

Einführung in die Quantenphysik - Vorlesung 15

JOCHEN GEPPERT / DIDAKTIK DER PHYSIK

Sommersemester

ABSTRACT. Beschrieben wird der 1922 von A. H. COMPTON entdeckte COMPTON-Effekt und seine Bedeutung für die Entwicklung der Quantenphysik.

1. DER COMPTON-EFFEKT

Der COMPTON-Effekt, der 1922 von COMPTON entdeckt wurde, lässt die Existenz von Photonen recht plausibel erscheinen¹.

Wenn Röntgenstrahlen einen Festkörper durchdringen, z. B. Graphit, wird ein Teil von ihnen in alle Richtungen gestreut. Diese Streustrahlung enthält zwei Komponenten. Die eine Komponente besitzt genau dieselbe Frequenz wie die einfallende Strahlung. Die andere Komponente, die uns hier interessieren wird, besitzt eine Frequenz, die etwas kleiner ist als die der einfallenden Strahlung:

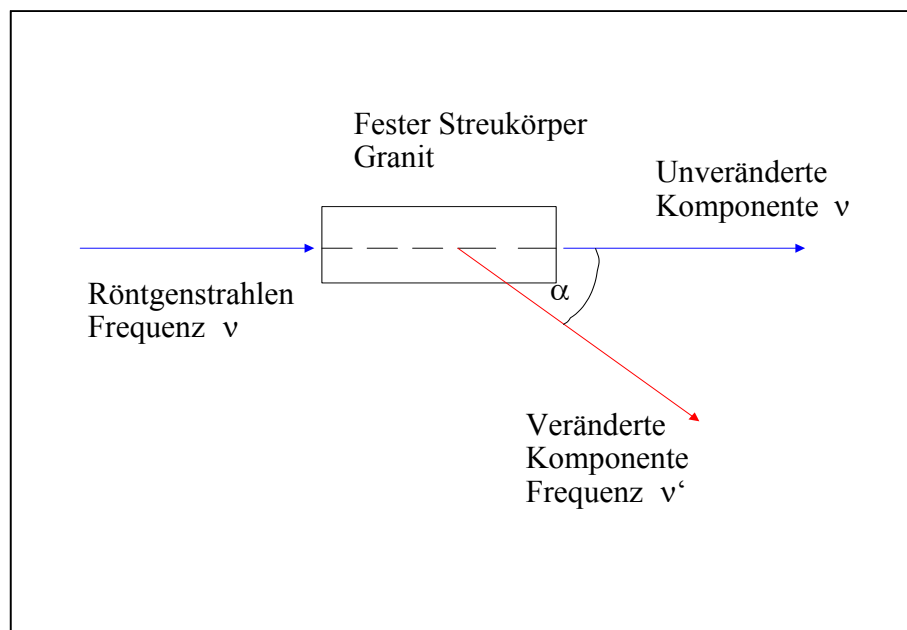


Figure 1:

Darüberhinaus beobachtet man, dass die Abnahme der Frequenz umso stärker ist, je größer der Streuwinkel α wird.

Nach der klassischen Wellentheorie werden die Elektronen durch die einfallende Welle

¹Beachte aber die Bemerkungen, die zum lichtelektrischen Effekt gemacht wurden.

zu erzwungenen Schwingungen veranlasst, um dann ihrerseits Strahlung zu emittieren². Es sollte deshalb erwartet werden, dass die Frequenz der gestreuten Strahlung mit der der einfallenden übereinstimmt³. Beobachtet wird jedoch in der gestreuten Strahlung neben der Wellenlänge λ_0 der einfallenden Welle eine zu größeren Werten hin verschobene Wellenlänge. Die Verschiebung hängt vom Streuwinkel ab und nimmt mit wachsendem Streuwinkel zu. Dabei wächst die Intensität - die Häufigkeit der Messwerte - der verschobenen Linie auf Kosten der nicht-verschobenen mit zunehmendem Streuwinkel an. Je größer also der Winkel α im Experiment, umso mehr Messwerte werden gemessen. COMPTON fand 1922/23, dass die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ zwischen der COMPTON-Linie und der Primärlinie⁴ nicht von der Wellenlänge λ_0 der einfallenden Strahlung und auch nicht von der Natur der Streusubstanz abhängt.

