroffen.

Interpretiert man das Feld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  wieder als Feld der Fließgeschwindigkeit einer Strömung, so zeigt die folgende Abbildung zwei unterschiedliche Zirkulationszustände:

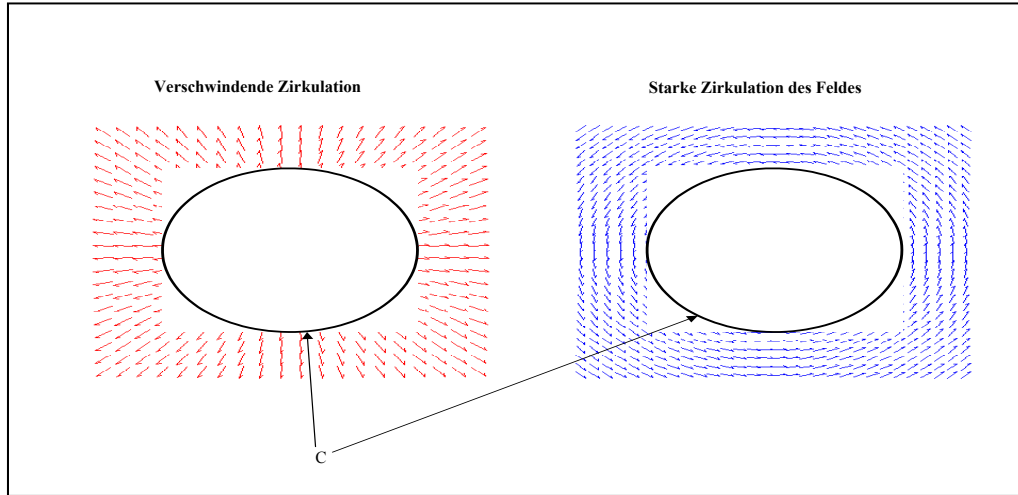


Figure 6:

Im linken Bild verschwindet die Zirkulation des Feldes innerhalb der Fläche  $F_C$ .

Im rechten Bild dagegen kann man eine starke Zirkulation des Feldes innerhalb der Fläche  $F_C$ .

Der Zusammenhang zwischen der Zirkulation eines Vektorfeldes und der Rotation wird durch die folgende Gleichung ausgedrückt. Sei  $\mathbf{n}$  der Flächenvektor<sup>5</sup> der Fläche  $F_C$ . Man kann die **Rotation als Flächendichte der Zirkulation** auffassen, denn es gilt:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \lim_{F_C \rightarrow 0} \frac{1}{F_C} \oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (27)$$

**Einfache Rechenregeln für den Nabla-Operator.** Die folgenden Rechenregeln werden im Programm "QPVorl2Pr1.mws" mit Maple in allgemeiner Form bewiesen. Aus diesem Grund werden sie hier nur angegeben:

$$\text{div}[\text{rot}(\mathbf{v})] = 0 \quad (28)$$

$$\text{rot}[\text{grad}(f)] = 0 \quad (29)$$

Eine dritte Beziehung wird an dieser Stelle nur in kartesischen Koordinaten angegeben, obwohl sie natürlich unabhängig vom gewählten Koordinatensystem gilt:

$$\text{rot}[\text{rot}(\mathbf{v})] = \text{grad}[\text{div}(\mathbf{v})] - \Delta \mathbf{v} \quad (30)$$

wobei:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (31)$$

<sup>5</sup>Dieser Vektor steht an jeder Stelle senkrecht auf der Fläche und hat die Länge Eins.



in kartesischen Koordinaten.

**1.2. Der Integralsatz von GAUSS.** Diese mathematische Aussage verknüpft den Fluss eines Vektorfeldes durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens mit der Quelldichte innerhalb des Volumens. Dabei ist nun zu beachten, dass der Fluss eines Vektorfeldes durch eine Oberfläche einem Nettofluss entspricht. Man subtrahiert den eingehenden Fluss vom ausgehenden Fluss. Betrachte dazu die folgende Abbildung:

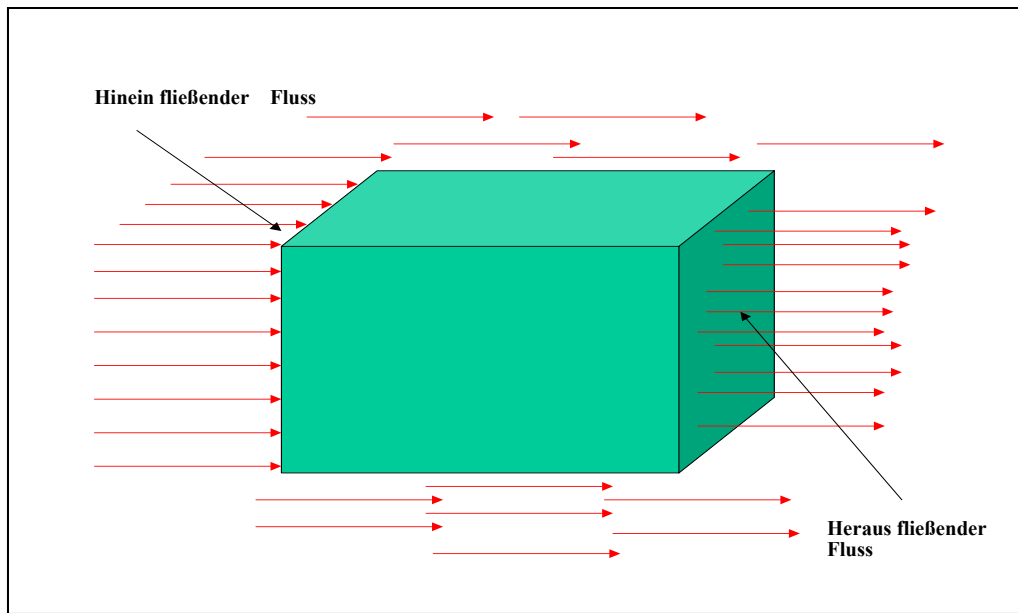


Figure 7: Ein Volumenelement im Vektorfeld. Anschaulich kann man sich wieder ein Feld der Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit vorstellen. In dieser Abbildung "fließt" genauso viel auf der linken Seite hinein, wie aus der anderen Seite heraus. Es können sich also keine Quellen bzw. Senken innerhalb des Volumens befinden.

