

## Vorlesungen über Quantenmechanik - Vorlesung 13

JOCHEN GEPPERT

ABSTRACT. Im Mittelpunkt dieser Vorlesung steht die quantenmechanische Untersuchung zweier Probleme aus der Elektrodynamik: im ersten Teil die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen elektrischen Feld und im zweiten Fall die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld. Dabei stößt man wieder auf die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators.

### 1. DIE BEWEGUNG EINES ELEKTRONS IN EINEM HOMOGENEN EL. FELD

#### Maple-Dateien zur Vorlesung :

- QMVor13Pr1.mws (Bewegung im homogenen el. Feld)
- QMVor13Pr2.mws (Bewegung eines Elektrons in einem hom. Magnetfeld - klassische Beschreibung)
- QMVor13Pr3.mws (Bewegung eines Elektrons in einem hom. Magnetfeld - quant. Beschreibung)

**1.1. Klassische Beschreibung.** In der klassischen Beschreibung der Bewegung eines geladenen Teilchens  $q$  im elektrischen Feld  $El$  gehen wir von der NEWTON-Bewegungsgleichung aus. Wir betrachten im folgenden nur eine eindimensionale Bewegung und erhalten somit:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = F = q \cdot El \quad (1)$$

Wir betrachten die Bewegung mit den folgenden Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

mit anderen Worten, das Teilchen ruhe zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Ursprung des Koordinatensystem. Unter der Vorgabe dieser Anfangsbedingungen erhalten wir mit Maple die folgende Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{q \cdot El}{m} \cdot t^2 \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{q \cdot El}{m} \cdot t \quad (4)$$

Für die Gesamtenergie erhalten wir:

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}(t)^2 - q \cdot El \cdot x(t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2 \cdot El^2}{m} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2 \cdot El^2}{m} \cdot t^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Dieses Ergebnis überrascht nicht, da die Bewegung ja in einem konservativen Kraftfeld mit dem Potenzial:

$$V(x) = -q \cdot El \cdot x = -q \cdot F \cdot x \quad (6)$$

stattfindet. Mit anderen Worten also die Gesamtenergie erhalten sein muss. Wir wählen nun die folgenden Werte<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} q &= -1 \text{ C} \\ m &= 1 \text{ kg} \\ El &= -10 \frac{\text{N}}{\text{C}} \end{aligned}$$

simulieren also die Bewegung eines Elektrons ausgehend vom Minuspol ( $x = 0$ ) in Richtung Pluspol, der sich fiktiv im Unendlichen befindet. Die Situation ist in der folgenden Abbildung skizziert:

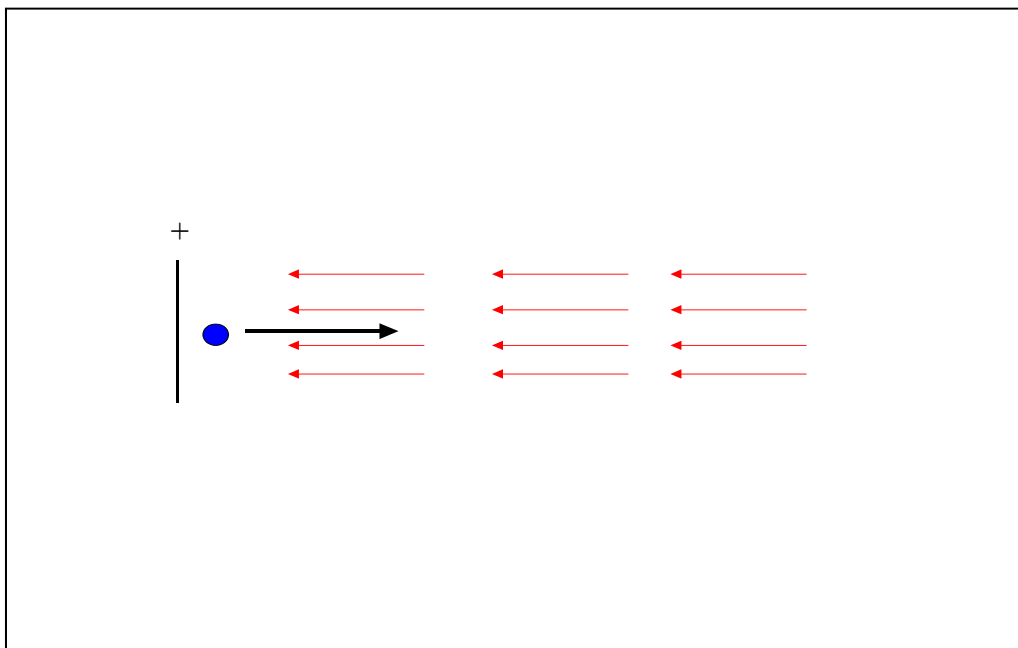


Figure 1: Zur Bewegung eines Elektrons im elektrischen Feld

Wie man bereits an den Lösungen der Orts- bzw. Geschwindigkeitsfunktion erkennen kann, wird das Teilchen immer schneller. Seine kinetische Energie wird immer größer, während die potenzielle Energie immer kleiner wird. Das Teilchen nimmt also kinetische Energie aus dem elektrischen Feld auf.

<sup>1</sup>Es handelt sich um Werte, die für Maple numerisch rechenbar sind. Die Ergebnisse der Rechnungen stimmen mit denen für realistischere Werte überein!

Betrachten wir nun die mit Maple entwickelten Graphen der klassischen Orts- und Geschwindigkeitsfunktion:

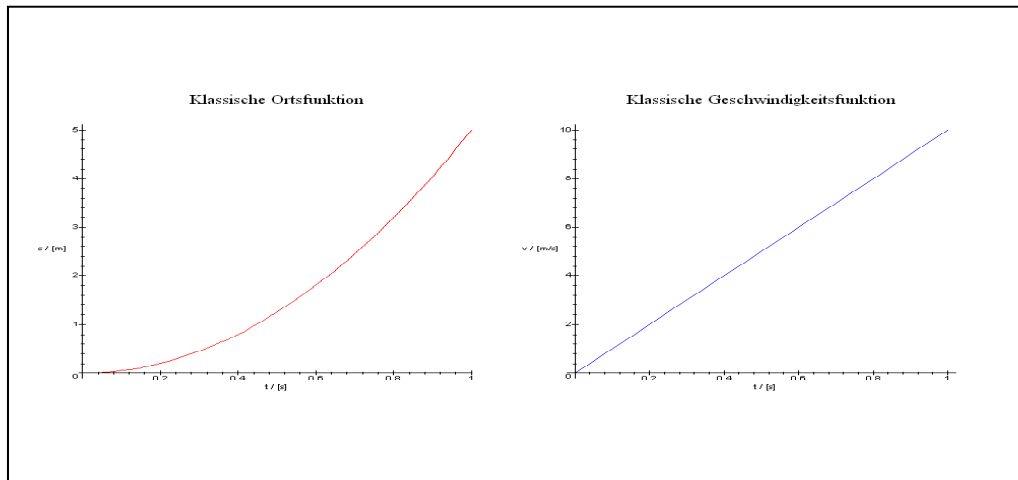


Figure 2: Klassische Orts- und Geschwindigkeitsfunktion eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld

Das Diagramm zeigt die Energieerhaltung der Bewegung:

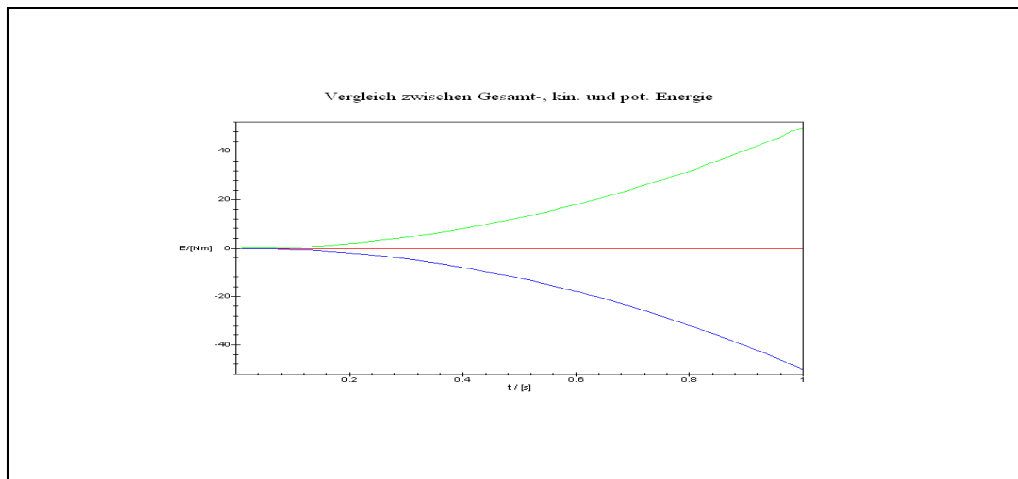


Figure 3: rot:  $E_{ges}$ , blau:  $E_{pot}$ , grün:  $E_{kin}$

Für alle positiven  $x$  erhält man:

$$E > E_{pot} \quad (7)$$

Da die kinetische Energie immer positiv ist, ist die Bewegung entlang der positiven x-Achse uneingeschränkt möglich. Für negative x-Werte<sup>2</sup> erhalten wir dagegen eine positive potenzielle Energie und da  $E = 0$  weiterhin gilt, müsste  $E_{kin} < 0$  gelten. Dies ist aber unmöglich, die Bewegung findet also nur für  $x > 0$  statt.

**1.2. Quantenmechanische Beschreibung der Bewegung eines geladenen Teilchens im elektrischen Feld.** Die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung für die Bewegung des geladenen Teilchens im homogenen Feld lautet nun:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + V(x) \cdot \varphi(x) &= E \cdot \varphi(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) - F \cdot x \cdot \varphi(x) &= E \cdot \varphi(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Gleichung formt man noch ein wenig um, bis man eine von Maple automatisch lösbare Differenzialgleichung erhalten:

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + Fx) \cdot \varphi(x) = 0$$

Die Substitution:

$$z := \left(x + \frac{E}{F}\right) \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow dz = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} dx \quad (9)$$

führt auf die Gleichung:

$$\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}\left(\left(x + \frac{E}{F}\right) \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = \tilde{\varphi}(x, E) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{d^2}{dz^2} \tilde{\varphi}(z) + \frac{2mF}{\hbar^2} \left(x + \frac{E}{F}\right) \tilde{\varphi}(z) &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \tilde{\varphi}(z) + z \cdot \tilde{\varphi}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Da die potenzielle Energie von  $-\infty$  bis  $+\infty$  alle denkbaren Energiewerte durchstreift, ist es von vorneherein klar, dass die Gesamtenergiewerte  $E$  auch kontinuierlich verlaufen und nicht diskret vorliegen. Die Gleichung enthält nun überhaupt keinen Energieparameter mehr. Die mit Maple gewonnene Lösung ist dann bereits die Eigenfunktion für beliebige Energiewerte. Maple kann diese Gleichung für  $E > 0$  und  $x > 0$  also mit  $z > 0$  problemlos lösen und nur diese Werte sind im Vergleich zur klassischen Bewegung von Interesse. Im Folgenden wird wieder  $\hbar = 1$  gesetzt und ansonsten werden die gleichen Werte wie im klassischen Fall betrachtet.

Uns interessieren an dieser Stelle nur die von Maple entwickelten Bilder, da BESSEL-Funktionen den mathematischen Rahmen dieser Vorlesung übersteigen. Die Wellenfunktion lässt sich nicht auf Eins normieren, was aber nicht verwundert, da dies für

---

<sup>2</sup>Dies ist der Fall, wenn im Ursprung kein Pluspol wäre, sondern wenn sich dieser in  $-\infty$  befinden würde.

den Fall kontinuierlicher Energiewerte sowieso nicht möglich ist. Im Programm wird eine beliebige Lösung betrachtet, da uns nur der quantitative Verlauf interessiert. Betrachten wir die folgende Darstellung der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für verschiedene Energiewerte:

$$\left| \tilde{\varphi} \left( \left( x + \frac{E}{F} \right) \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\left( \frac{1}{3} \right)} \right) \right|^2 \quad (12)$$