COMPTON beschrieb dies durch:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

$$\alpha : \text{Streuwinkel} \quad (2)$$

$$\lambda_C = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m COMPTON - Wellenlänge} \quad (3)$$

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} \quad (4)$$

Die Ordnungszahl der Streusubstanz⁵ hat allerdings Einfluss auf die Intensitäten⁶:

- die der verschobenen Linie fällt mit steigender Ordnungszahl (5)
- die der Primärlinie wächst mit steigender Ordnungszahl

Der COMPTON-Effekt lässt sich nur unter einer gewissen Annahme aus der klassischen Wellentheorie ableiten⁷ bzw. er lässt sich klassisch nicht verstehen. Verstehen kann man ihn aber, wenn man der Strahlung korpuskularen Charakter zuschreibt, d.h. mit Hilfe der Photonen-Vorstellung.

Danach handelt es sich bei diesem Streuprozess um einen elastischen, nicht-zentralen Stoß zwischen Photon und Elektron, bei der Energie- und Impulserhaltung gelten. Das Photon hat als Teilchen allerdings ganz besondere Eigenschaften. Da es sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, muss nach der Speziellen Relativitätstheorie seine Ruhmasse gleich Null sein und damit gilt für seine relativistische Energie:

$$E_{kin} = h\nu = \sqrt{c^2 p_r^2 + m^2 c^4}, \quad m = 0 \quad (6)$$

und für seinen Impuls folgt dann sofort:

$$p_r = \frac{h\nu}{c} \quad (7)$$

²Das Elektron wird somit durch die einfallende elektromagnetische Welle beschleunigt und strahlt somit wiederum eine elektromagnetische Welle ab - siehe Skript zur Vorlesung 10 Einführung in die Quantenphysik.

³Siehe hierzu insbesondere das Skript zur Vorlesung 8 zur Einführung in die Quantenphysik.

⁴Gemeint ist die Linie der einfallenden Strahlung.

⁵D. h. die Zahl, die angibt, wieviele Protonen bzw. Elektronen ein Atom der Streusubstanz besitzt.

⁶Unter der Intensität kann man sich die Häufigkeit der Messwerte vorstellen.

⁷Diese Annahme wird allerdings auch künstlich aufgepropft - siehe die Bemerkung am Ende der Vorlesung.

Betrachte das folgende Bild:

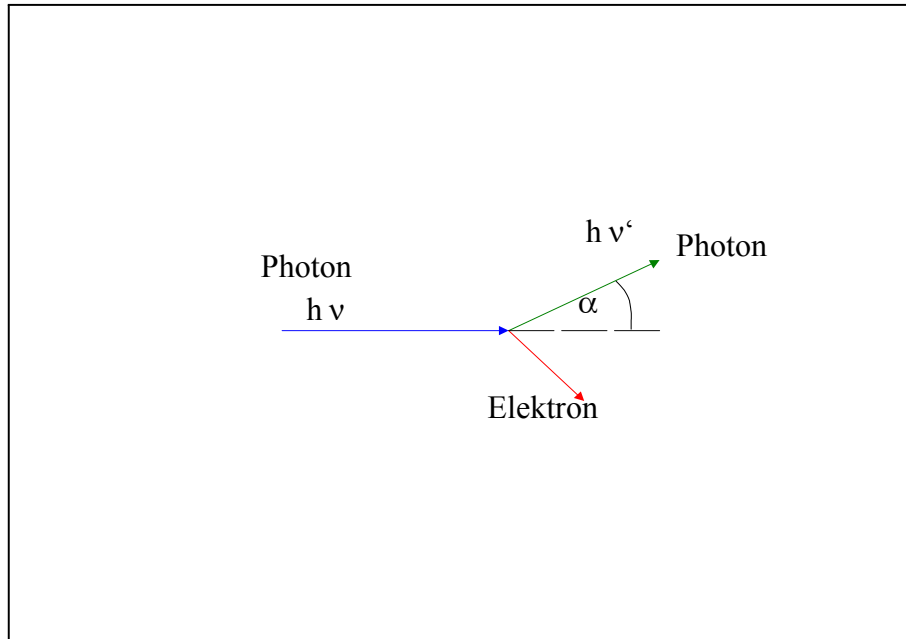


Figure 2:

Man muss im "Photonenbild" den ganzen Prozess der COMPTON-Streuung relativistisch rechnen. Da diese Rechenmethode hier nicht vorausgesetzt werden kann, verzichten wir auf die ganze Herleitung. λ_C setzt sich nach dieser Herleitung aus drei Fundamentalkonstanten zusammen - siehe Gleichung (4) - und hat die Dimension einer Länge. Die Wellenlängenänderung als Ergebnis dieser Herleitung hängt nach:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C \cdot (1 - \cos \alpha)$$

nicht von der Wellenlänge λ_0 der Primärstrahlung ab, wie man auch experimentell feststellt. Die Tatsache, dass die Elektronen vor dem Stoß nicht in Ruhe sind⁸, sondern relativ zur Einfallsrichtung der Photonen statistisch verteilte Anfangsimpulse aufweisen, bedingt eine Verbreiterung der COMPTON-Linie. Dies kommt hauptsächlich durch den Doppler-Effekt zustande, den wir hier nicht weiter besprechen. Festzuhalten bleibt, dass dieses Verhalten keinen Widerspruch zur Theorie bildet.

⁸Dies wird bei der relativistischen Herleitung angenommen - man stelle sich das ganze als Billardspiel mit einem Photon und einem ruhenden Elektron vor.

Unter einer Verbreiterung kann man sich folgendes vorstellen:

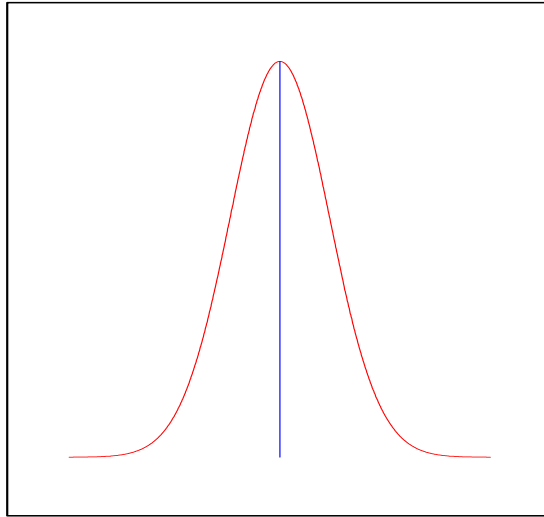


Figure 3:

Es bleibt eigentlich nur noch zu klären, wie die unverschobene Linie der gestreuten Strahlung zustande kommt. Um den COMPTON-Effekt experimentell gut beobachten zu können, muss man Substanzen mit kleiner Elektronenbindungsenergie verwenden. Diese muss nämlich gegenüber der primären Photonenenergie vernachlässigbar sein. Dies ist bei schwach gebundenen Elektronen in leichten Atomen durchaus der Fall. Bei den schwereren Atomen sind jedoch insbesondere die inneren Elektronen so stark gebunden, dass dann das Photon bei einem Stoßprozess Energie und Impuls mit dem gesamten Atom austauscht. Wegen dessen vergleichsweise sehr großen Masse wird das Photon bei einem Stoß nach den Gesetzen der klassischen Mechanik⁹ überhaupt keine Energie mit dem Atom austauschen¹⁰. Also bleiben $h\nu_0$ und λ_0 bei der Strahlung / Streuung unverändert.

Bei leichten Atomen dagegen können praktisch alle Elektronen als schwach gebunden gelten, bei den schwereren Atomen nur die, die sich in äußeren Schalen bewegen. Deswegen nimmt mit wachsender Ordnungszahl¹¹ unter den sonst gleichen experimentellen Bedingungen die Intensität der verschobenen gegenüber der unverschobenen ab.