Die obige Situation bedeutet, da der Fluss des Vektorfeldes, der hineinfließt genauso groß ist wie der herausfließende, dass der Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche verschwindet:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (32)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass sich innerhalb des Volumens keine Quelle des Feldes, aber auch keine Senke befindet. Der Satz von GAUSS sagt nun anschaulich aus, dass wenn sich innerhalb des Volumens eine Feldquelle befindet, der Gesamtfluss  $> 0$  sein muss. Im Falle einer Senke dann natürlich  $< 0$ <sup>6</sup>. Die lokale Quellstärke eines

<sup>6</sup>Natürlich können sich mehrere Senken oder Quellen zugleich im Volumen befinden. Sind die Senken des Feldes dann in der Addition stärker als die Quellen, kann man von einer wirksamen "Nettosenke" sprechen. Analog für eine "Nettoquelle".

Feldes haben wir durch die Divergenz des Vektorfeldes beschrieben, siehe Gleichung (17). Die gesamte Quellstärke eines Vektorfeldes ist dann natürlich die Integration der lokalen Quellstärken:

$$\iiint_V \operatorname{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot dV \quad (33)$$

Verknüpft man den Gesamtfluss durch eine geschlossene Oberfläche des Volumens  $V$  mit der Gesamtquellstärke innerhalb des Volumens so erhält man den **Integralsatz von GAUSS**:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot dV \quad (34)$$

Diese mathematische Aussage, die eine Transformation zwischen einem Volumen- und einem Oberflächenintegral ermöglicht, soll, bevor ihre physikalische Interpretation vorgestellt werden, an einem Beispiel mit Maple ausgewertet werden.

**Beispiel:** *Integralsatz von GAUSS*

Betrachte das folgende Vektorfeld:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} e^x \\ \cosh(y) \\ \sinh(z) \end{pmatrix}$$

Das Volumen  $V$  sei nun ein Würfel mit der Kantenlänge  $a$ . In diesem Fall ist es einfacher die rechte Seite von (34) auszuwerten. Man spart auf diese Weise die Berücksichtigung der sechs verschiedenen Seiten eines Würfels. Mit Maple lässt sich auf einfache Weise die Divergenz, sowie das Volumenintegral auswerten. Die Rechnung wird im ersten beigefügten Programm vorgestellt. Für die Kantenlänge  $a = 3$  ist die Situation in der Abbildung auf der nächsten Seite dargestellt.

Die Berechnung des Volumenintegrals ist mit Maple kein Problem und man erhält:

$$\iiint_V \operatorname{div} [\mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot dV = 2a^2 (e^a - 1) \quad (35)$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass das angegebene Feld eine vom Nullpunkt ausgehende immer stärker werdende Quelldichte besitzt.

Die Aussage des Integralsatzes von GAUSS gewinnt eine physikalische Bedeutung, wenn man im folgenden das elektrische Feld<sup>7</sup> betrachtet. Bekannt ist, dass die elektrischen Feldlinien in einer positiven Ladung beginnen und in einer negativen Ladung enden. In diesem Sinne bedeutet eine positive Ladungsdichte eine Quelle dieses Feldes. Eine negative Ladungsdichte kann dann als Senke des elektrischen Feldes verstanden werden. Mit anderen Worten, die lokale Quellstärke des elektrischen Feldes ist direkt der elektrischen Ladungsdichte proportional. Überträgt man die Aussage des Integralsatzes von GAUSS auf diese Situation, so erhält man den **Integralsatz**

<sup>7</sup>Siehe Skript zur Vorlesung 1 zur Einführung in die Quantenphysik.

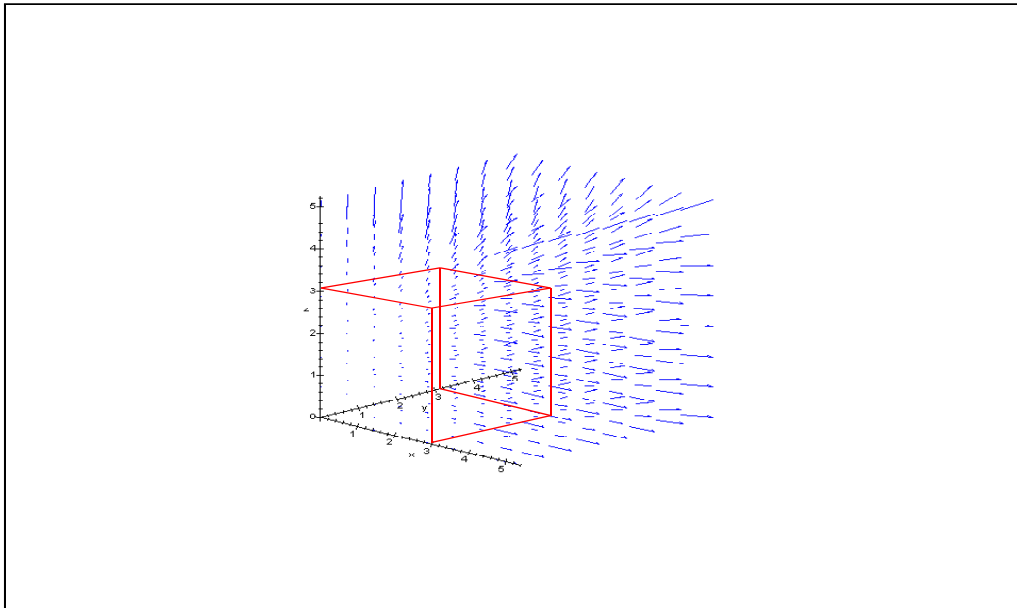


Figure 8: Beispiel zum Integralsatz von GAUSS. Schon diese Darstellung lässt vermuten, dass der Fluss des Vektorfelds mit wachsender Kantenlänge zunimmt.