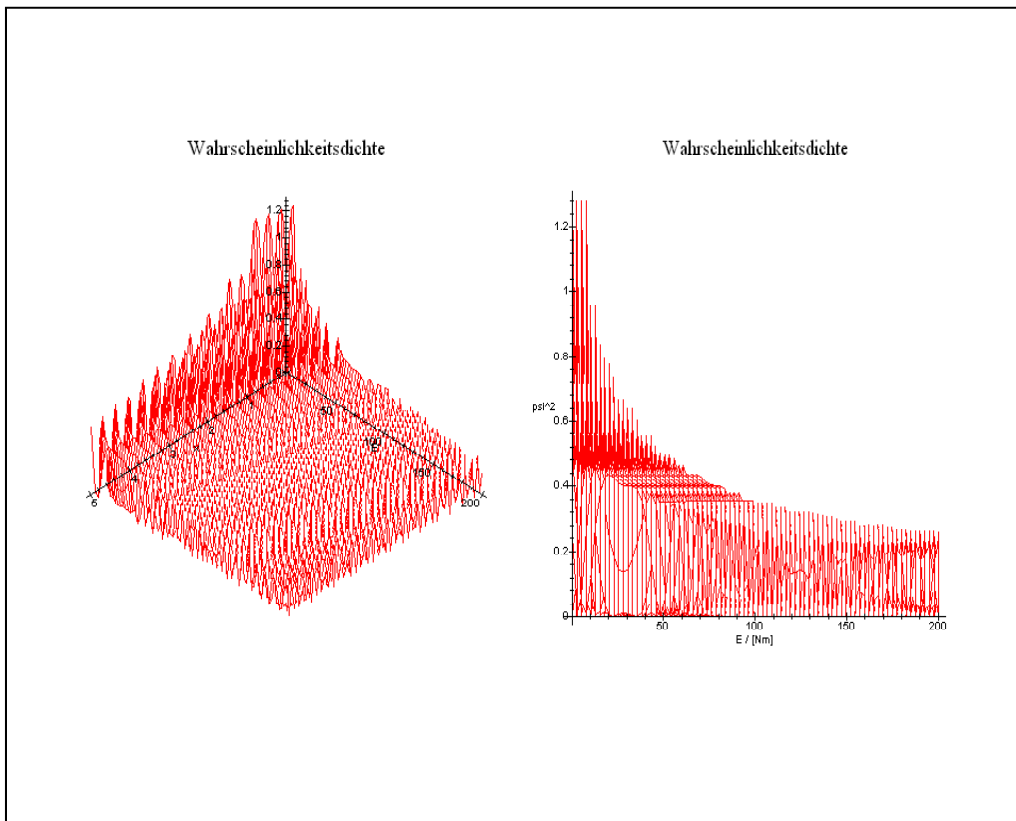


Figure 4: Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in Abhängigkeit von der Energie

Man kann erkennen, dass für jeden Energiewert mit zunehmendem Abstand vom Ursprung - also mit wachsenden x-Koordinaten - die Wahrscheinlichkeitsdichte abnimmt.

Wir können diesen Verhalten auch z. B. für  $E = 0$  oder  $E = 10 \text{ Nm}$  in einem Schnitt des obigen Graphen beobachten:

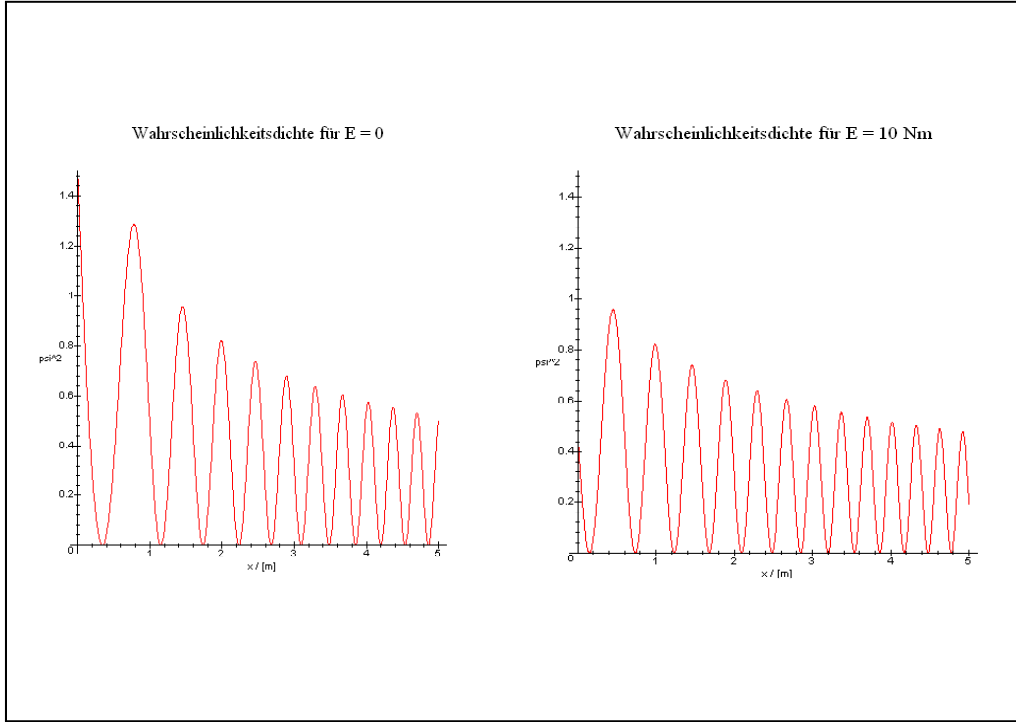


Figure 5: Schnitt durch die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für zwei Energiewerte.

Die Bewegung ist für alle  $x > 0$  möglich, aber die Wahrscheinlichkeitsdichte nimmt immer mehr ab. Dieses Verhalten der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ist nicht weiter verwunderlich. Die Wellenfunktion muss im Unendlichen verschwinden, um überhaupt physikalisch sinnvoll zu sein. Festzuhalten bleibt, dass die Bewegung auch in der quantenmechanischen Beschreibung bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann, damit stimmen klassische und quantenmechanische Beschreibung überein.

Es übersteigt den mathematischen Rahmen dieser Vorlesung, aber es lässt sich zeigen, dass für positive  $x$  die folgende Funktion mit wachsenden  $x > 0$  eine immer bessere Näherung zur ausgerechneten Wellenfunktion bildet:

$$\psi(x, E) \sim \frac{(2m)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\pi} F^{\frac{1}{6}} \hbar^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{\left( \left( x + \frac{E}{F} \right) \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\left( \frac{1}{3} \right)} \right)^{\frac{1}{4}}} \sin \left( \frac{2}{3} \left( \left( x + \frac{E}{F} \right) \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\left( \frac{1}{3} \right)} \right) + \frac{\pi}{4} \right) \quad (13)$$

Mit Maple lässt sich dies leicht zeigen, einen Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichten zeigt die folgende Abbildung:

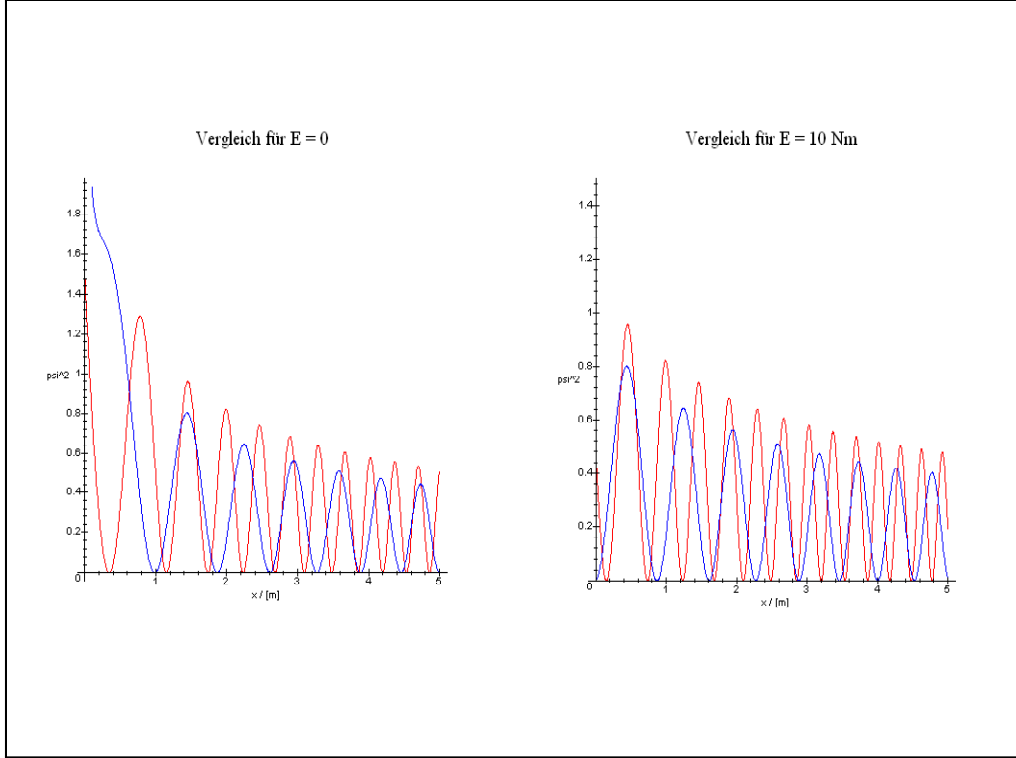


Figure 6: Vergleich zwischen exakter (rot) und genäherter Wahrscheinlichkeitsdichte (blau).

Die von Maple gelieferte Lösung ist nur im Bereich  $x > 0$  sinnvoll, es lässt sich aber auch eine Lösung für den Bereich  $x < 0$  angeben. Jedoch übersteigt die Herleitung über die BESSEL-Differenzialgleichung den mathematischen Rahmen dieser Vorlesung. Diese Lösung lässt sich wiederum annähern (ohne Beweis) durch die folgende Funktion:

$$\psi(x, E) \sim \frac{(2m)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\pi} F^{\frac{1}{6}} \hbar^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \left( \left( x + \frac{E}{F} \right) \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\left( \frac{1}{3} \right)} \right)} \cdot e^{-\frac{2}{3} \left( \left( x + \frac{E}{F} \right) \left( \frac{2mF}{\hbar^2} \right)^{\left( \frac{1}{3} \right)} \right)}, \quad x < 0 \quad (14)$$

Auch diese Funktion (14), bzw. ihr Betragsquadrat können wir leicht durch Maple auswerten:

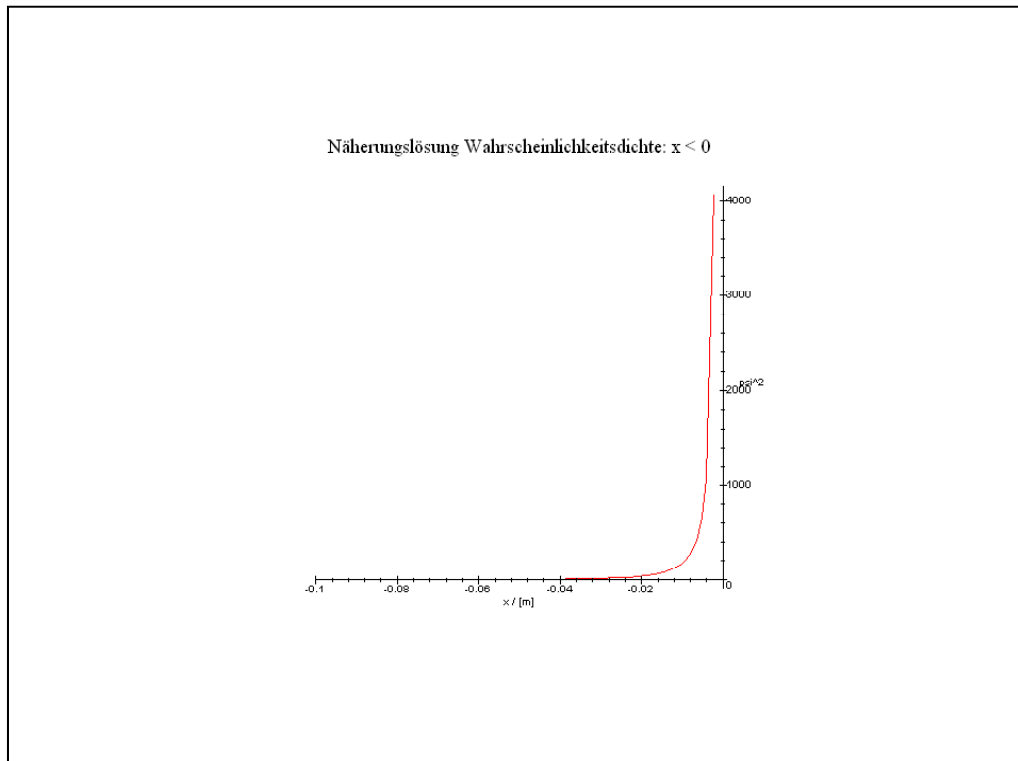


Figure 7: Näherungslösung der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Bereich  $x < 0$ .

Wir können wiederum den typischen quantenmechanischen Effekt des Eindringens in einen eigentlich klassisch verbotenen Bereich - schließlich wandert ein Elektron nicht Richtung Minuspol - beobachten!



## 2. BEWEGUNG EINES ELEKTRONS IN EINEM HOMOGENEN MAGNETFELD

**2.1. Klassische Beschreibung.** Zur klassischen Beschreibung der Bahn eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld gehen wir von der NEWTON-Bewegungsgleichung aus, wobei die auf das Teilchen wirkende Kraft die LORENTZ-Kraft des elektromagnetischen Felds ist:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = q \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (15)$$

diese Gleichung wird von Maple im Programm "QMVOl13Pr2.mws" für die Wahl von konstanten Feldern E und B ganz allgemein gelöst<sup>3</sup>.