⁹Man beachte, dass diese "neuen" Teilchen, dann wieder klassisch in ihrem Verhalten interpretiert werden - das ruft eigentlich schon nach einer neuen Theorie, die ja dann auch mit der Quantenelektrodynamik entwickelt wurde.

¹⁰Man denke wiederum an das Billardspiel, wo eine leichte Kugel frontal auf eine sehr schwere trifft, sie prallt ab und läuft zurück - ohne dass die schwere Kugel sich überhaupt bewegt hätte.

¹¹Die Atome werden also schwerer.

BEMERKUNGEN:

1. Der COMPTON-Effekt lässt sich auch im klassischen Wellenbild beschreiben¹². Man muss allerdings die natürlich klassisch auch überhaupt nicht verständliche Annahme machen, dass das durch die äußere einfallende elektrodynamische Welle in Schwingungen versetzte Elektron nur dann Energie abstrahlt, wenn es eine bestimmte Grundgeschwindigkeit erreicht. Diese Geschwindigkeit sei v . v ist die Geschwindigkeit, die ein Elektron besitzt, wenn es klassisch berechnet die Energie $h\nu$ gestreut (abgestrahlt) hat. Man müsste nämlich sonst ein "Beschleunigungsspektrum" erkennen können, dass das beschleunigte Elektron aussendet, bevor es die Geschwindigkeit v erreicht.
2. Heute wird, wie bereits angedeutet, eine Erklärung aus der auf die Quantenphysik aufbauenden Quantenelektrodynamik verwendet.
3. Es gibt einen wichtigen Unterschied zwischen dem Photoeffekt und dem COMPTON-Effekt. Beim photoelektrischen Effekt, wie er auch genannt wird, verschwindet das Photon vollständig und seine gesamte Energie wird an das Photoelektron abgegeben. Beim COMPTON-Effekt gibt es nach dem Zusammenstoß noch ein Photon, aber seine Frequenz ist kleiner als die des einfallenden Photons. Ein Teil der Energie des einfallenden Photons ist an das COMPTON-Elektron abgegeben worden.
4. Die theoretische Beschreibung beider experimentellen Ergebnisse - des lichtelektrischen wie auch des COMPTON-Effekts - lassen erkennen, dass man den Prozess der Absorption bzw. der Emission der Energie einer elektromagnetischen Welle gut durch das Photonenmodell beschreiben kann. Die Energie einer elektromagnetischen Welle wird gequantelt absorbiert bzw. emittiert. Den Transport der Energie einer elektromagnetischen Welle kann dagegen gut im Wellenmodell beschrieben werden.

2. DIE MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG EINES PHOTONS

Maple-Programm: QPVor15Pr1 (Endliche Wellenpakete)

Durch die besprochenen experimentellen Ergebnisse war man also gezwungen die Energie einer elektromagnetischen Welle - im völligen Widerspruch zur klassischen Vorstellung - als in räumlich zentrierte Pakete (Quanten) gebündelt zu beschreiben. In der 6. Vorlesung zur Einführung in die Quantenphysik wurden Wellenpakete als Lösung der MAXWELL-Gleichung besprochen.

¹²Nach der klassischen Wellentheorie würde man auch eine Frequenzverschiebung erwarten. Berechnet man das Verhalten eines anfangs ruhenden Elektrons, das einer elektromagnetischen Welle ausgesetzt ist, so wissen wir bereits aus dem Modell in Vorlesung 10, dass dieses Elektron zu Schwingungen angeregt wird. Das bedeutet aber, dass das Elektron aus seiner anfänglichen Ruhelage heraus beschleunigt wird. Die Maxwell-Theorie sagt dann weiter aus, dass beschleunigte Elektronen (wie auch andere beschleunigte Ladungsmengen) wiederum elektromagnetische Wellen abstrahlen. Diese resultierende Streustrahlung hat aber wegen des Dopplereffekts eine verschobene Frequenz, je nach dem, ob das schwingende Elektron sich auf den Beobachter zu bewegt oder von ihm weg. Die Dopplerverschiebung hat aber keinen festen Wert, sondern sollte mit der Zeit zunehmen. Man würde also nicht zwei scharfe Maxima, wie im Experiment festgestellt, sondern eine breite Kurve erwarten. Dies stellt einen scharfen Widerspruch zum Experiment dar und kann nur durch die obige Zusatzannahme vermieden werden, die damit allerdings auch völlig ohne Anbindung an die klassische Theorie eingeführt wird.

