

**Modellierung und optimale Steuerung  
piezoelektrisch aktuierter Einspritzventile**

**Vom Fachbereich 12 Elektrotechnik und Informatik  
der Universität Siegen  
zur Erlangung des akademischen Grades**

**Doktor der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)**

**genehmigte Dissertation**

**von  
Diplom-Ingenieur Dirk Mehlfeldt**

- 1. Gutachter: Dr.-Ing. habil. Günter Stöhr**
- 2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Köhne**

**Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juni 2006**

E-Mail: [dirk@mehlfeldt.de](mailto:dirk@mehlfeldt.de)

Uniform Resource Name: [urn:nbn:de:hbz:467-2209](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-2209)

# Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie meinem hochschulseitigen Betreuer, Herrn Dr.-Ing. habil. Günter Stöhr, der freundlicherweise die Betreuung dieser Arbeit übernommen hat und mir in zahlreichen fruchtbaren und ermutigenden Diskussionen wertvolle Impulse bot. Auch meinem Zweitgutachter, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Köhne, bin ich für seinen fachlich wegweisenden Rat sehr dankbar.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Anstellung in verschiedenen Abteilungen der DAIMLERCHRYSLER AG in Stuttgart. Meinen Vorgesetzten Herrn Volker Wilhelmi, Frau Anke Kleinschmit, Herrn Dr.-Ing. Hans-Joachim Dilling, Herrn Dr.-Ing. Hans-Christian Wolf, Herrn Dr.-Ing. Peter Kollmeier, Herrn Hartmut Weckenmann und Herrn Peter Bertelshofer sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Matthias Scherer, Herrn Dr. rer. nat. Rainer Müller-Finkeldei, Frau Petra Kipphan, Herrn Gerhard Duttlinger, Herrn Dr.-Ing. Martin Hart und Herrn Bernd-Heinrich Schmitz danke ich ganz besonders für die positiven Arbeitsbedingungen, die wesentlich zum Gelingen beigetragen haben. Die Finanzierung erfolgte durch die ContiTemic AG und die DaimlerChrysler AG.

Die vielfältige Unterstützung meiner Kolleginnen und Kollegen Dr.-Ing. Tobias Flämig-Vetter, Dr.-Ing. Frank Kirschbaum, Dr. rer. nat. Peter Hille, Dr.-Ing. Michael Back, Stephan Terwen, Dr.-Ing. Bernhard Wagner, Dr.-Ing. Mattias Nyberg, Uwe Schaupp, Dr.-Ing. Dietmar Bertsch, Manuel Zeller, Nils Rehberg, Gregor Schock, Hans-Jörg Strud, Dr.-Ing. Michael Ziegler, Hans Gander und vieler anderer reicht weit über das hinaus, was manch ein anderer kaum zu wünschen wagt - Vielen Dank Euch allen!

Auch den studentischen Hilfskräften Andreas Rauwolf, Erik Tonner, Markus Gerdin, Mattias Hallor, Jochen Frey, Jochen Schüttler, Oliver Bänfer, Philipp Klein, Boscope Mo-Kun Sze, Hajer Belaiba und Martin Dautel sei für ihre Mitwirkung an dieser Arbeit herzlich gedankt.

Berichtigungen und Verbesserungen dieser Dissertation verdanke ich den sorgfältigen Korrekturen durch die Herren Dr.-Ing. Michael Back und Thorsten Mehlfeldt.

Ein Teil der verwendeten Messungen wurde am Lehrstuhl für elektronische Mess- und Schaltungstechnik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt. Für die gute Zusammenarbeit bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Joachim Melbert und Herrn Carsten Raupach.



# Abstract

In current concepts for fuel injection valves, the importance of piezoelectric elements as actuating devices is steadily increasing. These actuators allow valves to open and to close in less than  $200\mu s$  while providing benefits in the metering accuracy. However, the resulting accelerations of the injector mechanics usually go together with high amplitudes of the occurring forces. Especially tensile stresses may damage the fragile ceramic and bouncing of contiguous constructive elements has a negative impact on the durability of the valve. Additionally, common injector control implementations do not consider the induced mechanical vibrations which adversely affect the fueling shape.

This thesis addresses problems which arise from shortened opening and closing phases and presents measures to reduce these.

Chapter 2 compares different mathematical approaches to model the nonlinear behaviour of piezoelectric actuators. Special attention is paid to the usability of the models for both actuating and sensing capabilities of the electromechanical transformers.

In chapter 3, the actuator equations are incorporated into several mathematical models of the whole injector with lumped and distributed parameters. The models with distributed parameters achieve an acceptable representation of the behaviour of real injectors and provide a detailed insight into the mechanical processes during the injection. Thereby these models can be used to evaluate control strategies.

The developed mathematical models of the injectors form the basis for the design of a state space observer in chapter 4 which yields state information of the valve's mechanics that otherwise would have to be provided by additional cost expensive sensors. Having access not only to the electrical signals but also to the mechanical state, a static optimization of the injector control parameters results in opening and closing processes with minimal strain on the injector and increased acceptability of the fueling shape.

In the final chapter, measurements validate the derived algorithms and prove the effectivity of the presented control strategy.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>6</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>9</b>
<b>1 Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit</b>	<b>15</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	16
1.2 Bisherige Lösungsansätze . . . . .	18
1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	20
<b>2 Modellierung des Aktors</b>	<b>21</b>
2.1 Perowskitische Ferroelektrika . . . . .	21
2.2 Messaufbau für Piezostapelwandler . . . . .	26
2.3 Lineares thermodynamisches Modell . . . . .	28
2.4 Modellierung mit Hysterese nach DAHL und WILDER . . . . .	32
2.5 Modellierung mit Hysterese nach MAXWELL . . . . .	40
2.6 Modellierung des Polarisationszustands . . . . .	44
2.7 Ergebnisse und Überleitung . . . . .	59
<b>3 Modellierung des Injektors</b>	<b>61</b>
3.1 Beschreibung des Injektoraufbaus . . . . .	61
3.2 Messaufbau für Piezoinjektoren . . . . .	62
3.3 Ersatzanordnung mit konzentrierten Massen ohne Hysterese . . . . .	65
3.4 Ersatzanordnung mit konzentrierter Masse und Hysterese . . . . .	70
3.5 Verteiltparametrische Ersatzanordnung ohne Hysterese . . . . .	73
3.6 Verteiltparametrische Ersatzanordnung mit Hysterese . . . . .	81
3.7 Verteiltparametrische Ersatzanordnung des kraftstoffdurchströmten Injektors mit Hysterese . . . . .	84
3.8 Ergebnisse und Überleitung . . . . .	86

<b>4 Optimale Steuerung des Injektors</b>	<b>89</b>
4.1 Vorüberlegungen . . . . .	89
4.2 Entwurf eines Zustandsschätzers . . . . .	91
4.3 Optimaler Ansteuerverlauf . . . . .	96
4.4 Ansteuer Elektronik . . . . .	101
4.5 Ergebnisse . . . . .	108
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>111</b>
<b>A Anhang</b>	<b>113</b>
A.1 Geschichte der Piezoelektrizität . . . . .	113
A.2 Tensorrechnung . . . . .	115
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>121</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>121</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>



# Nomenklatur

## Operatoren und Symbole

Symbol	Bedeutung
$\underline{(\cdot)}$	Vektorielle Größe $(\cdot)$
$ (\cdot) $	Betrag, Länge von $(\cdot)$
$(\cdot)^T$	Transposition von $(\cdot)$
$(\cdot)^{\text{Merk}}$	Merkeroperator für $(\cdot)$
$\gamma$	elementarer Hystereseoperator
$\Gamma$	Hystereseoperator
$d$	Differentialoperator
$\partial$	partieller Differentialoperator
$\Delta(\cdot)$	Abweichung, Schrittweite, Teilstück von $(\cdot)$
$\dot{(\cdot)}$	Zeitliche Ableitung $\frac{d(\cdot)}{dt}$
$\overline{(\cdot)}$	Abschnittsweiser Mittelwert von $(\cdot)$
$\tilde{(\cdot)}$	Abwandlung von $(\cdot)$

## Konstanten

Zeichen	Wert	Bedeutung
$e$	$\approx 2,71828$	EULER-Zahl, Basis des natürlichen Logarithmus
$\underline{e}$	$ \underline{e}  = 1$	Einheitsvektor
$k$	$\approx 1,380 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$	BOLTZMANN-Konstante

## Formelzeichen

Zeichen	Einheit	Bedeutung
$A$	(divers)	Zeitkontinuierliche Zustandsübergangsmatrix
$A$	$m^2$	(Querschnitts-)Fläche
$a$	(divers)	Allgemeiner Parameter
$B$	(divers)	Zeitkontinuierliche Steuermatrix
$b$	(divers)	Allgemeiner Parameter
$C$	(divers)	Ausgangsmatrix
$C$	$\frac{As}{V}$	Kapazität
$c$	$\frac{J}{kg \cdot K}$	Spezifische Wärmekapazität
$c$	(divers)	Allgemeiner Parameter
$D$	$\frac{As}{m^2}$	Elektrische Flußdichte
$D$	(divers)	Durchgriffsmatrix
$d$	$\frac{As}{N} = \frac{m}{V}$	Piezomodul
$E$	$\frac{V}{m}$	Elektrische Feldstärke
$F$	N	Kraft
$f$	Hz	Frequenz
$f$	1	Wahrscheinlichkeitsdichte
$f$	$\frac{N}{m^3}$	Kraftdichte (Volumenkraft)
$G$	(divers)	Zeitdiskrete Zustandsübergangsmatrix
$g$	(divers)	Gewichtungsfaktor
$H$	(divers)	Zeitdiskrete Steuermatrix
$h$	m	Hub, mechanische Verschiebung
$I$	A	Strom
$i$	1	Laufender Index
$J$	(divers)	Gütemaß
$k$	$\frac{m^2}{As}$	Piezomodul in Aktormodellen mit Hystereseoperator
$k$	$\frac{N}{m}$	Federkonstante
$k$	(divers)	Parameter des MAXWELLSchen Hystereseoperators
$k$	1	Laufender Index
$k$	$\frac{1}{s}$	Verstärkungsfaktor der Ladungsregelung
$L$	$\frac{Vs}{A}$	Induktivität
$l$	m	Länge
$m$	kg	Masse
$N$	1	Anzahl
$P$	$\frac{As}{m^2}$	elektrische Polarisaton
$p$	(divers)	Allgemeiner Parameter

<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$p$	(divers)	Kovarianzmatrix des Modellzustandsvektors
$Q$	J	Thermische Energie
$Q$	As	Elektrische Ladung
$q$	(divers)	Allgemeiner Parameter
$q$	(divers)	Kovarianz des Modelleingangsvektors
$r$	$\frac{Ns}{m}$	mechanische Dämpfung
$r$	(divers)	Kovarianz des Messvektors
$S$	$\frac{J}{K}$	Entropie
$s$	$\frac{m^2}{N}$	Elastizitätsmodul
$s$	1	Schaltvariable
$T$	s	Zeitintervall
$t$	s	Zeit
$U$	V	Spannung
$U$	J	Innere Energie
$u$	$\frac{J}{m^3}$	Innere Energiedichte
$u$	(divers)	Modelleingangsvektor
$V$	$m^3$	Volumen
$v$	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit
$W$	J	(Mechanische, elektrische) Energie
$W$	1	(Thermodynamische) Wahrscheinlichkeit
$w$	$\frac{J}{m^3}$	(Mechanische, elektrische) Energiedichte
$x$	(divers)	Position
$x$	(divers)	Modellzustandsvektor
$Y$	$\frac{N}{m^2}$	YOUNG'scher Modul
$y$	(divers)	Modellausgangsvektor
$z$	m	Ort
$\alpha$	$\frac{As}{K}, \frac{1}{K}$	Temperaturkoeffizient
$\delta$	1	KRONECKER-Tensor
$\varepsilon$	$\frac{As}{Vm}$	Dielektrizitätszahl
$\eta$	$\frac{Ns}{m^2}$	Dynamische Viskosität
$\theta$	(divers)	Parametervektor
$\vartheta$	K	Temperatur
$\Lambda$	1	Variationsgewichtungstensor
$\xi$	1	Mechanische Dehnung
$\varrho$	$\frac{kg}{m^3}$	Massendichte
$\sigma$	$\frac{N}{m^2}$	Mechanische (Druck-)Spannung
$\tau$	s	Zeitkonstante

<b>Zeichen</b>	<b>Einheit</b>	<b>Bedeutung</b>
$\phi$	1	Volumenanteil der Polarisationsrichtung
$\varphi$	1	Allgemeine Funktion
$\psi$	1	Wandverschiebungstensor

### Hochgestellte Indizes

<b>Index</b>	<b>Bedeutung</b>
0	Arbeitspunkt
C	Geschlossen
<i>D</i>	Bezüglich der Flußdichte
<i>E</i>	Bezüglich der elektrischen Feldstärke
ext	Bezüglich der externen Last
<i>F</i>	Bezüglich der mechanischen Kraft
h	Bezüglich der Auslenkung
hyst	Bezüglich der Hysterese
<i>i</i>	Laufender Index
K	Kartesisch
Meß	Gemessen
<i>P</i>	Bei konstanter Polarisationsrichtung
P	Bezüglich der Polarisationsrichtungen
R	Reibelement
ref	Referenz
S	Spontan
Sim	Simuliert
sat	Bezüglich der Sättigung
O	Offen
U	Bezüglich der Spannung
<i>w</i>	Bezüglich der Energiedichte
Z	Bezüglich der Kristallzellen
$\gamma$	Bezüglich der elementaren Hystereseoperatoren
$\Gamma$	Bezüglich der Hysterese
$\xi$	Bezüglich der Dehnung
$\sigma$	Bezüglich der mechanischen Spannung
$\phi$	Bezüglich der Polarisationsaufteilung
–	Vorher
+	Nachher

## Tiefgestellte Indizes

<b>Index</b>	<b>Bedeutung</b>
0	Startwert
A	Bauteil A
B	Bauteil B
Det	Detektiert
Est	Geschätzt
el	Elektrisch
F	Bezüglich der fallenden Flanke
$I$	Bezüglich des Stroms
$i$	Laufender Index
$j$	Laufender Index
$k$	Laufender Index
kin	Kinetisch
$L$	Induktivität
$l$	Laufender Index
$m$	Laufender Index
Mess	Gemessen
max	Maximalwert
mech	Mechanisch
min	Minimalwert
N	Nadel
$n$	Laufender Index
opt	Optimal
P	Piezo
$p$	Laufender Index
pot	Potentiell
$q$	Laufender Index
R	Bezüglich der steigenden Flanke
$r$	Laufender Index
SK	Bezüglich des Speicherkondensators
Soll	Sollwert der Größe
$s$	Laufender Index
$t$	Laufender Index
therm	Thermisch
virt	Größe für Energieaustausch mit Umgebung (virtuell)
visk	Viskos
$x$	Bezüglich der Auslenkung
$\Gamma$	Bezüglich der Hysterese



# Kapitel 1

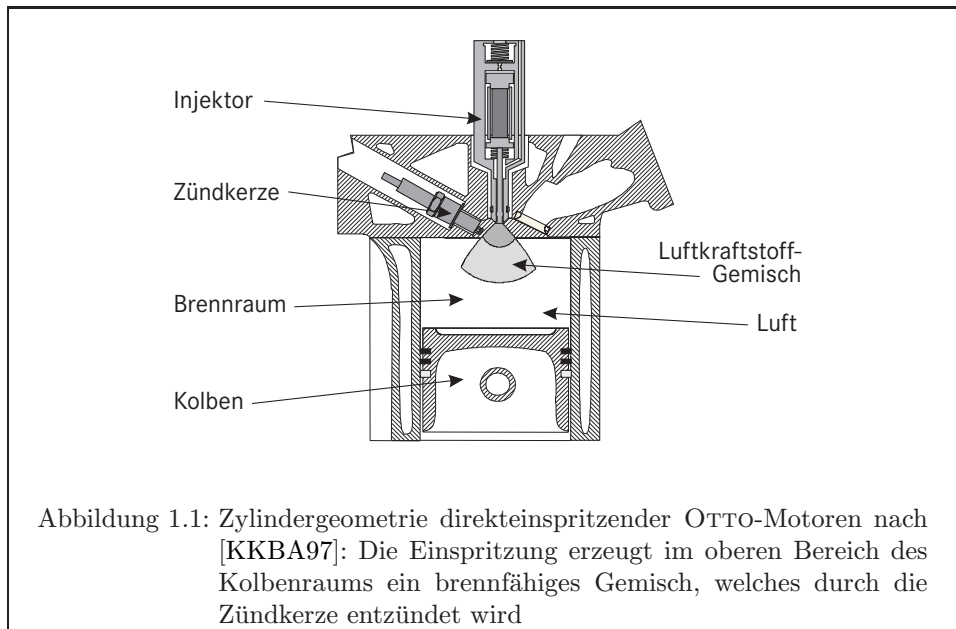
## Problemstellung und Zielsetzung der Arbeit

In einer Vereinbarung zwischen dem Verband der europäischen Automobilhersteller und der Europäischen Union hat sich die Automobilindustrie freiwillig dazu verpflichtet, im Zeitraum von 1995 bis 2008 die durchschnittlichen CO<sub>2</sub>-Emissionen von in der EU neu zugelassenen Personenkraftwagen um 25 Prozent zu verringern. Gleichzeitig möchte der Kunde jedoch nicht auf eine ansprechende Motorleistung verzichten. Neben den klassischen Kriterien Komfort, Design und Zuverlässigkeit bestimmt also zunehmend der energetische Wirkungsgrad die Entwicklungsrichtung für zukünftige Kraftfahrzeuge [Back05].

In Dieselmotoren entzündet sich der Kraftstoff im Zylinder durch den hohen Druck und die hohe Temperatur bei der Kompression selbständig. Voraussetzung dafür ist, daß sich ausreichend Luft im Zylinder befindet. Die Leistungsabgabe wird also mit der eingespritzten Kraftstoffmenge gesteuert, während die Luftzufuhr in der Regel nicht begrenzt wird. Durch den ungedrosselten Luftfluß erreichen moderne Dieselmotoren heute beinahe den maximalen Wirkungsgrad des CARNOTSchen Kreisprozesses.

Für die Entzündung von Ottokraftstoff ist es dagegen notwendig, daß das Verhältnis von Luft zu Kraftstoff in einem bestimmten Bereich liegt. Die Steuerung der Leistungsabgabe erfolgt hier durch die gezielte Bemessung eines zu verbrennenden Luftkraftstoffgemischs: Eine Drosselklappe im Ansaugtrakt des Motors begrenzt die Luftzufuhr und ein elektrisches Einspritzventil reichert anschließend die einströmende Luft mit Kraftstoff an. Die Luftdrosselung führt dabei zu erheblichen Energieverlusten, die bis zu 25 Prozent der gesamten Verluste des Motors ausmachen [Daim04].

Schon den ersten Pionieren der Motorkonstruktion war dieses Problem bekannt, doch erst heute ermöglicht der Stand der Technik wirtschaftliche Ansätze zur Steigerung des Wirkungsgrads. Abgesehen von der variablen Ventilsteuerung scheint insbesondere das geschichtete Brennverfahren bedeutsame Verbrauchsvorteile zu versprechen [KKBA97], [HWKP01], [ZhHL02], [FrBL03]. Der Grundgedanke ist dabei, den gesamten Kolbenraum ungedrosselt mit reiner Luft zu füllen und, wie die **Abbildung 1.1** illustriert, nur in der Nähe der Zündkerze einen kleinen begrenzten Bereich mit brennbarem Gemisch aufzubauen. Die Leistungsabgabe wird dann über die Größe des brennbaren Bereichs gesteuert [KKBA97].



So elegant dieses Prinzip erscheint, so viele Probleme wirft die Realisierung auf. Die verdichtete Luftmasse im Brennraum ist nach dem Schließen des Einlaßventils noch in Bewegung und beeinflußt damit die Ausbildung und Lage des brennbaren Bereichs. Trotzdem muß sichergestellt sein, daß für die Dauer des Zündfunken stets ein eng toleriertes Gemisch aus Luft und Kraftstoff an der Zündkerze vorhanden ist [Daim04].

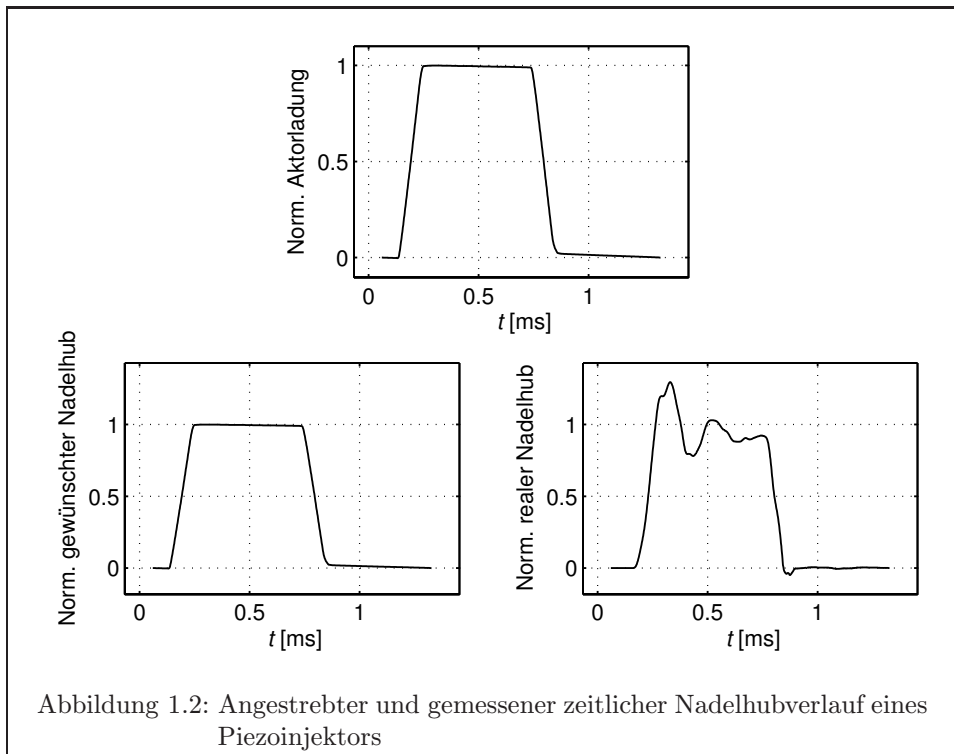
Neben einer günstigen Zylindergeometrie spielt insbesondere der Vorgang der Kraftstoffeinspritzung eine entscheidende Rolle [Stan99]. Durch die kurze Dauer zwischen dem Einspritzbeginn und dem Zündzeitpunkt ist eine gute Gemischbildung nur mittels einer Hochdruckeinspritzung im Zusammenspiel mit einer geeigneten Kombination aus Düsenform, Aktorik und elektrischer Ansteuerung möglich [FrBL03].

## 1.1 Problemstellung

In derzeitigen Injektorkonzepten werden zunehmend Piezoaktoren als Stellglieder verwendet [Ferr00]. Sie ermöglichen es, das Ventil innerhalb weniger als  $200\mu\text{s}$  zu öffnen beziehungsweise zu schließen. Bei diesen Bewegungen der Injektormechanik ist auch ein Auftreten von Zugspannungen möglich, die die Piezokeramik zerstören können [Phys89], [Pick98]. Insbesondere das Prellen von Bauteilen bewirkt extreme Kräfte, welche die Bestandteile des Injektors mechanisch stark beanspruchen. Häufig wird auch die Injektormechanik verstärkt zu Schwingungen angeregt, was sich wiederum ungünstig auf die Durchflußcharakteristik auswirkt [ZhHL02].

Um diese Problematik zu verdeutlichen, sind in der **Abbildung 1.2** für einen Einspritzvorgang auf der linken Seite der angestrebte Verlauf der Injektornadel und rechts daneben ein real gemessener Verlauf dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, daß der Injektor in der geöffneten Phase keineswegs wie gewünscht in Ruhe ist. Vielmehr pendelt die Ventilsnadel gedämpft um eine Ruhelage, die während der Einspritzung nicht erreicht wird. Aus diesem Verhalten heraus ist anzunehmen, daß auch der zeitliche Verlauf der Kräfte in den übrigen Injektorbestandteilen verbesserungsfähig ist.





Für die Messung des Nadelhubs wurde der Injektor mit einem trapezförmigen Ladungsverlauf beaufschlagt, wie in der Abbildung 1.2 oben zu sehen ist. Da die mechanischen Vorgänge im Injektor eine Reaktion auf die elektrische Ansteuerung sind, ist zu untersuchen, ob ein anderer zeitlicher Lade- und Entladeverlauf das Ventil in einen stabilen Zustand zu führen und gleichzeitig das Kräftespiel im Injektor zu minimieren vermag.

Dazu ist es erforderlich, neben den Bewegungen im Injektor auch die Kräfte während des Öffnens und Schließens zu kennen — meßbar sind aber lediglich Strom und Spannung am Injektor. Aus wirtschaftlichen Gründen sind in den Injektoren keine Kraft- oder Wegsensoren vorgesehen, und auch ein nachträglicher Einbau von Kraftsensoren ist mit beträchtlichem Aufwand verbunden und beeinflußt das Ventilverhalten aufgrund der zusätzlichen Massen mitunter erheblich.

Physikalisch motivierte mathematische Modelle, die ein gemessenes Injektorverhalten hinreichend genau wiedergeben, gewähren einen Einblick in die elektromechanischen Vorgänge im Ventil und ermöglichen damit, die nicht unmittelbar meßbaren Größen wie beispielsweise die Aktorkraft aus den meßbaren Größen abzuschätzen. Dies kann mittels eines Detektionsmodells [Schu01] oder eines Zustandsbeobachters erfolgen.

Damit die Modellierung des Injektorverhaltens die gesuchten Größen in einer hinreichenden Genauigkeit wiedergibt, müssen einige nichtlineare Zusammenhänge im Aktor und in der Ventilmechanik berücksichtigt werden. So zeigen piezoelektrische Wandler Hystereseverluste, und die diskreten Stellungen des Ventils äußern sich in einer schaltenden Streckendynamik.

Die Probleme, die demnach für eine Verringerung der Schaltzeiten piezoelektrisch gestellter Injektoren zu lösen sind, sind die Erstellung und Parametrierung eines hinreichend genauen Aktor- und Injektormodells, die Abschätzung der nichtmeßbaren Größen sowie die Bestimmung eines optimalen Ansteuerungsverlaufs.

## 1.2 Bisherige Lösungsansätze

Einige Publikationen befassen sich mit einzelnen Teilaspekten der Problemstellung wie der Modellierung des Injektors, der Entwicklung einer für den Einsatz in Kraftfahrzeugen geeigneten elektrischen Ansteuerung oder der Schwingungsreduktion. Es ist jedoch keine Arbeit bekannt, die diese Themenfelder als Gesamtheit betrachtet und einen realisierbaren Lösungsvorschlag erarbeitet.

Für ein hinreichend wirklichkeitsgetreues Injektormodell ist zunächst ein mindestens ebenso genaues Aktormodell vonnöten. Seit der Entdeckung der Piezo- und Ferroelektrizität ist dazu eine Vielzahl verschiedener Modellansätze vorge schlagen worden, von denen hier nur eine Auswahl Erwähnung finden kann. Neben den linearen Ansätzen in [Voig66] und [Koch88] existieren auch mathematische Nachbildungen der ferroelektrischen Hysterese wie beispielsweise Polynomapproximationen [CrDe98], [Hein98], nichtlineare Differentialgleichungen [DaWi85], [CoHo86], [SmOu99], nichtlineare Integralgleichungen [GUSK99], die Operatoren von MAXWELL [GoCe97] und von PREISACH [Maye91], [HuWe97] sowie Spin-Modelle [FoCa98], [LiLi01], [Tadi01], [WaTs01]. Eine Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens von Ferroelektrika aus thermodynamischer Sicht bietet die Theorie von LANDAU-DEVONSHIRE [Devo54] sowie der allgemeine thermoelektromechanische Modellrahmen in [KaJi98].

Für die meisten Anwendungen piezoelektrischer Aktoren geben konzentriertparametrische Modelle die Kinematik der Strecke ausreichend genau wieder. Für andere Fälle, in denen eine eindimensionale Betrachtung erforderlich ist, leitet [Waue97] eine lineare Differentialgleichung für Piezoide her. [GJMH97] und [Mark98] beschreiben überdies dreidimensionale Finite Elemente-Modelle zur Berechnung von Wellenausbreitungen in Stapelaktoren.

Nicht nur der Aktor bestimmt das dynamische Verhalten eines Injektors, sondern auch die Gesetzmäßigkeiten der Hydraulik sowie die der bewegten Injektorbauteile. Die Mehrheit der Modellansätze für piezoelektrisch betätigte Ventile bildet die mechanische Last des Aktors als konzentrierte Massen ab [KaSW97], [Sche99], [Hall01], [Schu01]; als Ausnahme ist insbesondere [Gerd01] aufgrund der dort behandelten verteiltparametrischen Ersatzanordnung für Injektoren zu nennen. Die wenigen bisher veröffentlichten mathematischen Aktormodelle mit verteilten Parametern und Nachbildung der ferroelektrischen Nichtlinearitäten sind zumeist sehr rechenintensiv und daher nur bedingt auf komplexe elektromechanische Systeme wie Injektoren erweiterbar.

Modellbasierte Zustandsbeobachter und sogenannte Rekonstruktions- oder Detektionsmodelle ermöglichen es, im Betrieb des Systems von den meßbaren auf die nichtmeßbaren Größen zu schließen, um somit die Güte einer elektrischen Ansteuerung beurteilen zu können. [Schu01] beschreibt, wie ein Aktormodell in Verbindung mit einem übergeordneten Regelkreis in der Lage ist, aus den elektrischen Signalen Strom und Spannung die mechanischen Größen Kraft und Weg zu berechnen. Der dort entwickelte Beobachter erweist sich als sehr leistungsstark, wenn die Auslenkung oder die Stellkraft des Aktors zu regeln ist, wobei keine Aussagen darüber gemacht werden, welche Stellgeschwindigkeiten des Aktors darstellbar sind. Auch

andere Veröffentlichungen verwenden Detektionsmodelle [KuJa99] oder Zustandsbeobachter [ScJa00], um auf einen Kraft- oder Wegsensor verzichten zu können. [MeWa05] beschreibt, wie mittels einer gezielten Umschaltung zwischen mehreren Beobachtern die Bestimmung des Schaltzustands eines Ventils allein aus den gemessenen elektrischen Signalen möglich ist.

Ist ein mathematisches Modell des Injektors vorhanden und der gewünschte zeitliche Verlauf des Ventilhubes genau vorgegeben, so kann eine Positionssteuerung durch eine Streckeninverse das Stellverhalten kompensieren [CrDe98], [KuJa98], [Dir00], [CrSD01]. Diese Vorgehensweise würde sowohl die Stellgenauigkeit als auch die Stellgeschwindigkeit verbessern, wenn eine optimale Zustandstrajektorie für den Öffnungs- und Schließvorgang des Injektors bekannt oder bestimmbar wäre. Heuristische Ansätze für solche Trajektorien berücksichtigen allerdings oft weder die Beschränkungen der Stellgröße noch die nichtlinearen Gegebenheiten der Injektormechanik, und die Bestimmung der Trajektorie als Lösung eines dynamischen Optimierungsproblems übersteigt die Leistungsfähigkeit derzeitiger Digitalrechner bei weitem [Kirs01]. Deshalb scheidet die Positionssteuerung durch eine Streckeninverse aus und die Frage, wie die Stellgeschwindigkeit erhöht werden kann, bleibt weiterhin offen.