Wir wählen dabei die folgenden Feld- und Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Maple liefert die folgenden Bewegungsgleichungen für die einzelnen Komponenten<sup>4</sup>:

$$\omega = \frac{q \cdot B_z}{m} \quad (19)$$

$$x(t) = x(0) + \frac{v_x(0)}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{v_y(0)}{\omega} - \frac{v_y(0)}{\omega} \cos(\omega t) \quad (20)$$

$$y(t) = y(0) - \frac{v_x(0)}{\omega} + \frac{v_x(0)}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_y(0)}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$z(t) = z(0) + v_z(0) \cdot t = 0$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen lässt sich eine **Kreisgleichung** konstruieren:

$$\left( x(t) - x(0) - \frac{v_y(0)}{\omega} \right)^2 + \left( y(t) - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega} \right)^2 = \frac{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}{\omega^2} =: R^2 \quad (21)$$

Das geladene Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn um den **Mittelpunkt**:

$$x_M : = -x(0) + \frac{v_y(0)}{\omega} \quad (22)$$

$$y_M : = y(0) - \frac{v_x(0)}{\omega}$$

<sup>3</sup>Mit einer Programmversion, die von Michael Komma stammt, siehe Komma: Moderne Physik mit Maple, Thomson Publishing 1996.

<sup>4</sup>Siehe Programm QMVOl13Pr2.mws.

Der Radius des Kreises lässt sich aus der Gesamtenergie ableiten. Sie ist natürlich eine Erhaltungsgröße der Bewegung:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( v_x(0)^2 + v_y(0)^2 \right) \quad (23)$$

Damit erhält man dann:

$$R_{klass.} = \sqrt{\frac{2E}{m \cdot \omega^2}} = \sqrt{\frac{2E}{q^2 \cdot B_z^2}} \quad (24)$$

mit anderen Worten, je schwächer das Magnetfeld ist, umso größer wird der Radius dieses Kreises. Je größer dagegen die Energie des Teilchens zu Beginn des Eintauchens in den Feldeinfluss ist, umso größer wird der Radius.

Ein Beispiel der Bahngleichung zeigt die folgende Abbildung:

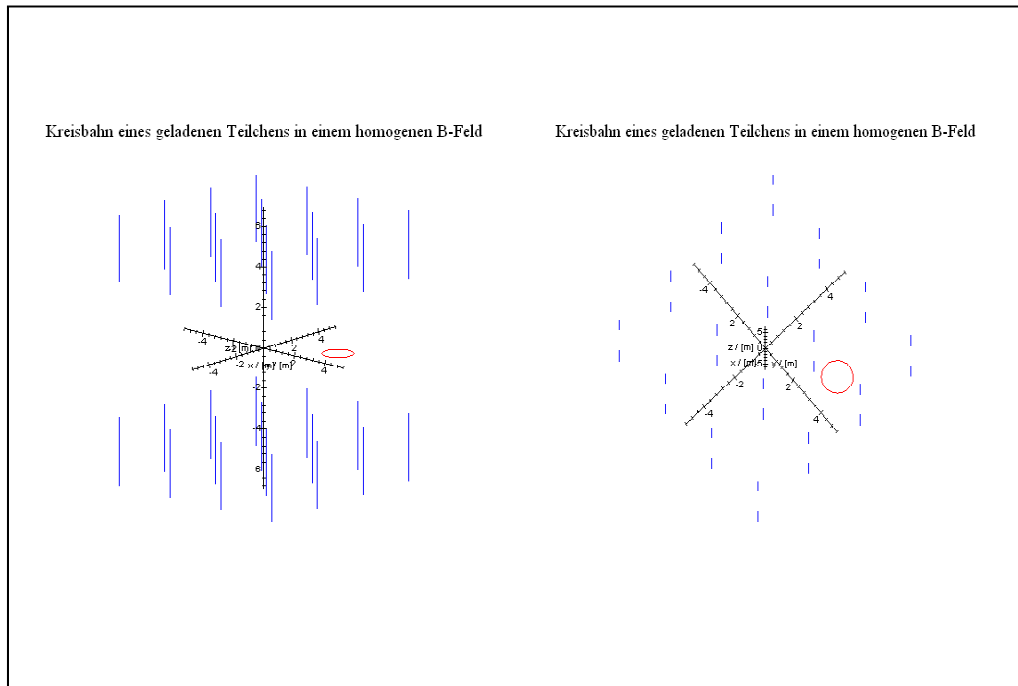


Figure 8: Kreisbahn eines geladenen Teilchens in einem homogenen B-Feld.

Betrachten wir nun noch einmal die von Maple errechneten Ergebnisse für die einzelnen Komponenten. Man kann erkennen, dass  $x$ - und  $y$ -Komponente harmonische Schwingungen durchlaufen. Im Folgenden soll nun für die  $y$ -Komponente die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte analog zum Vorgehen in der 10. Vorlesung zur Quantenmechanik entwickelt werden. Wir wählen für dieses Vorgehen die  $y$ -Komponente, da sie in der quantenmechanischen Beschreibung als Variable gewählt wird, die die Diskretisierung der Energie hervorruft.

Die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte errechnet sich aus<sup>5</sup>:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dt}{dy} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{v_y(y)} \cdot \frac{1}{T} \quad (25)$$

Maple liefert das folgende Ergebnis<sup>6</sup>:

$$v_y(t) = v_y(0) \cdot \cos(\omega t) - v_x(0) \cdot \sin(\omega t) \quad (26)$$

Beachtet man nun:

$$\begin{aligned} x(t) \cdot \omega - x(0) \cdot \omega - v_y(0) &= -v_y(0) \cdot \cos(\omega t) + v_x(0) \cdot \sin(\omega t) \\ &= -v_y(t) \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= -x(t) \cdot \omega + x(0) \cdot \omega + v_y(0) \\ &= \omega \sqrt{R^2 - \left(y - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2} - x(0) \cdot \omega - v_y(0) + x(0) \cdot \omega + v_y(0) \\ v_y(y) &= \omega \sqrt{R^2 - \left(y - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2} \end{aligned} \quad (27)$$

und damit erhält man für die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= \frac{1}{\omega \sqrt{R^2 - \left(y - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2}} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \\ \frac{dP}{dy} &= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{R^2 - \left(y - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2}} \end{aligned} \quad (28)$$

Die y-Komponente schwingt zwischen den Werten  $-R + y(0) - \frac{v_x(0)}{\omega}$  und  $R + y(0) - \frac{v_x(0)}{\omega}$ . Wir normieren sie auf Eins:

$$\int_{-R+y(0)-\frac{v_x(0)}{\omega}}^{R+y(0)-\frac{v_x(0)}{\omega}} \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{R^2 - \left(y - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2}} dy = \frac{1}{2} \quad (29)$$

wie im Programm QMVorl13Pr2.mws mit Maple verdeutlicht wird. Wir erhalten also die folgende **klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für die y-Komponente**:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{R^2 - \left(y - y(0) + \frac{v_x(0)}{\omega}\right)^2}} \quad (30)$$

<sup>5</sup>Siehe Skript 10 zur *Quantenmechanik*, Gleichung (17).

<sup>6</sup>Siehe Programm QMVorl14Pr2.mws.