Die Gesamtenergie einer ebenen Welle:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{z=-\infty}^{\infty} \langle u_{em} \rangle \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

ist unendlich¹³. Diese Wellenform ist somit ein unrealistisches Modell. Tatsächlich gibt es nur endliche Wellenpakete. Diese können als Überlagerung von ebenen Wellen dargestellt werden.

Unter einem endlichen Wellenpaket versteht man eine Überlagerung von ebenen Wellen:

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(k_i x - \omega_i t) \quad , \quad \omega_i = c \cdot k_i \quad , \quad k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \quad (8)$$

bzw.

$$\psi(x, t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} a(k) \cos(kx - \omega t) dk \quad (9)$$

im kontinuierlichen Fall.

Beispiel: Endliche Überlagerung mit $N = 40$

Im folgenden wurde

$$N = 40 \quad , \quad a_i = 1 \quad , \quad k_i = 1 + 0.1i \quad \text{und} \quad c = 1$$

gesetzt. Man erhält die folgende zeitliche Entwicklung dieses Wellenpakets:

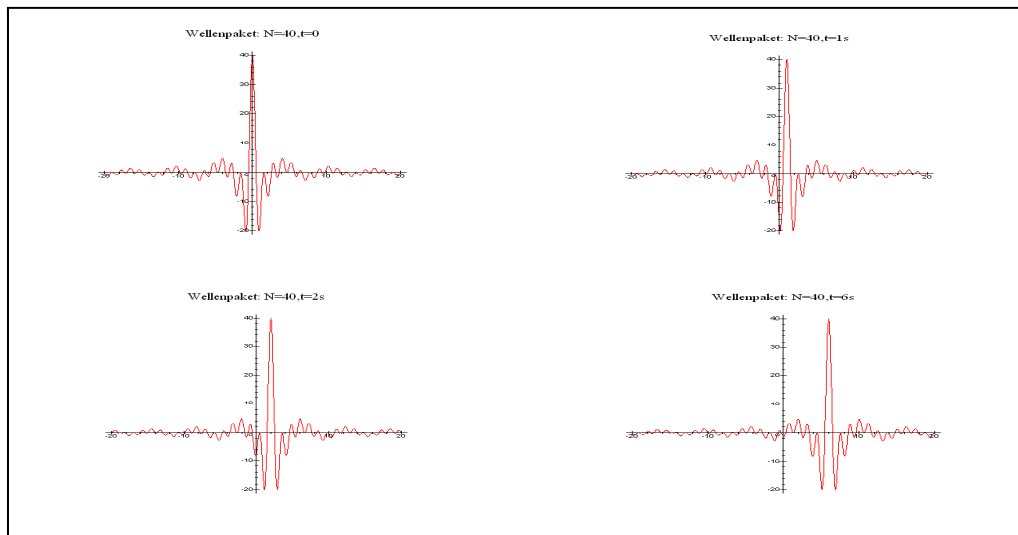


Figure 4: Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets aus 40 Elementarwellen.

¹³ In dieser Formel ist $\langle u_{em} \rangle$ die zeitgemittelte Energiedichte der elektromagnetischen Welle - siehe Skript 10, Formel (13).