Eben dieser Frage widmet sich [PKSM04] und stellt eine stromgeregelter Spannungssteuerung mit überlagerter zyklischer Schwingungsdämpfung zur Steigerung der Positioniergeschwindigkeit piezoelektrisch betätigter Ventile vor. Die dort verwendete Spannungssteuerung erzeugt allerdings eine für den Einsatz in Kraftfahrzeugen inakzeptabel hohe Verlustleistung, und das aufgezeigte Verfahren zur Schwingungsdämpfung berücksichtigt nicht die im Ventil auftretenden Kräfte. Auch die dargestellte Ausregelzeit von rund  $300\mu\text{s}$  ist verglichen mit den im Motorbetrieb auftretenden Einspritzzeiten zwischen etwa  $150\mu\text{s}$  bis etwa  $1\text{ms}$  deutlich zu groß.

[Gerd01] schlägt eine andere Vorgehensweise vor und bestimmt mittels eines statischen Optimierungsverfahrens einen zeitlichen Ansteuerungsverlauf für einen Injektor dergestalt, daß die Amplituden der während der Schaltvorgänge angeregten Schwingungen minimal sind. Das Verfahren in [MeWa04] ist darüberhinaus auch dazu geeignet, die Druckspannungen im Wandler zu optimieren.

Hinsichtlich der elektrischen Ansteuerung piezoelektrischer Aktoren sind im wesentlichen zwei Prinzipien zu unterscheiden [MaGa97]: Die Steuerung der Aktorspannung oder des Aktorstroms. Das Angebot für kontinuierlich steuerbare Spannungsquellen reicht von integrierten Schaltkreisen bis hin zu leistungsstarken Laborgeräten, und mittlerweile bietet der Markt auch verschiedene speziell für Piezoaktoren entwickelte steuerbare Stromquellen, wie beispielsweise in [PKSM04] beschrieben. Ein für den Einsatz in Kraftfahrzeugen bedeutsamer Nachteil kontinuierlich arbeitender Endstufen ist der geringe Wirkungsgrad, welcher je nach Anwendung zu einer inakzeptablen Verlustwärme führt [Fläm97]. Schaltregler bieten dagegen zwar eine etwas geringere Flexibilität und Signalgüte des erzeugbaren Ansteuerungsverlaufs, bestechen aber durch eine weitaus geringere Verlustleistung [KaSW97], [PaLD97], [PaLa99].

### 1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit wird ein Ansteuerverfahren entwickelt, mit dem das Schaltverhalten piezoelektrisch aktiver Injektoren optimiert wird.

Zunächst stellt Kapitel 2 verschiedene grundlegende Ansätze für die mathematische Modellierung des Aktors hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit und der Eignung für die Modellierung des Gesamtsystems gegenüber. Besondere Beachtung findet dabei der Anspruch, daß die untersuchten Modelle sowohl das Aktor- als auch das inhärente Sensorverhalten des piezoelektrischen Wandlers wiedergeben und gleichermaßen als Simulations- und als Detektionsmodell verwendbar sind.

Kapitel 3 verwendet diese Ansätze, um die Güte verschiedener mathematischer Modelle eines piezoelektrisch angetriebenen Injektors zu vergleichen. Das Ergebnis der Untersuchungen ist eine Aussage über die erzielbare Genauigkeit von Injektormodellen mit konzentrierten sowie mit von solchen mit verteilten Parametern.

Darauf aufbauend wird in Kapitel 4 ein Zustandsschätzer für die Injektormechanik erstellt und ein optimaler Ansteuerverlauf für den Öffnungs- und den Schließvorgang bestimmt, welcher gleichermaßen die im Injektor auftretenden Kräfte wie auch die Mechanikschwingungen minimiert. Nach der Beschreibung einer geeigneten Ansteuerschaltung schließt das Kapitel mit der Darstellung von Messungen, die die Wirksamkeit des entwickelten Verfahrens belegen.

# Kapitel 2

## Modellierung des Aktors

Zunächst beschreibt dieses Kapitel den Aufbau und die Eigenschaften perowskitischer Ferroelektrika und erläutert die thermodynamischen Zusammenhänge. Es folgen verschiedene phänomenologische Modellansätze zur Berechnung des Polarisationszustands der Piezokeramik. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung.

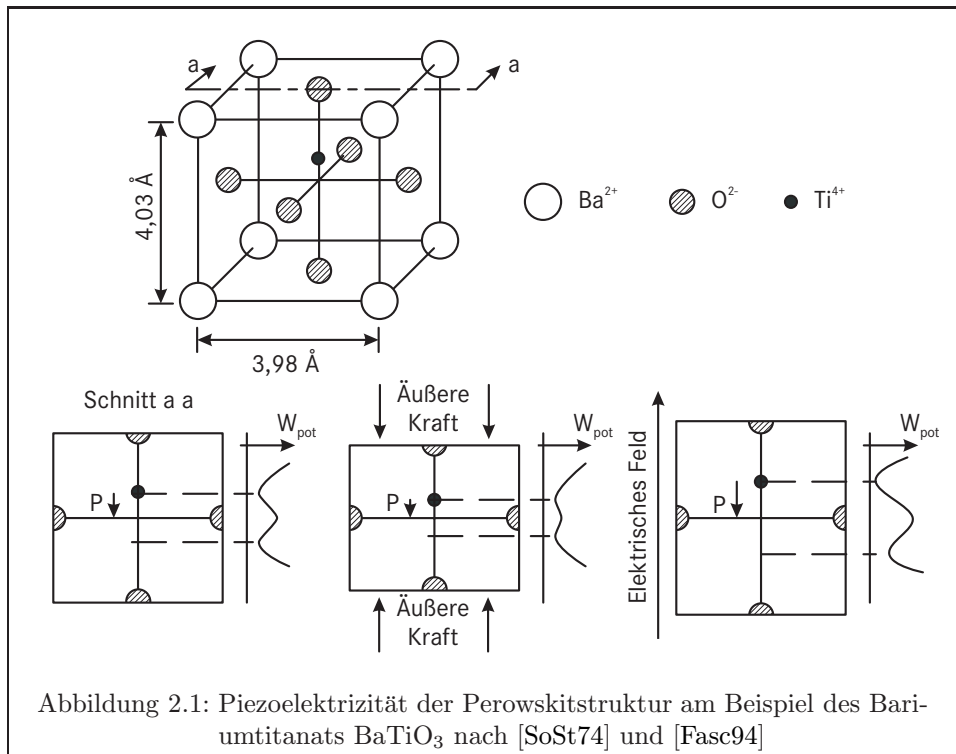
### 2.1 Perowskitische Ferroelektrika

Der piezoelektrische Effekt wird bei dielektrischen Kristallen beobachtet, deren Elementarzellen kein Symmetriezentrum besitzen. Zu diesen 68 von insgesamt 230 kristallographischen Raumgruppen gehören Kristallstrukturen vom Typ des Perowskits  $\text{CaTiO}_3$ , Pyrochlors  $\text{CaNaNb}_2\text{O}_6\text{F}$  oder Ilmenits  $\text{FeTiO}_3$  sowie einige solche mit Wasserstoffbrückenbindungen wie die des Kaliumdihydrogenphosphats  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  oder Triglyzinsulfats  $(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{COOH})_3 \cdot \text{H}_2\text{SO}_4$  [SoSt74].

In der Natur vorkommende Mineralien wie beispielsweise Perowskit, Quarz, Seignettesalz und Turmalin zeigen einen verhältnismäßig geringen piezoelektrischen Effekt. Das synthetisch hergestellte Bleizirkonattitanat sowie das Bariumtitanat besitzen hingegen ein vergleichsweise stark ausgeprägtes piezoelektrisches Verhalten bei einer für viele technische Anwendungen ausreichend hohen CURIE-Temperatur, weshalb beide Materialien in unterschiedlichen Aktoren und Sensoren sowie aufgrund ihrer hohen Energiedichte auch in elektrischen Kondensatoren Verwendung finden.

Die **Abbildung 2.1** zeigt in der oberen Hälfte eine Elementarzelle des Bariumtitanats  $\text{BaTiO}_3$ . In jeder Elementarzelle des kubisch-flächenzentrierten Gitters der Barium- und Sauerstoffionen  $\text{Ba}^{2+}$  und  $\text{O}^{2-}$  ist ein relativ kleines Titanion  $\text{Ti}^{4+}$  eingebettet. Bleizirkonattitanat ist ähnlich aufgebaut, dort tritt Blei an die Stelle des Bariums, und Titan ist teilweise durch Zirkonium ersetzt.

Oberhalb der CURIE-Temperatur ist die kinetische Energie des Titanions so groß, daß es sich innerhalb der umgebenden Zelle frei bewegt und dabei gelegentlich an ein umgebendes Sauerstoffion bindet. Es besitzt keine bevorzugte Position, und im statistischen Mittel befindet es sich in der Mitte der Zelle. Durch die Symmetrie der Zelle fallen die Ladungsschwerpunkte der positiven und negativen Ladungen zusammen. Bei Anlegen eines elektrischen Feldes an einen solchen paraelektrischen Kristall verschieben sich die positiven und negativen Ionen leicht gegeneinander und es bildet sich eine Ionenpolarisation aus.



Unterhalb der CURIE-Temperatur geht das Titanion eine Ionenbindung zu einem oder mehreren der umgebenden Sauerstoffionen ein. Weil es sich jetzt außerhalb der Mitte der Zelle befindet, fallen die Ladungsschwerpunkte nicht mehr zusammen und jede Elementarzelle wird zu einem elektrischen Dipol. Diese Ausbildung einer spontanen Polarisierung  $P$  bei Unterschreiten der CURIE-Temperatur kennzeichnet den Phasenübergang vom paraelektrischen in den piezoelektrischen Zustand.

Übt man auf eine solche Zelle, wie in der Abbildung 2.1 unten dargestellt, eine Kraft längs der Polarisationsrichtung aus, so wird die Zelle deformiert. Damit geht auch eine Änderung der Dipolwirkung der Zellen einher, welche als Änderung des elektrischen Flusses bzw. der äußeren elektrischen Feldstärke messbar ist. Diese druckabhängige Verschiebungspolarisation wird als piezoelektrischer Effekt bezeichnet. Umgekehrt beschreibt der inverse piezoelektrische Effekt die Wirkung eines elektrischen Feldes auf das Gitter: Ein äußeres elektrisches Feld parallel zur Polarisationsrichtung des Kristalls bewirkt eine Kraft auf die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte. Je nach Polarität des elektrischen Feldes rücken diese zusammen oder auseinander, was sich wiederum als Längenänderung bemerkbar macht [Fasc94], [Gauc01], [Koch88], [Voig66].

Neben dieser Ionenpolarisation, bei der das Dipolmoment der Elementarzellen in seinem Betrag von den elektrischen und mechanischen Spannungen abhängt, ist zudem bei ferroelektrischen Materialien auch die Dipolrichtung veränderlich und trägt als Orientierungspolarisation zur Polarisierbarkeit des Dielektrikums bei. Zu einer Änderung der Polarisierung muß sich dabei das zentrale Ion von dem nächstgelegenen Sauerstoffion lösen und eine Bindung zu einem anderen Sauerstoffion eingehen. Das zentrale Ion befindet sich also an Positionen minimaler potentieller Energie, die von mehr oder weniger hohen Potentialschwellen umgeben sind. Um die Position und damit die Polarisierung zu ändern, müssen diese Schwellen überwunden werden [Fasc94], [Gauc01].

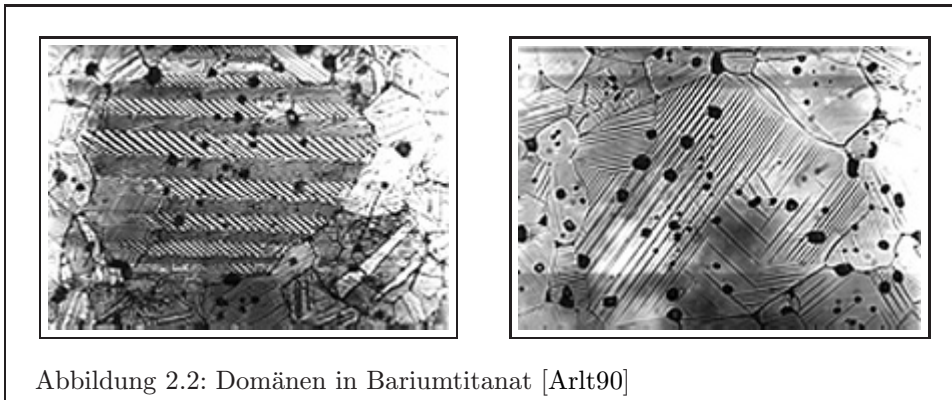
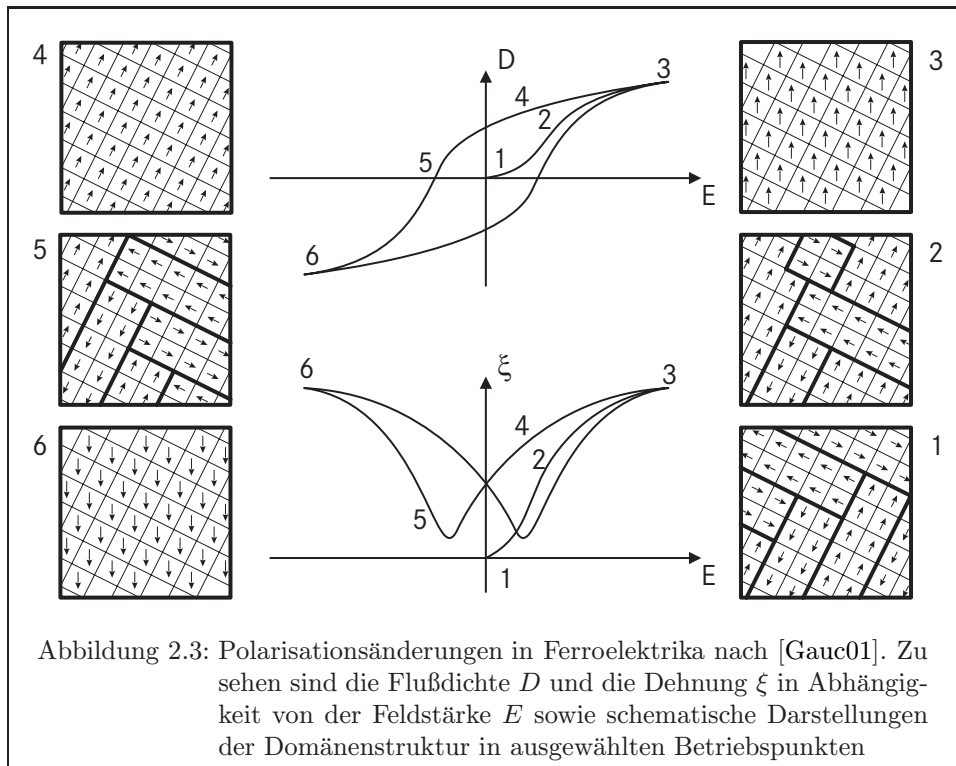


Abbildung 2.2: Domänen in Bariumtitanat [Arlt90]

Durch die starke Dipolwirkung der Orientierungspolarisation sowie der damit einhergehenden Deformation der Zelle beeinflussen sich benachbarte Elementarzellen gegenseitig, weshalb die Orientierung eines Dipols mit einer elektrischen Austauschenergie verbunden ist. Ein energetisch günstiger Zustand des Kristalls ist für viele piezoelektrische Materialien die Bildung von Bereichen mit einer einheitlichen Polarisationsrichtung, den Domänen (siehe dazu die **Abbildung 2.2**). Von ihnen geht ein elektrisches Streufeld aus, welches umso geringer wird, je kleiner die Domänen sind und je öfter sich entgegengesetzte Polarisationsrichtungen im Kristall abwechseln. Die unterschiedlichen Gitterkonstanten benachbarter Domänen führen jedoch zu inneren mechanischen Spannungen, wobei größere Domänen energetisch günstiger sind [Fasc94], [SoSt74].

Die Domänen sind durch mehr oder weniger breite Zwischenbereiche getrennt, die einen Übergang zwischen den unterschiedlichen Gitterkonstanten und Polarisationsrichtungen darstellen. Eine Änderung der mechanischen Spannung oder eines äußeren elektrischen Feldes kann zu Umpolarisierungen und Verschiebungen der Domänengrenzen führen, wobei einzelne Domänen auch ganz verschwinden oder sich an Korngrenzen oder anderen Inhomogenitäten des Gefüges neu ausbilden. Diese irreversiblen Prozesse sind mit energetischen Verlusten verbunden. Piezoelektrische Aktoren und Sensoren weisen deshalb bei einer Änderung des Arbeitspunktes ein mehr oder weniger hysteresebehaftetes Verhalten auf. Geleitet durch seine Untersuchungen an Seignettesalz im Jahre 1933 nannte KURTSCHATOV die Domänenbildung und die damit verbundenen nichtlinearen Eigenschaften des Kristalls Seignettelektrizität [SoSt74]; später setzte sich allgemein aber aufgrund der Analogie zum Ferromagnetismus die Bezeichnung Ferroelektrizität durch. Die Ausprägung der Ferroelektrizität eines Materials ist von der chemischen Zusammensetzung, von der Gestalt des im Sinterprozeß entstandenen Korngefüges, von dem elektromechanischen Arbeitspunkt sowie von dessen Vorgeschichte und nicht zuletzt von der Temperatur abhängig.

Die **Abbildung 2.3** beschreibt schematisch die ferroelektrischen Phänomene in einer vereinfachten und zweidimensionalen Form. In der Mitte ist oben die elektrische Flußdichte  $D$  und unten die mechanische Dehnung  $\xi$  über der elektrischen Feldstärke  $E$  aufgetragen; letzterer Graph wird aufgrund seiner Form auch als Schmetterlingskurve bezeichnet [Ferr00]. Rechts und links davon ist die Polarisation der Elementarzellen sowie die Ausbildung von Domänen zu verschiedenen Aktorzuständen abgebildet.



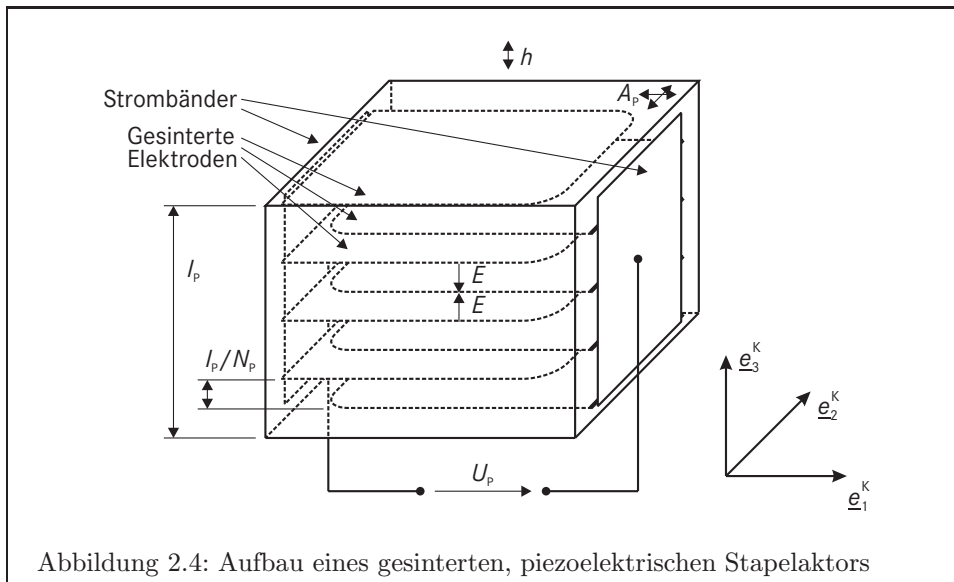
Die elektrischen Dipole der Elementarzellen, in der Abbildung als Pfeile dargestellt, sind im Urzustand (1) in Domänen gruppiert, und alle Polarisationsrichtungen sind gleichermaßen vorhanden. Dieser Zustand stellt sich ein, wenn der Kristall ohne elektrische und mechanische Spannung unter die CURIE-Temperatur abgekühlt wird.

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes (2) sind die verschiedenen Polarisationsrichtungen nicht mehr energetisch gleichwertig, und die Dipole richten sich sukzessive entlang der elektrischen Feldlinien aus: Sowohl die Flußdichte als auch die Dehnung nehmen zu. Je größer die Feldstärke, umso einheitlicher wird die Ausrichtung der Dipole, bis schließlich nahezu alle Elementarzellen gleich polarisiert sind und das Dielektrikum in die Sättigung geht. Eine weitere Erhöhung der Feldstärke führt jetzt lediglich zu einer größeren Ionenpolarisation, weshalb  $D$  und  $\xi$  jetzt nur noch mäßig ansteigen (3).

Nimmt die Feldstärke wieder ab, bilden sich nach und nach wieder Domänen mit abweichender Orientierung aus (4). Diese Rückbildung ist aufgrund der zu überwindenden Aktivierungsenergien verzögert, weshalb eine Remanenzpolarisation und -dehnung verbleiben, selbst wenn die elektrische Feldstärke verschwindet. Erst bei einer negativen Koerzitivfeldstärke ist die Nettopolarisation gleich Null (5). Wird die Feldstärke nun weiter verringert, nimmt die Flußdichte weiter ab, aber die Dehnung nimmt wieder zu, sobald der überwiegende Teil der Elementarzellen in Richtung des elektrischen Feldes ausgerichtet ist. Noch stärkere negative Feldstärken führen die Polarisation in eine negative Sättigung (6), und die Dehnung nähert sich wieder einem Maximum.

Das Bleizirkonattitanat der in dieser Arbeit untersuchten Aktoren dehnt sich bei einer Feldstärke von  $0,6 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$  um etwa 0,1%. Um einen technisch nutzbaren Aktorhub von nur  $50 \mu\text{m}$  zu erreichen, muß der Aktor demnach grob 50mm lang sein und hat damit eine Betriebsspannung von 30kV. Es liegt auf der Hand, daß ein





Aktor mit solchen elektrischen Anforderungen kaum in einem Einspritzventil für Kraftfahrzeugmotoren Verwendung finden wird.

Die Betriebsspannungen lassen sich stark reduzieren, indem der Aktor nicht aus einem homogenen Block gefertigt wird, sondern aus einer Vielzahl dünner piezoelektrischer Schichten zusammengesetzt wird [Pick98]. In der **Abbildung 2.4** ist schematisch der Aufbau eines solchen gesinterten Stapelaktors dargestellt. Der Wandler besteht aus einem Block piezoelektrischer Keramik, in welcher sich in regelmäßigen Abständen elektrisch leitfähige Metallschichten als Elektroden befinden. Diese Elektroden sind an den Seitenflächen des Aktors mittels dehnbarer Strombänder abwechselnd mit den beiden elektrischen Anschlüssen verbunden. Auf die Länge  $l_p$  des Keramikblocks verteilt entstehen so  $N_p$  piezoelektrisch aktive Schichten, die elektrisch parallel geschaltet sind. Bei Scheibendicken um  $150\mu\text{m}$  liegen die Betriebsspannungen hier in der Größenordnung von nur  $U_p \approx 100\text{V}$ , weshalb sich diese Bauform in besonderem Maße für den Einsatz in Injektoren eignet.

Aus der Vielzahl verschiedener Bauformen für piezoelektrische Wandler zeigt die **Tabelle 2.1** eine Auswahl häufig anzutreffender Varianten. Obwohl der Fokus dieser Arbeit auf Stapelaktoren gerichtet ist, sind einige der folgenden Ausführungen auch auf andere Bauformen übertragbar.

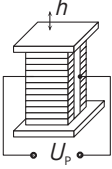

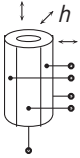
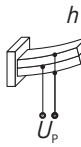
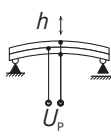
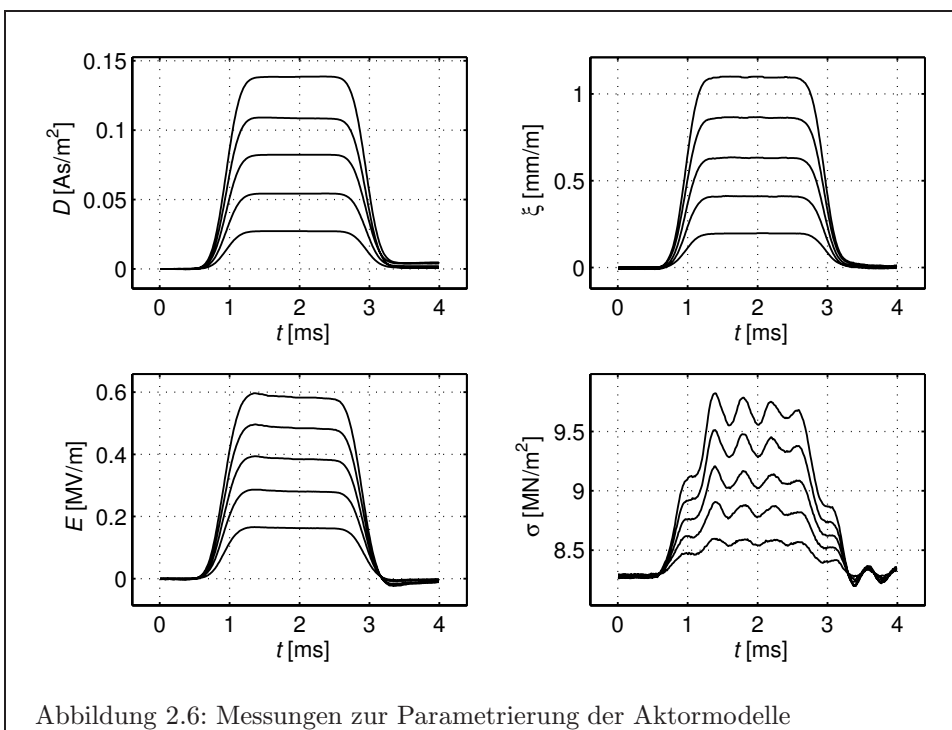
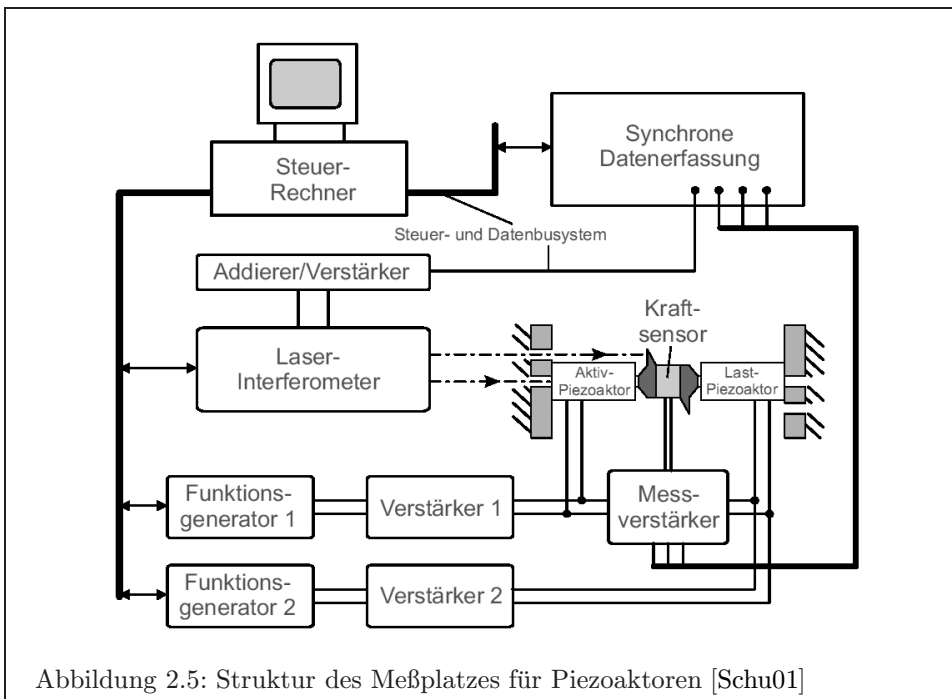
Bauform	Stapelwandler	Stapel mit Hebelübersetzung	Tube	Biege-wandler	Biege-scheibe
					
Typischer Stellweg	$< 200\mu\text{m}$	$< 1\text{mm}$	$< 50\mu\text{m}$	$< 5\text{mm}$	$< 500\mu\text{m}$
Typische Stellkraft	$< 30\text{kN}$	$< 3,5\text{kN}$	$< 1\text{kN}$	$< 5\text{N}$	$< 40\text{N}$
Typische Betriebs-spannung	$< 1\text{kV}$	$< 1\text{kV}$	$< 1\text{kV}$	$< 400\text{V}$	$< 500\text{V}$

Tabelle 2.1: Einige Bauformen piezoelektrischer Aktoren nach [JeKW97]

## 2.2 Messaufbau für Piezostapelwandler

Die Anforderungen an einen Messaufbau für Piezoaktoren ergeben sich aus den Einsatzbedingungen für Piezoaktoren in Injektoren, bei denen die kurzen Öffnungs- und Schließzeiten von weniger als  $200\mu\text{s}$  zu Beschleunigungen bis zum Tausendfachen der Erdbeschleunigung führen. Deshalb ist es notwendig, auch im Versuchsaufbau die bewegten Massen möglichst gering zu halten, um vergleichbare dynamische Verhältnisse wie in realen Injektoren zu erzielen. Dennoch sollen die Auslenkungen des Aktors mit einer Auflösung von  $1\mu\text{m}$  oder besser messbar sein.

Die in dieser Arbeit verwendeten Messungen wurden am Lehrstuhl für elektronische Meß- und Schaltungstechnik der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt. Die **Abbildung 2.5** zeigt schematisch den dort vorhandenen Meßaufbau, der die oben genannten Anforderungen erfüllt. Ein zu untersuchender Piezoaktor (in der Abbildung als Aktiv-Piezoaktor bezeichnet) arbeitet mechanisch gegen einen weiteren Piezoaktor (Last-Piezoaktor) oder wird durch diesen mechanisch angeregt. Damit ist der Prüfstand in der Lage, Aktoren unter einem dynamischen Kraftspiel zu vermessen. Wird keine steuerbare mechanische Last benötigt, so ist es ebenso möglich, den Last-Aktor durch eine Feder zu ersetzen. Für die elektrische Ansteuerung der Aktoren stehen Spannungs- und Steilheitsverstärker zur Verfügung, wobei die zeitlichen Signalverläufe in weiten Grenzen frei programmierbar sind. Zur Bestimmung der Aktorstellkraft befindet sich zwischen den beiden Aktoren ein Kraftsensor, denn an dieser Stelle treten die geringsten Beschleunigungskräfte auf. Die Erfassung der Aktorauslenkung erfolgt differentiell mittels eines Laserinterferometers, um die Bewegungen des gesamten Prüfstands aufbaus in den Messungen zu unterdrücken. Somit können die zur Charakterisierung von Piezoaktoren erforderlichen elektrischen Größen Spannung  $U$  und Stromstärke  $I$  sowie die mechanischen Größen Kraft  $F$  und Auslenkung  $h$  sowohl bei elektrischer als auch mechanischer Anregung vermessen werden [Schu01].