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte<sup>7</sup>:

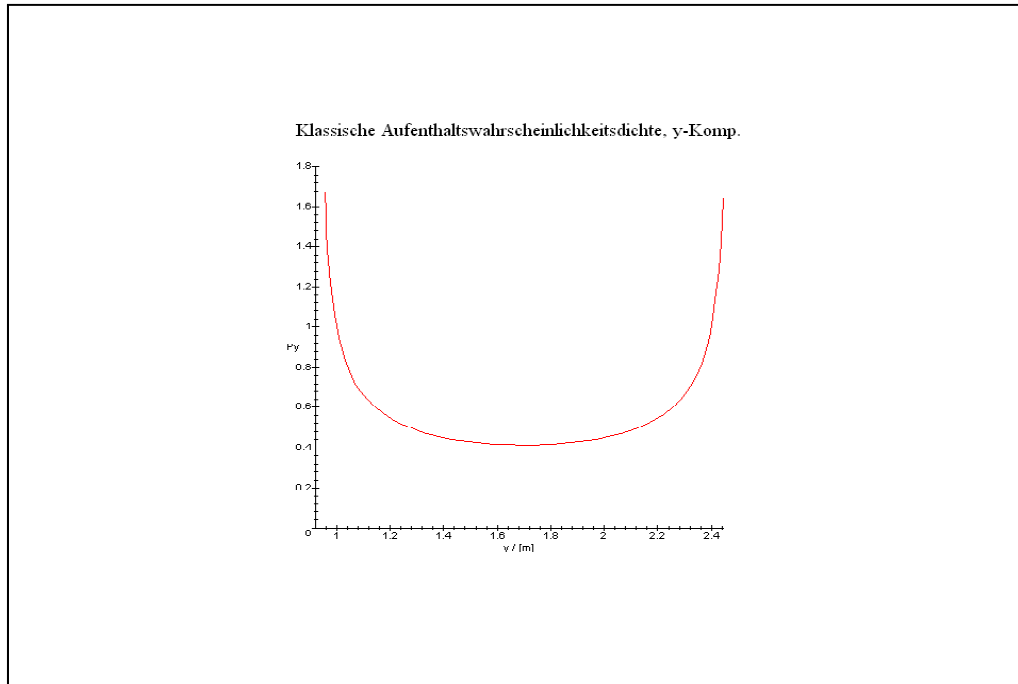


Figure 9: Klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

Wir erkennen natürlich das bekannte Bild, das wir schon in Vorlesung 11 kennengelernt haben, die Antreffwahrscheinlichkeit ist an den Umkehrpunkten der Schwingung am größten.

Betrachten wir nun die Situation unter quantenmechanischen Gesichtspunkten, d.h. unter Verwendung der SCHRÖDINGER-Gleichung. Dabei ist anzumerken, dass ihre Herleitung Kenntnisse über das Vektorpotenzial aus der Elektrodynamik, sowie Kenntnisse aus der theoretischen Mechanik<sup>8</sup> erfordert<sup>9</sup>.

<sup>7</sup> Siehe auch Skript 11 zur *Quantenmechanik*.

<sup>8</sup> Insbesondere die HAMILTON-Funktion eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld.

<sup>9</sup> Wer diese nicht besitzt, lasse sich nicht abschrecken, sondern nehme die Gleichung zur Kenntnis und betrachte insbesondere die von Maple errechneten Bilder und Animationen (in QMVor13Pr3.mws).

**2.2. Quantenmechanische Beschreibung - die LANDAU-Niveaus.** Die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein geladenes Teilchen  $q$  in einem Magnetfeld  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  hat die folgende Gestalt<sup>10</sup>:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x, y, z) - i\frac{\hbar q B_z}{mc}y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y, z) + \frac{q^2 B_z^2}{2mc^2}y^2\varphi(x, y, z) = E \cdot \varphi(x, y, z) \quad (31)$$

mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (32)$$

dem schon lange bekannten LAPLACE-Operator.

Es hat sich nun als zweckmäßig erwiesen, diese Gleichung mit dem folgenden **Ansatz** anzugehen:

$$\varphi(x, y, z) = e^{i\alpha \cdot x + i\beta \cdot z} \cdot f(y) \quad (33)$$

Dabei lässt sich zeigen - was aber über den Kenntnisstand in dieser Vorlesung hinaus geht - dass  $\alpha$  dem Impuls des Teilchens in  $x$ -Richtung und  $\beta$  dem Impuls in  $z$ -Richtung entspricht. Wir können uns dieses aber zumindest plausibel machen. Wir substituieren dazu den Wellenvektor:

$$\mathbf{k} := \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

und können damit den Ansatz auch schreiben als:

$$\varphi(x, y, z) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot f(y) \quad (34)$$

Der Ansatz ist also interpretierbar, als Welle, die die Funktion  $f(y)$  verschiebt. Der Impuls des Teilchens ergibt sich dabei nun über die DE BROGLIE-Beziehung:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \hbar \alpha \\ 0 \\ \hbar \beta \end{pmatrix} \quad (35)$$

Damit ist der erwähnte Zusammenhang zum Impuls zumindest plausibel dargestellt. Der Ansatz  $\sim e^{i\alpha x}$  scheint nun anzudeuten, dass das Teilchen sich in  $x$ -Richtung (also senkrecht zur Richtung des  $B$ -Feldes) frei bewegt und dass diese Bewegung mit einer kinetischen Energie  $\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$  verbunden ist. Diesen Aspekt werden wir am Ende noch einmal in einer Bemerkung betrachten. Betrachten wir den Ansatz, so können wir sofort erkennen, dass das Betragsquadrat nur von der Variable  $y$  bestimmt wird, denn es gilt:

$$|\varphi(x, y, z)|^2 = |f(y)|^2 \quad (36)$$

Aus diesem Grund betrachten wir im folgenden Beispiel auch nur den Realteil.

---

<sup>10</sup> Siehe z.B. in Greiner: Theoretische Physik Bd. 4, S.227 ff, insbesondere ab S.236.