**von GAUSS für die Elektrodynamik<sup>8</sup>:**

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(r, t) \cdot dV = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} \quad (36)$$

Diese Aussage lässt sich in Worte fassen:

**”Der Gesamtfluss des elektrischen Feldes durch eine beliebig geformte Oberfläche eines Volumens ist gleich der Summe der in diesem Volumen vorhandenen Ladungsmenge dividiert durch  $\epsilon_0$ ”**

Festgehalten werden soll ebenfalls die mathematische Interpretation der Aussage, dass die lokale Quellstärke des elektrischen Feldes der elektrische Ladungsdichte proportional ist:

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r, t) \quad (37)$$

---

<sup>8</sup>Die Aussage gilt auch für zeitlich veränderliche elektrische Felder bzw. elektrische Ladungsdichten.

**Beispiel:** *Integralsatz von GAUSS für die Elektrodynamik*  
 Betrachte die folgende Situation:

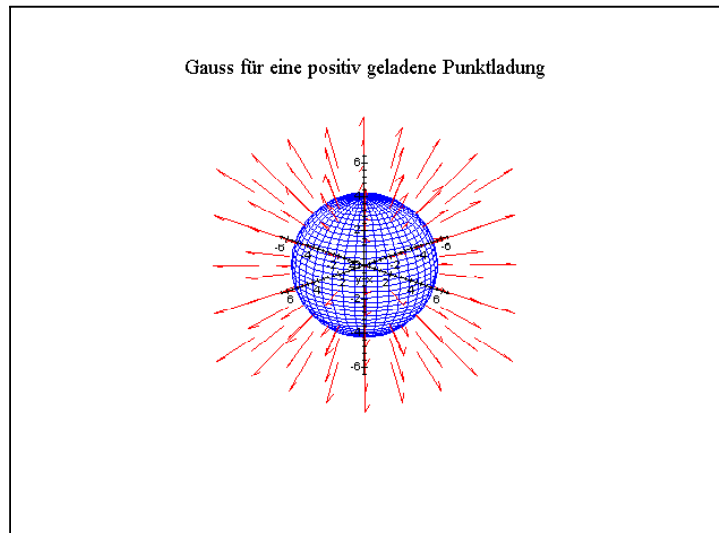


Figure 9: Eine positive Punktladung befindet sich im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems. Das Probevolumen sei eine Kugel mit Radius  $R$ .

Das elektrische Feld für eine positive Ladung im Ursprung eines Koordinatensystems hat die folgende Gestalt<sup>9</sup>:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (38)$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (39)$$

Betrachte als einschließendes Volumen eine Kugel mit Radius  $R$  (siehe Bild). Die Kugel schließt nur die positive Punktladung ein, also erhält man sofort:

$$\int_{V_K} \rho(\mathbf{r}) dV = q \implies \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_K} \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (40)$$

Das Oberflächenintegral - das den gesamten Fluss des Feldes durch die Kugeloberfläche beschreibt - berechnet man auf die folgende Art und Weise.

Das orientierte Flächenelement auf einer Kugel mit Radius  $R$  hat in Kugelkoordinaten die folgende Darstellung:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{e}_r R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad (41)$$

<sup>9</sup>Siehe Skript zur 1. Vorlesung zur Einführung in die Quantenphysik, Gleichung (34), ausgewertet für  $\mathbf{r}_j = 0$ .

Zur Berechnung des Gesamtflusses muss das elektrische Feld der Punktladung im Ursprung auf der Kugeloberfläche - also für  $r = R$  - ausgewertet werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{e}_r \quad (42)$$

Man erhält damit dann:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V_K} \mathbf{E}(\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r) \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r R^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta \cdot d\vartheta \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \\ \iint_{\partial V_K} \mathbf{E}(\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r) \cdot d\mathbf{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

also das erwartete Ergebnis.

Ein weiteres Ergebnis lässt sich hieraus schlussfolgern:

**Befindet sich keine Ladung innerhalb des Messvolumens,  
so ist der Fluss des el. Feldes durch dieses Messvolumen gleich Null.**

Betrachte dazu die folgende Abbildung:

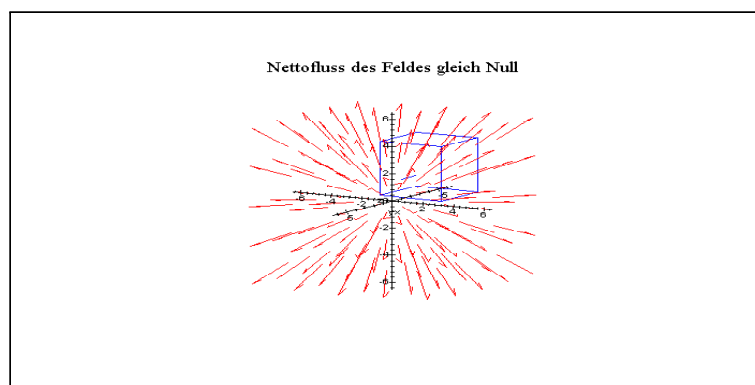


Figure 10: Der Fluss des Feldes durch die gesamte Oberfläche des quaderförmigen Probevolumen verschwindet. Was hineinfließt, fließt auch wieder heraus.

**Bemerkung:**

Das Berechnen von Oberflächenintegralen wie in der vorherigen Rechnung ist im allgemeinen nicht Lehrstoff der gymnasialen Oberstufe. Aus diesem Grund ist diese Vorlesung auch so aufgebaut, dass der interessierte Schüler nur den obigen verbal formulierten Satz von GAUSS zur Kenntniss nehmen und beim Fluss des elektrischen Feldes an eine fließende Flüssigkeit denken sollte. Bei Quellen und Senken kann man immer an Pumpen denken, die entweder Flüssigkeit in ein Volumen hinein- oder herauspumpen.

**1.3. Magnetostatik.** Elektrostatische Felder entstehen durch ruhende elektrische Ladungen und lassen sich durch Kraftwirkungen auf elektrische Ladungen beobachten. Magnetostatische Felder entstehen durch stationäre elektrische Ströme<sup>10</sup>. Experimentell kann man feststellen, dass bewegte elektrische Ladungen auf die Nadel eines Kompasses eine Kraftwirkung ausüben, die denen eines Magneten ähnlich sind. Man kann zum Beispiel für eine stromdurchflossene Drahtspule eine gleiche Anordnung von Eisenspänen finden - die auf einer Glasplatte über der Spule verstreut sind -, wie bei einem Stabmagneten in der gleichen experimentellen Situation. Als Ergebnis dieser Experimente<sup>11</sup> gelangt man zur Auffassung, dass elektrische Ströme Felder um sich herum aufbauen<sup>12</sup>, die man als "Feld der magnetischen Induktion" - kurz **B**-Feld definiert<sup>13</sup>.