Für die in den folgenden Unterkapiteln zur Modellierung verwendeten Messungen arbeitet ein Piezoaktor aus Bleizirkonattitanat (PZT) gegen eine Feder, wobei sich im spannungslosen Ruhezustand eine konstante mechanische Druckspannung einstellt. Durch die Auf- und Entladung des Piezoaktors mit einem definierten zeitlichen Stromverlauf dehnt sich der Aktor aus und zieht sich wieder zusammen. Einige dabei aufgezeichnete Messreihen zeigt die **Abbildung 2.6**.

## 2.3 Lineares thermodynamisches Modell

Bei einer Betrachtung der piezoelektrischen und ferroelektrischen Effekte aus thermodynamischer Sicht ergeben sich elementare Beziehungen zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen. Eine Linearisierung dieser Beziehungen ergibt einen einfachen Modellansatz, dessen Wirklichkeitsbezug durch einen Vergleich von Simulation und Messung bewertet wird.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik postuliert, daß die Summe der Energien, die ein thermodynamisches System durch Wechselwirkungen mit seiner Umgebung austauscht, konstant ist. Nach LORD KELVIN wird diese Energie auch als innere Energie  $U$  bezeichnet. Mit anderen Worten, die Änderung  $dU$  der inneren Energie eines geschlossenen Systems entspricht der Summe der zum System hin übertragenen Wärme  $\partial Q^{\text{therm}}$  und der am System verrichteten Arbeit  $\partial W$ . Auf das Volumen  $V$  bezogen lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik für die innere Energiedichte  $u$  von Piezoaktoren also

$$\begin{aligned} du &= \partial w^{\text{el}} + \partial w^{\text{mech}} + \frac{1}{V} \partial Q^{\text{therm}} \\ &= E_i dD_i - \sigma_i d\xi_i + \frac{1}{V} \vartheta dS \end{aligned}$$

mit den elektrischen und mechanischen Austauschenergiedichten  $\partial w^{\text{el}}$  und  $\partial w^{\text{mech}}$  [SoSt74]. Für piezoelektrische Werkstoffe stellt der Satz demnach die mechanische Spannung  $\sigma_i$ , die mechanische Dehnung  $\xi_i$ , die elektrische Feldstärke  $E_i$ , die elektrische Flußdichte  $D_i$ , die Temperatur  $\vartheta$  und die Entropie  $S$  in Beziehung zueinander. Die dabei und im folgenden verwendete Darstellung der Variablen als Tensoren ist im Anhang A.2 näher beschrieben.

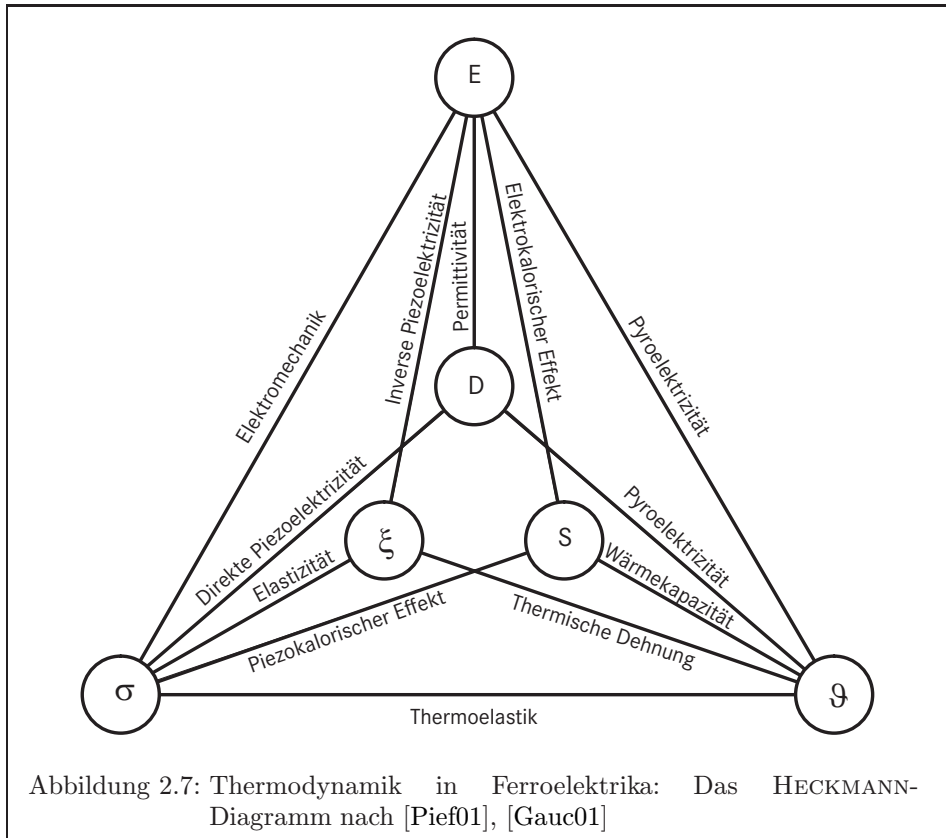
Bei einer Wahl von  $E_i$ ,  $\sigma_i$  und  $\vartheta$  als freie Variablen folgen aus der obigen Gleichung die Differenziale für  $D_i$ ,  $\xi_i$  und  $S$ .

$$dD_i = \frac{\partial D_i}{\partial E_j} dE_j + \frac{\partial D_i}{\partial \sigma_j} d\sigma_j + \frac{\partial D_i}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (2.1)$$

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial E_j} dE_j + \frac{\partial \xi_i}{\partial \sigma_j} d\sigma_j + \frac{\partial \xi_i}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (2.2)$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial S}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (2.3)$$

Das HECKMANN-Diagramm in der **Abbildung 2.7** veranschaulicht die einzelnen Wechselwirkungen.



Aus den zweifachen partiellen Ableitungen der inneren Energiedichte  $u$  resultieren überdies die MAXWELLSchen Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen im obigen Ansatz [Voig66], [SoSt74], [Gauc01].

$$-\frac{\partial D_i}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial E_i} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \vartheta} \quad (2.5)$$

$$-\frac{\partial S}{\partial E_i} = \frac{\partial D_i}{\partial \vartheta} \quad (2.6)$$

Sämtliche Differentiale der Gleichungen (2.1) bis (2.3) sind in der Realität nichtlineare zeitabhängige Funktionen des Zustandstripels  $[D_i \ \xi_i \ S]$ .

Unter der Annahme, daß die Differentiale dennoch weder vom thermodynamischen Zustand des Wandlers noch von der Zeit abhängig sind, lassen sie sich mit dem Elastizitätsmodul  $s_{ij}$ , der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_{ij}$ , der Dichte  $\rho$ , der spezifischen Wärmekapazität  $c$ , einer Referenztemperatur  $\vartheta^{\text{ref}}$ , dem Piezomodul  $d_{ij}$  und den Temperaturkoeffizienten der Dehnung und der Ladung  $\alpha_i^\xi$  und  $\alpha_i^D$  angeben.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_i}{\partial E_j} &= \varepsilon_{ij} & -\frac{\partial D_i}{\partial \sigma_j} &= \frac{\partial \xi_j}{\partial E_i} = d_{ij} \\
-\frac{\partial \xi_i}{\partial \sigma_j} &= s_{ij} & -\frac{\partial D_i}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial S}{\partial E_i} = \alpha_i^D \\
\frac{\partial S}{\partial \vartheta} &= \frac{c \varrho}{\vartheta^{\text{ref}}} & \frac{\partial \xi_i}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial S}{\partial \sigma_i} = \alpha_i^\xi
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichungen (2.1) bis (2.3) entstehen die linearen Zustandsgleichungen für Piezoide.

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j - d_{ij} \sigma_j - \alpha_i^D \vartheta \quad (2.7)$$

$$\xi_i = d_{ji} E_j - s_{ij} \sigma_j + \alpha_i^\xi \vartheta \quad (2.8)$$

$$\text{const} = S = \alpha_i^D E_i + \alpha_i^\xi \sigma_i + \frac{c \varrho}{\vartheta^{\text{ref}}} \vartheta \quad (2.9)$$

Ist die Temperatur des piezoelektrischen Materials nahezu konstant oder ändert sie sich nur geringfügig, so bietet sich eine thermisch quasistatische Betrachtung an. Mit den Vernachlässigungen der Temperaturabhängigkeiten  $\alpha_i^D = 0 \frac{\text{As}}{\text{K}}$  und  $\alpha_i^\xi = 0 \frac{1}{\text{K}}$  vereinfachen sich die Gleichungen (2.7) und (2.8) weiter zu

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j - d_{ij} \sigma_j \quad (2.10)$$

$$\xi_i = d_{ji} E_j - s_{ij} \sigma_j \quad (2.11)$$

Ein uniaxialer Betrieb des piezoelektrischen Wandlers, wie in piezoelektrisch aktuierten Injektoren, erlaubt eine weitere Vereinfachung dieser Gleichungen. Wenn das elektrische Feld  $\underline{E} = E_i \underline{e}_i^{\text{K}}$  lediglich eine einzige von Null verschiedene Komponente beispielsweise entlang des kartesischen Einheitsvektors  $\underline{e}_3^{\text{K}}$  hat und wenn der Wandler ausschließlich in dieser Raumrichtung mechanische Energie mit der Umgebung austauscht, dann lassen sich die dreidimensional formulierten Gleichungen (2.10) und (2.11) mit

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_2 = 0 \frac{\text{V}}{\text{m}} & E_3 &= E & D_3 &= D \\
\sigma_1 &= \sigma_2 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} & \sigma_3 &= \sigma & \xi_3 &= \xi
\end{aligned}$$

zu den eindimensionalen Gleichungen

$$D = \varepsilon E - d \sigma \quad (2.12)$$

$$\xi = d E - s \sigma \quad (2.13)$$

vereinfachen.

In ähnlicher Form sind diese Gleichungen bereits seit Anfang des 20. Jahrhunderts bekannt [Voig66]. [Fläm97] verwendet sie beispielsweise zur Auslegung von Piezoaktoren und der dazugehörigen Ansteuerschaltung am Beispiel von Einspritzventilen, in [Koch88] wird mit ihnen unter anderem das Resonanzverhalten von Schallwandlern erläutert. [Mark98] und [Pief01] leiten aus den Gleichungen (2.10) und (2.11) unter Berücksichtigung der Massenträgheit verteiltparametrische Modelle zur Berechnung der akustischen Wellenausbreitung her.

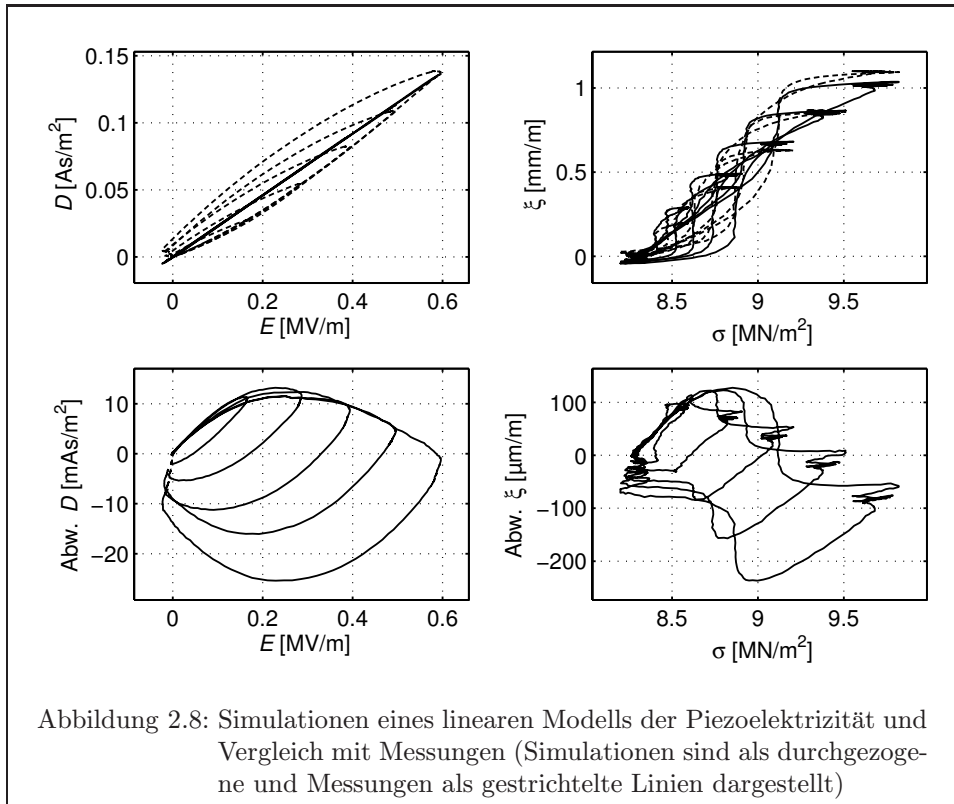


Abbildung 2.8: Simulationen eines linearen Modells der Piezoelektrizität und Vergleich mit Messungen (Simulationen sind als durchgezogene und Messungen als gestrichelte Linien dargestellt)

Ferner sind in der Literatur auch verschiedene Ansätze mit Polynomen höherer Ordnung vorgestellt worden, wie beispielsweise in [WaFC98] und [RMYM01].

Die Materialparameter  $s$ ,  $\varepsilon$  und  $d$  werden häufig bereits von den Herstellern anhand standardisierter Kleinsignalmessungen ermittelt ([Jend99]:  $f = 1\text{kHz}$ ,  $U = \pm 1\text{V}$ ,  $\vartheta = 23^\circ\text{C}$ ,  $F = 0\text{N}$ ) und in Datenblättern angegeben. Von dem in dieser Arbeit untersuchten piezoelektrischen Wandler sind die Materialparameter nicht bekannt, weshalb sie hier unter Verwendung von Großsignalmessungen von  $E^{\text{Meß}}$ ,  $D^{\text{Meß}}$ ,  $\sigma^{\text{Meß}}$  und  $\xi^{\text{Meß}}$  als Lösung aus dem statischen Optimierungsproblem

$$\int \left( g^D (D^{\text{Meß}} - D^{\text{Sim}}(E^{\text{Meß}}, \sigma^{\text{Meß}}))^2 + g^\xi (\xi^{\text{Meß}} - \xi^{\text{Sim}}(E^{\text{Meß}}, \sigma^{\text{Meß}}))^2 \right) dt \rightarrow \min \quad (2.14)$$

hervorgehen.  $g^D$  und  $g^\xi$  sind dabei geeignete Gewichtungsfaktoren.

Die **Abbildung 2.8** zeigt die Übereinstimmung des Modells mit der Realität. Oben links ist jeweils für Messung und Simulation die Flußdichte über der Feldstärke aufgetragen, rechts oben die mechanische Spannung über der Dehnung und darunter jeweils die Abweichungen zwischen Modell und Simulation. Wie zu erkennen ist, weist der vermessene Aktor eine deutliche Hysterese auf, welche in den Gleichungen (2.10) und (2.11) nicht nachgebildet wird und damit zu beträchtlichen Modellfehlern führt: Bezogen auf den gemessenen Wertebereich zeigen sowohl die simulierte Flußdichte als auch die berechnete Dehnung Abweichungen bis zu 20 Prozent von den Meßwerten.

Im folgenden wird deshalb gezeigt, wie eine mathematische Modellierung der Wandlerysterese die Modellgenauigkeit verbessert.

## 2.4 Modellierung mit Hysterese nach DAHL und WILDER

Im vorangegangenen Unterkapitel wurde vereinfachend angenommen, daß alle thermodynamischen Vorgänge in der piezoelektrischen Keramik reversibel ablaufen. Dies gilt in sehr guter Näherung für einige piezoelektrische Kristalle wie Quarz, die nicht oder nur schwach ferroelektrisch sind. In ferroelektrischen Materialien für Aktoren großer Leistungsdichte hingegen ist keine vollständige Umwandlung zwischen elektrischer und mechanischer Energie möglich.

Die Messungen in der **Abbildung 2.9** illustrieren diesen Sachverhalt. In dem linken oberen Graphen ist die elektrische Feldstärke gegen die Flußdichte aufgetragen, wobei sich die markanten Hystereseschleifen ausbilden, die im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Unten links ist der zeitliche Verlauf der aufgenommenen elektrischen Energiedichte

$$w^{\text{el}}(t) = \int_{t_0=0\text{s}}^t E \frac{dD}{dt} dt$$

dargestellt. Die bei der Entladung abgegebene elektrische Energie beträgt nur etwa 60 Prozent der bei der Aufladung aufgenommenen elektrischen Energie. Als Beleg dafür, daß die Verluste nicht auf der mechanischen Seite entstehen, zeigt die rechte Bildhälfte analog die mechanische Druckspannung als Funktion der Dehnung und darunter die vom Aktor an die Feder abgegebene mechanische Energiedichte

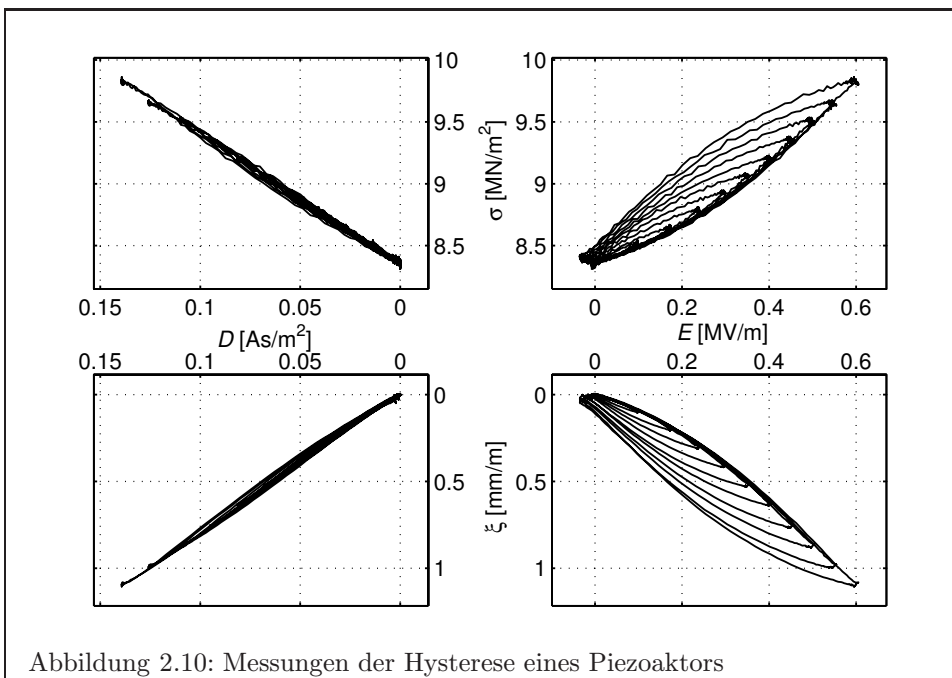
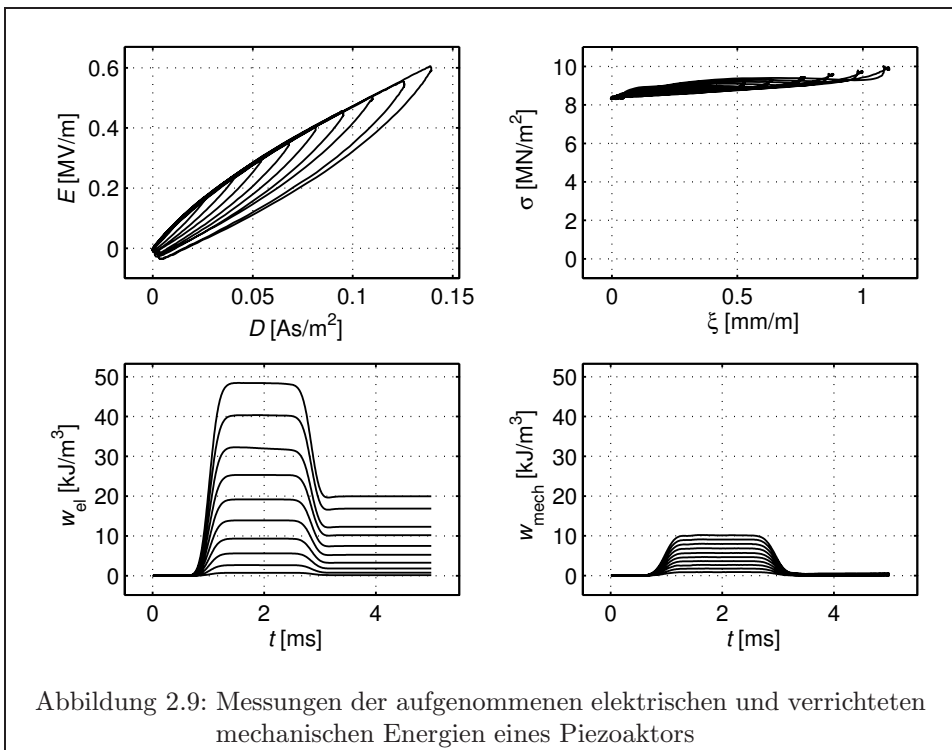
$$w^{\text{mech}}(t) = \int_{t_0=0\text{s}}^t \sigma \frac{d\xi}{dt} dt \quad .$$

Dort ist nur eine vernachlässigbar geringe Verlustenergie messbar. Die Verlustenergie, die während der elektrischen Ansteuerungen umgesetzt wird, dissipiert demnach im Piezoaktor.

Die Hauptursache der Hystereseschleifen zwischen der Feldstärke und der Flußdichte ist die verlustbehaftete Änderung der Orientierungspolarisation. Bei einer sehr geringen Änderungsgeschwindigkeit ( $f < 10^{-2}\text{Hz}$ ) der Ansteuerung fällt die Hysterese aufgrund langsamer thermischer Ausgleichsprozesse in der Keramik (Kriechen) weniger stark aus [KoSK99]. Liegen die Frequenzen der Ansteuerung oberhalb der Grenzfrequenz der ferroelektrischen Orientierungspolarisation ( $f > 10^6\text{Hz}$  bis  $10^9\text{Hz}$ ), so verschwindet die Hystereseschleife ebenfalls, weil dort nur noch die wesentlich schwächere reversible Ionenspolarisation wirkt [Gauc01]. In dem weiten Bereich dazwischen ist die hysteresebedingte Verlustleistung nur unwesentlich von den Zeitkonstanten der Ansteuerung abhängig. Die Amplitude der Ansteuerung bestimmt hingegen wesentlich die Größe der Verlustleistung, und auch die Temperatur spielt eine nicht zu vernachlässigende Rolle [SoSt74].

Nicht nur die Beziehung zwischen der Flußdichte und der Feldstärke weist eine Hysterese auf, sondern auch die Dehnung als Funktion der Feldstärke. Als Übersicht dient die **Abbildung 2.10**, in der auch die übrigen Wechselwirkungen zwischen der Flußdichte, der Feldstärke, der Dehnung und der Druckspannung zusammengefaßt sind. Es handelt sich hierbei um die selben Messungen wie in den Abbildungen 2.8 und 2.9, aber in der Abbildung 2.10 wurde die dynamische Beschleunigungskraft der Aktormasse von der mechanischen Spannung abgezogen, um die nichtlinearen Zusammenhänge hervorzuheben.





DAHL und WILDER stellen in [DaWi85] zur Modellierung der Hysterese eine nichtlineare Differentialgleichung vor. Der Ausgangspunkt des Ansatzes sind die PRANDTLschen Postulate über das Wesen der mechanischen Hysterese (zitiert nach [DaWi85]):

1. Nach jeder Änderung des Vorzeichens der Deformationsgeschwindigkeit nimmt die Steigung der Hystereseurve im  $(x, F)$ -Diagramm betragsmäßig stets den gleichen Wert an.
2. Die Form jedes Astes im  $(x, F)$ -Diagramm ist eindeutig durch die Lage des Punktes des letzten Vorzeichenwechsels der Deformationsgeschwindigkeit festgelegt.
3. Jede Unterschleife im  $(x, F)$ -Diagramm endet in dem Punkt, in dem sie begonnen hat. Ist eine Unterschleife geschlossen und wird die Deformation gleichermaßen fortgesetzt, ist der weitere Verlauf der Hystereseurve derart, als ob keine Unterschleife aufgetreten wäre.

Obleich Messungen an Piezoaktoren diese Postulate nicht gänzlich bestätigen, bieten sie dennoch eine hilfreiche Qualifizierung der verschiedenen Modellansätze für die ferroelektrische Hysterese.

Zur Umsetzung der PRANDTLschen Postulate in einem mathematischen Modell formuliert DAHL die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dx} = \theta_1 \left( 2 - \frac{F - F^{\text{Merk}}}{\theta_2} \operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^{\theta_3} \quad (2.15)$$

einer Reibkraft  $F$  bei einer Auslenkung  $x$  als Funktion der Zeit  $t$  mit dem Parametervektor  $\underline{\theta} = (\theta_1 \theta_2 \theta_3)$  sowie der Signum-Funktion

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} . \quad (2.16)$$

Das Besondere dieses Ansatzes ist der Merkeroperator  $F^{\text{Merk}}$ , der es ermöglicht, die PRANDTLschen Postulate modellmäßig zu erfüllen.  $F^{\text{Merk}}$  wirkt darin als Stapelspeicher (Stack) der Umkehrpunkte der Hystereseurve.

Die **Abbildung 2.11** verdeutlicht die Funktionsweise des Hysterese Modells. Oben links ist der zeitliche Verlauf des Operatorarguments als eine Auslenkung  $x$  aufgetragen, für den der zeitliche Verlauf einer Kraft  $F$  berechnet werden soll. Zur Veranschaulichung enthält der Verlauf mehrere Punkte, an denen sich die Auslenkungsrichtung  $\operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right)$  umkehrt. Der Graph darunter zeigt die Anzahl der in  $F^{\text{Merk}}$  gespeicherten Werte von  $F$ , also die Höhe des Stapelspeichers über der normierten Zeit.

Unmittelbar zu Beginn der Simulation bei  $t = 0$  wird der erste Wert von  $F$  als oberstes Element auf dem Stapelspeicher abgelegt und sogleich für  $F^{\text{Merk}}$  verwendet.  $\frac{dF}{dx}$  startet somit wegen  $F - F^{\text{Merk}} = 0$  mit  $\theta_1 2^{\theta_3}$ . Für jeden weiteren Zeitschritt ist dann die Kraft  $F$  in der Gleichung (2.15) numerisch oder analytisch über  $x$  zu integrieren. Weil dabei die Differenz  $F - F^{\text{Merk}}$  allmählich zunimmt, verringert sich  $\frac{dF}{dx}$  mit zunehmender Auslenkung  $x$ .

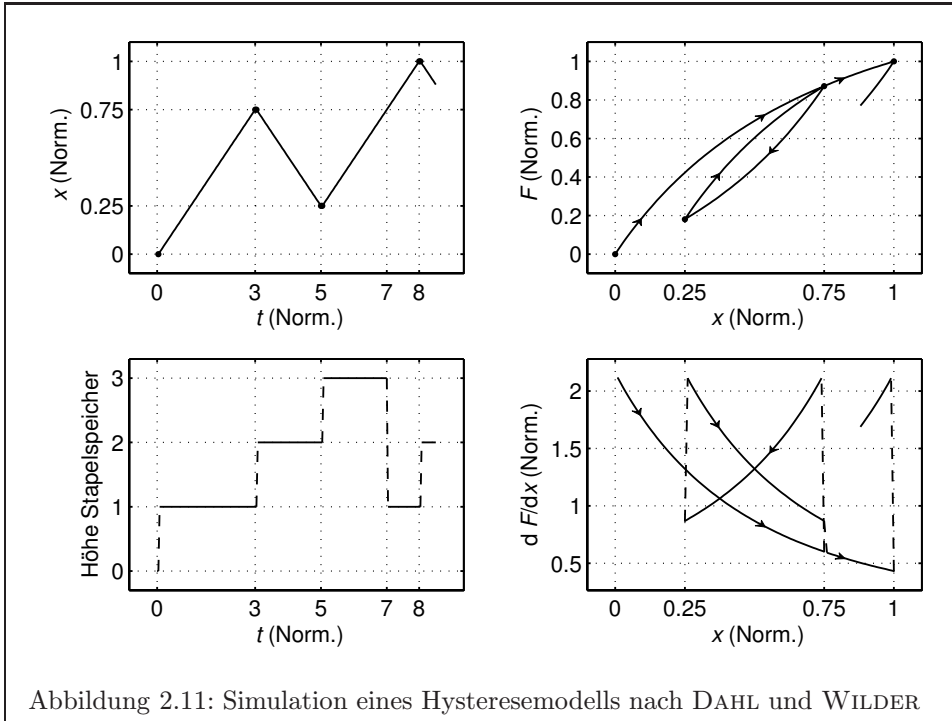


Abbildung 2.11: Simulation eines Hysterese Modells nach DAHL und WILDER

Erreicht die Auslenkung  $x$  zum Zeitpunkt  $t = 3$  ein Maximum, so wird der momentane Wert von  $F$  als neuer oberster Wert in den Stapelspeicher übertragen und für  $F^{\text{Merk}}$  eingesetzt: Die Höhe des Stapelspeichers erhöht sich auf zwei und  $\frac{dF}{dx}$  beträgt wieder  $\theta_1 2^{\theta_3}$ . Dieses Vorgehen wiederholt sich erneut bei  $t = 5$ , sobald die Auslenkung das folgende Minimum durchläuft.

Wie die Abbildung rechts oben zeigt, führt der nichtmonotone Verlauf von  $x$  zu der Ausbildung einer Unterschleife. Das dritte PRANDTLsche Postulat fordert, daß  $\frac{dF}{dx}$  unmittelbar vor dem Eintritt und nach dem Verlassen der Unterschleife gleich sein müssen. Für den Stapelspeicher bedeutet dies, daß am Ende der Unterschleife bei  $t = 7$  die beiden obersten Einträge zu entfernen sind und  $F^{\text{Merk}}$  wieder auf den ersten Eintrag zurückzusetzen ist, was an der Verringerung der Stapelhöhe von drei auf eins erkennbar ist.

Das so entstehende  $(x, F)$ -Diagramm sowie  $\frac{dF}{dx}$  als Relation von  $x$  sind in der rechten Hälfte der Abbildung 2.11 zu sehen. Der Verlauf der simulierten Hysterese zeigt einen Hystereseast mit einer Unterschleife, und die Wirkung von  $F^{\text{Merk}}$  ist an den Unstetigkeiten von  $\frac{dF}{dx}$  erkennbar. Die Simulation demonstriert, daß dieser Algorithmus die PRANDTLschen Postulate erfüllt.

Die zuvor in der Abbildung 2.9 links oben gezeigten Hysterese Schleifen der elektrischen Feldstärke als Funktion der Flußdichte werden stets im Uhrzeigersinn durchlaufen, die der mechanischen Spannung als Funktion der elektrischen Feldstärke entgegen dem Uhrzeigersinn. Je nach zu modellierendem hysteresebehafteten Zusammenhang ist deshalb nicht nur ein wie oben beschriebener Hystereseoperator  $F = \Gamma(x, t, \underline{\theta})$  erforderlich, sondern auch die Inverse  $x = \Gamma^{-1}(F, t, \underline{\theta})$ , welche einen umgekehrten Umlaufsinn aufweist.  $\Gamma^{-1}$  geht als

$$\frac{dx}{dF} = \frac{1}{\theta_1} \left( 2 - \frac{F - F^{\text{Merk}}}{\theta_2} \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^{-\theta_3} \quad (2.17)$$

direkt aus der Gleichung (2.15) hervor und ist entsprechend über  $F$  zu integrieren.