Betrachte als Beispiel:

$$\varphi(x, y, z) = e^{ix+i0z} \cdot y^2$$

$$\operatorname{Re} \varphi(x, y, z) = y^2 \sin(x)$$

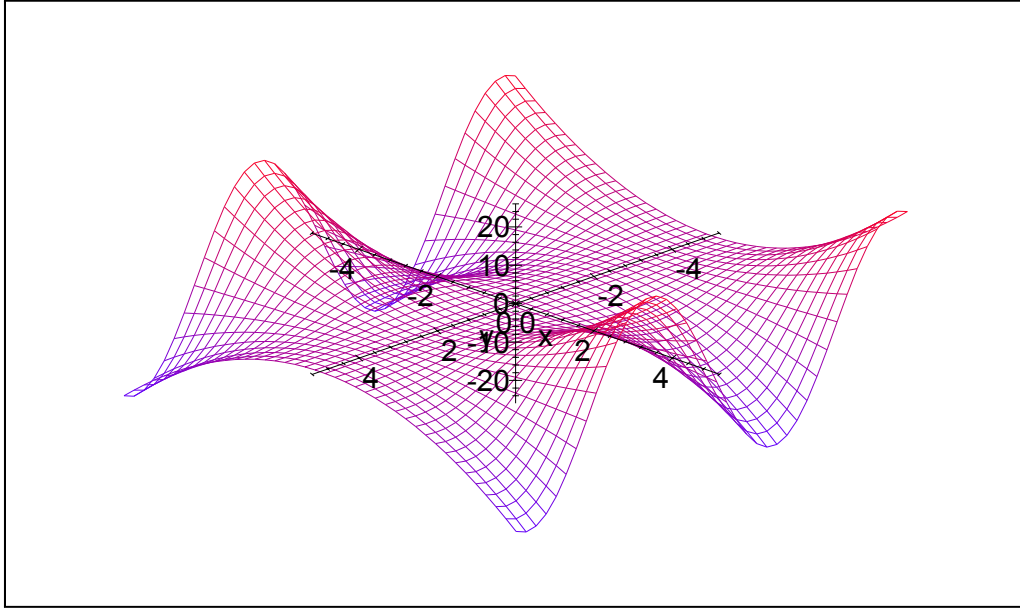


Figure 10: Realteil

Setzt man diesen Ansatz in die SCHRÖDINGER-Gleichung ein, so erhält man:

$$-\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} f(y) + f(y) \cdot \left\{ \frac{1}{2} y^2 \frac{q^2 B_z^2}{mc^2} + y \frac{\hbar q B_z \alpha c}{m} \right\} = f(y) \left\{ E - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \beta^2}{m} \right\} \quad (37)$$

Um dies zu vereinfachen, substituieren wir in der folgenden Weise:

$$\omega : = \frac{q B_z}{mc} \quad (38)$$

$$\varepsilon : = E - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \beta^2}{m}$$

$$y : = Y - \frac{\hbar c \alpha}{q B_z} = Y - \frac{\hbar \alpha}{m \omega} \Rightarrow dy^2 = dY^2$$

und erhalten dann mit:

$$\Phi(Y) := f(y) \quad (39)$$

die folgende Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dY^2} \Phi(Y) + \frac{1}{2} m \omega^2 Y^2 \cdot \Phi(Y) = \varepsilon \cdot \Phi(Y) \quad (40)$$

Diese Gleichung ist die uns schon bekannte SCHRÖDINGER-Gleichung des harmonischen Oszillators<sup>11</sup> und wir kennen die Lösung bereits<sup>12</sup>:

$$\Phi_n(Y) = c_n \cdot H_n\left(\frac{Y}{b}\right) e^{-\frac{Y^2}{2b^2}}, \quad b := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (41)$$

Der Koeffizient  $c_n$  lässt sich über die Normierung festlegen. Allgemein erhält man (ohne Beweis):

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n n!}} \quad (42)$$

Damit kennen wir aber auch bereits sofort die Energiewerte:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

und damit sofort:

$$E_n(\beta) = \varepsilon_n + \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \beta^2}{m} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \beta^2}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

Der erste Teil in diesem Ausdruck liefert die diskreten Energiewerte für die Bewegung senkrecht zum B-Feld. Man bezeichnet die entsprechenden Energieniveaus als **LANDAU-Niveaus**.

**Bemerkung:**

Diese Energiediskretisierung führt in einer das Niveau dieser Vorlesung überschreitenden Ableitung - über die FERMI-DIRAC-Statistik - zur Erklärung des Diamagnetismus von Metallen. Dabei versteht man unter dem Diamagnetismus von Metallen, die Eigenschaft der Metalle, dass sich unter Einfluss eines äußeren B-Feldes innerhalb des Metalls sich ebenfalls ein Magnetfeld - erzeugt von den Elektronen des Metalls - ausbildet, dass dem äußeren entgegenwirkt. Der Diamagnetismus wird oft von anderen magnetischen Eigenschaften überdeckt und ist für verschiedene Stoffe unterschiedlich stark ausgebildet, er kommt bei allen Stoffen aber vor. Die Erklärung über die LANDAU-Niveaus des harmonischen Oszillators gilt allerdings nur für Metalle.

Betrachten wir nun die Lösung eingehender und vergleichen sie mit der klassischen Lösung. Im klassischen Fall bewegt sich das Teilchen wie gesehen auf einem Kreis mit festem Mittelpunkt. Die in der quantenmechanischen Beschreibung vorkommende Größe  $\frac{\hbar\alpha}{m\omega}$  aus:

$$y = Y - \frac{\hbar c \alpha}{q B_z} = Y - \frac{\hbar \alpha}{m \omega} \quad (45)$$

entspricht dabei der klassischen y-Koordinate des Kreismittelpunkts:

$$y_M = y(0) - \frac{v_x(0)}{\omega_{\text{Klass}}} = y(0) - \frac{m v_x(0)}{q \cdot B_z} \sim y(0) - \frac{\alpha}{q \cdot B_z} \quad (46)$$

<sup>11</sup> Siehe Skript 11 *Quantenmechanik*.

<sup>12</sup> Siehe Gleichung (22), Skript 11 zur *Quantenmechanik*.

Da wir hier die stationären Lösungen berechnet haben, spielt ein Anfangsort  $y(0)$  quantenmechanisch hier keine Rolle.

Wir kennen bereits Darstellungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten des harmonischen Oszillators.

Betrachten wir im Folgenden deshalb die Veränderungen für eine feste Quantenzahl der Maxima bei wachsendem B-Feld und der Vorgabe<sup>13</sup>  $\alpha = 0$ :