**Die elektrische Stromstärke.** Die elektrische Stromstärke wird definiert über:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (43)$$

also als Änderung der Ladungen pro Zeit, die z.B. an einem bestimmten Punkt in einem Leiter gezählt werden. Für einen **stationären Strom** gilt:

$$I = \text{const.} \quad (44)$$

Die Einheit der Stromstärke ist das Ampère:

$$[I] = \frac{C}{s} = A \quad (45)$$

---

<sup>10</sup>Das sind Ströme, deren Stärke konstant bleibt.

<sup>11</sup>Da diese Kraftwirkung nicht durch Metallflächen abgeschirmt werden, kann es sich nicht um elektrische Felder handeln.

<sup>12</sup>Diese Felder werden auch als vorhanden betrachtet, wenn keine Kompassnadel vorhanden ist.

<sup>13</sup>Es handelt sich hierbei um das gleiche Feld, das z.B. auch ein Stabmagnet erzeugt. Dabei ist zu beachten, dass dieses Feld sich dann nicht nur außerhalb sondern auch innerhalb des Magneten befindet.

**Die elektrische Stromdichte  $j$ .** Die elektrische Stromdichte ist der Vektor, dessen Richtung durch die Bewegungsrichtung der Ladungen im elektrischen Strom gegeben ist und dessen Betrag der pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit senkrecht zur Stromrichtung transportierten Ladung entspricht. Die folgende Darstellung zeigt das Prinzip der Stromdichte:

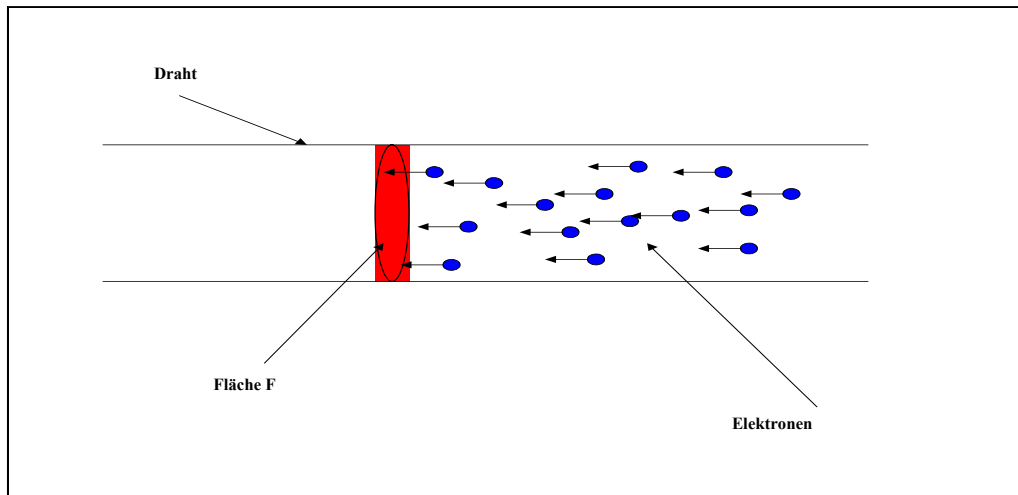


Figure 11: Prinzip der Stromdichte: Sie ist ein Maß für die Zahl der Elektronen, die z.B. pro Sekunde durch die Messfläche  $F$  fließen. Die Richtung der Stromdichte entspricht der Bewegungsrichtung der Elektronen.

$$[j] = \frac{A}{m^2}$$

**Das Feld der magnetischen Induktion  $B$ .** Wie bereits erwähnt, stellt man experimentell fest, dass ein stromdurchflossener Leiter auf eine Kompassnadel eine Kraft ausübt, die der eines Magneten gleicht. Ebenfalls stellt man experimentell fest, dass ein stromdurchflossener Leiter auf einen zweiten eine Kraft ausübt. Dabei stellt man fest, dass sich die beiden Leiter anziehen, wenn der Strom in beiden Leitern in die gleiche Richtung fließt. Beide Leiter stoßen sich ab, wenn der Strom in entgegengesetzter Richtung fließt. Diese Kraftwirkungen führt man auf das  $B$ -Feld der magnetischen Induktion zurück, das von den bewegten elektrischen Ladungen hervorgerufen wird.

$$[B] = 1 \frac{N}{Am} = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 \text{ Tesla (T)} \quad (46)$$

**Bemerkung:** Zur relativistischen Beschreibung von  $E$ - und  $B$ -Feld<sup>14</sup>

Das  $B$ -Feld unterscheidet sich nicht grundsätzlich vom elektrostatischen Feld einer ruhenden elektrischen Ladung. Die spezielle Relativitätstheorie zeigt, dass beide Felder -  $B$ -Feld und elektrostatisches  $E$ -Feld - durch eine bestimmte Transformation

<sup>14</sup>Diese Bemerkung ist für das weitere Verständnis nicht wesentlich und kann übergangen werden.

miteinander zusammenhängen<sup>15</sup>. Das elektrische Feld einer mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Ladung ist verschieden von dem einer ruhenden Ladung. Zusätzlich tritt zum elektrischen Feld einer bewegten Ladung ein Feld der magnetischen Induktion auf, dass proportional zum Vektorprodukt aus der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  der bewegten Ladung und der elektrischen Feldstärke, wenn die bewegte Ladung als ruhend angenommen wird<sup>16</sup>. Das Gesamtfeld einer bewegten elektrischen Ladung muss als Summe eines elektrischen und eines magnetischen Feldes beschrieben werden. Das B-Feld kann immer als Beschreibung des elektrostatischen E-Feldes in einem bewegten Koordinatensystem gedeutet werden. Beide Felder werden in der speziellen Relativitätstheorie zu einem einzigen, dem elektromagnetischen Feld, vereinigt.

