

## Vorlesungen über Quantenmechanik - Vorlesung 15

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Wintersemester

ABSTRACT. In dieser zweiten Vorlesung zum H-Atom wird die historische Entwicklung der Atomphysik, beginnend mit altertümlichen Vorstellungen bis zum Spektrum des Wasserstoffs nachgezeichnet.

### 1. HISTORISCHE GRUNDLAGEN DER ATOMPHYSIK

**1.1. Vorstellungen vom Materieaufbau im Altertum.** Wir lernen heute in der Schule ganz selbstverständlich das Atom als Grundbaustein der Materie kennen und übernehmen ihn ganz selbstverständlich in unsere Erklärungen der Natur. Dass diese Vorstellung vom Aufbau der Materie eigentlich erst seit knapp 200 Jahre wissenschaftlich belegt ist und lange Zeit sehr umkämpft war, bleibt dabei oft im Hintergrund verborgen. An dieser Stelle soll nun ein kurzer geschichtlicher Rückblick stattfinden, der einen Eindruck des Ringens um die Verbindlichkeit des Atombegriffs und seines Inhalts vermitteln soll<sup>1</sup>.

Der erste Mensch, der die Vorstellung von kleinsten Teilchen als Grundbaustein der Materie hatte, war der griechische Philosoph DEMOKRIT von Abdera, der bis 370 v. Chr. lebte. Er behauptete, dass sich die komplexe Natur der Welt erklären ließe, wenn alle Dinge aus verschiedenen Arten von unwandelbaren Atomen zusammengesetzt wären. Jede Atomart sollte ihre eigene Form und Größe besitzen und sich in ständiger Bewegung befinden. Obwohl seine Theorie von anderen übernommen und ergänzt wurde, setzte sie sich aber nicht durch. Die Auffassung des ARISTOTELES, wonach alles was im Weltall existiert sich aus den vier "Elementen" Feuer, Erde, Wasser und Luft besteht, bestimmte über 2000 Jahre die Vorstellungen vom Aufbau der Materie.

**1.2. Der Atombegriff im 18. und 19. Jahrhundert.** Wohl benutzte man den Atombegriff auch schon im 17. Jahrhundert (BOYLE, NEWTON). Doch zu einem richtigen Bestandteil der wissenschaftlichen Diskussion wurde der Begriff des Atoms erst durch die Arbeiten des französischen Chemikers LAVOISIER, der die Frage erforschte, warum Substanzen brennen. Er entdeckte einige Elemente, reine chemische Substanzen, die sich nicht in andere chemische Substanzen zerlegt werden konnten und erkannte, dass Verbrennen ein Prozess ist, bei dem sich Luft mit anderen Elementen verbindet. In den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts war es dann DALTON, der die Rolle der Atome in der Chemie auf eine sichere Grundlage stellte.

---

<sup>1</sup>Ein sehr viel längere und gut lesbare Darstellung der historischen Zusammenhänge findet man z.B. in Gribbin, John: Auf der Suche nach Schrödingers Katze, Piper-Verlag 2000, ISBN 3-492-21353-7.

**1.3. Die Entdeckung des Elektrons.** J.J. THOMSON (1856 - 1940) entwarf in den 80iger Jahren des 19. Jahrhunderts ein Experiment, das darauf beruhte, die elektrischen und magnetischen Wirkungen auf ein sich bewegendes elektrisches Teilchen gegeneinander auszugleichen. Wie wir bereits wissen kann ein solches geladenes Teilchen sowohl von magnetischen als auch von elektrischen Feldern abgelenkt werden. Aus diesem Grund konstruierte THOMSON eine Appratur, die so beschaffen war, dass sich beide Kraftwirkungen auf das geladene Teilchen in ihrer Wirkung aufheben. Er erzeugte so einen elektrischen Strahl<sup>2</sup>, der von einer negativ geladenen Metallplatte (der Kathode) geradlinig auf einen Detektorschirm zulief. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte konnte THOMSON dann das Verhältnis der elektrischen Ladung eines Elektrons - wie man die Teilchen des Kathodenstrahls dann nannte - zu seiner Masse  $\frac{e}{m}$  dann berechnen. Welches Metall er auch als Kathode benutzte, stets erhielt er das gleiche Resultat. Er zog daraus den Schluss, dass Elektronen Teile von Atomen sind und dass, obwohl verschiedene Elemente aus unterschiedlichen Atomen bestehen, alle Atome identische Elektronen enthalten.