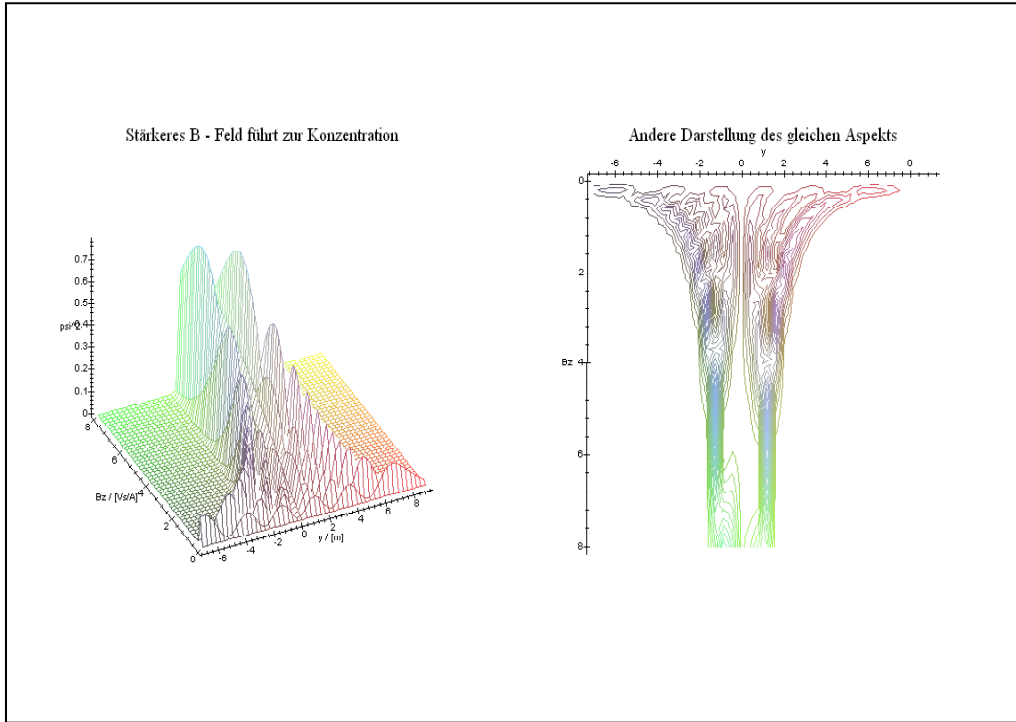


Figure 11: Konzentration der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in Abhängigkeit von der Stärke des B-Felds.

Man kann an der Darstellung sehr gut die Konzentration der Maxima der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte um die quantenmechanische Mittelpunktskoordinate:

$$y_0 = \frac{\hbar\alpha}{m\omega} \quad (47)$$

erkennen. Das stärker werdenden B-Feld verhindert ein zu weites Entfernen vom Mittelpunkt, mit anderen Worten einen zu großen Kreistradius. Genau dieses Ergebnis haben wir auch in der klassischen Darstellung erhalten!

Dabei ist zu beachten, dass im feldfreien Fall unabhängig von der Quantenzahl  $n$  gilt<sup>14</sup>:

$$\lim_{B \rightarrow 0} |\phi_n(y)|^2 = 0 \quad (48)$$

<sup>13</sup>Der quantenmechanische Mittelpunkt ist somit der Nullpunkt.

<sup>14</sup>Maple zeigt es für ein beliebiges  $n$  im Programm.



Es taucht also wieder die Frage nach dem Übergang zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik auf, die wir schon im Zusammenhang mit dem harmonischen Oszillator besprochen haben und die auch im folgenden und in einem realistischen Beispiel am Ende dieses Skripts aufgeriffen wird.

Setzen wir die Energiewerte des harmonischen Oszillators - den konstanten Anteil der sich aus  $\beta$  ergibt können wir vernachlässigen - in die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte ein und vergleichen sie mit der quantenmechanischen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte für wachsendes  $n$ , so erhalten wir die folgende Graphik:

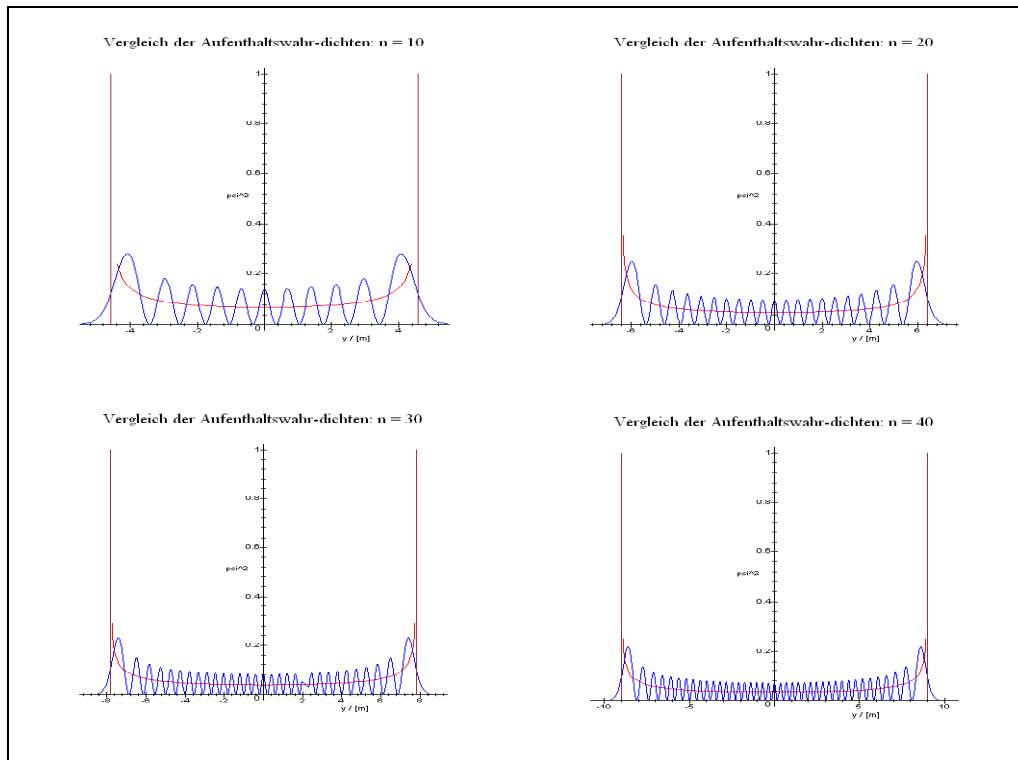


Figure 12: Vergleich zwischen klassischer und quantenmechanischer Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.

Wir kennen sie bereits aus der Diskussion des harmonischen Oszillators. Für wachsendes  $n$  nähern sich beide Wahrscheinlichkeitsdichten immer mehr einander an. Im Programm QMvorl13Pr3.mws ist dieser Prozess in einer Animation dargestellt, die sehenswert ist und die die Approximation der Wahrscheinlichkeitsaussagen der klassischen Mechanik durch die Quantenmechanik verdeutlicht.

Am Ende des Programms wird noch die Quantenzahl für einen realistischen Fall ausgerechnet. Es wird dort nämlich der Fall eines B-Feldes mit  $B_z = 0.01$  Tesla betrachtet, bei Vernachlässigung der Nullpunktsenergie rechnet Maple die folgende Quantenzahl aus:

$$n = 864013937 \quad (49)$$

Diese riesige Quantenzahl, die man für die Bewegung mit einem Radius von 1cm erhält, verdeutlicht, warum man in realistischen Fällen nicht auf quantenmechanische Aspekte stößt. Für diese riesige Zahl müssten die Bilder beider Wahrscheinlichkeitsdichten sehr ähnlich sein. Leider ist es jedoch mit Maple nicht möglich in diesem Falle die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte in endlicher Zeit zu berechnen.