**Beispiel:** *Zum B-Feld*

**B-Feld** eines unendlichen langen geraden Drahtes, der vom konstanten Strom  $I$  durchflossen wird<sup>17</sup>.

Der Draht liege in der  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems:

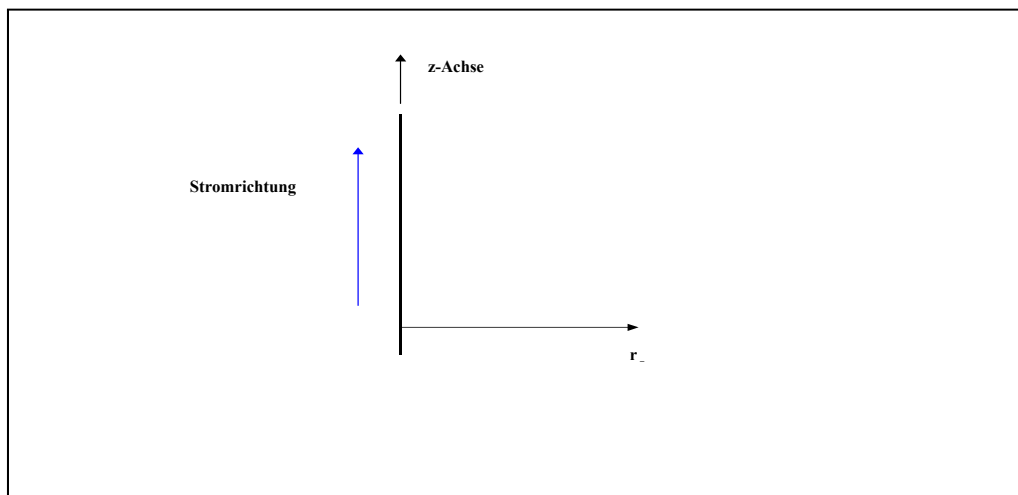


Figure 12: Schematische Darstellung der Lage von Draht und Stromrichtung.

Man erhält experimentell, dass das B-Feld zeitlich konstant ist und mit dem Abstand

<sup>15</sup>Man stelle sich als Beispiel hierfür eine ruhende Punktladung vor. Für einen relativ zur ihr ruhenden Beobachter, besitzt sie ein elektrostatisches  $\mathbf{E}$ -Feld. Ein anderer Beobachter möge sich von ihr in einem Wagen mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  entfernen. Aus dem Wagen betrachtet, entfernt sich die Punktladung vom diesem und bildet somit von ihm aus betrachtet einen elektrischen Strom. Sie besitzt somit ein  $\mathbf{B}$ -Feld.

<sup>16</sup>In diesem Falle stellt man sich vor, dass der Beobachter quasi auf dem Elektron sitzen würde. Das Elektron ruht dann für diesem Beobachter. Die LORENTZ-Transformation bildet den Zusammenhang zwischen diesem mitbewegten System und dem System eines relativ zur Ladung ruhenden Beobachters. Für diesen Beobachter bewegt sich das Elektron.

<sup>17</sup>Experimentell kann man diese Situation durch einen sehr langen Draht erreichen.



$r_{\perp}$  abnimmt. Mathematisch erhält man:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r_{\perp}} \mathbf{e}_{\varphi} \quad (47)$$

Wobei:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (48)$$

die **magnetische Feldkonstante** ist. Rechnen wir dieses - in Zylinderkoordinaten gegebene - Feld in kartesische Koordinaten um, so erhält man mit<sup>18</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\varphi} &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ r_{\perp} &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (49)$$

den folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Maple zeichnet das folgende Bild:

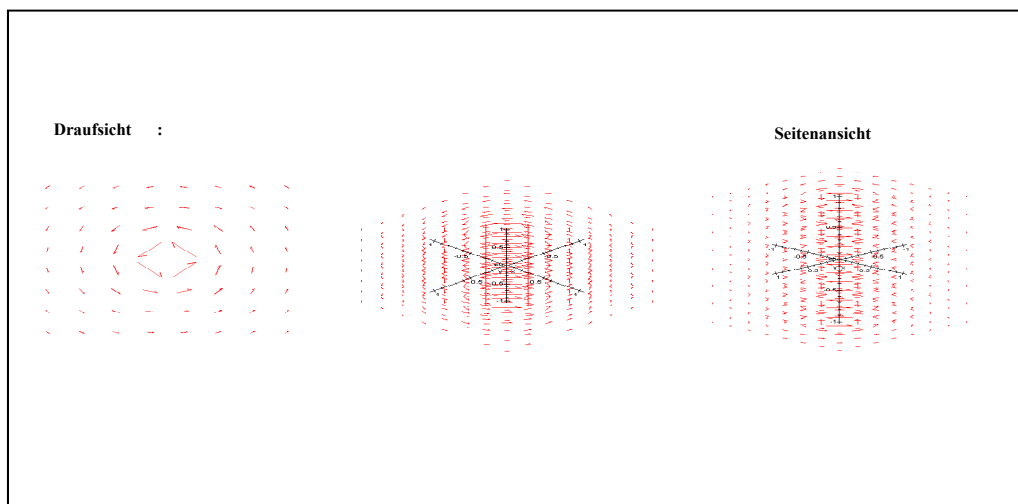


Figure 13: B-Feld eines 1A-Stroms. Die Einheit der Achsen ist Meter. Die linke Abbildung zeigt das Feld des Drahtes von oben (die z-Achse kommt aus der Papierebene heraus). Die anderen beiden Abbildungen zeigen, dass das **B**-Feld senkrecht auf der Stromrichtung steht. Die Einheit der Achsen ist m.

<sup>18</sup>Siehe Skript zur 1. Vorlesung Einführung in die Quantenphysik die Gleichungen (15) - (18).