**1.4. Atomare Linienspektren<sup>3</sup>.** Die moderne Atomphysik, die dann schließlich zur Entwicklung der Quantenmechanik führte, begann dann mit der intensiven Untersuchung von Absorptions- und Emissionsspektren von Atomen. Bereits zum Ende des 19. Jahrhunderts waren viele grundlegende Tatsachen aus diesen spektroskopischen Untersuchungen bekannt. So zum Beispiel die Existenz und die Struktur von Linienspektren. Man beobachtete, dass Licht nur bei ganz bestimmten Frequenzen absorbiert oder emittiert wird. Das Linienspektrum des Wasserstoffs stellte sich im Vergleich zu anderen Elementen als einfachstes heraus und man erkannte frühzeitig, dass sich die verschiedenen gemessenen Wellenlängen in einfache Formeln für sogenannte Serien einordnen lassen. Sie sind nach ihren jeweiligen Entdeckern benannt:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), n = 2, 3, \dots \text{ LYMAN-Serie 1906, UV - Bereich} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right), n = 3, 4, \dots \text{ BALMER-Serie 1885, sichtbarer Bereich} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right), n = 4, 5, \dots \text{ PASCHEN-Serie 1908, infrarot-Bereich} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n^2}\right), n = 5, 6, \dots \text{ BRACKETT-Serie 1922, infrarot-Bereich} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{n^2}\right), n = 6, 7, \dots \text{ PFUND-Serie 1924, infrarot-Bereich} \quad (5)$$

---

<sup>2</sup>Einen so genannten Kathodenstrom, da er in einer evakuierten Röhre erzeugt wurde.

<sup>3</sup>Siehe z.B. in der sehr kompakten und gut lesbaren Darstellung von Lindström, G. und Langkau, R. : Quantenphysik, vieweg - Verlag 1998, ISBN 3-528-07283-0.

Betrachte dazu die folgende graphische Darstellung<sup>4</sup>:

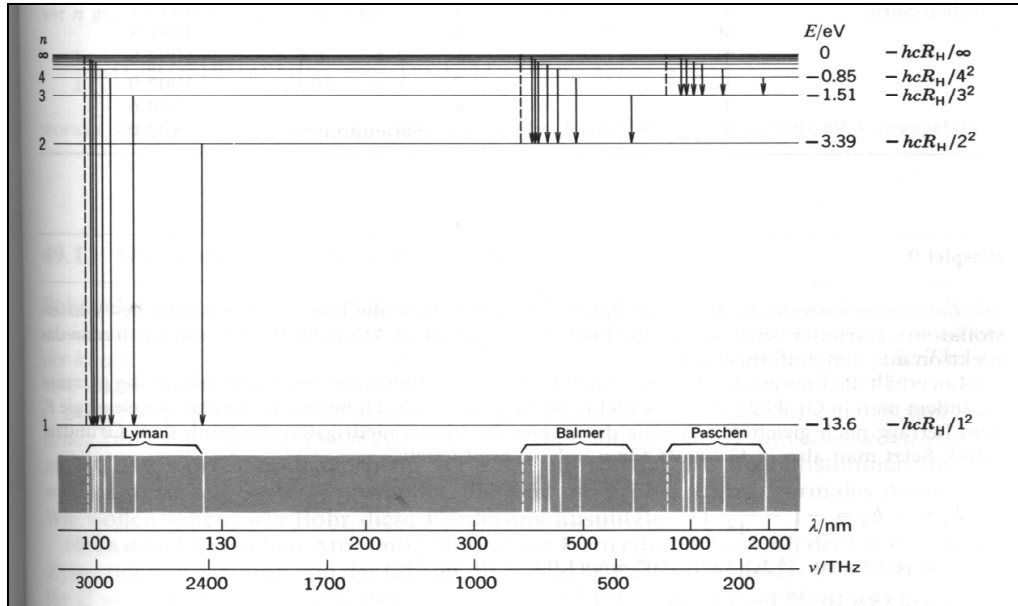


Figure 1: Atomare Linienspektren

Diesen spektroskopischen Sachverhalt kann man zusammenfassen in der **allgemeinen Serienformel für Wasserstoff-Spektrallinien** (BALMER 1910):

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), m = 1, 2, \dots; n = m + 1, m + 2, \dots \quad (6)$$

Ausnahmslos alle (auch später) gefundenen Spektrallinien konnten einer der nach dieser Formel berechneten Serien zugeordnet werden.

Die Seriengrenze jeder Serie erhält man für  $n \rightarrow \infty$ , als:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Grenze}}} = R_H \cdot \frac{1}{m^2} \quad (7)$$

Nach Gleichung (6) ist die in jeder Serienformel auftretende Proportionalitätskonstante  $R_H$  für alle Serien des Wasserstoffs eine universelle Konstante. Man nennt sie die **RYDBERG-Konstante für Wasserstoff**. Aus den sehr genau gemessenen Wellenlängen der einzelnen Spektrallinien hat man nach Gleichung (6) diese Konstante genau bestimmt:

$$R_H = 1.09678 \cdot 10^{-7} \frac{1}{m} \quad (8)$$

Eine befriedigende Theorie, die diese Beobachtungen erklären konnte existierte nicht und so wurden folgende Atommodelle vorgeschlagen, die diese seltsame Beobachtung der diskreten Linien erklären sollten.

<sup>4</sup>Aus Hallifay/ Resnick: Physik, de Gryter Verlag 1994.

**1.5. Das THOMSON-Atommodell (1903).** Zu dieser Zeit verfügte man bereits über die Erkenntnis, dass Elektronen Teil des Atoms sind<sup>5</sup>. Aufgrund der MAXWELL-Theorie und ihrer Bestätigung durch HERTZ war klar, dass die Elektronenbewegung im Atom für die Aussendung der Spektrallinien verantwortlich sein musste<sup>6</sup>. Man kannte weiter das "Atomgewicht" (die Massenzahl  $A$ ) und den Atomradius ( $\approx 10^{-10}m$ ). THOMSON errechnete, dass die Anzahl der Elektronen in einem Atom ungefähr gleich dem Atomgewicht sein musste. Da die Atome im Normalfall elektrisch neutral sind, müssen sie eine entsprechend gleich große positive Ladung beinhalten.

THOMSON nahm nun an, dass die positive Ladung des Atoms ( $+Ze$ ) gleichmäßig über das gesamte Atomvolumen verteilt ist<sup>7</sup> und dass die  $Z$  Elektronen im Grundzustand des Atoms<sup>8</sup> so darin verteilt sind, dass die potenzielle Energie hierfür minimal wird.

Man kann sich das Atom in diesem Modell als einen Rosinenkuchen vorstellen, wie es in der nächsten Abbildung gezeigt wird:

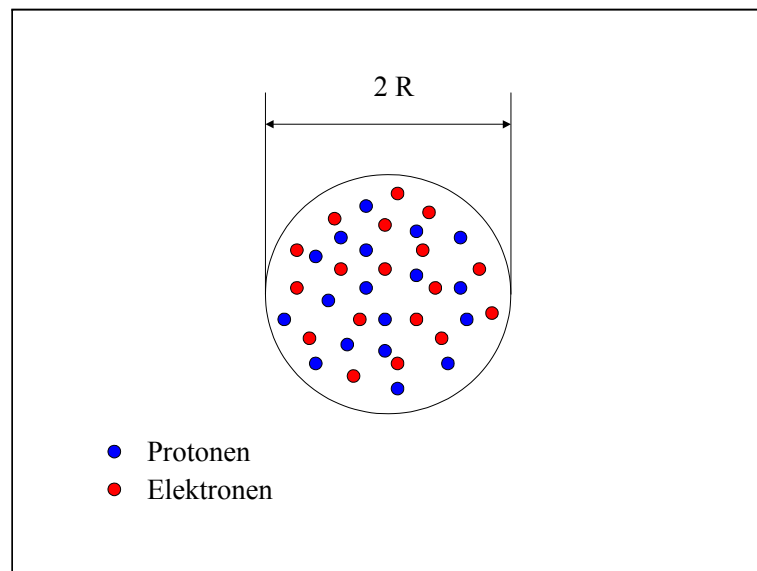


Figure 2: Zum Atommodell THOMSONs

Für die Ladungsdichte erhält man in diesem Modell:

$$\rho_- = \frac{Z \cdot (-e)}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \quad (9)$$

<sup>5</sup>Man kannte bereits den ZEEMAN-Effekt, auf den wir in einer der folgenden Vorlesungen noch eingehen werden, siehe Skript 19 zur *Quantenmechanik*.

<sup>6</sup>Siehe die Skripte 8 bis 11 zur *Einführung in die Quantenphysik*.

<sup>7</sup>Die positive Ladungsdichte  $\rho_+$  ist also konstant.

<sup>8</sup>Unter dem Grundzustand eines Atoms versteht man den energetisch niedrigsten Zustand bei  $T = 0K$ .

$$\rho_+ = \frac{Z \cdot (e)}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \quad (10)$$

Betrachten wir speziell das THOMSON-Modell des Wasserstoffs so erhält man:

$$\rho_+ = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$$

Lenkt man das Elektron des Wasserstoffs nun um den Abstand  $r < R$  vom Mittelpunkt aus der Gleichgewichtslage aus<sup>9</sup>, so wirkt auf dieses Elektron die Coulombkraft:

$$\begin{aligned} F_C &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_+ \frac{e}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{e}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} \frac{e}{r^2} \\ F_C &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3} r =: -D \cdot r \end{aligned} \quad (11)$$

Das Elektron führt also in diesem Modell eine harmonische Schwingung um den Mittelpunkt des Atoms mit der Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m \cdot R^3}} \quad (12)$$

Setzen wir nun die zu der Zeit schon bekannten Größen ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}} \cdot \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} As)^2}{9.1091 \cdot 10^{-31} kg \cdot (10^{-10} m)^3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\frac{W}{A}}{m}} \cdot \frac{(1.602 \cdot 10^{-19} As)^2}{9.1091 \cdot 10^{-31} kg \cdot (10^{-10} m)^3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\frac{kg \cdot m^3}{A \cdot s^3}}{A \cdot s^3}} \cdot \frac{(1.6022 \cdot 10^{-19} As)^2}{9.1091 \cdot 10^{-31} kg \cdot (10^{-10} m)^3}} \\ \omega &= 1.5915 \cdot 10^{16} \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (13)$$

Über  $c = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi}$  errechnen wir die dazu gehörende Wellenlänge:

$$\lambda = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{2\pi}{1.5915 \cdot 10^{16} \frac{1}{s}} = 0.1184 \cdot 10^{-6} m = 1184 \text{Å} \quad (14)$$

Man erhält damit nur den Übergang  $n = 2 \rightarrow n = 1$  aus der LYMAN-Serie:

$$\lambda_{2 \rightarrow 1} = 0.1216 \cdot 10^{-6} m = 1216 \text{Å} \quad (15)$$

im Rahmen der Messfehler.