Wie ist nun ein solcher Ansatz für die Hysterese auf Piezoaktoren übertragbar? In der Literatur variieren die Auffassungen darüber, wie verlustbehaftete Zustandsänderungen in einem Modell der Ferroelektrizität zu integrieren sind. In [CrSD01] und [Schu01] wird beispielsweise eine nichtlineare Beziehung zwischen der Aktorspannung und der Aktorkraft aufgestellt, [DaWi85] und [KoSK99] beobachten die Hysterese zwischen Aktorspannung und Aktorhub, [SSUG02] dagegen zwischen Aktorspannung und Aktorladung, und [GoCe97] und [GoJo99] sehen irreversible Längenänderungen durch die Änderung der Aktorladung begründet.

Ogleich sich jede einzelne dieser Sichtweisen mit den Messungen in der Abbildung 2.10 deckt, beschreiben die erwähnten Studien dennoch jeweils nur eine spezifische Auswahl aller Wechselwirkungen zwischen den elektrischen und mechanischen Größen. Auch der Verwendbarkeit der Ansätze als Detektionsmodell wird zumeist nur unzureichend Beachtung beigemessen. Aus diesem Grund verfolgt diese Arbeit einen davon abweichenden eigenständigen Ansatz, der dennoch sämtliche Betrachtungsweisen der genannten Arbeiten beinhaltet.

Oben wurde bereits erläutert, daß die Hysterese in Ferroelektrika durch die verlustbehaftete Änderung der Orientierungspolarisation hervorgerufen wird, wobei die elektrische Feldstärke und die mechanische Spannung eine solche Änderung bewirken. Deshalb sei angenommen, daß die Polarisation  $P$  eine hysteresebehaftete Funktion der Feldstärke und der Druckspannung ist, wobei  $k^E$  eine zu bestimmende Modellkonstante ist.

$$P = \Gamma^{-1}(E - k^E \sigma, t, \theta) \quad (2.18)$$

Die elektrische Flußdichte im Piezoid setzt sich aus der Polarisation und der Dielektrizität des Vakuums zusammen. Auch die Dehnung ist durch die Asymmetrie der polarisierten Elementarzellen von der Orientierungspolarisation abhängig, wie bereits in Abbildung 2.1 illustriert wurde. Bei Vernachlässigung der thermischen Energieänderung entstehen so die Gleichungen

$$D = \varepsilon^P E + P \quad (2.19)$$

$$\xi = k^\sigma P - s^P \sigma \quad (2.20)$$

für ein nichtlineares Modell mit der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon^P$  und einem weiteren Modellparameter  $k^\sigma$ .

Die MAXWELLSche Beziehung (2.4) fordert zur Einhaltung der thermodynamischen Hauptsätze die Gleichheit von  $k^\sigma$  und  $k^E$ . Andererseits zeigen Simulationen, daß eine Unterscheidung zwischen  $k^\sigma$  und  $k^E$  die Modellfehler etwa um die Hälfte reduziert. Da zudem der Modellansatz in den Gleichungen (2.18) bis (2.20) eher als phänomenologisch denn als physikalisch einzuordnen ist, wird im folgenden zwischen den beiden Parametern  $k^\sigma$  und  $k^E$  unterschieden.

Mit diesem Ansatz zur Modellierung piezoelektrischer Wandler lassen sich die Flußdichte  $D$  und die Dehnung  $\xi$  als Funktionen der Feldstärke  $E$  und der mechanischen Spannung  $\sigma$  berechnen. Die Wahl der abhängigen und der unabhängigen Variablen erfolgt hier zunächst willkürlich, und je nach Anwendung mögen auch die übrigen Kombinationen von Interesse sein. Ohne die Modellparameter erneut bestimmen zu müssen, sind durch Umstellen der Gleichungen unmittelbar die Beziehungen

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{k^\sigma} \xi + \frac{s^P}{k^\sigma} \sigma \\ D &= P + \varepsilon^P \Gamma(P, t, \underline{\theta}) + \varepsilon^P k^E \sigma \\ E &= \Gamma(P, t, \underline{\theta}) + k^E \sigma \end{aligned}$$

für  $\sigma$  und  $\xi$  sowie

$$P = D - \varepsilon^P E \quad (2.21)$$

$$\xi = k^\sigma P - \frac{s^P}{k^E} E + \frac{s^P}{k^E} \Gamma(P, t, \underline{\theta}) \quad (2.22)$$

$$\sigma = \frac{1}{k^E} E - \frac{1}{k^E} \Gamma(P, t, \underline{\theta}) \quad (2.23)$$

für  $D$  und  $E$  als Modelleingänge erhältlich. Letztere Form wird auch als Detektionsmodell bezeichnet, weil sie ermöglicht, die mechanischen Größen durch eine Auswertung der elektrischen Signale zu detektieren [Jano99].

Etwas aufwendiger gestaltet sich die Entwicklung der übrigen Kombinationen. Beispielhaft sei hier erläutert, wie aus den Gleichungen (2.18) bis (2.20) ein Modell mit den Eingängen  $D$  und  $\xi$  hervorgeht. Zunächst ergibt ein Umstellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} P &= \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon^P} D + \frac{k^E}{s^P} \xi - \left( \frac{k^\sigma k^E}{s^P} + \frac{1}{\varepsilon^P} \right) P, t, \underline{\theta} \right) \\ E &= \frac{1}{\varepsilon^P} D - \frac{1}{\varepsilon^P} P \\ \sigma &= \frac{k^\sigma}{s^P} P - \frac{1}{s^P} \xi \quad . \end{aligned}$$

Dabei tritt ein Problem des Typs

$$x = \Gamma^{-1}(F - a x, t, \underline{\theta}) \quad (2.24)$$

auf, um die implizite Gleichung nach der Polarisation  $P$  zu lösen. Mit der Umstellung

$$F = F_\Gamma + F_x = \Gamma(x, t, \underline{\theta}) + a x$$

und deren Ableitung

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF_\Gamma}{dx} + \frac{dF_x}{dx} = \theta_1 \left( 2 - \frac{F_\Gamma - F_\Gamma^{\text{Merk}}}{\theta_2} \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^{\theta_3} + a$$

wird nach Einsetzen von  $F_\Gamma = F - F_x$  deutlich, wie die Differentialgleichung nach DAHL zu erweitern ist, um eine Gleichung wie (2.24) lösen zu können.

Durch die Erweiterung des DAHLschen Hysterese Modells aus Gleichung (2.15) um einen weiteren Koeffizienten  $\theta_4 = a$  entstehen so die Differentialgleichungen

$$\frac{dF}{dx} = \theta_1 \left( 2 - \frac{F - F^{\text{Merk}} - \theta_4 (x - x^{\text{Merk}})}{\theta_2} \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^{\theta_3} + \theta_4 \quad (2.25)$$

$$\frac{dx}{dF} = \frac{1}{\theta_1 \left( 2 - \frac{F - F^{\text{Merk}} - \theta_4 (x - x^{\text{Merk}})}{\theta_2} \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^{\theta_3} + \theta_4} \quad (2.26)$$

für den Hystereseoperator  $F = \Gamma(x, t, \underline{\theta})$  sowie für seine Inverse  $x = \Gamma^{-1}(F, t, \underline{\theta})$ . Auch für den erweiterten Operator gilt bei plausiblen Parametern und Startwerten die Relation  $\frac{dF}{dx} > 0$ .

Zurückkommend auf die Modellierung des Piezoaktors lauten die Gleichungen mit dem erweiterten DAHLschen Hysterese Modell und  $D$  und  $\xi$  als Modelleingänge

$$P = \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon^P} D + \frac{k^E}{s^P} \xi, t, \underline{\tilde{\theta}} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{\theta}_4 = \theta_4 + \frac{k^\sigma k^E}{s^P} + \frac{1}{\varepsilon^P} \quad (2.27)$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon^P} D - \frac{1}{\varepsilon^P} P \quad (2.28)$$

$$\sigma = \frac{k^\sigma}{s^P} P - \frac{1}{s^P} \xi \quad (2.29)$$

Insbesondere für die im nächsten Kapitel beschriebene verteiltparametrische Modellierung von Stapelaktoren ist es nützlich, die mechanische Spannung und die Flußdichte aus der elektrischen Feldstärke und aus der Dehnung zu berechnen.

$$P = \Gamma^{-1} \left( E + \frac{k^E}{s^P} \xi, t, \underline{\tilde{\theta}} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{\theta}_4 = \theta_4 + \frac{k^\sigma k^E}{s^P} \quad (2.30)$$

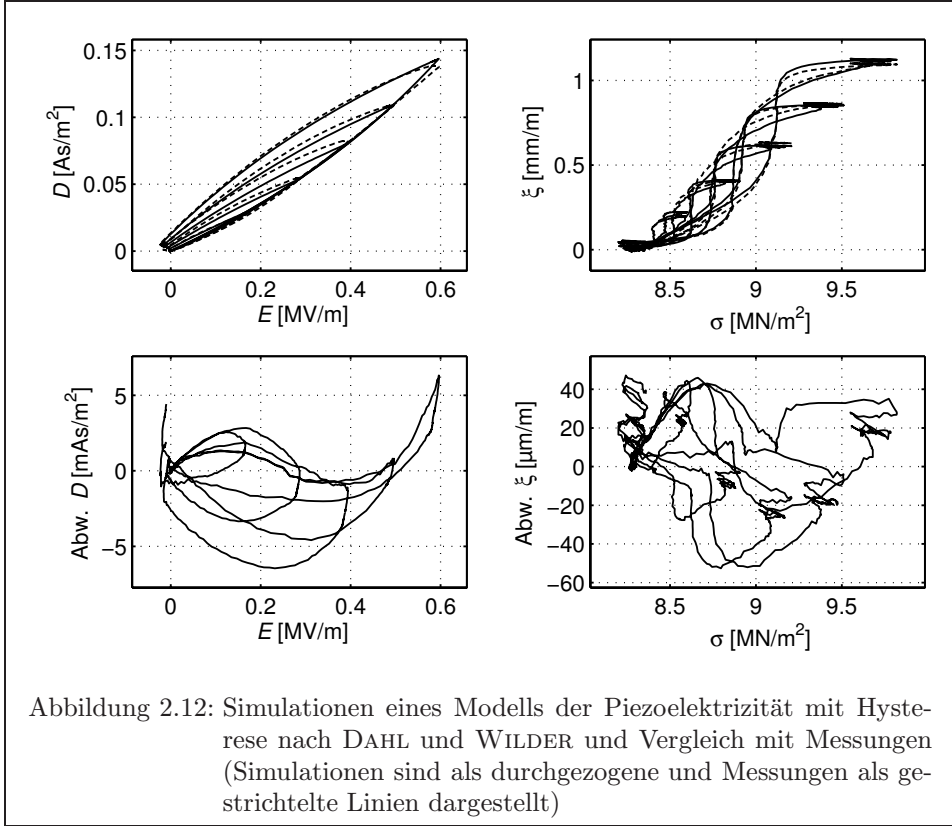
$$D = \varepsilon^P E + P \quad (2.31)$$

$$\sigma = \frac{k^\sigma}{s^P} P - \frac{1}{s^P} \xi \quad (2.32)$$

Alle beschriebenen Gleichungssysteme zur mathematischen Modellierung des Aktors haben gemein, daß sie eine der beiden Differentialgleichungen (2.25) und (2.26) enthalten, und eine Simulation des Modells erfordert deren Lösung. Während die Gleichung (2.25) des Hystereseoperators  $\Gamma$  zumindest für  $\theta_3 = 1$  ein abschnittsweise analytisches Integral

$$F - F^{\text{Merk}} = \theta_4 (x - x^{\text{Merk}}) + 2\theta_2 \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\theta_1}{\theta_2} \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) (x - x^{\text{Merk}})} \right) \quad (2.33)$$

besitzt, ist es unumgänglich, die Gleichungen für den zur Modellierung von Piezoaktoren häufiger benötigten inversen Hystereseoperator  $\Gamma^{-1}$  numerisch zu lösen. Hierfür mag je nach Parametrierung und Anwendung ein erheblicher Rechenbedarf erforderlich sein, welcher sich nachteilig auf die Simulationsgeschwindigkeit des Modells auswirkt.



Neben einer numerischen Näherungslösung für die Differentialgleichungen (2.17) beziehungsweise (2.26) existiert ebenfalls für  $\theta_3 = 1$  eine analytische Approximation: Eine nach dem quadratischen Glied abgebrochene TAYLOR-Reihenentwicklung von (2.33) an der Stelle  $x = x^{\text{Merk}}$  ergibt

$$F - F^{\text{Merk}} = (\theta_4 + 2\theta_1)(x - x^{\text{Merk}}) - \frac{\theta_1^2}{\theta_2} \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)(x - x^{\text{Merk}})^2, \quad ,$$

was unter der Beschränkung

$$x - x^{\text{Merk}} < \frac{2\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_4}{2\theta_1^2} \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

des Operatorarguments auf den Eineindeutigkeitsbereich nach  $x$  auflösbar ist.

$$\begin{aligned} x &= -\frac{p}{2} - \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{mit} \\ p &= -\frac{2\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_4}{\theta_1^2} \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) - 2x^{\text{Merk}} \\ q &= \frac{\theta_2}{\theta_1^2} \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)(F - F^{\text{Merk}}) + \frac{2\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_4}{\theta_1^2} \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)x^{\text{Merk}} + (x^{\text{Merk}})^2 \end{aligned}$$

Obleich sich eine analytische Berechnung des Hystereseoperators günstig auf die Simulationsgeschwindigkeit auswirkt, wird im folgenden dennoch mit der numerischen Lösungsvariante des ursprünglichen Ansatzes gearbeitet, um für die Modellierung keine Einbußen hinsichtlich der Parametrierbarkeit in Kauf nehmen zu müssen.

Zur Bestimmung der unbekanntten Modellparameter  $\varepsilon^P$ ,  $k^E$ ,  $k^\sigma$ ,  $s^P$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  und  $\theta_3$  bietet sich erneut die Lösung des statischen Optimierungsproblems (2.14) an. Die **Abbildung 2.12** vergleicht Simulationen der auf diese Weise parametrisierten Modellgleichungen (2.18) bis (2.20) mit den Messdaten eines realen piezoelektrischen Wandlers. Sowohl die simulierte Flußdichte als auch die mechanische Dehnung zeigen weniger als sechs Prozent Abweichung von den gemessenen Werten, was eine deutliche Verbesserung gegenüber dem linearen Modell darstellt. Größere Abweichungen zwischen den Simulationen und den Messungen treten dabei besonders an den Umkehrpunkten der Hystereseschleifen auf.

Die in der **Abbildung 2.12** gezeigte Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Messungen ist nur dann erreichbar, wenn neben den Modellparametern auch der Anfangszustand des Hystereseoperators sorgfältig gewählt wird. Deshalb ist den hier dargestellten Simulationen jeweils eine Initialisierung des Modells vorangegangen. Ähnlich dem Polarisationsprozeß realer Aktoren nimmt das Modell dabei erst einen definierten Polarisationszustand an und wird dann auf die Anfangswerte der Messungen relaxiert.

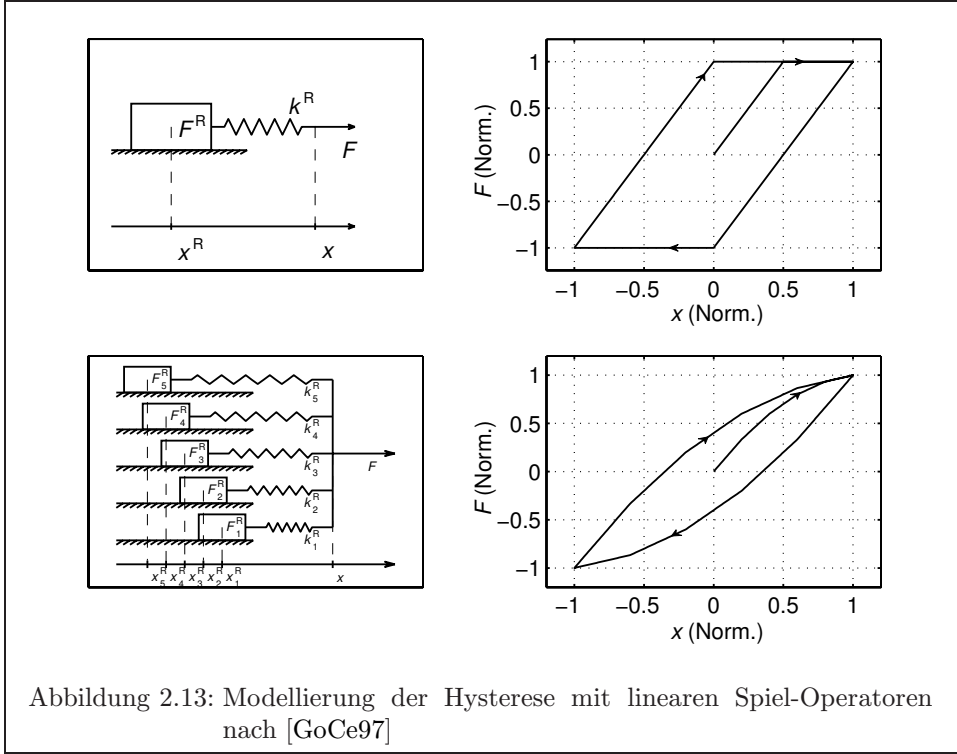
Dieser Ansatz zur Hysteresemodellierung zeichnet sich insbesondere durch die verhältnismäßig geringe Anzahl an Parametern aus. Nachteile ergeben sich durch die nicht vorhersagbare Größe des Stapelspeichers, die insbesondere bei ausklingenden Schwingungen durch die ineinander geschachtelten Unterschleifen stark anwachsen kann.

## 2.5 Modellierung mit Hysterese nach MAXWELL

Ein anderer häufig angewandeter Ansatz zur Modellierung der Hysterese ist der lineare Spiel-Operator (auch MAXWELL-Modell oder Linear Playoperator genannt), den JAMES C. MAXWELL in der Mitte des 19. Jahrhunderts formulierte und welcher beispielsweise von [GoCe97], [KuJa98], [GoJo99], [KuJa99] und [Dir00] aufgegriffen wird. Die **Abbildung 2.13** verdeutlicht die Wirkungsweise des Operators anhand einer mechanischen Ersatzanordnung. Ein Körper liege auf einer ebenen Fläche, auf der er mittels einer angreifenden Feder mit der Federkonstanten  $k^R$  verschoben werde. Der Körper bewege sich dabei trägheitslos, aber jeder Positionsänderung wirke eine Reibkraft  $F^R$  entgegen.

Bei einer Auslenkung des freien Endes der Feder um einen Weg  $x$  baut sich zunächst in der Feder eine Kraft  $F(x, t)$  auf, bis die Federkraft den Wert der Reibkraft  $F^R$  erreicht und die Masse zu rutschen beginnt. Eine weitere Zunahme von  $x$  führt dazu, daß der Körper der Auslenkung simultan folgt, wobei die Federkraft  $F(x, t)$  den konstanten Wert  $F^R$  beibehält. Kehrt sich die Richtung der Auslenkung um, so verharrt der Körper an seiner Position  $x^R$ , bis der Betrag der Federkraft den Wert der Reibkraft  $F^R$  wieder übersteigt.





Das nichtlineare Verhalten des linearen Spiel-Operators  $\gamma_i(x, t, \underline{\theta})$ , der die Federkraft  $F(x, t)$  als Funktion der Federauslenkung  $x$  und der Zeit  $t$  berechnet, hat die mathematische Form

$$\gamma(x, t, \underline{\theta}) = k^R(x - x^R) \quad (2.34)$$

$$\dot{x}^R(x, t) = \begin{cases} \dot{x} & \text{für } x \leq x^R - \frac{F^R}{k^R} \wedge \dot{x} \leq 0 \\ 0 & \text{für } (x - x^R) \text{sign}(\dot{x}) < \frac{F^R}{k^R} \\ \dot{x} & \text{für } x \geq x^R + \frac{F^R}{k^R} \wedge \dot{x} \geq 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

mit dem Parametervektor  $\underline{\theta} = (k^R, F^R)$ .

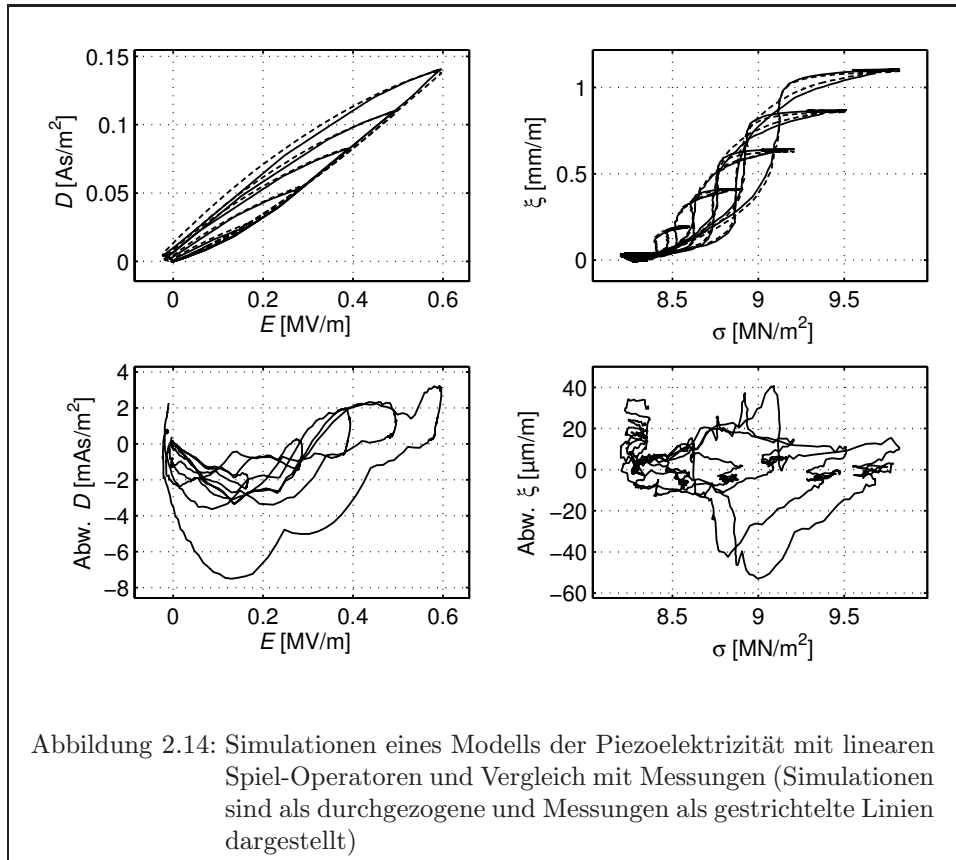
Ein solches Reibelement vermag die messbaren Hystereseschleifen nur grob wiederzugeben, aber durch eine Überlagerung mehrerer Operatoren

$$\Gamma(x, t, \underline{\theta}) = \sum_{i=1}^{N^\gamma} \gamma_i(x, t, \underline{\theta}_i) \quad (2.36)$$

läßt sich die Kurve qualitativ besser an eine reale Schleifenform anpassen, wie der unteren Zeile der Abbildung 2.13 zu entnehmen ist [GoCe97].

Für die spätere Modellierung wird auch hier nicht nur der lineare Spiel-Operator  $\Gamma(x, t, \underline{\theta})$  benötigt, sondern ebenfalls der inverse Spiel-Operator  $\Gamma^{-1}(F, t, \underline{\theta})$ . Bei der Umkehrung ist zu beachten, daß der Wertebereich des  $\Gamma$ -Operators auf den Wert  $\sum F^R$  beschränkt ist, entsprechend ist also der Definitionsbereich von  $\Gamma^{-1}(F, t, \underline{\theta})$  limitiert.

Die Parameter der Gleichungen (2.18), (2.19) und (2.20) sind die  $F_i^R$  und  $k_i^R$  der Reibelemente und deren Positionen  $x_i^R(t = 0)$  zu Beginn der Simulation sowie die



Koeffizienten  $k^E$ ,  $k^\sigma$  und  $s^P$ . Bei einem Hystereseeoperator, der sich aus  $N^\gamma = 10$  Elementen zusammensetzt, sind dies insgesamt 33 Parameter. Durch die Zusammenfassung der Startpositionen zu  $x_i^R(t=0) = x_0^R$  und einen quadratischen Ansatz  $F_i^R = F_0^R i^2$  für die Reibkräfte verbleiben nur noch 15 Parameter, wobei  $F_0^R$  so zu wählen ist, daß der Definitionsbereich des inversen Hystereseeoperators  $\Gamma^{-1}$  in Gleichung (2.18) nicht überschritten wird.

Die **Abbildung 2.14** vergleicht das Modell mit den Messungen. Ähnlich wie im vorherigen Modell sind die Parameter und der Anfangszustand des Hystereseeoperators auch hier wieder die Lösung des statischen Optimierungsproblems in der Gleichung (2.14). Während die simulierte Flußdichte um maximal etwa 3,5 Prozent von den gemessenen Werten abweicht, betragen die Fehler der mechanischen Größen bis zu fünf Prozent. Im Vergleich zum dynamischen Hysteresemodell des vorhergehenden Unterkapitels ist mit dem linearen Spiel-Operator  $\Gamma$  dank der größeren Anzahl zu bestimmender Parameter demnach auch eine geringfügig bessere Modellgenauigkeit möglich.

Darüber hinaus existiert eine Vielzahl weiterer Ansätze zur Modellierung der Hysteresis. HAESSIG und FRIEDLAND erweitern in [HaFr91] die MAXWELLSchen Reibelemente um einen zusätzlichen dämpfenden Term sowie einen Anteil zur Berücksichtigung der Haftreibung, wodurch sich ein ähnliches Modell ergibt wie in [KuJa98]. Der PREISACH-Operator [Maye91] ist eine Grenzwertbetrachtung für eine Überlagerung unendlich vieler elementarer Hystereseelemente und wird in [HuWe97], [GeJo97], [CrSD01] und [SLKL00] verwendet. Ähnlich wie DAHL stellen auch SMITH und OUNAIES eine nichtlineare Differentialgleichung vor, in der bereits Sättigungseffekte berücksichtigt sind [SmOu99]. [Dirs00] modifiziert einen dynamischen Ansatz von

COLEMAN und HODGDON [CoHo86] zur Vorsteuerung des Scanners eines Rastertunnelmikroskops und erzielt auf diese Weise bemerkenswerte Ergebnisse. In [GUSK99] und [SSUG02] wird unter Annahme einer Schwellenwert-Verteilungsfunktion berechnet, wieviele elementare Dipole ihre Orientierung in Abhängigkeit einer elektrischen Feldstärke ändern. Weitere Ansätze zur Modellierung der Hysterese sind in [OÄWG98] zu finden.

Die in den bisherigen Ausführungen erzielten Übereinstimmungen zwischen Messung und Simulation bestätigen den Ansatz, die Polarisation der Keramik als Modellzustand zu betrachten. Dabei ist anzumerken, daß sich sowohl die elektrischen als auch die mechanischen Größen im wesentlichen nur in einem Quadranten sowohl der  $(D, E)$ - als auch der  $(\xi, \sigma)$ -Ebene bewegen und bei der gezeigten Amplitude der Ansteuerung kaum Sättigungserscheinungen auftreten.

Wie schon im Zusammenhang mit der Abbildung 2.3 erwähnt, zeigen Ferroelektrika unter extremeren Betriebsbedingungen eine weitaus stärkere Sättigung und bei einem elektrisch bipolaren Betrieb sogar einen Vorzeichenwechsel des differentiellen Wandlerverhaltens. Weder die Sättigung noch die Umkehrung der Piezoelektrizität sind durch die bisher beschriebenen Modelle darstellbar. Eine mögliche Modellstruktur, die auch diese Effekte abzubilden vermag, wird im folgenden Unterkapitel beschrieben.

## 2.6 Modellierung des Polarisationszustands

In diesem Unterkapitel wird eine mathematische Modellbildung beschrieben, welche neben der Hysterese auch die Sättigung und die Arbeitspunktabhängigkeit der Ferroelektrizität realer Aktoren berücksichtigt. Dazu wird, ausgehend von einem linearen Ansatz für die Piezoelektrizität der unterschiedlich polarisierten Bereiche der Keramik, ein vom Polarisationszustand abhängiges Gesamtwandlerverhalten abgeleitet. Der Polarisationszustand maximiert dabei die Entropie des Wandlers, welche vom elektromechanischen Arbeitspunkt abhängt. Wenn auch die dissipative Energie und die Sättigung des Wandlermaterials in dem Modell berücksichtigt werden, so entsteht ein hysterese- und sättigungsbehaftetes Verhalten, welches dem realer Aktoren qualitativ und quantitativ sehr nahe kommt. Die in diesem Unterkapitel verwendete Tensorrechnung ist im Anhang A.2 detailliert erläutert.

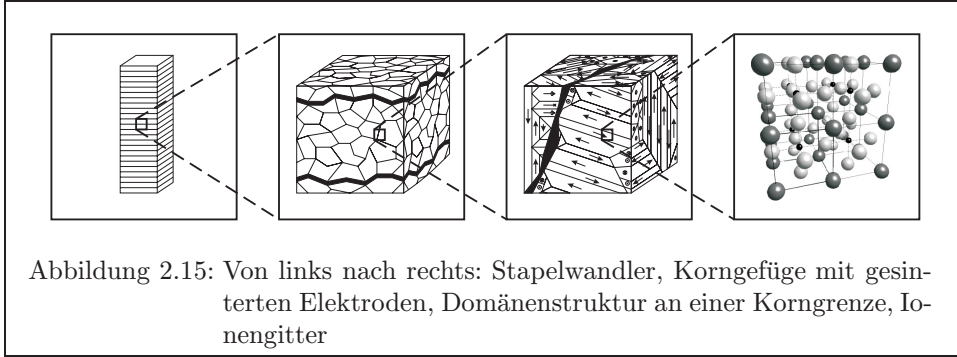
Die thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten des Unterkapitels 2.3 gelten nicht nur für einen piezoelektrischen Wandler als Ganzes, sondern ebenfalls für jede einzelne Elementarzelle. Ein mathematisches Modell, welches demnach sämtliche Elementarzellen eines piezoelektrischen Wandlers mit den verschiedenen Wechselwirkungen nachbildet, könnte einen hohen Grad an Genauigkeit erreichen. Problematisch ist dann allerdings die Modellbildung, denn für die Menge der Zellen und die ungleich größere Zahl an Wechselwirkungen reicht die Leistungsfähigkeit derzeitiger Digitalrechner bei weitem nicht aus (Ein Kubikzentimeter Bleizirkonattitanat besteht aus rund  $N^Z = 1,5 \cdot 10^{22}$  Elementarzellen). Erschwerend kommt hinzu, daß die gesinterte Keramik vieler Piezoaktoren kein homogener Einkristall ist, sondern, wie die **Darstellung 2.15** veranschaulicht, ein Gefüge aus kristallinen Körnern variierender Größe und Ausrichtung, deren genaue Lage und Ausrichtung nur in Ausnahmefällen bekannt ist.

Wenn der Aktor dagegen vereinfachend als Einkristall angesehen wird, lassen sich zumindest die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Zellen einheitlich formulieren - auch wenn sich durch diese Maßnahme noch nicht die Anzahl der zu modellierenden Zellen ändert.