Überlagert man $N = 80$ Wellen des gleichen Typs, so ist die Zentrierung auf einen kleinen Ortsbereich noch deutlicher zu erkennen:

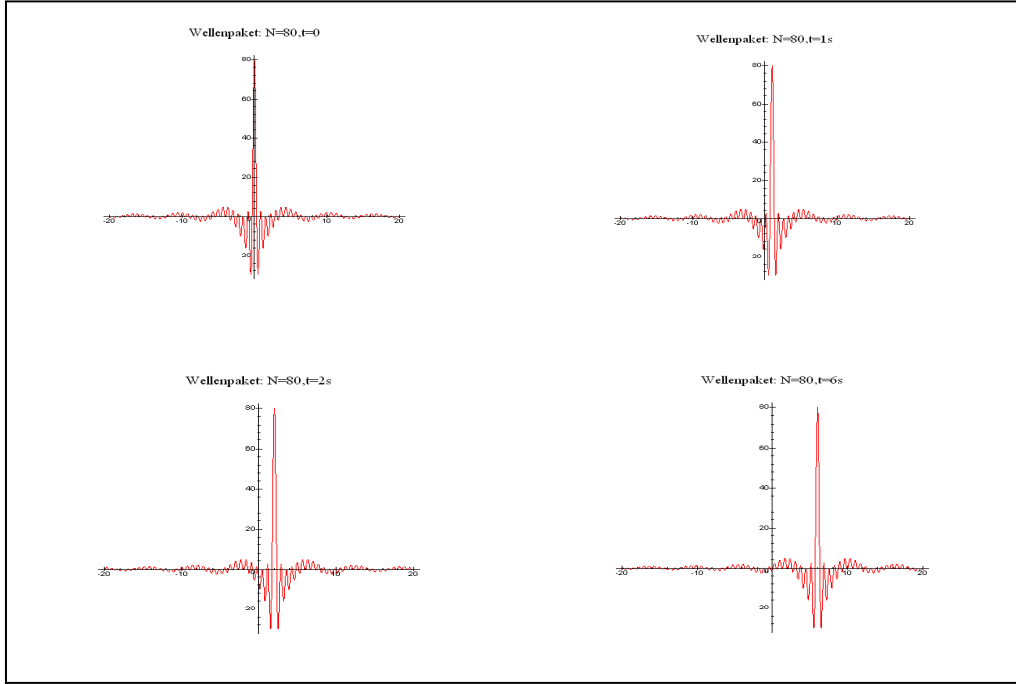


Figure 5: Zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets aus 80 Elementarwellen.

Eine Animation der beiden Wellenpakete wird im Programm gezeigt.

Natürlich kann man auf diese Weise auch endliche vektorielle Wellenpakete bilden.

Beispiel: *Vektorielles Wellenpaket bestehend aus einer endlichen Zahl von ebenen Wellen*

Im folgenden einfachen Beispiel wird ein vektorielles Wellenpaket der Form:

$$\mathbf{E}(r, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(k_i x - \omega_i t) \\ E_{0y} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(k_i x - \omega_i t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_{0y} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(k_i x - \omega_i t) \\ E_{0x} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(k_i x - \omega_i t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

betrachtet.

Man erhält dann die folgende zeitliche Entwicklung dieses Wellenpakets:

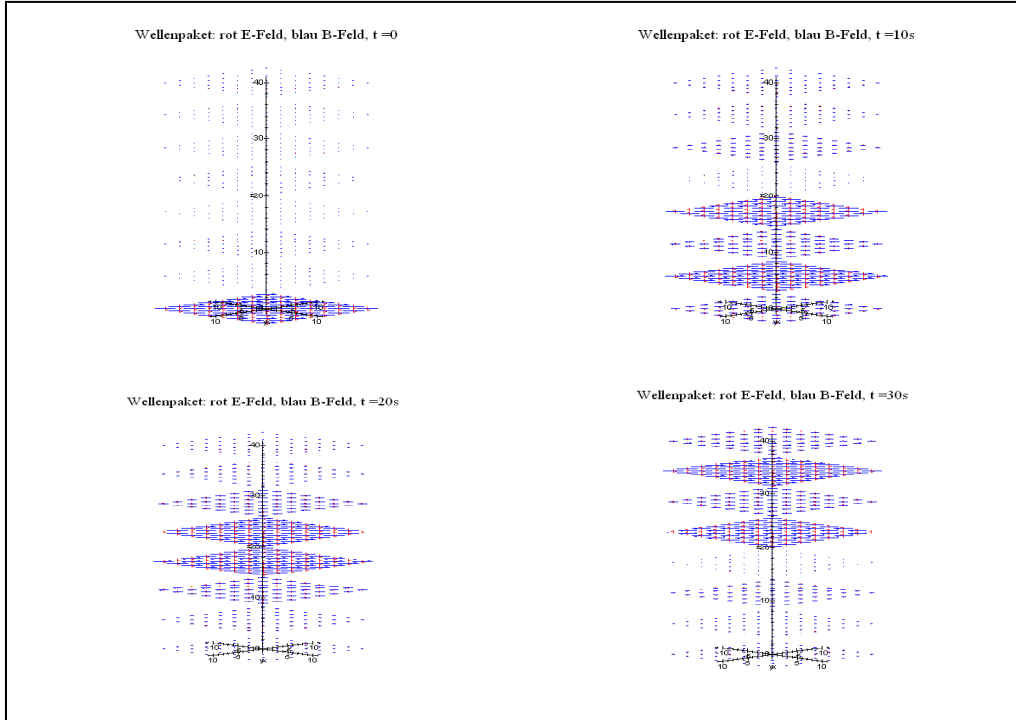


Figure 6: Vektoriellles Wellenpaket: Man kann erkennen, dass sich der "Schwerpunkt" des Pakets in z-Richtung bewegt.

Die Ausdehnung des Wellenpakets ist in der z-Achse auf einen endlichen Bereich beschränkt, während es in den beiden anderen Dimensionen unendlich ausgedehnt ist. Eine bessere Beschränkung z.B. in der z-Richtung erhält man durch eine kontinuierliche Überlagerung ebener Wellen¹⁴:

$$H_{\pm}(z, t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} b(k) e^{i(kz \pm \omega t)} dk \quad (12)$$

wobei wir die Gauss-Funktion als Gewichtsfunktion wählen:

$$b(k) = \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}} \quad (13)$$

¹⁴Siehe Skript zur Vorlesung 6 zur Einführung in die Quantenphysik.

Das elektromagnetische Feld eines sich in z-Richtung ausbreitenden Wellenpakets hat dann z.B. die folgende Gestalt:

$$\mathbf{E}(r, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}} \cdot e^{i(kz \pm \omega t)} dk \\ E_{0y} \cdot \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}} \cdot e^{i(kz \pm \omega t)} dk \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = \begin{pmatrix} -E_{0y} \cdot \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}} \cdot e^{i(kz \pm \omega t)} dk \\ E_{0x} \cdot \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\Delta k_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k_0^2}} \cdot e^{i(kz \pm \omega t)} dk \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

In diesem Fall erhält man die folgende zeitliche Entwicklung¹⁵:

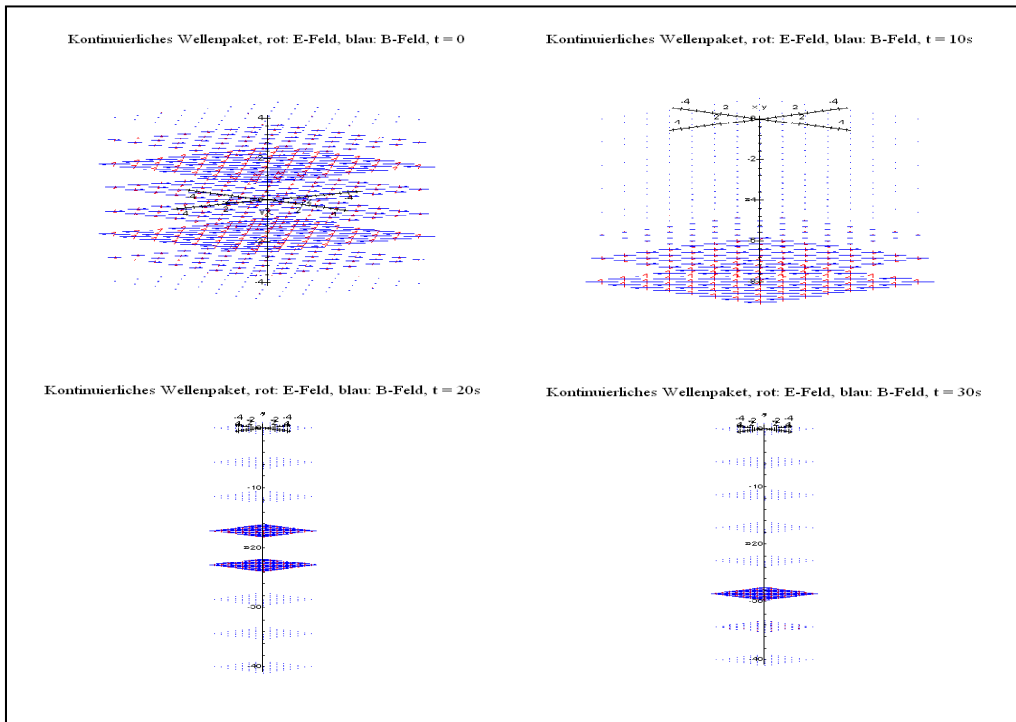


Figure 7: Kontinuierliches Wellenpaket. Man kann erkennen, dass die Ausdehnung in z-Richtung kleiner ist, als im Falle der endlichen Überlagerung.

Ein Wellenpaket ist nicht mehr strikt monochromatisch. Die räumliche Begrenzung

¹⁵Man betrachte ebenfalls die Animation im Programm!

führt zu einer Unschärfe in der Frequenz¹⁶. So führt für ein eindimensionales Wellenpaket eine räumliche Begrenzung der Länge l zu einer Frequenzunschärfe der Größe:

$$\Delta\nu \approx \nu_0 \cdot \frac{\lambda}{l}, \quad \nu_0 = c \cdot \frac{k_0}{2\pi} \quad (16)$$

Eine ebene Welle der Frequenz ν_0 erfährt durch die Paketbildung eine Frequenzverschiebung der Art:

$$\nu_0 \pm \Delta\nu$$

Beispiel:

Durch die folgende Gewichtsfunktion:

$$b(k) = \frac{2}{\Delta k \sqrt{\pi}} e^{\left(-\frac{4(k-k_0)^2}{\Delta k^2}\right)} \quad (17)$$

entsteht eine GAUSS-Wellenpaket um die Frequenz $\nu_0 = c \cdot \frac{k_0}{2\pi}$, dessen Breite über $\Delta\nu = c \cdot \frac{\Delta k}{2\pi}$ gesteuert werden kann¹⁷.

Je enger man als das Wellenpaket räumlich "packt", umso größer ist die Unschärfe in der Frequenz! Sie ist jedoch klein, wenn die Ausdehnung l des Wellenpakets viel größer ist als die Wellenlänge λ . In diesem Fall kann das Wellenpaket für viele Zwecke durch eine ebene monochromatische Welle, mit der man dann einfacher rechnen kann, ersetzt werden.

Als **Modell eines Photons** setzt man nun ein kontinuierliches Wellenpaket mit der Energie:

$$h\nu = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{z=-\infty}^{\infty} \langle u_{em} \rangle \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (18)$$

wobei $\langle u_{em} \rangle$ die zeitgemittelte Energiedichte des Wellenpakets ist.

¹⁶In unserem Beispiel hier nur in einer Dimension, da wir nur eine k -Dimension betrachtet haben. Eine Ausdehnung auf zwei- bzw. dreidimensionale Wellenpakete führt dann auch zu Begrenzungen in allen drei Raumrichtungen.

¹⁷Wobei wie bereits in Skript 6 zur *Einführung zur Quantenphysik* gezeigt wurde, dass eine scharfe Verteilung im k -Raum - entspricht einer scharfen Frequenz des Wellenpakets - einer breiten Verteilung im Ortsraum entspricht.