Nach diesem Modell sollte es im krassen Widerspruch zu den experimentellen Daten nur eine einzige Spektrallinie des Wasserstoffs geben ! Das komplizierte Linienspektrum blieb völlig unverstanden. Andererseits war bei diesem Modell die zu fordernde Stabilität der Atome im Grundzustand kein Problem. Die entsprechenden Gleichgewichtslagen auch mehrerer Elektronen sind errechenbar.

<sup>9</sup>Durch Bestrahlung mit elektromagnetischer Strahlung, um ein Spektrum zu erhalten.

## 2. DAS RUTHERFORD-ATOMMODELL (1911)

Wir haben dieses Modell bereits kurz in der 12. Vorlesung *Einführung in die Quantenphysik* angesprochen. An dieser Stelle sollen diese Ergebnisse nun noch einmal vertiefend wiederholt werden.

RUTHERFORD führte 1911 Streuversuche mit  $\alpha$ -Teilchen (He-Kernen) an dünnen Folien aus schweren Elementen (z.B. Gold) durch. Die unter den verschiedenen Winkeln abgelenkten  $\alpha$ -Teilchen wurden gezählt daraus dann Rückschlüsse auf den atomaren Aufbau der Folie gezogen. Die folgende Abbildung zeigt den experimentellen Aufbau des RUTHERFORDschen Streuversuchs<sup>10</sup>

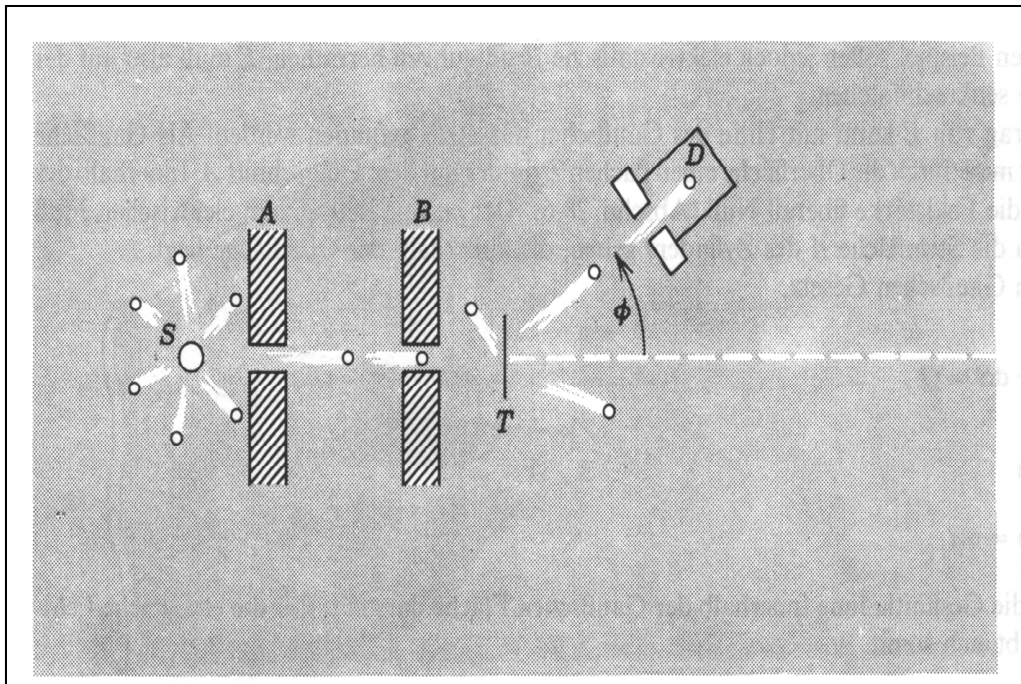


Figure 3: Experimenteller Aufbau des Streuversuchs

Die Ablenkwinkel der  $\alpha$ -Teilchen reichen von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$ , wobei der Ablenkwinkel  $0^\circ$  einem streifenden  $\alpha$ -Teilchen und der Winkel  $180^\circ$  einem frontalen Aufprall und anschließender Rückschleuderung entspricht.