Einen möglichen Ausweg aus diesem Dilemma bietet der Gedanke, daß es ausreichen könnte, repräsentativ nur wenige Zellen des Aktors mit ihren Wechselwirkungen zu modellieren. Damit der Rechenaufwand dieser Mikrozustandsmodelle akzeptabel bleibt, muß entweder das zu berechnende Gebiet des Aktors hinreichend klein sein [KlSK99] oder die mathematische Nachbildung der Zellen darf nicht zu komplex sein [LiLi01]. Die beiden erwähnten Studien geben aber keinen Anhaltspunkt, welche Modellgenauigkeit bei der Anwendung auf einen piezoelektrischen Wandler erreichbar ist. Aus diesem Grund finden derartige Modelle hier keinen Einsatz.

Wenn dagegen angenommen wird, daß alle Zellen einer Domäne den gleichen Randbedingungen unterliegen, sind nunmehr nur noch die Domänen als homogene Zellgruppen modellmäßig zu erfassen. Bei einer angenommenen durchschnittlichen Größe von etwa  $1\mu\text{m}^3$  enthält ein Kubikzentimeter  $10^{12}$  Domänen. Diese Anzahl ist zwar erheblich geringer als die der Elementarzellen, aber noch immer um einige Größenordnungen zu groß, um ein praktikables Modell erstellen zu können. Zudem wirkt sich erschwerend aus, daß weder die Größe noch die Anzahl der Domänen zeitlich konstant ist.

Auch die mathematische Formulierung der thermodynamischen Wechselwirkungen stellt nach [Fasc94] einen beträchtlichen Aufwand dar: Unterschiedliche Polarisationszustände einer Zelle führen in einem ferroelektrischen Kristall immer auch zu asymmetrischen Deformationen der Zelle, weshalb sich in den Wandgebieten zwischen zwei angrenzenden Domänen orts- und zeitabhängige mechanische und elek-



trische Spannungszustände ergeben. Die Feldgleichungen für eine solche Anordnung zu lösen, hieße, zu jedem Zeitpunkt ein Außenfeldproblem in gemischten Koordinatensystemen zu berechnen, was einen inakzeptablen numerischen Rechenaufwand implizieren würde.

Statt alle Domänen einzeln zu berechnen, mögen hier für alle Domänen einer Polarisationsrichtung  $\underline{e}_p^P$  die gleichen Anfangs- und Randbedingungen gelten. Alle einzelnen über das Wandlervolumen verteilten Domänen einer Polarisationsrichtung bilden folglich eine verhaltensmäßige Einheit. Die Anzahl der jetzt noch zu unterscheidenden Volumenanteile ist gleich der Anzahl  $N^P$  der im Einkristall auftretenden Polarisationsrichtungen  $\underline{e}_p^P$ , welche äußerst gering ist: Wie die **Abbildung 2.16** zeigt, gibt es in der tetragonalen Phase der Perowskitstruktur für jede Zelle und damit für den gesamten Einkristall lediglich  $N^P = 6$  mögliche, zueinander senkrechte Orientierungspolarisationen, welche hier der Einfachheit halber parallel zu den kartesischen Achsen  $\underline{e}_i^K$  liegen sollen.

$$\begin{array}{lll} \underline{e}_1^P = \underline{e}_1^K & \underline{e}_2^P = \underline{e}_2^K & \underline{e}_3^P = \underline{e}_3^K \\ \underline{e}_4^P = -\underline{e}_1^K & \underline{e}_5^P = -\underline{e}_2^K & \underline{e}_6^P = -\underline{e}_3^K \end{array}$$

Die folgenden Modellgleichungen sind zwar für diese Polarisationsrichtungen formuliert, die beschriebene Vorgehensweise ist aber auch auf die kubische, die orthorhombische und die rhomboedrische Kristallphase [SoSt74] übertragbar.

$\phi_p$  bezeichne im folgenden den Volumenanteil des einkristallinen Aktors, dessen Elementarzellen in der Richtung  $\underline{e}_p^P$  polarisiert sind. Die Summe aller Anteile  $\phi_p$  sei dabei stets gleich 1, was gleichbedeutend mit der Forderung ist, daß zu jedem Zeitpunkt das gesamte Volumen des Aktors polarisiert ist.

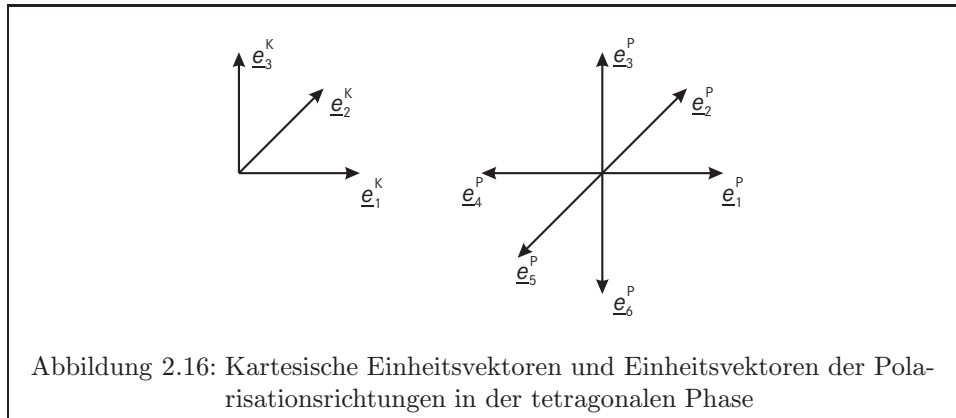
$$\sum_{p=1}^{N^P} \phi_p = 1 \quad (2.37)$$

Weil die einzelnen Volumenanteile nicht negativ sein können, ergeben sich die Beschränkungen

$$\phi_p \geq 0 \quad (2.38)$$

der Elemente von  $\phi_p$  auf nichtnegative Zahlen.

Ähnliche vereinfachende Annahmen dienen in [KaJi98] dazu, ein explizites Simulationsmodell des Polarisationszustands zu entwickeln. Weder ist aber die dort vorgestellte phänomenologische Modellstruktur auf verschiedene Belastungsfälle piezoelektrischer Wandler übertragbar, noch wird die erreichbare Modellgenauigkeit diskutiert. Im Gegensatz dazu stellt dieses Kapitel ein neuartiges, thermodynamisch



orientiertes und flexibles Wandlermodell vor, dessen Leistungsfähigkeit schließlich im Vergleich mit Messungen bestätigt wird.

Zurückkommend auf die Modellbildung läßt sich bereits an dieser Stelle aus den soeben beschriebenen grundsätzlichen Gedanken über die Sichtweise des Aktors die Entropie  $S$  des Zellenverbundes ableiten, welche ein Maß für die thermodynamische Wahrscheinlichkeit  $W$  des Polarisationszustands  $\phi_p$  ist. Nach BOLTZMANN wird ein System einer festen Anzahl von Einzelelementen, welche in rein thermischem Kontakt mit einem großen Wärmereservoir stehen, als eine kanonische Gesamtheit bezeichnet [Kneu88]. Piezoaktoren erfüllen diese Voraussetzungen, denn die Erfahrungen zeigen, daß sich die Anzahl  $N^Z$  der Elementarzellen eines Wandlers nicht ändert, und auch die Aktortemperatur  $\vartheta$  ist für die Dauer der untersuchten Zeitintervalle nahezu konstant.

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustands der kanonischen Gesamtheit berechnet sich dann entsprechend des Verteilungssatzes von BOLTZMANN [GeVo93]

$$W = g e^{-\frac{Vw}{k\vartheta}} \quad ,$$

wobei  $k = 1,380 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$  die BOLTZMANN-Konstante,  $g$  die statistische Gewichtung des Zustands und  $w$  die Energiedichte des Wandlers in diesem Zustand ist.

Letztere ergibt sich aus der Überlegung, daß sich die Energiedichte des gesamten Wandlers anteilig aus den Energiedichten der einzelnen Polarisationsrichtungen zusammensetzt. Neben den polarisationsspezifischen elektrischen und mechanischen Energiedichten  $w_p^{\text{el}}$  und  $w_p^{\text{mech}}$  seien bereits an dieser Stelle die energetische Anteile  $w^{\text{sat}}$  und  $w^{\text{hyst}}$  für die Sättigung und die Hysterese des Wandlers eingeführt, auf die später noch detailliert eingegangen wird.

$$w = \phi_p w_p^{\text{el}} + \phi_p w_p^{\text{mech}} + w^{\text{sat}} + w^{\text{hyst}}$$

Die statistische Gewichtung  $g$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich die  $N^Z$  Zellen gemäß  $\phi_p$  auf die  $N^P$  Polarisationsrichtungen aufteilen.

$$g = \frac{N^Z!}{(N^P)^{N^Z} \prod_{p=1}^{N^P} \Gamma(N^Z \phi_p + 1)}$$

$\Gamma$  ist an dieser Stelle die mathematische Gamma-Funktion in der Verwendung als Fakultät für irrationale Argumente.

Aus der soeben gefundenen Vorschrift für die thermodynamische Wahrscheinlichkeit geht unter Anwendung der STIRLING-Näherung  $\ln N! = \ln \Gamma(N+1) \approx N \ln N$  unmittelbar die Entropie des Wandlerzustands hervor.

$$S = k \ln W \approx -kN^Z \ln N^P - kN^Z \phi_p \ln \phi_p - \frac{V}{\vartheta} (\phi_p w_p^{\text{el}} + \phi_p w_p^{\text{mech}} + w^{\text{sat}} + w^{\text{hyst}})$$

Bisher ist davon ausgegangen worden, daß die möglichen Polarisationszustände ohne äußere Feldeinwirkung in sämtlichen Zellen thermodynamisch gleichermaßen wahrscheinlich sind. In Wirklichkeit treten aber an Korngrenzen und anderen kristallinen Inhomogenitäten lokale mechanische und elektrische Spannungszustände auf, aufgrund derer bestimmte Zustände dort wahrscheinlicher sind als andere. Demzufolge ist  $N^Z$  im Ansatz der Entropie niedriger anzusetzen als die tatsächliche Anzahl der Kristallzellen, und es ist angebracht, die verschiedenen Anteile der Entropie mittels individueller Faktoren  $g^\phi$  und  $g^w$  zu gewichten.

$$S = S^0 - g^\phi \phi_p \ln \phi_p - \frac{g^w}{\vartheta} (\phi_p w_p^{\text{el}} + \phi_p w_p^{\text{mech}} + w^{\text{sat}} + w^{\text{hyst}}) \quad (2.39)$$

Diese Berechnungsvorschrift für die Entropie wird im folgenden dazu verwendet, den thermodynamischen Gleichgewichtszustand des Modells zu bestimmen.

Neben einem Ansatz für die Entropie sind ebenfalls geeignete Beziehungen zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen anzusetzen. Obwohl sich die Eigenschaften der Keramik aus den Wechselwirkungen der Kristallionen ergeben und deshalb von Natur aus nichtlinear sind [Kitt02], soll hier wiederum ein linearisierter Modellansatz für das Verhalten der Zellen die Modellbildung erleichtern. Die Gleichungen (2.10) und (2.11) des linearen thermodynamischen Wandlermodells bei konstanter Temperatur bieten dafür einen geeigneten Ausgangspunkt. Um der Unterschiedlichkeit der Zellgeometrien der einzelnen Polarisationsrichtungen Rechnung zu tragen, sind sie hier für jede Polarisationsrichtung  $\underline{e}_p^P$  getrennt formuliert.

$$D_{i(p)} = D_{i(p)}^S + \varepsilon_{ij(p)} E_{j(p)} - d_{ij(p)} \sigma_{j(p)} \quad (2.40)$$

$$\xi_{i(p)} = \xi_{i(p)}^S + d_{ji(p)} E_{j(p)} - s_{ij(p)} \sigma_{j(p)} \quad (2.41)$$

Die beiden zusätzlichen konstanten Anteile  $D_{ip}^S$  und  $\xi_{ip}^S$  stehen für die spontane Polarisation beziehungsweise für die spontane Dehnung der polarisierten Zellen.

Die Tatsache, daß die Domänen über das gesamte Aktorvolumen verteilt sind, legt die Einschätzung nahe, daß sich lokal zwar spontane Scherspannungen ausbilden können, welche aber im räumlichen Mittel verschwinden. In vielen Anwendungen für piezoelektrische Stapelaktoren treten auch keine von außen eingeleiteten Scherkräfte im Material auf, weshalb dieser Ansatz mit den mechanischen Normalkomponenten auskommt.

Der Vollständigkeit halber seien für diesen Ansatz die elektrischen und mechanischen Energiedichten  $w_p^{\text{el}}$  und  $w_p^{\text{mech}}$  explizit angegeben. Die beiden Linienintegrale

$$w_{(p)}^{\text{el}} = \int_0^1 E_{i(p)} \frac{dD_{i(p)}}{dt} dt \quad w_{(p)}^{\text{mech}} = - \int_0^1 \sigma_{i(p)} \frac{d\xi_{i(p)}}{dt} dt$$

vom Zustand  $(0 \frac{\text{V}}{\text{m}}, 0 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})$  für  $t = 0$  bis zum Zustand  $(E_{ip}, \sigma_{ip})$  für  $t = 1$  resultieren unter Verwendung der Gleichungen (2.40) und (2.41) in den gesuchten Tensoren.

$$w_{(p)}^{\text{el}} = \frac{1}{2} E_{i(p)} \left( D_{i(p)} - 2 D_{i(p)}^{\text{S}} \right) \quad (2.42)$$

$$w_{(p)}^{\text{mech}} = -\frac{1}{2} \sigma_{i(p)} \left( \xi_{i(p)} - 2 \xi_{i(p)}^{\text{S}} \right) \quad (2.43)$$

Die Beziehungen (2.40) und (2.41) zwischen den 72 lokalen domänenspezifischen Größen  $E_{ip}$ ,  $D_{ip}$ ,  $\sigma_{ip}$  und  $\xi_{ip}$  gelten zwar in den jeweiligen Domänen, ursprünglich gesucht zur Modellierung des Aktorverhaltens sind aber die mathematischen Beziehungen zwischen den 12 globalen außerhalb des Wandlers meßbaren Größen  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $\sigma_i$  und  $\xi_i$ . Um von dem globalen Zustand auf die insgesamt 72 unbekanntenelemente des lokalen Zustands zu schließen, sind ebensoviele Gleichungen erforderlich. (2.40) und (2.41) sind derer bereits 36. Desweiteren gehe das Gesamtverhalten des Wandlers aus einer Überlagerung der elektromechanischen Charakteristika der  $N^{\text{P}}$  Teilvolumina hervor.

$$E_i = E_{ip} \phi_p \quad (2.44)$$

$$D_i = D_{ip} \phi_p \quad (2.45)$$

$$\sigma_i = \sigma_{ip} \phi_p \quad (2.46)$$

$$\xi_i = \xi_{ip} \phi_p \quad (2.47)$$

In der Simulation sind aber nie sämtliche Größen  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $\sigma_i$  und  $\xi_i$  vollständig bekannt, sonst wäre die Simulation schließlich überflüssig. Vielmehr enthalten diese zwölf Gleichungen wiederum sechs Unbekannte, die es gleichsam zu berechnen gilt.

Die insgesamt noch fehlenden 30 Gleichungen erhält man durch die Forderung, daß der Wandler dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zufolge stets einen Zustand maximaler Entropie  $S$  anstrebt. Das statische Optimierungsproblem

$$S \rightarrow \max \quad (2.48)$$

für  $E_{ip}$  und  $\sigma_{ip}$  mit den Nebenbedingungen (2.39) bis (2.47) läßt sich analytisch lösen, indem für jedes Teilvolumen angenommen wird, daß sich dort  $E_{ip}$  und  $\sigma_{ip}$  aus einem äußeren ( $E_i$  beziehungsweise  $\sigma_i$ ) und einem inneren Anteil ( $\Lambda_{pq}^{\phi} \Delta E_{iq}$  beziehungsweise  $\Lambda_{pq}^{\phi} \Delta \sigma_{iq}$ ) zusammensetzen, wobei die Gleichungen (2.44) bis (2.47) erfüllt sein müssen.

Mit  $E_{ip} = E_i + \Lambda_{pq}^{\phi} \Delta E_{iq}$  und  $\sigma_{ip} = \sigma_i + \Lambda_{pq}^{\phi} \Delta \sigma_{iq}$  sowie einer Wahl

$$\Lambda_{pq}^{\phi} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = q \wedge p, q \in [1, (N^{\text{P}} - 1)] \\ 0 & \text{für } p \neq q \wedge p, q \in [1, (N^{\text{P}} - 1)] \\ -\frac{\phi_q}{\phi_p} & \text{für } p = N^{\text{P}} \wedge q \in [1, (N^{\text{P}} - 1)] \end{cases}$$

füllen die notwendigen Optimalitätsbedingungen

$$\frac{dS}{d\Delta E_{iq}} = 0 \quad \frac{dS}{d\Delta \sigma_{iq}} = 0$$

die Lücke der noch gesuchten 30 Beziehungen. Somit ist es jetzt möglich, für jede Polarisationsrichtung die Feldstärken  $E_{ip}$  und die mechanischen Spannungen  $\sigma_{ip}$  als Funktionen der äußeren Feldstärke  $E_i$  und der äußeren mechanischen Spannung  $\sigma_i$  anzugeben.



$$E_{ip} = E_i + \Lambda_{pq}^\phi \left( \tilde{d}_{iqks} \tilde{s}_{kslt}^{-1} \tilde{d}_{jtlt} - \tilde{\varepsilon}_{iqjr} \right)_{iqjr}^{-1} \cdot \quad (2.49)$$

$$\cdot \left( -\tilde{D}_{jr}^S + \tilde{\varepsilon}_{jrk} E_k - \tilde{d}_{jrk} \sigma_k + \tilde{d}_{jrk} \tilde{s}_{kslt}^{-1} \left( \tilde{\xi}_{lt}^S - \tilde{d}_{mtl} E_m + \tilde{s}_{ltm} \sigma_m \right) \right)$$

$$\sigma_{ip} = \sigma_i + \Lambda_{pq}^\phi \left( \tilde{s}_{iqjr} - \tilde{d}_{kqis} \tilde{\varepsilon}_{kslt}^{-1} \tilde{d}_{ltjr} \right)_{iqjr}^{-1} \cdot \quad (2.50)$$

$$\cdot \left( \tilde{d}_{krjs} \tilde{\varepsilon}_{kslt}^{-1} \left( -\tilde{D}_{lt}^S + \tilde{\varepsilon}_{ltm} E_m - \tilde{d}_{ltm} \sigma_m \right) - \tilde{\xi}_{jr}^S + \tilde{d}_{krj} E_k - \tilde{s}_{jrk} \sigma_k \right)$$

Zugunsten der Übersichtlichkeit sind in diesen Gleichungen einige Parameterprodukte zusammengefaßt als  $\tilde{d}_{ijq}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ijq}$ ,  $\tilde{d}_{iqjr}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{iqjr}$ ,  $\tilde{D}_{iq}^S$ ,  $\tilde{s}_{ijq}$ ,  $\tilde{\xi}_{iq}^S$  und  $\tilde{s}_{iqjr}$  enthalten.

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ijq} &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi d_{ij(p)} & \tilde{\varepsilon}_{ijq} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi (\varepsilon_{ij(p)} + \varepsilon_{ji(p)}) \\ \tilde{d}_{iqjr} &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \Lambda_{(p)r}^\phi d_{ij(p)} & \tilde{\varepsilon}_{iqjr} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \Lambda_{(p)r}^\phi (\varepsilon_{ij(p)} + \varepsilon_{ij(p)}) \\ \tilde{D}_{iq}^S &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi D_{i(p)}^S & \tilde{s}_{ijq} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi (s_{ij(p)} + s_{ij(p)}) \\ \tilde{\xi}_{iq}^S &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \xi_{i(p)}^S & \tilde{s}_{iqjr} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \Lambda_{(p)r}^\phi (s_{ij(p)} + s_{ji(p)}) \end{aligned}$$

Im Laufe der Herleitung der Gleichungen (2.49) und (2.50) ist es mehrmals erforderlich, ein Gleichungssystem des Typs  $b_{ij} = c_{ijlm} a_{lm}$  nach  $a_{lm}$  aufzulösen. Denkt man sich die auftretenden Kombinationen der Indizes  $i, l \in [1, N]$  und  $j, m \in [1, M]$  mit Hilfe der Ersatzindizes  $k, n \in [1, M \cdot N]$  durchnummeriert, läßt sich das ursprüngliche Gleichungssystem auch in der Form  $b_k = c_{kn} a_n$  formulieren und ist nun analog zur Matrizenrechnung durch  $a_k = c_{kn}^{-1} b_n$  gelöst. Dieser Prozeß ist hier verkürzt durch die Schreibweise  $a_{ij} = c_{ijkl}^{-1} b_{kl}$  angedeutet.

Ein Einsetzen der Gleichungen (2.49) und (2.50) in die Gleichungen (2.40) und (2.41) ergibt mit (2.44) bis (2.47) für eine bestimmte Polarisationsaufteilung  $\phi_p$  die gesuchten konstitutiven Gleichungen

$$D_i = \tilde{D}_i^S + \tilde{\varepsilon}_{ij} E_j - \tilde{d}_{ij} \sigma_j \quad (2.51)$$

$$\xi_i = \tilde{\xi}_i^S + \tilde{d}_{ji} E_j - \tilde{s}_{ij} \sigma_j \quad (2.52)$$

zwischen den äußeren Größen  $E_i$ ,  $D_i$ ,  $\sigma_i$  und  $\xi_i$ . Die von  $\phi_p$  abhängigen Parameter  $\tilde{D}_i^S$ ,  $\tilde{\xi}_i^S$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\tilde{d}_{ij}$  und  $\tilde{s}_{ij}$  in diesen Gleichungen lassen sich als die im spezifischen Arbeitspunkt der Keramik von außen meßbaren Kleinsignalmaterialparameter interpretieren.

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i^S &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} D_{i(p)}^S \\ &+ \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \varepsilon_{ij(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{\varepsilon}_{jqkr} - \tilde{d}_{jqls} \tilde{s}_{lsmt}^{-1} \tilde{d}_{ktmr} \right)_{jqkr}^{-1} \left( \tilde{D}_{kr}^S - \tilde{d}_{krls} \tilde{s}_{lsmt}^{-1} \tilde{\xi}_{mt}^S \right) \\ &- \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} d_{ij(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{s}_{jqkr} - \tilde{d}_{lqjs} \tilde{\varepsilon}_{lsmt}^{-1} \tilde{d}_{mtkr} \right)_{jqkr}^{-1} \left( \tilde{d}_{lrks} \tilde{\varepsilon}_{lsmt}^{-1} \tilde{D}_{mt}^S - \tilde{\xi}_{kr}^S \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_i^S &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \xi_{i(p)}^S \\
&+ \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} d_{ji(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{\varepsilon}_{jqkr} - \tilde{d}_{jqts} \tilde{s}_{lsmt}^{-1} \tilde{d}_{ktmr} \right)_{jqkr}^{-1} \left( \tilde{D}_{kr}^S - \tilde{d}_{krts} \tilde{s}_{lsmt}^{-1} \tilde{\xi}_{mt}^S \right) \\
&- \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} s_{ij(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{s}_{jqkr} - \tilde{d}_{lqjs} \tilde{\varepsilon}_{lsmt}^{-1} \tilde{d}_{mtkr} \right)_{jqkr}^{-1} \left( \tilde{d}_{lrks} \tilde{\varepsilon}_{lsmt}^{-1} \tilde{D}_{mt}^S - \tilde{\xi}_{kr}^S \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{ij} &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \varepsilon_{ik(p)} \left[ \delta_{kj} + \right. \\
&\quad \left. + \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{\varepsilon}_{kqlr} - \tilde{d}_{kqms} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ltnr} \right)_{kqlr}^{-1} \left( \tilde{d}_{lrms} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{jtn} - \tilde{\varepsilon}_{lrj} \right) \right] \\
&- \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} d_{ik(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{s}_{kqlr} - \tilde{d}_{mqks} \tilde{\varepsilon}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ntlr} \right)_{kqlr}^{-1} \left( \tilde{d}_{jr} - \tilde{d}_{mr} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{ntj} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{ij} &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} d_{ik(p)} \left[ \delta_{kj} + \right. \\
&\quad \left. + \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{s}_{kqlr} - \tilde{d}_{mqks} \tilde{\varepsilon}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ntlr} \right)_{kqlr}^{-1} \left( \tilde{d}_{mr} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ntj} - \tilde{s}_{jrl} \right) \right] \\
&- \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} \varepsilon_{ik(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{\varepsilon}_{kqlr} - \tilde{d}_{kqms} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ltnr} \right)_{kqlr}^{-1} \left( \tilde{d}_{lrj} - \tilde{d}_{lrms} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{s}_{ntj} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{ij} &= \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} s_{ik(p)} \left[ \delta_{kj} + \right. \\
&\quad \left. + \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{s}_{kqlr} - \tilde{d}_{mqks} \tilde{\varepsilon}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ntlr} \right)_{kqlr}^{-1} \left( \tilde{d}_{mr} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ntj} - \tilde{s}_{jrl} \right) \right] \\
&- \sum_{p=1}^{N^P} \phi_{(p)} d_{ki(p)} \Lambda_{(p)q}^\phi \left( \tilde{\varepsilon}_{kqlr} - \tilde{d}_{kqms} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{d}_{ltnr} \right)_{kqlr}^{-1} \left( \tilde{d}_{lrj} - \tilde{d}_{lrms} \tilde{s}_{msnt}^{-1} \tilde{s}_{ntj} \right)
\end{aligned}$$

Der dabei verwendete KRONECKER-Tensor  $\delta_{ij}$  wird durch die Vorschrift

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

definiert.

Ferroelektrische Materialien zeichnen sich dadurch aus, daß sich die Polarisationsaufteilung den äußeren elektrischen und mechanischen Bedingungen anpaßt. Das  $\phi_p$  des Modells ist deshalb keineswegs eine Konstante, sondern eine Variable. Auch umgekehrt gilt, daß mit jeder Änderung der Polarisationsaufteilung auch eine Änderung  $\Delta D$ ,  $\Delta E$ ,  $\Delta \xi$  und  $\Delta \sigma$  der äußeren elektrischen und mechanischen Größen einhergeht. Der Ansatz

$$\begin{aligned} D_i &= D_i^0 + \Delta D_i & \Delta D_i &= -\epsilon_{ij}^{\text{ext}} \Delta E_j & E_i &= E_i^0 + \Delta E_i \\ \xi_i &= \xi_i^0 + \Delta \xi_i & \Delta \xi_i &= s_{ij}^{\text{ext}} \Delta \sigma_j & \sigma_i &= \sigma_i^0 + \Delta \sigma_i \end{aligned}$$

spiegelt wider, daß die elektromechanischen Größen  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $\xi_i$  und  $\sigma_i$  um einen Arbeitspunkt ( $\phi_p^0$ ,  $D_i^0$ ,  $E_i^0$ ,  $\xi_i^0$ ,  $\sigma_i^0$ ) variieren können, wobei diese Änderungen den jeweils linearisierten elektrischen und mechanischen Lastimpedanzen  $\epsilon_{ij}^{\text{ext}}$  und  $s_{ij}^{\text{ext}}$  unterliegen.

Zusammen mit den Gleichungen (2.51) und (2.52) entstehen so die Abhängigkeit der elektromechanischen Größen von der Polarisationsaufteilung für einen elektrisch und mechanisch belasteten Aktor.