Experimentell gewinnt man die folgenden Einsichten in die Struktur der magnetischen Kräfte:

1. Ein elektrischer Strom übt auf ein ruhendes geladenes Teilchen keine Kraft aus, wohl aber auf ein bewegtes Teilchen.
2. Der Betrag der Kraft ist sowohl dem Betrag des elektrischen Stromes wie dem Betrag der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens proportional.
3. Die Kraft auf ein bewegtes geladenes Teilchen hat keine Vektorkomponente in Richtung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Teilchens. Sie steht somit senkrecht auf  $\mathbf{v}$ .
4. Diese Kraftwirkung lässt sich nicht durch eine Metallplatte schwächen, bzw. aufheben, wie das bei elektrischen Feldern der Fall ist, es handelt sich also um eine anderen Ursprung für diese Kraft.
5. Die Feldlinien des  $\mathbf{B}$ -Feldes sind immer geschlossen. Es lassen sich also im Gegensatz zum  $\mathbf{E}$ -Feld keine Monopole isolieren, mathematisch bedeutet dies:

$$\operatorname{div} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (51)$$

Natürlich gilt auch für dieses Vektorfeld wieder das Überlagerungsprinzip, das B-Feld zweier langer Drähte, in denen jeweils ein 1A-Strom in entgegengesetzter Richtung fließt, zeigt das folgende Bild aus dem Programm "QPVorl2Pr2.mws":

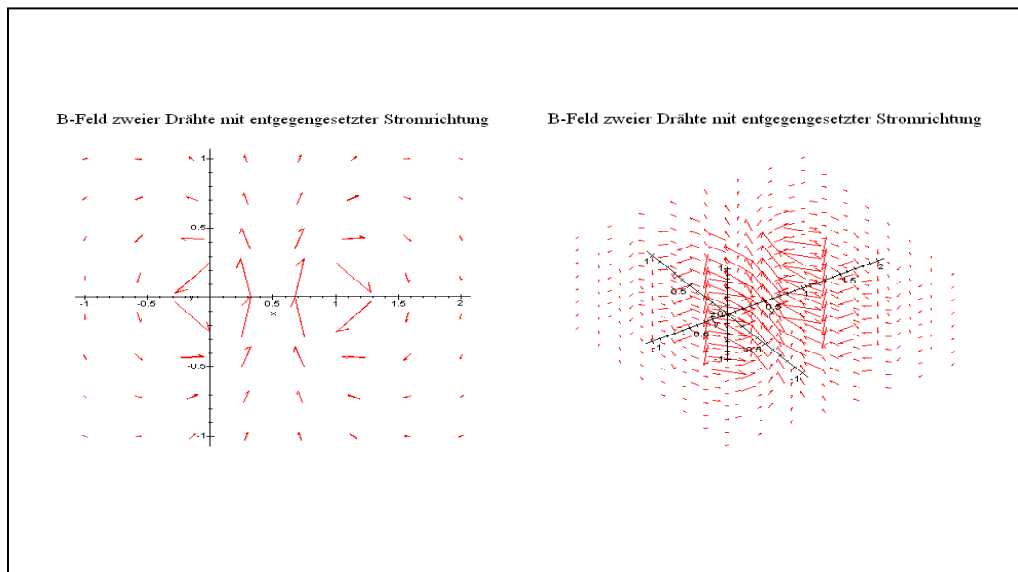


Figure 14: B-Feld zweier Drähte mit entgegengesetzter Stromrichtung. Der erste Draht verläuft entlang der z-Achse durch den Ursprung, der zweite Draht parallel dazu durch den Punkt (1,0,0). Die Einheit der Achsen ist m.

Allgemein bewirkt ein  $\mathbf{B}$ -Feld auf eine Probeladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, eine Kraft:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (52)$$

Diese Formel beschreibt also genau die experimentell beobachtbaren und in den vorherigen Sätzen erläuterten Phänomene, die Richtung der Kraft<sup>19</sup> folgt ebenfalls aus experimenteller Beobachtung und wird durch das Vektorprodukt gewährleistet. Das erstaunliche und damit dem alten mechanistischen Gedanken Widersprechende dieser Kraft ist, dass sie abhängig ist von der Geschwindigkeit des Teilchens! Das ganze mechanistische Denken des 18. und 19. Jahrhunderts beruhte bis zu diesem Befund auf der Überzeugung, dass sich alle Erscheinungen auf Kräfte zurückführen lassen, die einzig und allein von der Entfernung, nicht aber von der Geschwindigkeit bestimmt werden.

Instruktiver als die Betrachtung der  $\mathbf{B}$ -Felder ist die Darstellung der Kraftfelder von Stromverteilungen auf geladene Teilchen. Denn im Gegensatz zum elektrischen Feld, hat die magnetische Kraft nicht die gleiche Richtung wie das  $\mathbf{B}$ -Feld, sondern steht senkrecht dazu.

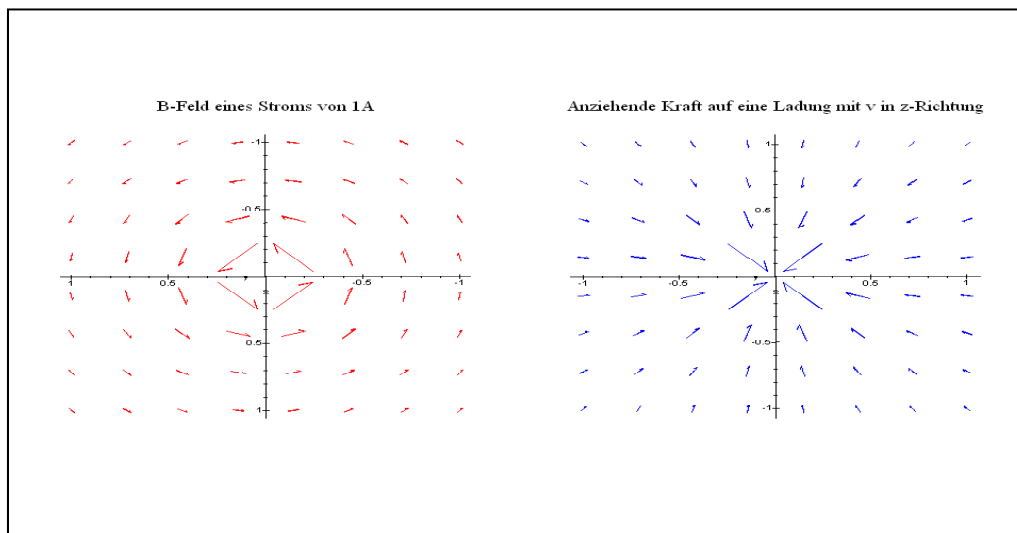


Figure 15:

**Linkes Bild:**  $\mathbf{B}$ -Feld eines 1A-Stromes, der in  $z$ -Richtung (aus der Blattebene heraus) fließt.

**Rechtes Bild:** Anziehende Kraft auf ein negativ geladenes Teilchen, das sich ebenfalls in positiver  $z$ -Richtung bewegt.

Die Einheit der Achsen ist m.