<sup>10</sup> Ebenfalls entnommen aus Halliday/ Resnick: Physik

Die folgende Abbildung<sup>11</sup> zeigt die verschiedenen Wege der  $\alpha$ -Teilchen auf ihrem Weg durch die Folie:

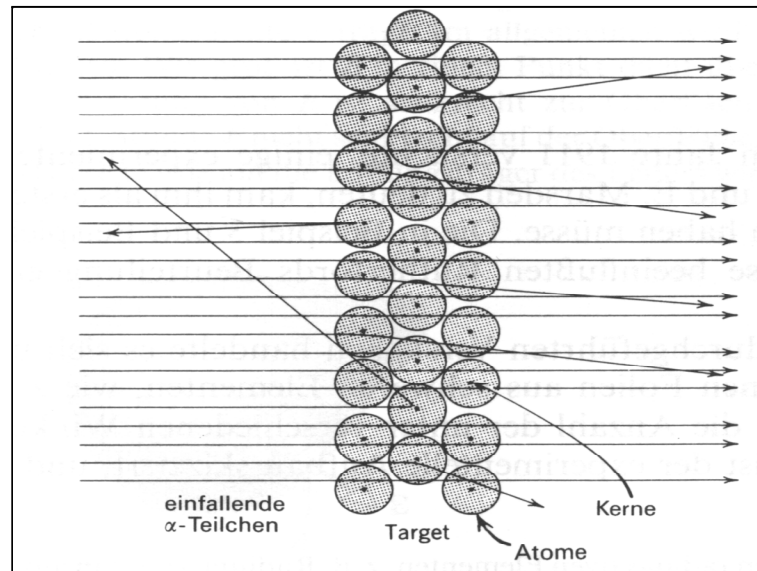


Figure 4: Mögliche Wege des  $\alpha$ -Teilchens durch die Goldfolie.

Die Elektronen sind zu leicht, um die Bewegung der He-Kerne ernsthaft zu behindern. Die Ablenkung der  $\alpha$ -Teilchen musste also durch die positiven Ladungen der Goldatome erfolgen. RUTHERFORD konnte durch seine Streuversuche das THOMSON-Modell widerlegen und stellte ein Planetenmodell des Atoms auf. In diesem Modell des Atoms ist die positive Ladung eines Atoms auf eine sehr kleine Kugel mit Radius  $10^{-14}\text{m}$  konzentriert. Um diesen Atomkern bewegen sich die Elektronen und nehmen ein größeres Kugelvolumen mit Radius  $10^{-10}\text{m}$  ein.

Mit dem RUTHERFORD-Atommodell konnten zwar die experimentellen Ergebnisse der  $\alpha$ -Streuung erklärt werden, es hatte aber einen entscheidenden Nachteil. In einer statischen Anordnung von positiv geladenem Kern und Elektronenhülle ist wegen der COULOMB-Anziehungskraft keine stabile Gleichgewichtsanordnung denkbar. Man nahm dann im Planetenmodell an, dass die Elektronen um den Atomkern kreisen, dabei entspricht die COULOMB-Kraft der Zentripetalkraft auf das Elektron:

$$-\frac{m_e v^2}{r} \mathbf{e}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (16)$$

#### Schwierigkeiten des Planetenmodells:

(a) Der Bahnradius  $r$  ist nicht eindeutig bestimmt, solange die kinetische Energie des Elektrons unbestimmt ist.

<sup>11</sup> Ebenfalls aus Halliday / Resnick: Physik entnommen

(b) Das System ist instabil, da ein kreisendes Elektron nach der klassischen Elektrodynamik<sup>12</sup> zur Abstrahlung von elektromagnetischer Energie führt. Das Elektron wird abgebremst und stürzt nach kurzer Zeit in den Kern.

---

<sup>12</sup>Siehe Skript 11 und 12 zur *Einführung in die Quantenphysik*.