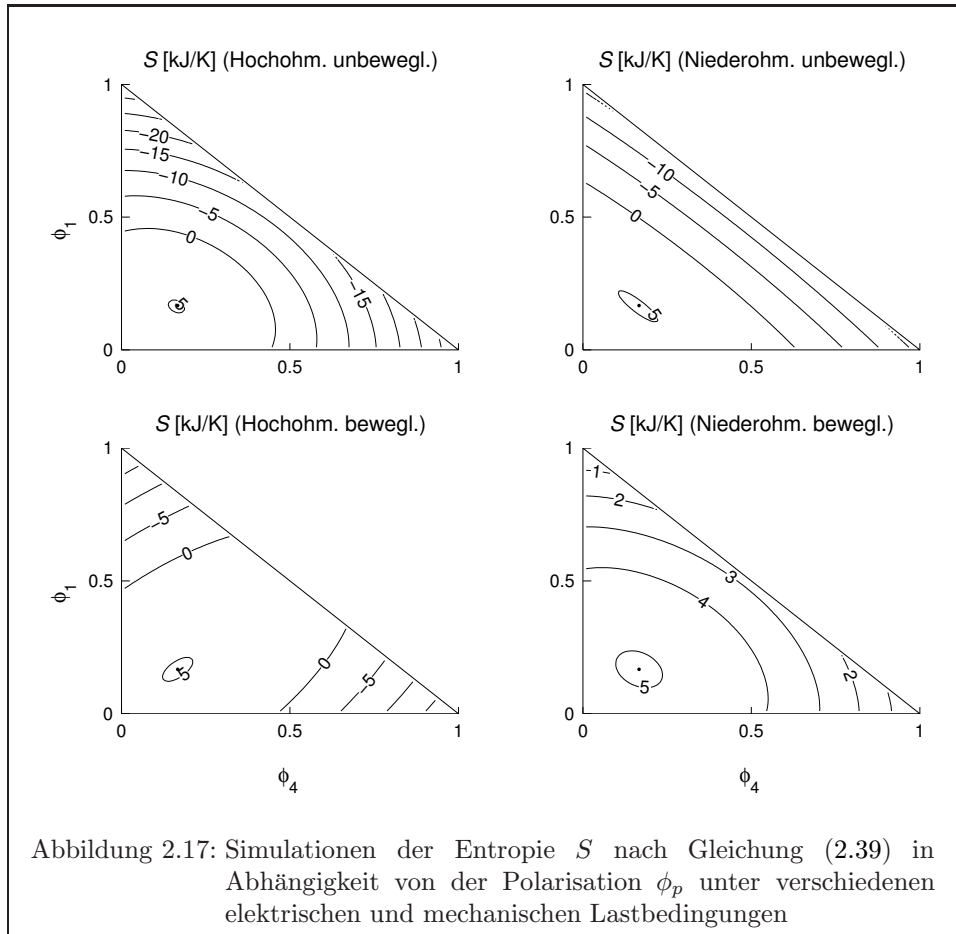
$$\begin{aligned} D_i &= D_i^0 + \epsilon_{ij}^{\text{ext}} E_j^0 + \epsilon_{ij}^{\text{ext}} \left( \tilde{\epsilon}_{jk} + \epsilon_{jk}^{\text{ext}} - \tilde{d}_{jl} (\tilde{s}_{lm} + s_{lm}^{\text{ext}})_{lm}^{-1} \tilde{d}_{km} \right)_{jk}^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ \tilde{D}_k^{\text{S}} - D_k^0 - \epsilon_{kl}^{\text{ext}} E_l^0 - \tilde{d}_{kl} (\tilde{s}_{lm} + s_{lm}^{\text{ext}})_{lm}^{-1} (\tilde{\xi}_m^{\text{S}} - \xi_m^0 + s_{mn}^{\text{ext}} \sigma_n^0) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i^0 - s_{ij}^{\text{ext}} \sigma_j^0 + s_{ij}^{\text{ext}} \left( \tilde{s}_{jk} + s_{jk}^{\text{ext}} - \tilde{d}_{lj} (\tilde{\epsilon}_{lm} + \epsilon_{lm}^{\text{ext}})_{lm}^{-1} \tilde{d}_{mk} \right)_{jk}^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ \tilde{\xi}_k^{\text{S}} - \xi_k^0 + s_{kl}^{\text{ext}} \sigma_l^0 - \tilde{d}_{lk} (\tilde{\epsilon}_{lm} + \epsilon_{lm}^{\text{ext}})_{lm}^{-1} (\tilde{D}_m^{\text{S}} - D_m^0 - \epsilon_{mn}^{\text{ext}} E_n^0) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} E_i &= - \left( \tilde{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij}^{\text{ext}} - \tilde{d}_{ik} (\tilde{s}_{kl} + s_{kl}^{\text{ext}})_{kl}^{-1} \tilde{d}_{jl} \right)_{ij}^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ \tilde{D}_j^{\text{S}} - D_j^0 - \epsilon_{jk}^{\text{ext}} E_k^0 - \tilde{d}_{jk} (\tilde{s}_{kl} + s_{kl}^{\text{ext}})_{kl}^{-1} (\tilde{\xi}_l^{\text{S}} - \xi_l^0 + s_{lm}^{\text{ext}} \sigma_m^0) \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \left( \tilde{s}_{ij} + s_{ij}^{\text{ext}} - \tilde{d}_{ki} (\tilde{\epsilon}_{kl} + \epsilon_{kl}^{\text{ext}})_{kl}^{-1} \tilde{d}_{lj} \right)_{ij}^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ \tilde{\xi}_j^{\text{S}} - \xi_j^0 + s_{jk}^{\text{ext}} \sigma_k^0 - \tilde{d}_{kj} (\tilde{\epsilon}_{kl} + \epsilon_{kl}^{\text{ext}})_{kl}^{-1} (\tilde{D}_l^{\text{S}} - D_l^0 - \epsilon_{lm}^{\text{ext}} E_m^0) \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

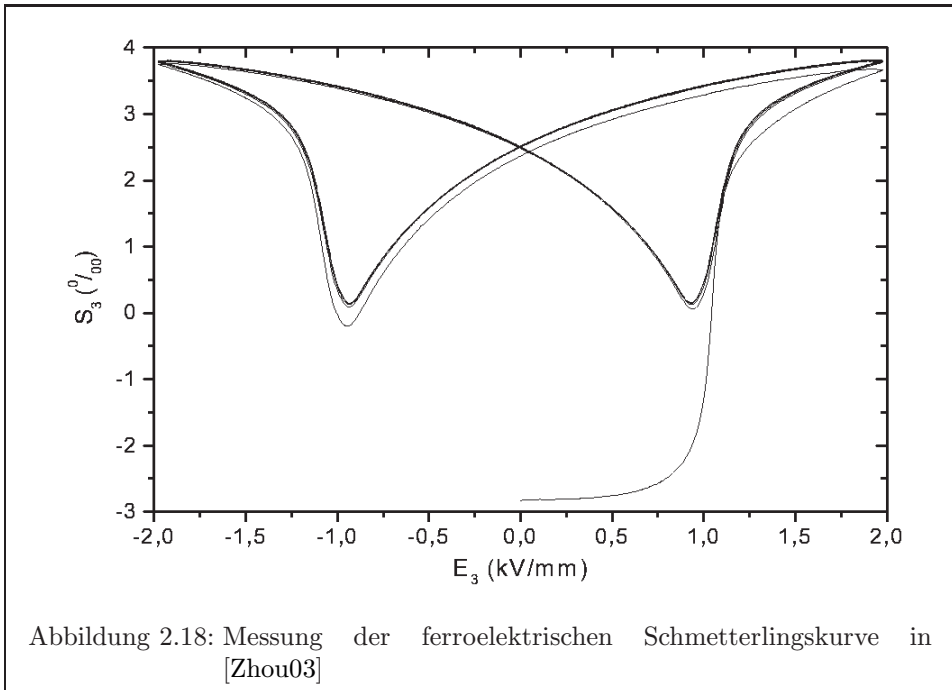
Zur Veranschaulichung der bisher gefundenen Zusammenhänge zeigt die **Abbildung 2.17** die Entropie  $S$  eines Wandlers im Arbeitspunkt  $E_i^0 = 0 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  und  $\sigma_i^0 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  in Abhängigkeit von der Polarisationsaufteilung  $\phi_p$  für verschiedene elektrische und mechanische Lasten. Die ausgewählten Volumenanteile  $\phi_1$  und  $\phi_4$  stehen dabei für Domänen, deren Zellen ähnliche mechanische Abmessungen aufweisen und elektrisch entgegengesetzt polarisiert sind. Oben links ist der Belastungsfall zu sehen, bei dem der Aktor mit offenen elektrischen Klemmen mechanisch steif eingespannt ist. Jede Änderung der Polarisationsaufteilung ist unter diesen Umständen mit einer großen Änderungen des mechanischen und des elektrischen Spannungszustands verbunden und bedingt deshalb eine starke Änderung der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit. Bei einer mechanisch steifen Last und kurzgeschlossenen Elektroden wie im oberen rechten Graphen dagegen ist der Austausch zwischen entgegengesetzt polarisierten Domänen möglich ( $\phi_1 + \phi_4 \approx \text{const}$ ), weil sich dabei keine mechanische Spannung aufbaut. Umgekehrt sollten in einem beweglichen, aber elektrisch hochohmig abgeschlossenen Aktor, wie unten links dargestellt, entgegengesetzt polarisierter Bereiche möglichst gleichförmig wachsen ( $\phi_1 - \phi_4 \approx \text{const}$ ), weil sich sonst



große Feldstärken ausbilden können. Unten rechts ist schließlich der Fall zu sehen, bei dem der kurzgeschlossene Aktor eine uneingeschränkte mechanische Bewegungsfreiheit genießt und deshalb auch bei Änderungen seines Polarisationszustands kaum Entropieänderungen erfährt.

Bislang ist die den Polarisationszustand repräsentierende Volumenaufteilung  $\phi_p$  noch eine unbekannt GröÙe des Modells, die auch von auÙen nicht unmittelbar meÙbar ist. Da es sich hierbei um eine freie thermodynamische ZustandsgröÙe handelt, nimmt  $\phi_p$  in jedem Arbeitspunkt  $(\phi_p^0, D_i^0, E_i^0, \xi_i^0, \sigma_i^0)$  mit möglichst geringem Energieaufwand einen Wert an, welcher die Entropie  $S$  maximiert.  $\phi_p$  ist also die Lösung des statischen Optimierungsproblems (2.48) mit den Nebenbedingungen (2.37) bis (2.43), (2.49) bis (2.50) und (2.53) bis (2.56). Nicht nur aufgrund der Ungleichungen (2.38) ist es ratsam, das optimale  $\phi_p$  numerisch zu bestimmen [Tonn03], beispielsweise mit dem ableitungsfreien GAUSS-NEWTON-Verfahren [BSMM01].

An dieser Stelle liegt ein mathematisches Modell für einen piezoelektrischen Einkristall vor: Zur Berechnung der Reaktion des Wandlermodells auf einen zeitlichen Ansteuerungsverlauf ist damit zu jedem Zeitpunkt zunächst der neue Arbeitspunkt des Wandlers und seiner Last  $(D_i^0, E_i^0, \xi_i^0, \sigma_i^0, s_{ij}^{\text{ext}}, \epsilon_{ij}^{\text{ext}})$  festzulegen, aus dem dann mittels der Optimierungsaufgabe (2.48) in Verbindung mit den genannten Nebenbedingungen die optimale Polarisationsaufteilung  $\phi_p$  und die resultierende Wandlerreaktion  $(D_i, E_i, \xi_i, \sigma_i)$  hervorgeht.

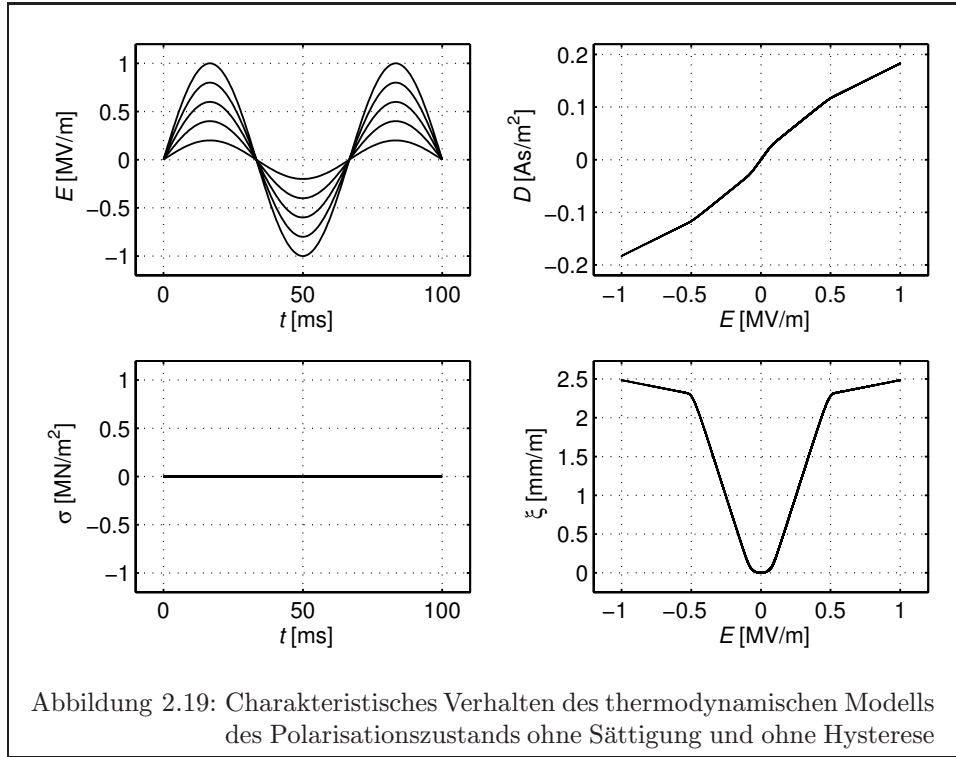


Ist ein solches Modell in der Lage, die ferroelektrischen Phänomene zu beschreiben, wie sie in der **Abbildung 2.18** abzulesen sind? Eine Simulation des bisherigen Modells mit  $w^{\text{sat}} = w^{\text{hyst}} = 0 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$  zeigt die **Abbildung 2.19**, in der auf der linken Seite die Modelleingänge  $E_1 = E$  und  $\sigma_1 = \sigma$  über der Zeit und auf der rechten Seite die Modellausgänge  $D = D_1$  und  $\xi = \xi_1$  über  $E$  aufgetragen sind. Der eingangs erwähnte Vorzeichenwechsel der Piezoelektrizität ist bereits erkennbar, aber das Modell zeigt bisher noch nicht die Hysterese realer Piezowandler, und die aus den Ungleichungen (2.38) resultierenden Sättigungserscheinungen sind noch sehr grob als Knicke der Ladungs- und des Dehnungsverlaufs über der Spannung wiedergegeben. Deshalb erläutern die folgenden Überlegungen, wie das Modell um Hysterese- und auch um geeignete Sättigungseffekte ergänzt werden kann.

Um die Sättigung dielektrischer Materialien abzubilden, wird häufig die LANGEVIN-Funktion

$$\frac{P}{P^{\text{sat}}} = \coth\left(\frac{V^Z |P^{\text{sat}}| |E|}{k\vartheta}\right) - \frac{k\vartheta}{V^Z |P^{\text{sat}}| |E|}$$

angewendet [Fasc94]. Dabei wird vorausgesetzt, daß die thermische Energie einer geordneten Ausrichtung der Dipole entgegenwirkt. Piezoelektrischen Keramiken gehen jedoch häufig bereits wesentlich früher in Sättigung als durch die LANGEVIN-Funktion beschrieben: Für das Bariumtitanat  $\text{BaTiO}_3$  beispielsweise liegt die Sättigungspolarisation  $P^{\text{sat}}$  bei  $0,26 \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$  [Fasc94], wodurch sich eine Polarisierung auf 90% von  $P^{\text{sat}}$  gemäß der LANGEVIN-Funktion bei  $|E| \approx 10 \frac{k\vartheta}{V^Z P^{\text{sat}}} \approx 2500 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$  einstellen müßte — Messungen zufolge wird der Zustand  $|P| = 0,9 \cdot P^{\text{sat}}$  aber schon bei Feldstärken von  $|E| \approx 1,5 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$  erreicht [Gauc01]. Dieser Diskrepanz zufolge ist die LANGEVIN-Funktion nur bedingt auf Piezoaktoren anwendbar.



Stattdessen soll im hier beschriebenen Modell ein eigener, heuristischer Ansatz Verwendung finden. Weil der Zustand der Sättigung dadurch gekennzeichnet ist, daß einzelne Polarisationsanteile in  $\phi_p$  sehr groß sind, während andere gegen Null streben, liegt es nahe, eine Energiedichte  $w^{\text{sat}}$  einzuführen, welche genau dann gegen Unendlich strebt, wenn mindestens einer der Polarisationsanteile sehr klein wird. Ein einfacher Ansatz dafür ist

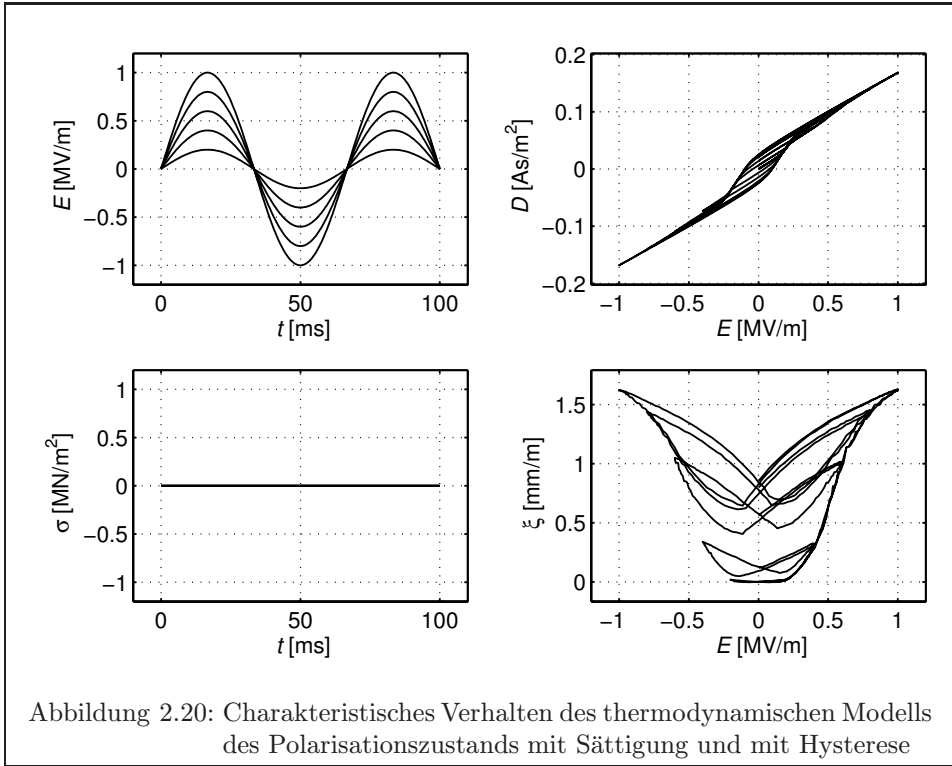
$$w^{\text{sat}} = g^{\text{sat}} \prod_{p=1}^{N^P} \phi_p^{-1} \quad (2.57)$$

mit dem Proportionalitätsfaktor  $g^{\text{sat}}$  und den Kehrwerten  $\phi_p^{-1}$  der Elemente von  $\phi_p$ . Die Wirkung von  $w^{\text{sat}}$  läßt sich wiederum anhand der Entropiebeziehung (2.39) erläutern: Je weiter ein ferroelektrisches Material in Sättigung gerät, umso mehr Energie muß dem Aktor zugeführt werden, um die Lage des Entropiemaximums im  $\phi_p$ -Raum zu verschieben und dadurch das Material weiter zu polarisieren.

Nach den verschiedenen reversiblen Prozessen in der Keramik, welche wiederzugeben das Modell des Polarisationszustands bisher imstande ist, steht zuletzt noch aus, die Hysterese als irreversiblen Prozeß zu modellieren. Da die Hysterese auf Energieverluste durch Umpolarisierungen der Zellen beziehungsweise durch Verschiebungen der Domänenwände zurückzuführen ist, sei eine Variable  $\psi_{pq}$  eingeführt, welche die Wandverschiebungen im Modell repräsentiert.

$$\phi_p = \phi_p^0 + \sum_{q=1}^{N^P} \psi_{pq} \quad (2.58)$$

Ein Element von  $\psi_{pq}$  stehe für den Volumenanteil, der von der Polarisationsrichtung  $\underline{e}_q^P$  in die Richtung  $\underline{e}_p^P$  wechselt.  $\psi_{pq}$  ist deshalb ein schiefsymmetrischer Tensor und besteht aus maximal  $\binom{N^P}{2}$  unabhängigen Elementen.



Als Veranschaulichung der Hysterese kann die Vorstellung dienen, daß jeder Wandbewegungen  $\psi_{pq}$  ein hysteresebedingter Druck  $\sigma_{pq}^{\text{hyst}}$  entgegenwirkt. Jede Änderung  $d\psi_{pq}$  des Polarisationszustands ist dann mit einer Änderung der Verlustenergiedichte  $dw^{\text{hyst}}$  verbunden.

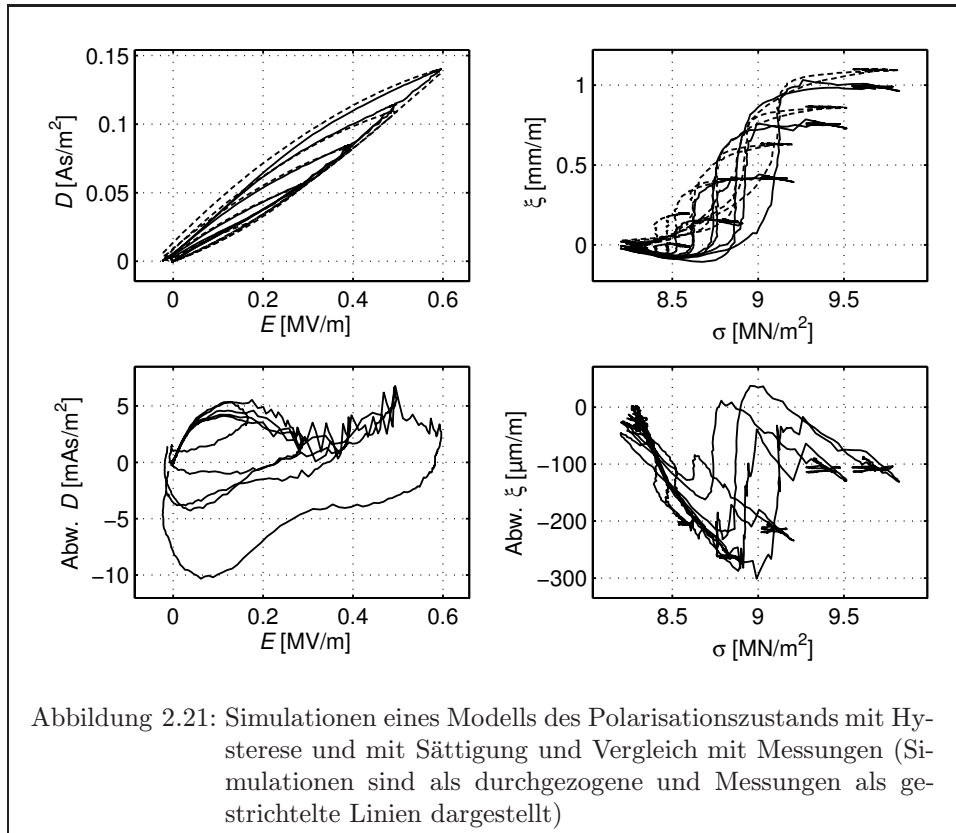
$$dw^{\text{hyst}} = \frac{\partial w^{\text{hyst}}}{\partial \psi_{pq}} d\psi_{pq} = \sigma_{pq}^{\text{hyst}} d\psi_{pq}$$

An genau dieser Stelle greifen Hysterese Modelle wie die von MAXWELL oder von DAHL und WILDER an, welche ursprünglich auf dem Differential der Verlustenergie nach der Zustandänderung basieren und damit das gesuchte  $\sigma_{pq}^{\text{hyst}}$  liefern. Wird zu den Wandverschiebungen  $\psi_{pq}$  analog ein Tensor  $\Gamma_{pq}(\psi_{pq}, t, \underline{\theta})$  von individuellen Hystereseoperatoren zusammengesetzt, so ist die durch Hysterese dissipierte Energiedichte die Summe aller einzelnen Hystereseverluste auf dem Weg vom Ausgangszustand  $\phi_p^0$  zum Zustand  $\phi_p$ .

$$dw^{\text{hyst}} = \Gamma_{pq}(\psi_{pq}, t, \underline{\theta}) d\psi_{pq} \quad (2.59)$$

Hier wird deutlich, daß das Ergebnis der Maximumsuche der Entropie durch die Irreversibilität der Hysterese in  $w^{\text{hyst}}$  jetzt vom Weg  $d\psi_{pq}$  abhängt; aus dem statischen Optimierungsproblem wird somit ein dynamisches.

Es erweist sich für die Lösung der Optimierungsaufgabe als hilfreich, wenn auch hier wieder in Betracht gezogen wird, daß sämtliche thermodynamische Ausgleichsprozesse eine Folge der thermischen Maximierung der Entropie sind. Übertragen auf das Optimierungsproblem des Modells entspricht das einem ständigen Gradientenanstieg mit infinitesimal kleiner Schrittweite. Die aus den PRANDTLschen Postulaten resultierende Unstetigkeit der Ableitungen von Hystereseoperatoren lassen eine



analytische Lösung des Optimierungsproblems in der Regel nicht zu, weshalb die Lösung numerisch zu erfolgen hat — als ein wiederholter Gradientenaufstieg mit finiter Schrittweite. Das dynamische Optimierungsproblem ist damit auf eine Folge statischer Optimierungen reduziert.

Obwohl der übrige Modellrahmen keine notwendigen Bedingungen an die Art des Hystereseoperators stellt, vereinfacht die Hysteresemodellierung nach MAXWELL die numerische Maximumsuche aufgrund der abschnittswisen Linearisierung der Hystereseschleife geringfügig. Unabhängig von der Hysteresemodellierung ist aber bei der Implementierung des Optimierungsverfahrens unbedingt zu beachten, daß  $dw^{\text{hyst}}$  nur abschnittsweise glatt ist und deshalb je nach Arbeitspunkt Fallunterscheidungen entstehen [Tonn03].

Zum direkten Vergleich mit den Simulationen in der Abbildung 2.19 zeigt die **Abbildung 2.20**, wie ein um Hysterese und Sättigung erweitertes Modell auf die gleichen Verläufe für die unabhängigen Variablen  $E_1 = E$  und  $\sigma_1 = \sigma$  reagiert. Aus den berechneten Werten für die Modellausgänge  $D = D_1$  und  $\xi = \xi_1$  wird deutlich, daß das Modell jetzt qualitativ besser die Hysterese und die Sättigung realer Piezowandler wiederzugeben vermag (vergleiche dazu auch mit der Abbildung 2.3).

In der **Abbildung 2.21** ist das parametrisierte Modell mit den Gleichungen (2.37) bis (2.43), (2.48) bis (2.50) und (2.53) bis (2.59) den gewohnten Messungen gegenübergestellt. Das Modell weist mit der gewählten Parametrierung zwar eine bessere Übereinstimmungen mit den Messungen auf als der lineare Ansatz im Unterkapitel 2.3, allerdings ließ sich nicht die Genauigkeit der nichtlinearen Modellgleichungen der Unterkapitel 2.4 und 2.5 erreichen.



Die vergleichsweise hohe qualitative Leistungsfähigkeit des Modells hinsichtlich Sättigung und Berücksichtigung der Effekte bei bipolarer Ansteuerung rechtfertigt nicht für jede Anwendung den Aufwand, der zur Parametrierung und auch zur Berechnung des Modells erforderlich ist: Für  $N^P = 6$  Polarisationsrichtungen und jeweils  $N^\gamma = 10$  Elemente eines jeden Hystereseoperators in  $\Gamma_{pq}$  hat das Modell in seiner allgemeinsten Form 921 Parameter, wovon alleine 720 auf die Hystereseoperatoren entfallen. Es ist deshalb dringend geboten, alle bekannten Symmetrien bei der Parametrierung zu berücksichtigen, wodurch sich die Zahl der festzulegenden Konstanten auf 435 reduziert. Den weitaus größten Anteil mit 420 Werten stellen dabei noch immer die Hysteresekoeffizienten. Für den untersuchten Stapelaktor gelten überdies die Äquivalenzen  $E_2 = E_3 = 0 \frac{V}{m}$  und  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \frac{N}{m^2}$  und damit auch  $\phi_2 = \phi_3 = \phi_5 = \phi_6$ ; aufgrund letzterer Beobachtung besteht  $\psi_{pq}$  aus lediglich 3 statt vorher 21 verschiedenen Elementen, wodurch sich in gleichem Verhältnis auch die Hystereseoperatoren verringern. Zudem sind die  $F_i^R$  und  $k_i^R$  der Berechnungen in der Abbildung 2.21 nicht als eigenständige Parameter, sondern als Elemente geeigneter Folgen  $F^R(i)$  und  $k^R(i)$  gewählt, welche wiederum mit nur 3 unabhängigen Koeffizienten gebildet werden. Es ist also davon auszugehen, daß durch eine bessere Ausnutzung der Parametrierbarkeit auch eine Verbesserung der Modellgenauigkeit erzielbar ist.

Besondere Aufmerksamkeit verdient die Festlegung der Parameterwerte des Modells, schließlich sind diese nicht explizit meßbar. Lexikalische Ähnlichkeiten zu publizierten Aktorkennwerten implizieren nicht notwendigerweise eine Übertragbarkeit auf die beschriebene Modellstruktur, weshalb bei der Verwendung von Zahlenwerten aus der Literatur unbedingt die Meßmethoden zur Bestimmung derselben zu beachten sind. Zwar entsprechen die Parameter  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ ,  $\tilde{d}_{ij}$  und  $\tilde{s}_{ij}$  für ein bestimmtes  $\phi_p$  näherungsweise den von außen meßbaren Kleinsignalparametern  $\varepsilon_{ij}$ ,  $d_{ij}$  und  $s_{ij}$ , dies reicht aber nicht aus, um davon die unabhängigen Parameter  $D_{ip}^S$ ,  $\varepsilon_{ijp}$ ,  $d_{ijp}$ ,  $\xi_{ip}^S$  und  $s_{ijp}$  in den Gleichungen (2.40) und (2.41) abzuleiten. Zur Parametrierung der Modellgleichungen ist kein einfacherer Weg bekannt, als die Werte wie schon in den Modellen zuvor mittels einer statischen Optimierung zu bestimmen.

Neben der Vorgehensweise zur Parametrierung des Modells ist auch der Rechenaufwand der Simulation erwähnenswert. So erfordert jede Entropieberechnung die Bestimmung der 72 Elemente in  $E_{ip}$ ,  $D_{ip}$ ,  $\sigma_{ip}$  und  $\xi_{ip}$ , wozu jedesmal unter anderem 4 Tensorinversen zu bilden sind. Je nach Zustandsänderung sind einige zehn dieser Entropieberechnungen durchzuführen, bis das Entropiemaximum gefunden ist und damit der Aktorzustand für einen einzelnen Zeitschritt feststeht. Diese Prozedur wiederholt sich für jeden zu simulierenden Zeitschritt. Auf einem PC mit INTEL-Prozessor und 1,7GHz Prozessortaktfrequenz dauern die in der Abbildung 2.20 dargestellten Simulationen in MATLAB zusammen etwa 12 Minuten.

Kürzere Rechenzeiten sind zu erwarten, wenn die vorhandenen Symmetrien des in seiner spezifischen Anwendung zu modellierenden Aktors bereits bei der Implementierung der Gleichungen ausgenutzt werden. Beispielsweise reduzieren die oben erwähnten symmetriebedingten Äquivalenzen für Stapelaktoren die Anzahl der unabhängigen und im allgemeinen von Null verschiedenen Elemente der Tensoren  $E_{ip}$ ,  $D_{ip}$ ,  $\sigma_{ip}$  und  $\xi_{ip}$  von 72 auf nur noch 22, was wiederum eine weitreichende Reduktion der Anzahl relevanter Berechnungen ermöglicht. Daneben fordert außerdem die allgemeine Formulierung des Modells für verschiedene elektrische und mechanische Ansteuer- und Lastbedingungen Tribut in Form der nicht eben trivialen Beziehungen (2.53) bis (2.56). Für ein Modell eines Wandlers im mechanischen Leerlauf ( $\sigma_i = 0 \frac{N}{m^2}$ ) beispielsweise, welcher mit einer idealen Spannungsquelle ( $\Delta E_i = 0 \frac{V}{m}$ ) angesteuert wird, vereinfachen sich die allgemeinen Gleichungen (2.53) bis (2.56)

ohne Beeinträchtigung des Simulationsergebnisses zu

$$\begin{aligned} D_i &= \tilde{D}_i^S + \tilde{\epsilon}_{ij} E_j^0 & E_i &= E_i^0 \\ \xi_i &= \tilde{\xi}_i^S + \tilde{d}_{ji} E_j^0 & \sigma_i &= 0 \frac{N}{m^2} \quad , \end{aligned}$$

was eine beschleunigte Simulation ermöglicht.

Zusätzlich zu den diskutierten Eigenschaften besitzt das Modell des Polarisationszustands Potentiale für Modifikationen und Ergänzungen, die es erlauben, weitere ferroelektrische Phänomene wie beispielsweise das Kriechen abzubilden. In [KoSK99] wird hervorgehoben, daß Kriechprozesse in realen Aktoren in direktem Zusammenhang mit der beobachteten Hysterese stehen. Der hier vorgestellte Modellrahmen bietet für die Abbildung dieser zeitlichen Relaxationen einen geeigneten Ausgangspunkt: Als zeitliche Fortsetzung der bereits im Modell enthaltenen spontanen, zeitunabhängigen Ausgleichsprozesse lassen sich aus der MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung

$$f(w, \vartheta) = \frac{2}{k \vartheta} \sqrt{\frac{V w}{\pi k \vartheta}} e^{-\frac{V w}{k \vartheta}}$$

die Geschwindigkeiten

$$\frac{d\psi_{pq}}{dt} \sim \frac{V}{\tau^\psi k} \frac{dS}{d\psi_{pq}} \int_{w^\Gamma}^{\infty} f(w, \vartheta) dw$$

thermischer, zeitabhängiger Ausgleichsprozesse ableiten, welche von einer hysteresebedingten Aktivierungsenergie  $w^\Gamma$  und einer Zeitkonstante  $\tau^\psi$  in der Größenordnung einiger Minuten abhängen.

Ferner ist zu erwarten, daß sich mit dem Modell auch thermische Depolarisationserscheinungen simulieren lassen, sofern die Modellparameter als Funktionen der Temperatur formuliert werden.

Problematisch erscheint dagegen die Verwendung des Modells zur Detektion der mechanischen Größen aus den elektrischen: Während die in den Unterkapiteln 2.3 bis 2.5 diskutierten Modelle explizite monotone Abbildungen sind und als solche mit analytischen Methoden in die Detektionsform überführbar sind, handelt es sich bei dem Modell des Polarisationszustands um implizite nichtmonotone Formulierungen, wobei insbesondere die Umsetzbarkeit des Maximalitätsprinzips der Entropie unter den Nebenbedingungen einer Detektionsmodellstruktur zu prüfen ist. Diese Untersuchungen müssen allerdings Gegenstand zukünftiger Arbeiten sein.