### Zusammenfassung:

1. Experimentell stellt man um elektrisch geladene Stoffe eine Kraftwirkung fest. Dies führt in der mathematischen Beschreibung zum Begriff des elektrischen Feldes.

<sup>19</sup>Der Kraftvektor steht senkrecht auf dem Vektor der Teilchengeschwindigkeit und dem Feldvektor der magnetischen Induktion. Man beachte, dass es sich um eine Kraft handelt, die von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängt. Man kann diese Kraftwirkung nicht analog zur Gravitation durch eine abstandsabhängige Kraft erklären!

2. Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche ist abhängig davon, ob sich Quellen oder Senken des elektrischen Feldes innerhalb des Volumens befinden, das von der Oberfläche eingeschlossen wird. Mathematisch beschrieben ergibt dieser Sachverhalt den GAUSS-Satz der Elektrodynamik.
3. Experimentell stellt man um einen stromdurchflossenen Leiter eine Kraftwirkung auf bewegte Ladungen fest, die von anderer Art als die elektrische Kraftwirkung ist.
4. Experimentell stellt man für die Kraft, die eine Ladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, innerhalb eines  $\mathbf{E}$ - bzw.  $\mathbf{B}$ -Feldes erfährt, fest:

$$\mathbf{F}_{Lor} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (53)$$

Diese Kraft bezeichnet man als LORENTZ-Kraft.

**1.4. Numerische Bahnen von geladenen Teilchen in einem elektromagnetischen Feld.** Im Programm "QPVorl2Pr2.mws" werden für verschiedene Situationen aus der Gleichung (52) mit Hilfe numerischer Verfahren die Bahnen für geladene Teilchen berechnet. Im folgenden wird für einen Fall die Theorie vorgestellt, die auf ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen führt, die dann relativ einfach mit Maple numerisch gelöst werden.

**Bahn ein geladenes Teilchens in einem B-Feld eines geladenen Drahtes.**

In diesem ersten Fall betrachten wir (53) unter der Vorgabe  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Das B-Feld ist das bekannte Feld eines 1A Stromes in einem langen Draht, der entlang der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegt<sup>20</sup>. Ein geladenes Teilchen bewege sich parallel zu diesem Draht ebenfalls in die Richtung zunehmender z-Werte. Gleichung (53) geht dann über in<sup>21</sup>:

$$\mathbf{F}_{Lor} = m \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t) \quad (54)$$

$$\begin{pmatrix} m \cdot \ddot{x}(t) \\ m \cdot \ddot{y}(t) \\ m \cdot \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{q\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

Mit Maple lässt sich das Kreuzprodukt berechnen und die einzelnen Komponenten dieser Vektordifferenzialgleichung separieren. Für unser Beispiel wurden die folgenden Werte gewählt:

$$\begin{aligned} m &= 1\text{kg} \\ q &= 1\text{C} \end{aligned}$$

<sup>20</sup> Siehe die Abbildung *Figure12* auf S.16 in diesem Skript.

<sup>21</sup> Der Punkt über einer Komponente stellt die zeitliche Ableitung dar:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Man erhält das folgenden System von System von gekoppelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{5000000} \frac{m^2}{s} \frac{\dot{z}(t) \cdot x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (56)$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{5000000} \frac{m^2}{s} \frac{\dot{z}(t) \cdot y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (57)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{5000000} \frac{m^2}{s} \frac{\dot{x}(t) \cdot x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} + \frac{1}{5000000} \frac{m^2}{s} \frac{\dot{y}(t) \cdot y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (58)$$

Unter den folgenden Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 5m ; y(0) = 5m ; z(0) = 5m \quad (59)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \frac{m}{s} ; \dot{y}(0) = 0 \frac{m}{s} ; \dot{z}(0) = 10 \frac{m}{s} \quad (60)$$

erhält man die folgende numerische Bahn:

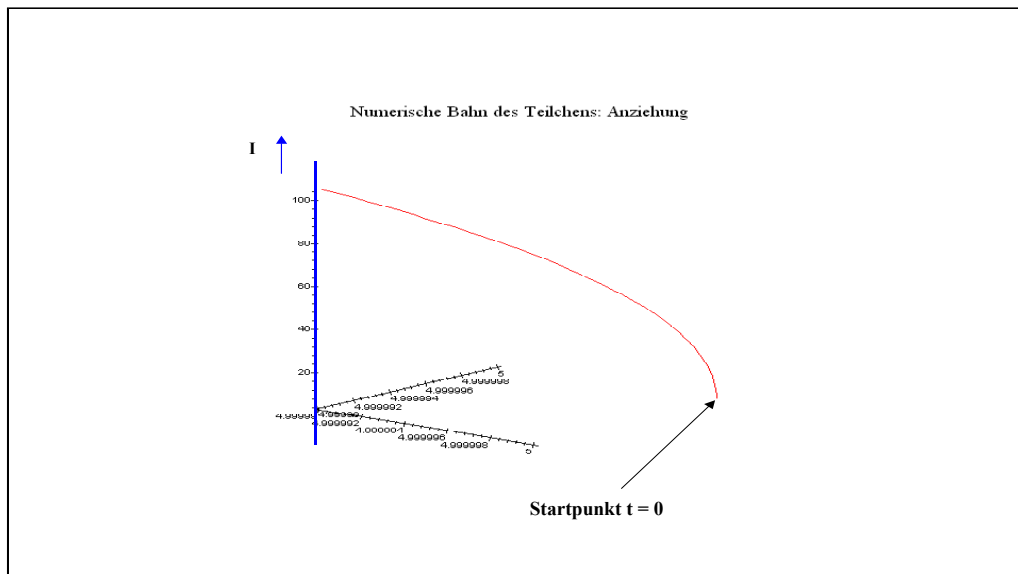


Figure 16: Numerische Bahn der ersten 10s der Bewegung. Wie experimentell zu beobachten wird ein entsprechender Elektronenstrahl in Richtung Draht abgelenkt. Die Einheit der Achsen ist m.

Im Programm "QPVorl2Pr2.mws" werden für eine Reihe von Anfangsbedingungen die numerischen Bahnen für verschiedene Kombinationen von langen Drähten die numerischen Bahnen errechnet. Da sich zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit des Teilchens ändert, verändert sich auch das Kraftfeld auf dieses Teilchen. Das Kraftfeld zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird aber für jede Stromdichteverteilung und Anfangsbedingung graphisch zusammen mit der numerischen Bahn dargestellt.