## 2.7 Ergebnisse und Überleitung

Die Anforderungen an die Positioniergenauigkeit piezoelektrischer Wandler als Aktoren für hydraulische Ventile sind nur dann in ausreichendem Maße erreichbar, wenn das Verhalten des Aktors unter den auftretenden Arbeitsbedingungen bekannt und bei der Ansteuerung in geeigneter Weise berücksichtigt wird. Insbesondere eine nutzbringende Auswertung der elektrischen Rückwirkungen des Piezoaktors zur Berechnung des mechanischen Ventilzustands erfordert ein tiefergehendes Verständnis der kristallinen Prozesse.

In dem zurückliegende Kapitel wird beschrieben, welche physikalischen Eigenschaften für das piezoelektrische Verhalten verantwortlich sind und welche Zusammenhänge sich aus thermodynamischer Sicht ergeben. Neben einem linearen Ansatz für die Piezoelektrizität erweisen sich insbesondere Modelle mit Hysteresenachbildung als vergleichsweise realitätsnah. Die thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten bieten überdies eine Grundlage zur vorgestellten Modellierung des Polarisationszustands der Keramik, mit der beispielsweise auch die für ferroelektrische Materialien charakteristische Schmetterlingskurve wiedergegeben wird.

Im nächsten Kapitel wird dargelegt, wie die beschriebenen Erkenntnisse über piezoelektrische Wandler bei der Modellierung von Einspritzventilen gewinnbringend anzuwenden sind.



# Kapitel 3

## Modellierung des Injektors

Dieses Kapitel befaßt sich mit der mathematischen Modellbildung piezoelektrisch aktiver Injektoren. Ausgehend von einer prinzipiellen Beschreibung eines repräsentativen Einspritzventils werden verschiedene Ansätze zur Modellierung des elektromechanischen Verhaltens vorgestellt und bewertet. Auf die Erstellung und Berechnung einer konzentriertparametrischen Ersatzanordnung folgt ein verteiltparametrischer Ansatz, der insbesondere die Ausbreitung von Schallwellen in der verteilten Injektormechanik berücksichtigt. Messungen dienen an verschiedenen Stellen der Ausführungen dazu, die Modelle mit der Realität zu vergleichen. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung.

### 3.1 Beschreibung des Injektoraufbaus

Die **Abbildung 3.1** zeigt als Schnittdarstellung schematisch den Aufbau eines Dosierventils, welches als Injektor für direkteinspritzende OTTO-Motoren geeignet ist. Bei diesem Ventil wird die elektrisch hervorgerufene Dehnung eines Piezoaktors ausgenutzt, um ein Tellerventil zu öffnen und somit einen Kraftstoffstrom zu steuern. Die folgende Beschreibung des Funktionsprinzips ist [GKMM01] entnommen.

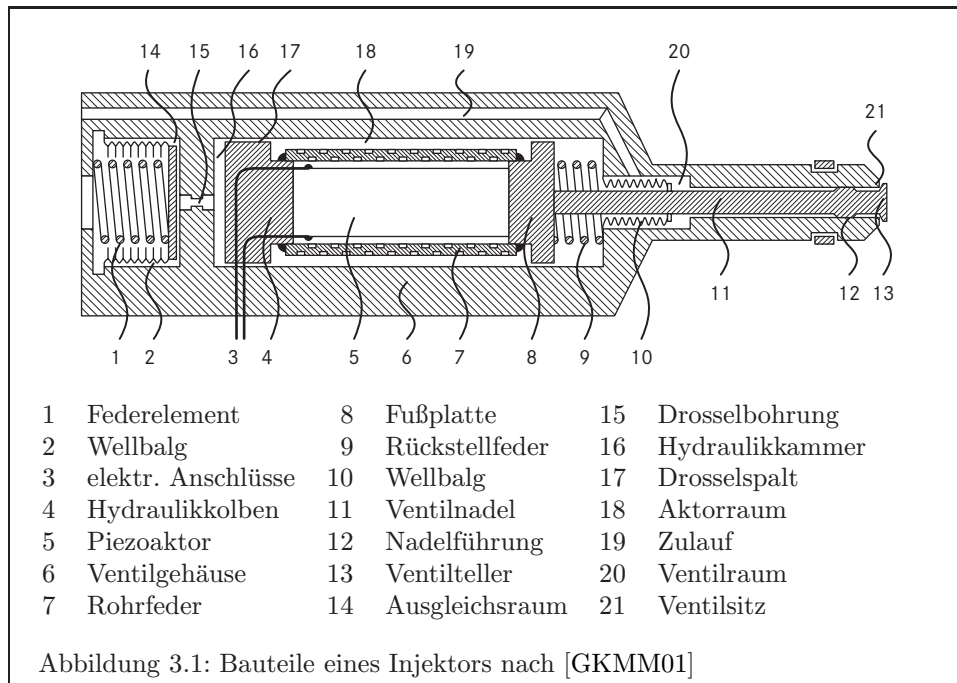
In der Mitte des Einspritzventils befindet sich der Piezoaktor (5), erkennbar an den beiden Anschlußleitungen (3). An beide Seiten des Aktors grenzen zwei rotations-symmetrische Bauteile an, wobei der in der Skizze links liegende (4) als Hydraulikkolben und der rechte (8) als Fußplatte bezeichnet wird. Der Aktor ist mit einer vorzugsweise geschlitzten Rohrfeder (7) umgeben, welche mit dem Hydraulikkolben und der Fußplatte verschweißt ist. Die Feder dient dazu, den Piezoaktor mechanisch mit einer Druckkraft von typischerweise etwa 500N vorzuspannen.

An der rechten Seite der Fußplatte schließt eine Ventalnadel (11) an, welche günstigerweise mit der Fußplatte verschweißt ist, um Spaltfederungen zu minimieren<sup>1</sup>. Zwischen Ventilgehäuse (6) und Fußplatte befindet sich eine Rückstellfeder (9), welche eine Schließkraft von etwa 50N bis 150N in die Ventalnadel einleitet.

Die Ventalnadel (13) bildet zusammen mit dem Injektorgehäuse (21) ein nach außen öffnendes Tellerventil. Eine ausreichend große Kraft durch den Piezoaktor drückt die Ventalnadel aus ihrem Sitz und gibt eine Öffnung frei, durch die Kraftstoff aus dem Zulauf (19) durch den Ventilraum (20) an der Ventalnadel (12) vorbei nach außen gelangen kann.

---

<sup>1</sup>In der Abbildung der Patentschrift DE19940055C1 ist die Schweißnaht nicht eingezeichnet.



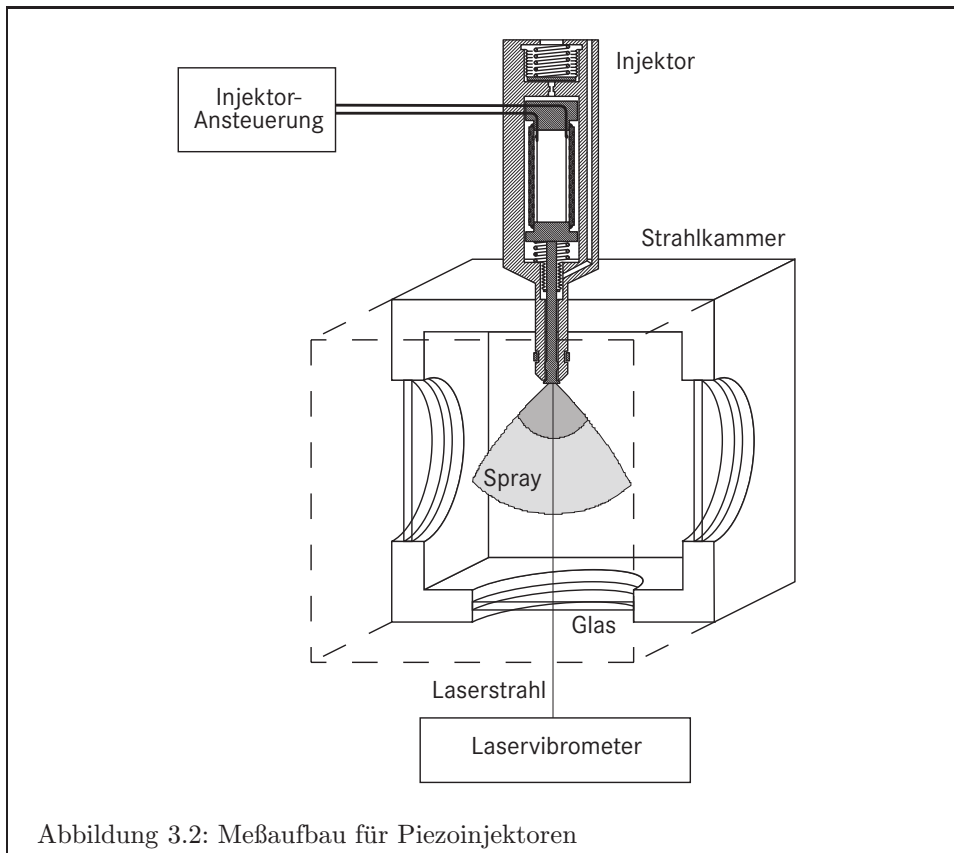
Damit der Aktor eine solche Kraft auf die Ventlnadel ausüben kann, darf das linke Ende des Piezoaktors seine Position während einer Einspritzung nur geringfügig verändern. Dazu ist es vorstellbar, den Hydraulikkolben kraftschlüssig mit dem Injektorgehäuse zu verbinden. Eine derartige Konstruktion weist jedoch das Problem auf, daß Unterschiede der thermischen Ausdehnungskoeffizienten von Stahl und Aktormaterial dazu führen können, daß der Injektor bei großen Temperaturänderungen nicht mehr geöffnet oder geschlossen werden kann.

Anstelle eines Kraftschlusses zwischen Hydraulikkolben und Injektorgehäuse ist es deshalb günstiger, daß das linke Aktorende axial beweglich gelagert ist, um die langsamen thermischen Längenänderungen ausgleichen zu können. Diese Bewegung muß aber so stark gedämpft sein, daß sie auf die verhältnismäßig kurzzeitigen Aktorkräfte während einer Einspritzung nur unwesentlich reagiert.

Dazu bildet der Hydraulikkolben zusammen mit dem Ventilgehäuse eine Hydraulikkammer (16), die mit einer Hydraulikflüssigkeit gefüllt ist. Die Hydraulikkammer ist mittels einer Drosselbohrung (15) mit einem Ausgleichsraum (14) hydraulisch verbunden, in welchem durch ein Federelement (1) und einen Wellbalg (2) ein Vor- druck von etwa 10bar bis 20bar aufgebaut wird. Auch die Passung (17) zwischen Hydraulikkolben und Ventilgehäuse bildet einen Drosselspalt, durch den die Hydraulikflüssigkeit zwischen der Hydraulikkammer und dem Aktorraum (18) strömen kann.

## 3.2 Messaufbau für Piezoinjektoren

Für Untersuchungen des mechanischen und des hydraulischen Verhaltens direktgesteuerter Piezoinjektoren für OTTO-Motoren existiert bei der DAIMLERCHRYSLER AG ein Meßaufbau, wie ihn die **Abbildung 3.2** zeigt. Der Injektor ragt mit seiner Spitze in eine gasdichte Kammer, in deren Boden und Wände Schaugläser eingefaßt sind. Somit ist es möglich, von unten mit einem Laservibrometer die Bewegung der



Nadelspitze des Injektors zu verfolgen und die Daten elektronisch aufzuzeichnen.

Die **Abbildung 3.3** zeigt so erhaltene Messungen des elektromechanischen Verhaltens eines Injektors, dessen Aktor innerhalb von jeweils  $100\mu\text{s}$  und  $150\mu\text{s}$  elektrisch aufgeladen und entladen wird (obere und untere Messung). Oben links ist der in den Injektor eingeprägte Aktorstrom über der Zeit aufgetragen, welcher bei diesen Ansteuerungen möglichst rechteckförmig gewählt wurde.

Der Graph rechts oben enthält den gemessenen Nadelhub des Injektors. Durch die elektrische Ansteuerung wird die Injektormechanik zu Schwingungen angeregt, was sich insbesondere in den abklingenden Oszillationen der Nadelspitze äußert. Diese Bewegungen bewirken eine abwechselnde Stauchung und Dehnung des Aktors, was wiederum bei der nahezu konstanten Aktorladung zu einer veränderlichen Aktorspannung führt (rechts unten). Auch die Entladeflanke regt Oszillationen der Injektormechanik an, welche erst nach einiger Zeit abklingen.

Es ist erkennbar, daß der Injektor auf eine Ansteuerung mit einer Lade- und Entladezeit von jeweils  $100\mu\text{s}$  mit größeren Beschleunigungen der Injektormechanik reagiert, welche zu deutlich größeren Schwingungen und sogar einem Nachprellen der Nadelspitze führen.

Bedingt durch die Konstruktion des verwendeten Meßaufbaus sind dem gemessenen Nadelhub auch Bewegungen des gesamten Prüfstands überlagert. Diese Schwingungen haben eine Frequenz von ca.  $2\text{kHz}$  und sind besonders auffallend, wenn der Injektor nach der Entladung zwar geschlossen ist, der gemessene Nadelhub aber weiter um die Ruhelage oszilliert.

Während der Messungen in der Abbildung 3.3 wurde der Injektor ohne Kraftstoff

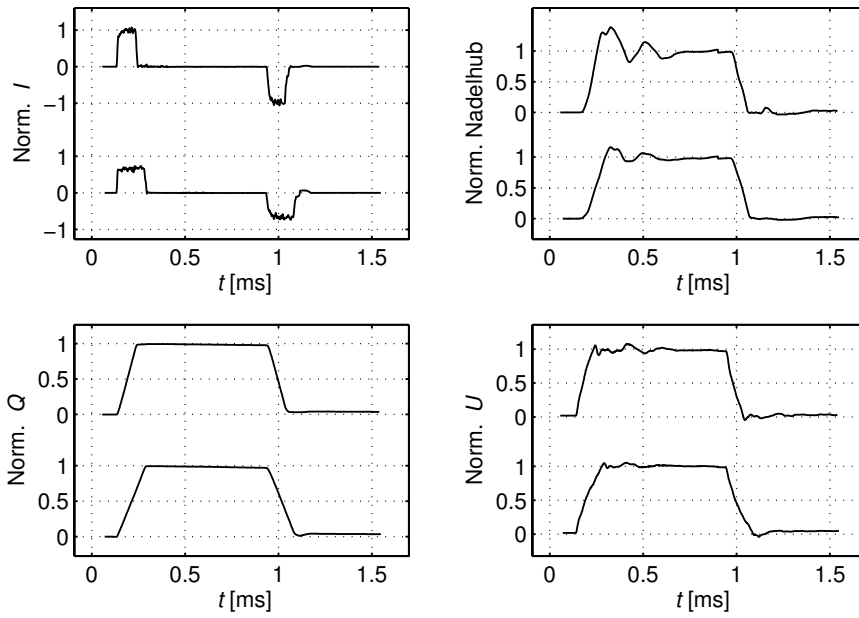


Abbildung 3.3: Gemessenes Verhalten eines Injektors ohne Kraftstoffdurchfluss bei Lade- und Entladezeiten von jeweils  $100\mu\text{s}$  (oben) und  $150\mu\text{s}$  (unten)

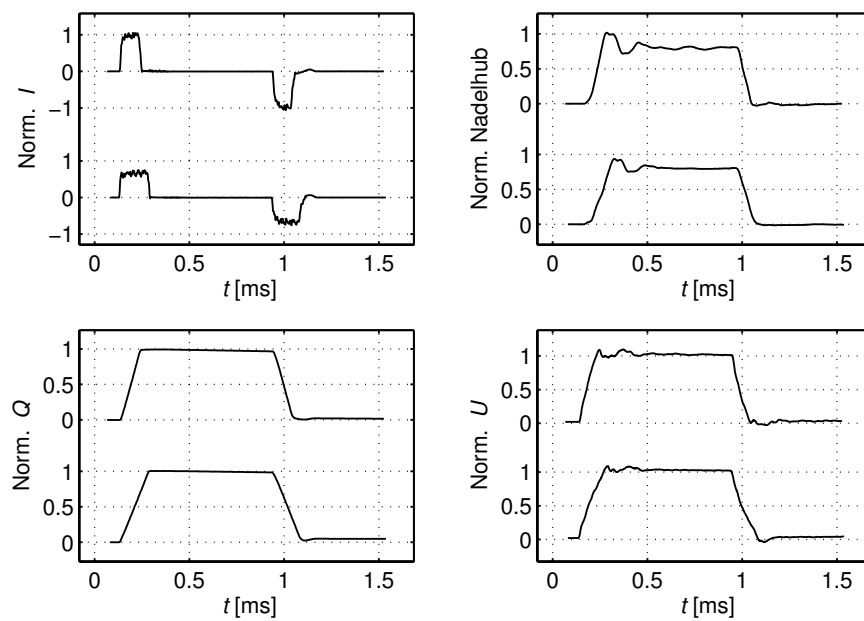


Abbildung 3.4: Gemessenes Verhalten eines kraftstoffdurchflossenen Injektors bei einem Kraftstoffdruck von 200bar und bei Lade- und Entladezeiten von jeweils  $100\mu\text{s}$  (oben) und  $150\mu\text{s}$  (unten)



betrieben, um Daten zum Verhalten der Injektormechanik zu generieren. Ergänzend dazu ist aus der **Abbildung 3.4** in analoger Weise das elektromechanische Verhalten des kraftstoffdurchströmten Injektors abzulesen. Durch den hier gewählten Kraftstoffdruck von 200bar [Daim04] verringert sich der mittlere Nadelhub bei gleicher elektrischer Ansteuerung geringfügig, und die Bewegungen der Ventilmechanik sind durch den Kraftstoff etwas stärker gedämpft, darüberhinaus ist aber kein grundsätzlich unterschiedliches Verhalten des Injektors ablesbar.

Bevor im nächsten Kapitel gezeigt wird, wie die Wahl eines geeigneten Ansteuerungsverlaufs die Schwingungen der Injektornadel verringert und Prellen reduziert, zeigt dieses Kapitel einige Wege zur mathematischen Beschreibung des dynamischen Injektorverhaltens.

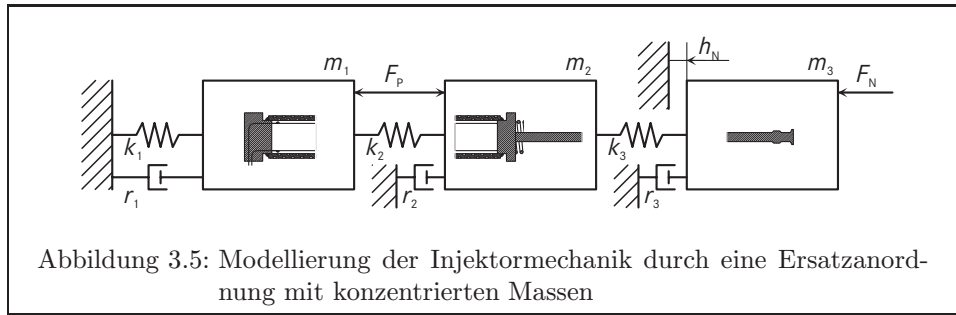
### 3.3 Ersatzanordnung mit konzentrierten Massen ohne Hysterese

In diesem Unterkapitel wird die Injektormechanik durch die mathematische Beschreibung einer Ersatzanordnung mit konzentrierten Massen modelliert, wobei die Hysterese des Aktors vernachlässigt wird. Es ergibt sich zunächst ein nichtlineares System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches durch lineare Teilsysteme für die verschiedenen Betriebszustände ersetzt wird. Die Integration der Teilmodelle ermöglicht mittels einer Fallunterscheidung die Formulierung eines nichtlinearen zeitdiskreten Gesamtmodells. Nach einer Parametrierung durch ein statisches Optimierungsverfahren folgt ein Vergleich mit dem realen Injektorverhalten.

Der mechanische Aufbau eines Injektors nach **Abbildung 3.1** besteht aus dem Hydraulikkolben, dem Piezoaktor, der Fußplatte, der Ventilnadel samt Ventilteller und einem Teil der Rückstellfeder. Für die Erstellung einer entsprechenden konzentriert parametrischen Ersatzanordnung wird zunächst vereinfachend angenommen, daß sich die Masse der Injektormechanik an diskreten Orten befindet und die Elastizität der Injektorbauteile als diskrete Federn zwischen diesen Massen wirkt. Dazu muß zunächst eine Auswahl stattfinden, welche Stellen der Injektormechanik durch ideale Massepunkte zu repräsentieren sind.

Ohne Zweifel verdient der Piezoaktor dabei besondere Beachtung, da dessen Kräfte und Längenänderungen mit der elektrischen Ansteuerung in Wechselwirkung treten. Das Modell muß also die Positionen und Geschwindigkeiten des rechten und des linken Endes des Piezoaktors beinhalten. Daneben haben die Position und die Geschwindigkeit des Ventiltellers einen entscheidenden Einfluß auf die Durchflußcharakteristik des Ventils und sind deshalb zu modellieren.

Die **Abbildung 3.5** zeigt die sich so ergebende Ersatzanordnung für den zuvor besprochenen Injektoraufbau. Die drei Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  sind durch die Federn  $k_2$  und  $k_3$  gekoppelt, welche für die jeweiligen Steifigkeiten der Bauteile stehen.  $r_1$  entspricht dabei der Dämpfung des Hydraulikkolbens. Obwohl die in einem realen Injektor auftretenden Reibkräfte sowohl nichtlinear als auch zeitvariant sind, wird in der Ersatzanordnung durch die Dämpfungen  $r_2$  und  $r_3$  eine viskose Reibung angenommen.  $F_P$  steht für die Stellkraft des Piezoaktors, und die Schließkraft  $F_N$  der Rückstellfeder drückt die Nadel in den Sitz.



Diese Ersatzanordnung gilt für eine Vielzahl von Einspritzventilen für direkteinspritzende OTTO-Motoren. Der in dieser Arbeit untersuchte Injektor erlaubt überdies eine Vereinfachung des Modells: Bei genauerer Betrachtung der Messungen in der Abbildung 3.3 ist nicht erkennbar, daß sich der Nadelhub während der Dauer einer Einspritzung verringert. Entweder ist demnach bei dem vorliegenden Injektor kein thermischer Längenausgleich vorhanden, der Längenausgleich ist bereits am Rand seiner Bewegungsfreiheit, oder seine Zeitkonstante ist so groß, daß er für die Modellierung vernachlässigt werden kann. In allen drei Fällen bedeutet dies, daß die Position des Hydraulikkolbens nahezu unveränderlich ist und in der Ersatzanordnung demnach auch nicht enthalten sein muß.

Durch den Nadelsitz ist die Bewegung der Nadelspitze beschränkt, wodurch sich für die Modellierung eine harte Nichtlinearität ergibt. Befindet sich die Nadel im Sitz, so sind Geschwindigkeit und Position von  $m_3$  gleich Null, andernfalls folgt die Masse den beschleunigenden Kräften. Diese Beschränkung der Nadelposition impliziert, daß immer dann keine stetigen Ableitungen existieren, wenn das Ventil von der geschlossenen in die geöffnete Stellung übergeht und umgekehrt. Dies verbietet eine lineare Betrachtungsweise, wie sie beispielsweise in [Sche99] beschrieben wird. Auch ist demnach die durch den Aktor bewegte Masse nicht konstant, wie es in [Schu01] angenommen wird.

Um die Umschaltung der Ventildynamik möglichst wirklichkeitsnah abbilden zu können, wird in dieser Arbeit der Ansatz verfolgt, dem Schalterpunkt des Ventils entsprechend zwischen verschiedenen Differentialgleichungssystemen umzuschalten. Mathematisch bedeutet dies eine Fallunterscheidung zwischen zwei Ersatzanordnungen für die beiden Stellungen *Geschlossen* und *Geöffnet*, wie sie in der **Tabelle 3.1** zusammen mit den Gleichungen der Differentialgleichungssysteme aufgeführt sind.

Für diese beiden Ersatzanordnungen sind nun die mathematischen Modelle

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^i &= \underline{A}^i \underline{x} + \underline{B}^i \underline{u} \\ \underline{y}^i &= \underline{C} \underline{x}^i + \underline{D} \underline{u} \end{aligned} \quad i \in [1, 2] \quad (3.1)$$

aufzustellen, wobei der Index  $i$  die jeweilige Stellung spezifiziert. Die Elemente des Zustandsvektors sind hier die Positionen und Geschwindigkeiten der diskreten Massen der Ersatzanordnung. Da die Aktorladung zumeist durch eine zeitliche Integration des Aktorstroms berechnet wird, bietet es sich an, auch einen Zustand für die Aktorladung einzufügen. Die **Tabelle 3.2** listet die so gewählten Zustandsvariablen auf.

Ventilstellung	Ersatzanordnung
Geschlossen ( $i = 1$ ) $\dot{\underline{x}}^1 = \underline{A}^1 \underline{x} + \underline{B}^1 \underline{u}$ $\underline{y}^1 = \underline{C} \underline{x}^1 + \underline{D} \underline{u}$	
Geöffnet ( $i = 2$ ) $\dot{\underline{x}}^2 = \underline{A}^2 \underline{x} + \underline{B}^2 \underline{u}$ $\underline{y}^2 = \underline{C} \underline{x}^2 + \underline{D} \underline{u}$	

Tabelle 3.1: Linearisierte Teilmodelle der Injektormechanik für die Stellungen *Geschlossen* und *Geöffnet*

Zustand	Physikalische Bedeutung
$x_1^i$	Ladung des Piezoaktors
$x_2^i$	Auslenkung des nadelseitigen Piezoendes
$x_3^i$	Geschwindigkeit des nadelseitigen Piezoendes
$x_4^i$	Auslenkung des Ventiltellers
$x_5^i$	Geschwindigkeit des Ventiltellers

Tabelle 3.2: Physikalische Bedeutungen der Elemente der Zustandsvektoren der konzentriertparametrischen Ersatzanordnungen

Das Modell soll aus dem Aktorstrom  $I_P$  und der Nadelschließkraft  $F_N$  eine Aktorspannung  $U_P$  und einen Nadelhub  $h_N$  berechnen. Aus den verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten für die Piezo- und Ferroelektrizität sei an dieser Stelle zunächst der lineare Ansatz

$$D = \varepsilon E - d \sigma \quad (3.2)$$

$$\xi = d E - s \sigma \quad (3.3)$$

ausgewählt.

Zusammen mit der Querschnittsfläche  $A_P$  und Länge  $l_P$  des Stapelaktors sowie der Anzahl der Piezoscheiben  $N_P$  (siehe dazu die Abbildung 2.4) ergeben sich die Beziehungen

$$U_P = \frac{1}{N_P^2} \frac{s}{\varepsilon s - d^2} \frac{l_P}{A_P} Q_P - \frac{1}{N_P} \frac{d}{\varepsilon s - d^2} h_P$$

$$F_P = \frac{1}{N_P} \frac{d}{\varepsilon s - d^2} Q_P - \frac{\varepsilon}{\varepsilon s - d^2} \frac{A_P}{l_P} h_P$$

zwischen der Aktorspannung  $U_P$ , der Aktorladung  $Q_P$ , der Aktordruckkraft  $F_P$  und der Aktorlängenänderung  $h_P$ .

Mit den Ein- und Ausgangsvektoren

$$\underline{u} = (I_P \quad F_N)^T \quad (3.4)$$

$$\underline{y} = (U_P \quad h_N)^T \quad (3.5)$$

lauten die Matrizen der Zustandsraumdarstellung demnach

$$\underline{A}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_P}{\partial Q_P} & \frac{1}{m_2} \left( \frac{\partial F_P}{\partial h_P} - k_2 - k_3 \right) & -\frac{r_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{B}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_P}{\partial Q_P} & \frac{1}{m_2} \left( \frac{\partial F_P}{\partial h_P} - k_2 - k_3 \right) & -\frac{r_2}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{r_3}{m_3} \end{pmatrix} \quad \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_P}{\partial Q_P} & \frac{\partial U_P}{\partial h_P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Unter der Annahme treppenförmiger Stellgrößen  $\underline{u}(t)|_{t \in [t_k, t_k + T[} = \underline{u}(k)$  ergibt die Integration

$$\underline{G}^i = e^{\underline{A}^i T}$$

$$\underline{H}^i = \int_0^T e^{\underline{A}^i t} \underline{B}^i dt$$

der beiden linearen Differentialgleichungssysteme (3.1) über ein Zeitintervall  $T$  die zwei linearen Differenzgleichungssysteme

$$\underline{x}^i(k) = \underline{G}^i \underline{x}(k-1) + \underline{H}^i \underline{u}(k-1) \quad (3.6)$$

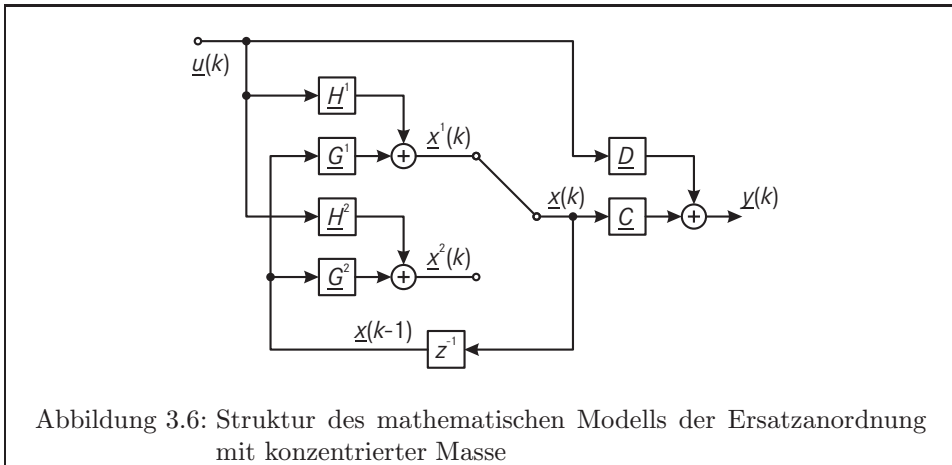
für die Ventilstellungen  $i = 1$  und  $i = 2$ . Ausgehend von einem Zustandsvektor  $\underline{x}(k-1)$  zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$  ist es damit möglich, für beide Stellungen jeweils einen neuen Zustandsvektor  $\underline{x}^i(k)$  für den Zeitpunkt  $t_k = t_{k-1} + T$  zu berechnen. Um zu bestimmen, in welcher der beiden Stellungen sich das Ventil befindet, wertet die Fallunterscheidung

$$\underline{x}(k) = \begin{cases} (x_1^1(k) \quad x_2^1(k) \quad x_3^1(k) \quad 0 \quad 0)^T & \text{für } h_N(k) \leq 0 \\ (x_1^2(k) \quad x_2^2(k) \quad x_3^2(k) \quad x_4^2(k) \quad x_5^2(k))^T & \text{für } h_N(k) > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

die neue Nadelposition  $h_N(k) = x_4^2(k)$  des Modells für die Stellung *Geöffnet* aus. Befindet sich demzufolge die Nadel im Sitz ( $h_N(k) \leq 0$ ), so sind für den nächsten Zeitschritt die Zustände der geschlossenen Ersatzanordnung zu verwenden, andernfalls ( $h_N(k) > 0$ ) die des geöffneten Ventils. Mit dem so bestimmten neuen Zustandsvektor  $\underline{x}(k)$  ergibt

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k) + \underline{D} \underline{u}(k) \quad (3.8)$$

den Ausgangsvektor  $\underline{y}(k)$  für den Zeitpunkt  $t_k$ . Die **Abbildung 3.6** verdeutlicht die Struktur der Zustandsgleichungen (3.6) bis (3.8).