Für das obige Beispiel erhält man die folgende Darstellung:

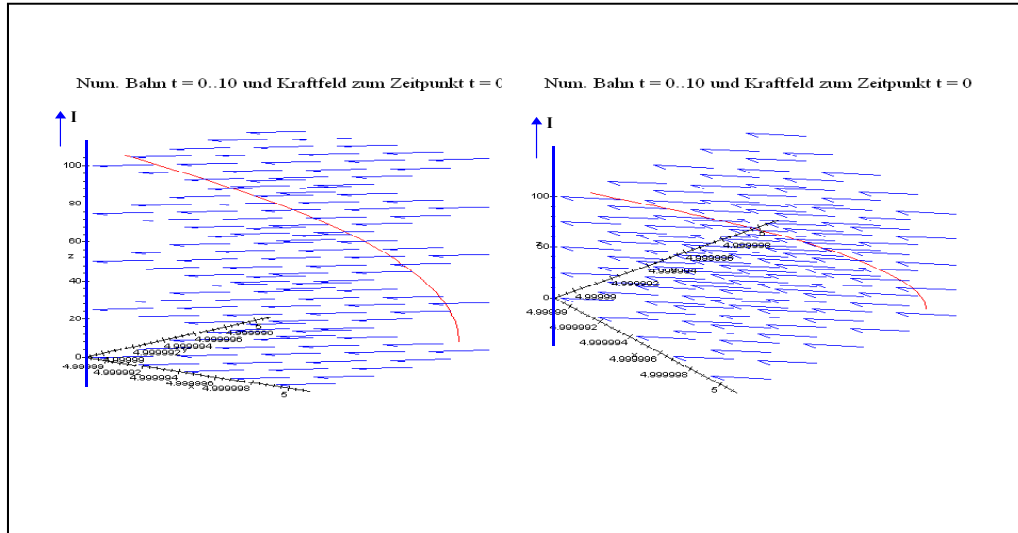


Figure 17: Numerische Bahn und das zugehörige Kraftfeld zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Einheit der Achsen ist m.

Ein weiteres Beispiel wird im Programm "QPVorl2Pr3.mws" vorgestellt. Wählt man ein konstantes  $\mathbf{B}$ -Feld mit den Vektorkomponenten:

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} T \quad (61)$$

sowie den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 1 \frac{m}{s}, \dot{y}(0) = 0, \dot{z}(0) = 0 \quad (62)$$

so kann man das Elektron auf eine Kreisbahn zwingen. Dabei erhält man für die Kreisfrequenz<sup>22</sup> der Kreisbewegung:

$$\omega = \frac{q \cdot B_z}{m} \quad (63)$$

und den folgenden Mittelpunkt der Bahn:

$$x_M = -x(0) + \frac{\dot{y}(0)}{\omega}, y_M = y(0) - \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \quad (64)$$

<sup>22</sup>Die genaue Entwicklung dieser Ergebnis ist an dieser Stelle noch nicht von Bedeutung. Sie wird aber in der **14. Vorlesung zur Quantenmechanik** vorgestellt.

Der Radius der Kreisbahn ist abhängig von der Anfangsenergie des Elektrons:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m \left( x(0)^2 + y(0)^2 \right) \quad (65)$$

$$R = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m\omega^2}} \quad (66)$$

**Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten elektromagnetischen Feld.** Für den Fall eines konstanten E- bzw. B-Feldes ist Maple in der Lage die Gleichung (52) allgemein symbolisch zu lösen<sup>23</sup>! Man erhält in diesem Fall das folgende System gekoppelter gewöhnlicher Differenzialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} m \cdot \ddot{x}(t) \\ m \cdot \ddot{y}(t) \\ m \cdot \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = q \cdot \left\{ \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \right\} \quad (67)$$

Mit den folgenden Feldkomponenten:

$$E_x = 0, E_y = -5\frac{N}{C}, E_z = 0.1\frac{N}{C}, B_x = 0, B_y = 0, B_z = 2T \quad (68)$$

und den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 5\frac{m}{s}, \dot{z}(0) = 0 \quad (69)$$

erhält man die folgende Bahn im elektromagnetischen Feld<sup>24</sup>:

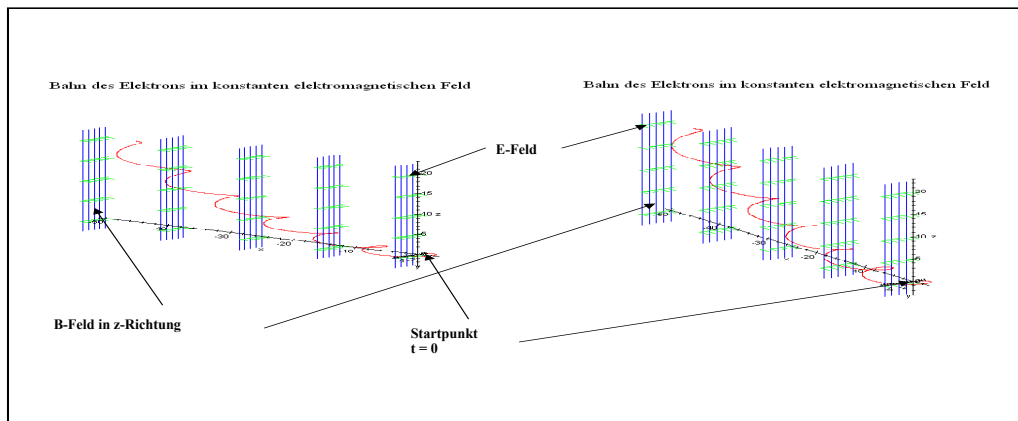


Figure 18: Bahn eines Elektrons im konstanten elektromagnetischen Feld. Die Achseneinheit ist m.

<sup>23</sup>Man sollte sich im Programm "QPvorl2Pr2.mws" einmal den Lösungsterm ansehen, um einen Eindruck von der Leistungsfähigkeit dieses Computeralgebrasystems zu erhalten.

<sup>24</sup>Siehe auch für eine Animation dieser Bewegung im Programm "QPVorl2Pr2.mws".