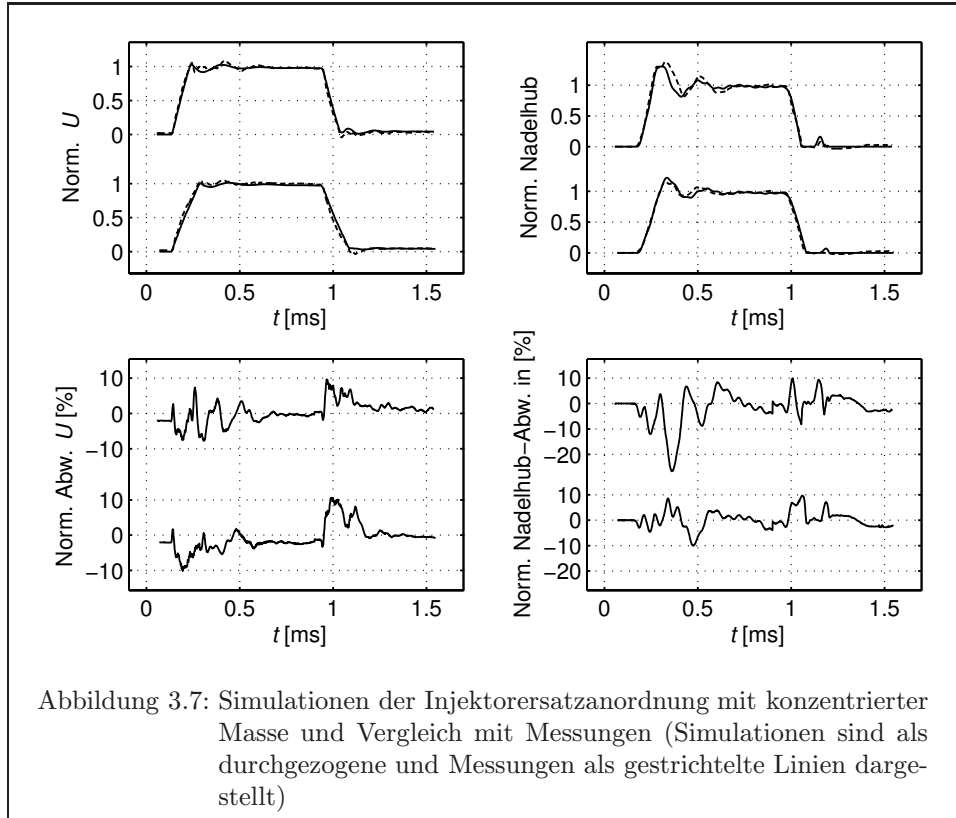
Bei der Vorgehensweise aus der Gleichung (3.7) fällt im Modell die Nadel bei einem Schließvorgang ohne Prellen in den Sitz, da sämtliche Bewegungen  $x_5^2$  der Nadel verschwinden, sobald die Stellung *Geschlossen* erreicht wird. Obgleich dies nicht bei jedem Injektor notwendigerweise der Fall sein mag, so bestätigen doch die Messungen in der Abbildung 3.3 diesen Ansatz, denn bei den beiden gezeigten Schließvorgängen ist kein unmittelbares Prellen der Nadel im Sitz erkennbar.

Die Parameter des Modells  $d$ ,  $s$ ,  $\varepsilon$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  und die für den Injektor als konstant angenommene Nadelschließkraft  $F_N$  sind die Lösung des statischen Optimierungsproblems

$$\int \left( g^U (U^{\text{Meß}} - U^{\text{Sim}}(I^{\text{Meß}}))^2 + g^h (h^{\text{Meß}} - h^{\text{Sim}}(I^{\text{Meß}}))^2 \right) dt \rightarrow \min$$

mit den Gewichtungsfaktoren  $g^U$  und  $g^h$ , welches mit einem Gradientenabstiegsverfahren gelöst wurde.

In der **Abbildung 3.7** sind die parametrisierten Gleichungen (3.6) bis (3.8) den Messungen aus der Abbildung 3.3 gegenübergestellt. Obwohl der gemessene und der simulierte Nadelhub im offenen und geschlossenen Zustand des Injektors zwar nahezu auf Strichbreite übereinstimmen, treten dennoch insbesondere während des Öffnens und Schließens recht große Abweichungen von bis zu 27 Prozent des Nennadelhubs auf. Diese sind in der Modellierung mittels diskreter Massen begründet, aber auch die Reibung der realen Injektormechanik ist weitaus komplexer zu erwarten als die lineare Dämpfung in der Ersatzanordnung. Der Vergleich der Spannungen zeigt ebenfalls deutliche Abweichungen zwischen Messung und Simulation, wobei die Hauptursache dafür die in den Gleichungen (3.2) und (3.3) vernachlässigte Hysterese des Piezoaktors sein dürfte. Das folgende Unterkapitel untersucht deshalb die Kombination eines konzentriertparametrischen Modells und der Hysteresemodellierung nach DAHL und WILDER.



### 3.4 Ersatzanordnung mit konzentrierter Masse und Hysterese

Das Modell soll wieder aus dem Aktorstrom  $I_P$  und der Nadelschließkraft  $F_N$  eine Aktorspannung  $U_P$  und einen Nadelhub  $h_N$  berechnen. Um die Hysterese des Aktors in das Modell einzubeziehen, bietet sich die Verwendung der Gleichungen (2.27) bis (2.29) an, in denen die Polarisation  $P$  mit einem inversen Hystereseoperator aus dem Aktorhub  $h_P$  und der Aktorspannung  $U_P$  bestimmt wird. Aus Gründen der Parametrierbarkeit findet im folgenden der inverse erweiterte Hystereseoperator aus der Gleichung (2.26) Verwendung.

$$P = \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{N_P A_P} \frac{1}{\varepsilon^P} Q_P + \frac{1}{l_P} \frac{k^E}{s^P} h_P, t, \tilde{\theta} \right) \quad (3.9)$$

$$U_P = \frac{l_P}{N_P^2 A_P} \frac{1}{\varepsilon^P} Q_P - \frac{l_P}{N_P} \frac{1}{\varepsilon^P} P \quad (3.10)$$

$$F_P = A_P \frac{k^\sigma}{s^P} P - \frac{A_P}{l_P} \frac{1}{s^P} h_P \quad (3.11)$$

Nun gilt es, die Differentialgleichung des Hystereseoperators in die Zustandsgleichungen einzubinden. Dazu wird zunächst die Polarisation der Keramik in den Zustandsvektor des Modells aufgenommen, wie die **Tabelle 3.3** illustriert.

Zustand	Physikalische Bedeutung
$x_1^i$	Ladung des Piezoaktors
$x_2^i$	Polarisation des Piezoaktors
$x_3^i$	Auslenkung des nadelseitigen Piezoendes
$x_4^i$	Geschwindigkeit des nadelseitigen Piezoendes
$x_5^i$	Auslenkung des Ventiltellers
$x_6^i$	Geschwindigkeit der Ventiltellers

Tabelle 3.3: Physikalische Bedeutungen der Elemente der Zustandsvektoren der konzentriertparametrischen Ersatzanordnungen mit Hysterese

Unter Beibehaltung der Ein- und Ausgangsvektoren (3.4) und (3.5) lauten die Matrizen der Zustandsraumdarstellungen jetzt

$$\begin{aligned}
\underline{A}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial P}{\partial h_P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_P}{\partial P} & \frac{1}{m_2} \left( \frac{\partial F_P}{\partial h_P} - k_2 - k_3 \right) & -\frac{r_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \underline{B}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Q_P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\underline{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial P}{\partial h_P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_P}{\partial P} & \frac{1}{m_2} \left( \frac{\partial F_P}{\partial h_P} - k_2 - k_3 \right) & -\frac{r_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & 0 & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{r_3}{m_3} \end{pmatrix} & \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Q_P} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_3} \end{pmatrix} \\
\underline{C} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U_P}{\partial Q_P} & \frac{\partial U_P}{\partial P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Die darin enthaltenen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial P}{\partial h_P}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial Q_P}$ ,  $\frac{\partial F_P}{\partial P}$ ,  $\frac{\partial F_P}{\partial h_P}$ ,  $\frac{\partial U_P}{\partial Q_P}$  und  $\frac{\partial U_P}{\partial P}$  ergeben sich aus den Gleichungen (3.9) bis (3.11) sowie der Definition des Hystereseeoperators.

Wie schon bei dem Modell ohne Hysterese ist es auch hier wieder ratsam, die beiden Stellungen unabhängig voneinander für ein Zeitintervall  $T$  zu lösen. Die Zustandsabhängigkeit von  $\frac{\partial P}{\partial h_P}$  und  $\frac{\partial P}{\partial Q_P}$  in den Übergangsmatrizen  $\underline{A}^i$  und in den Steuermatrizen  $\underline{B}^i$  verhindert hier jedoch geschlossene analytische Lösungen der beiden Teilmodelle, weshalb an dieser Stelle numerische Näherungen erforderlich sind.

Eine übliche Methode zur Lösung von nichtlinearen Anfangswertproblemen ist das EULERSche Polygonzugverfahren, welches einer wiederholten linearen Extrapolation der Zustandsänderung vom Zeitpunkt  $t_{k-1}$  auf  $t_k = t_{k-1} + T$  entspricht.

$$\underline{x}^i(k) \approx T \underline{A}^i(\underline{x}(k-1)) \underline{x}(k-1) + T \underline{B}^i(\underline{x}(k-1)) \underline{u}(k-1)$$

Die Modellstrukturen erlauben es aber auch, die Teilmodelle für einzelne Arbeitspunkte des Hystereseeoperators zu linearisieren und analytisch über ein Zeitintervall  $T$  zu integrieren. Die so erhaltenen Folgen zeitdiskreter linearer Zustandsraummodelle sind a priori berechenbar, und in der Simulation liefert dann eine Interpolation zwischen diesen Modellen die für den jeweiligen Arbeitspunkt gesuchten Zustandsübergangsvorschriften

$$\underline{x}^i(k) = \underline{G}^i(\underline{x}(k-1)) \underline{x}(k-1) + \underline{H}^i(\underline{x}(k-1)) \underline{u}(k-1)$$

für die beiden Ventilstellungen  $i = 1$  und  $i = 2$ . Im Vergleich zur Integration nach EULER ist dank der Folge analytischer Lösungen die Wahl einer größeren Abtastzeit  $T$  möglich, was den Einsatz des Modells in einem KALMAN-Filter begünstigt. Die Zustandsabhängigkeit der Differentialgleichungssysteme ist hier zudem beschränkt und fällt vergleichsweise gering aus, weshalb der Fehler durch die lineare Approximation vernachlässigbar ist. Somit stellt die Integration der Modelllinearisierungen eine attraktive Alternative zum EULERSchen Polygonzugverfahren dar.

Unabhängig von der Frage der Integrationstechnik dient auch hier wieder eine Fallunterscheidung

$$\underline{x}(k) = \begin{cases} (x_1^1(k) & x_2^1(k) & x_3^1(k) & x_4^1(k) & 0 & 0)^T & \text{für } h_N(k) \leq 0 \\ (x_1^2(k) & x_2^2(k) & x_3^2(k) & x_4^2(k) & x_5^2(k) & x_6^2(k))^T & \text{für } h_N(k) > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k) + \underline{D} \underline{u}(k) \quad (3.13)$$

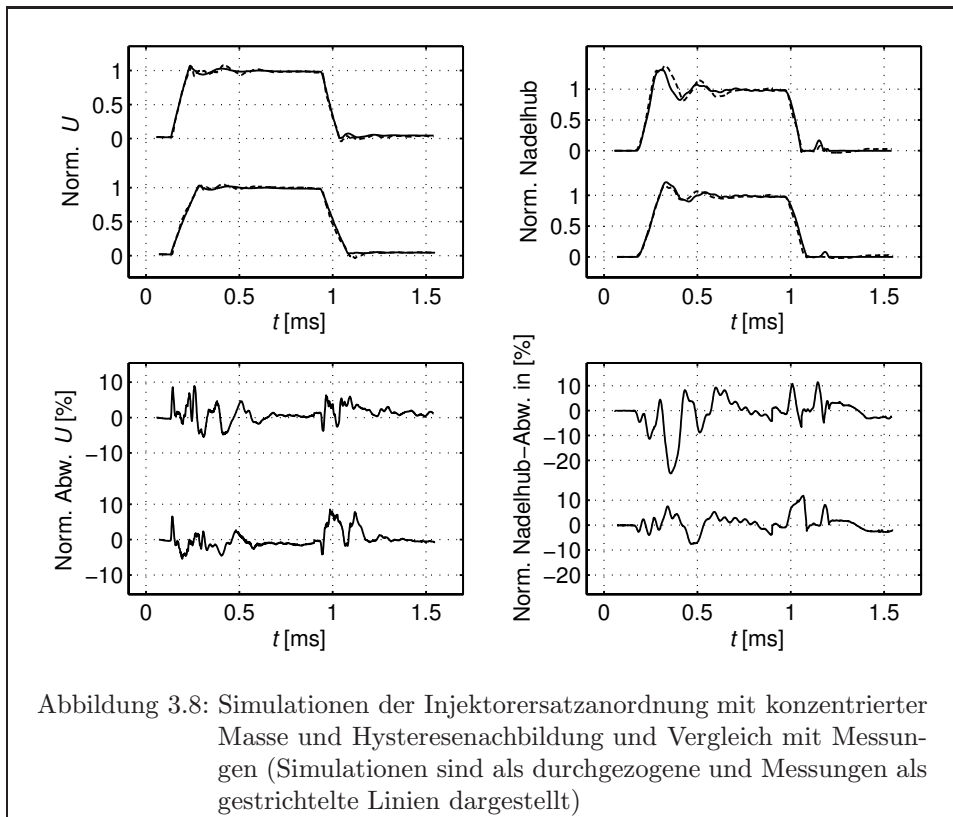
mit  $h_N(k) = x_5^2(k)$  dazu, einen gemeinsamen neuen Zustandsvektor  $\underline{x}(k)$  und einen Ausgangsvektor  $\underline{y}(k)$  für den Zeitpunkt  $t_k$  zu berechnen.

Die **Abbildung 3.8** vergleicht das wiederum mittels einer Optimierung parametrisierte Modell mit den Messungen. Es ist erkennbar, daß der Modellfehler während der Lade- und Entladeflanken zwar geringer ausfällt, was jedoch im Vergleich zu den weiterhin existierenden Modellabweichungen kaum von Bedeutung ist. Insbesondere das berechnete Schwingen der Injektormechanik unmittelbar nach der Ladeflanke unterscheidet sich noch immer drastisch von dem gemessenen Verhalten. Zugunsten der Modellgenauigkeit ist offenbar einer möglichst realitätsnahen Modellierung der Injektormechanik eine größere Bedeutung zuzumessen.

Ein Weg hierzu ist sicherlich, anstatt eines Modellansatzes mit nur drei Massen wie in der **Abbildung 3.5** einen detaillierteren Ansatz höherer Ordnung zu wählen. Doch welche Punkte des mechanischen Aufbaus sind sinnvollerweise durch zusätzliche Zustände im Modell zu repräsentieren? Diese Frage ist schwer zu beantworten, denn klassische Methoden wie beispielsweise die Modalanalyse sind aufgrund des schaltenden Charakters der Streckendynamik nur bedingt anwendbar. Generell ist aber anzunehmen, daß mit zunehmender Anzahl diskreter Massenpunkte die Genauigkeit der Ersatzanordnung zunehmen wird. Diese Überlegungen führen zu dem Ansatz, jedes einzelne der Bauteile als eine Reihe gekoppelter Feder-Masse-Schwinger zu simulieren. Je mehr Teilmassen eine solche Ersatzanordnung enthält, umso stärker nähert sie sich der verteiltparametrischen Realität.

Auch eine weitere Tatsache legt den Gedanken nahe, einen verteiltparametrischen Modellansatz zu untersuchen. Direkteinspritzende Injektoren haben aufgrund der gegebenen Bauraumverhältnisse in üblichen Verbrennungsmotoren eine Länge von etwa 16cm, wobei grob ein Viertel der Injektorlänge für hydraulische und elektrische Anschlüsse benötigt wird. Die verbleibenden etwa 12cm teilen sich, wie in der **Abbildung 3.1** erkennbar, in den Aktor und in die von ihm bewegte Injektormechanik



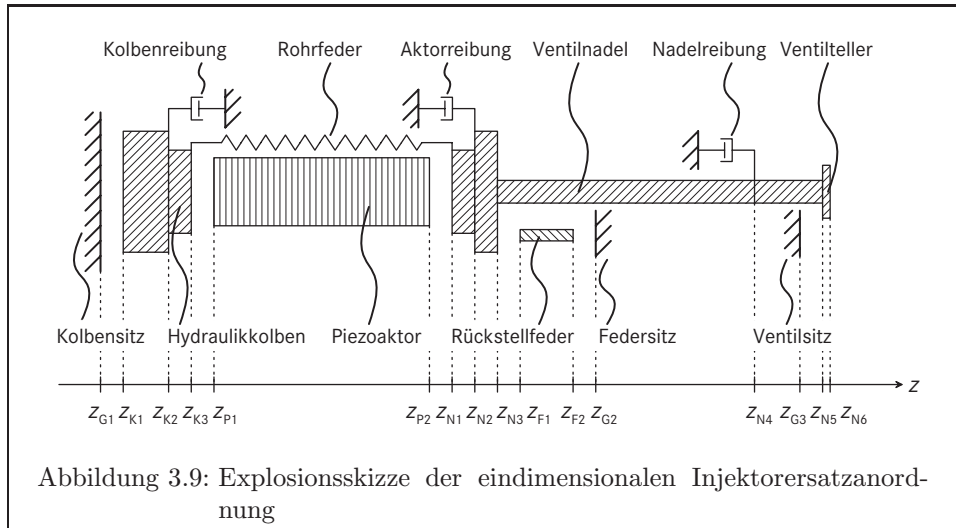


auf. Unter der Annahme gängiger Materialparameter bedeutet dies, daß die Schalllaufzeit von einem Ende der Injektormechanik zum anderen etwa  $25\mu\text{s}$  beträgt, was durchaus in der Größenordnung der Öffnungs- und Schließzeit von wenigen  $100\mu\text{s}$  liegt. Mit anderen Worten: Eine Druckwelle, die durch eine elektrische Ansteuerung des Piezoaktors im Injektor erzeugt wird, durchläuft während der Zeit des Öffnens nur wenige Male die Injektormechanik. Das oben beschriebene konzentriertparametrische Modell ist eher ungeeignet, diesem Sachverhalt hinreichend genau Rechnung zu tragen.

### 3.5 Verteilparametrische Ersatzanordnung ohne Hysterese

Für eine verteilparametrische Ersatzanordnung des piezoelektrischen Wandler und der Injektormechanik ist es erforderlich, eine das System beschreibende partielle Differentialgleichung herzuleiten, welche dann unter Beachtung der gegebenen zeitlichen und räumlichen Randbedingungen zu lösen ist. Reale Injektorkonstruktionen weisen örtliche Unstetigkeiten der Parameter und zeitlich nur abschnittsweise lineare Randbedingungen auf, weshalb eine geschlossene analytische Lösung ausscheidet. Zur Berechnung wird die partielle Differentialgleichung deshalb durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen approximiert und mittels Näherungen für die Nichtlinearitäten im Zeitbereich numerisch gelöst.

Zunächst ist festzulegen, ob die Ortsabhängigkeit der Anordnung im Ansatz ein-, zwei- oder dreidimensional zu berücksichtigen ist. Betrachtet man unter diesem Aspekt die Abbildung 3.1, so fällt auf, daß der schematisch dargestellte Injektor

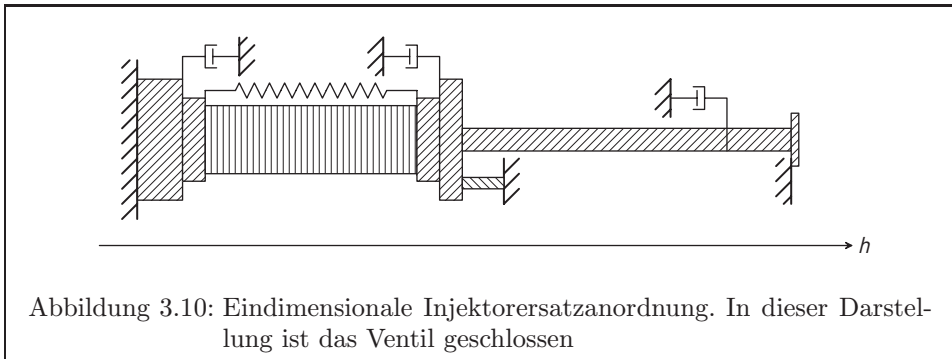


in hohem Maße symmetrisch zu einer gedachten Achse durch den Wandler und durch die Ventilnadel ist. Auch die Kräfte des Aktors können im Wesentlichen lediglich axial in Richtung der Nadel wirken. Aus diesem Grund reicht es aus, den Injektor als eindimensionale Anordnung zu modellieren. Bei dieser Näherung wird vernachlässigt, daß die Bauteile in der Realität eine räumliche Ausdehnung haben, in der die Axialkräfte nicht notwendigerweise radial gleichverteilt sind. Außerdem ist es nicht möglich, einen vollkommen symmetrischen Injektor herzustellen, wodurch sich ebenfalls Scher- und Radialkräfte ausbilden können. Um diese Effekte zu berücksichtigen, wäre eine mehrdimensionale Ersatzanordnung vonnöten. Für die Verwendung des Modells in dieser Arbeit rechtfertigt aber die zu erwartende geringfügig höhere Modellgenauigkeit nicht den weitaus größeren Parametrierungs- und Rechenaufwand.

Statt die Menge aller konstruktiven Details des realen Injektors modellmäßig zu erfassen, hilft auch hier wieder eine vereinfachende Ersatzanordnung, wie sie in der **Abbildung 3.9** zu sehen ist. Alle axial zum Aktor angeordneten Bauteile sind Zylinder oder Prismen mit einer zumindest abschnittsweise konstanten Querschnittsfläche. Wie schon in den konzentriertparametrischen Modellen darf auch hier wieder der thermische Längenausgleich fehlen, da in den Messungen kein langsames Schließen der Nadel beobachtbar ist. Obwohl auch das Gehäuse des Injektors aus einem schwach dehnbaren Material besteht, sind die Lager und Sitzflächen in der Ersatzanordnung ortsfest. Neben den örtlich verteilten Bauteilen sind auch zusätzliche konzentrierte Dämpfungselemente eingezeichnet, welche die Reibung der Bauteile an der Gehäusewand repräsentieren, sowie eine masselose Feder als Ersatz für die Rohrfeder des Aktormoduls.

Um die mit einer örtlich verteilten Ersatzanordnung erreichbare Modellgenauigkeit zu ermitteln, wird zunächst für den Aktor wieder der lineare hysteresefreie Ansatz für die Piezoelektrizität in den Gleichungen (3.2) bis (3.3) angewendet. Die Parameter des Wandlers, namentlich die Querschnittsfläche  $A$ , die Dichte  $\varrho$ , die piezoelektrische Ladungskonstante  $d$ , die Dielektrizitätszahl  $\varepsilon$ , die Elastizitätskonstante  $s$  sowie die dynamische Viskosität  $\eta$ , seien zeitinvariante Funktionen des Ortes  $z$ .

$$\begin{aligned}
 A &= A(z) & \varrho &= \varrho(z) & d &= d(z) \\
 \varepsilon &= \varepsilon(z) & s &= s(z) & \eta &= \eta(z)
 \end{aligned}$$



Da alle  $N_P$  Elemente eines Stapelaktors elektrisch parallel geschaltet sind, liegt an allen Elementen die gleiche Spannung  $U$ . Gebräuchliche Wandler bestehen aus einer großen Zahl gleichartiger Scheiben, weshalb die Feldstärke  $E = \frac{N_P}{T_P} U$  von Scheibe zu Scheibe nicht variiert und auch innerhalb der einzelnen Scheiben in guter Näherung nicht ortsabhängig ist.

Im Gegensatz zur Feldstärke ist die Flußdichte jedoch ortsabhängig: Lokale Dehnungen und Stauchungen der Keramik rufen ortsabhängige Polarisationsveränderungen hervor und erzeugen deshalb Ausgleichsströme zwischen den einzelnen Wandler-scheiben. Die elektrische Verbindung der Elektroden, oft durch Strombänder oder durch spezielle Leiterbahnen an den Seiten des Wandlers realisiert, besitzt zumeist eine so große Leitfähigkeit, daß die elektrischen Verluste durch die Ausgleichsströme vernachlässigbar klein sind. Auch die elektrischen Verluste durch die Leitfähigkeit der Piezokeramik sind bei intakten Aktoren zu gering, um das Aktorverhalten nennenswert zu beeinflussen. In den folgenden Betrachtungen ist deshalb kein Verlustleistungsanteil durch Leitungswiderstände und Leckströme enthalten.

Um die partielle Differentialgleichung des Stapelaktors zu erhalten, müssen zunächst die im Wandler verteilten Energien bekannt sein. Die Abweichung der Lage der Massenpunkte von der Ruhelage sei durch die Funktion  $h = h(z, t)$  mit der Einheit m beschrieben;  $z$  mit ebenfalls der Einheit m ist hier die unbewegte Position des differentiellen Längenelementes im Bauteil. Die kinetische Gesamtenergie ist somit

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_{z_{P1}}^{z_{P2}} A \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 dz.$$

Die verteilte potentielle Energie berechnet sich aus der Dehnung  $\xi = \frac{\partial h}{\partial z}$  und der mechanischen Spannung  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \int_{z_{P1}}^{z_{P2}} A \xi \sigma dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_{P1}}^{z_{P2}} \left( A \frac{\varepsilon}{\varepsilon s - d^2} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 - A \frac{d}{\varepsilon s - d^2} \frac{\partial h}{\partial z} D \right) dz \end{aligned}$$

Neben diesen mechanischen Energien führt die Ladungs- und Feldstärkeverteilung zu einer verteilten elektrischen Energie.

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{z_{\text{P1}}}^{z_{\text{P2}}} \left( A \frac{s}{\varepsilon s - d^2} D^2 + A \frac{d}{\varepsilon s - d^2} \frac{\partial h}{\partial z} D \right) dz$$

Zusätzlich zu den konservativen Energien sind ebenfalls die durch innere Verluste und Wechselwirkungen mit der elektrischen und mechanischen Seite des Wandlers verursachten virtuellen Energien zu berücksichtigen.

$$W_{\text{virt,el}} = \int_{z_{\text{P1}}}^{z_{\text{P2}}} A D E dz$$

Als mechanische Anregung wirke eine Volumenkraft  $f$  in  $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$  auf die verteilte Masse. Näherungsweise wird angenommen, daß das NEWTONSchen Reibungsgesetz  $\sigma_{\text{visk}} = -\eta \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial t}$  mit der dynamischen Viskosität  $\eta$  gilt.

$$W_{\text{virt,mech}} = \int_{z_{\text{P1}}}^{z_{\text{P2}}} \left( A f h - A \eta \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial t} \right) dz$$

Entsprechend dem verallgemeinerten HAMILTONSchen Prinzip führt eine Variationsrechnung

$$\partial \int_{t_0}^{t_1} (W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}} + W_{\text{el}}) dt + \int_{t_0}^{t_1} (W_{\text{virt,mech}} + W_{\text{virt,el}}) dt = 0$$

der Wirkung zu der das System beschreibenden Differentialgleichung [Waue97].

$$A \varrho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\varepsilon}{\varepsilon s - d^2} \frac{\partial h}{\partial z} + A \eta \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial t} \right) = A f - \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{d}{\varepsilon s - d^2} D \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{s}{\varepsilon s - d^2} D - \frac{d}{\varepsilon s - d^2} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{N_{\text{P}}}{l_{\text{P}}} U \quad (3.15)$$

Für physikalisch sinnvolle Werte der dynamischen Viskosität  $\eta$  ist (3.14) eine inhomogene hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Einsetzen der Gleichung (3.15) in die Gleichung (3.14) ergibt eine partielle Differentialgleichung, die das mechanische Verhalten als Reaktion auf die beiden Störfunktionen  $U$  und  $f$  beschreibt. Auch die Gesamtladung des Aktors wird zu einer Funktion von  $U$  und von  $f$ , wenn die verteilte Flußdichte aus der Gleichung (3.15) über die Länge  $l_{\text{P}}$  des Aktors von  $z_{\text{P1}}$  bis  $z_{\text{P2}}$  flächengewichtet integriert wird.

$$A \varrho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{1}{s} \frac{\partial h}{\partial z} + A \eta \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial t} \right) = A f - \frac{N_{\text{P}}}{l_{\text{P}}} \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{d}{s} U \right) \quad (3.16)$$

$$Q = \frac{N_{\text{P}}}{l_{\text{P}}} \int_{z_{\text{P1}}}^{z_{\text{P2}}} \left( \frac{N_{\text{P}} A}{l_{\text{P}}} \left( \varepsilon - \frac{d^2}{s} \right) U + A \frac{d}{s} \frac{\partial h}{\partial z} \right) dz \quad (3.17)$$

Die Spannung ist, wie bereits beschrieben, über der gesamten Aktorlänge gleich groß. Wenn zudem die Materialparameter und die Querschnittsfläche des Aktors Konstanten sind, ist das Integral in der Gleichung (3.17) leicht lösbar.

$$\varrho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^3 h}{\partial z^2 \partial t} = f - \frac{N_P}{l_P} \frac{d}{s} \frac{\partial}{\partial z} U \quad (3.18)$$

$$Q = \frac{A N_P^2}{l_P} \left( \varepsilon - \frac{d^2}{s} \right) U + \frac{A N_P}{l_P} \frac{d}{s} (h|_{z=z_{P2}} - h|_{z=z_{P1}}) \quad (3.19)$$

Für die meisten piezoelektrischen Stapelaktoren treffen diese Annahmen zu, so daß an dieser Stelle mit den Gleichungen (3.18) und (3.19) ein verteiltparametrischer Ansatz für das Gros der Stapelaktoren vorliegt. In der Gleichung (3.18) wird besonders deutlich, daß in einem piezoelektrischen Stapelwandler mechanische Wellen gedämpft ausbreitungsfähig sind, wobei die Anregung nicht nur durch von außen angreifende Kräfte erfolgt, sondern auch an den Stirnflächen des Aktors mittels einer elektrischen Spannung. In ähnlicher Form sind die Gleichungen (3.18) und (3.19) auch in [Waue97] zu finden.

Nachdem nun für den Aktor eine verteiltparametrische Beschreibung vorliegt, gilt es jetzt, sich der übrigen Injektormechanik zu widmen. Wie anhand des Injektoraufbaus in der **Abbildung 3.1** ersichtlich ist, bestehen das Aktorgehäuse und die Injektornadel aus Stahl. Eine Feder dient dazu, den Injektor ausreichend schnell schließen zu können. Alle diese Bauteile lassen sich ebenfalls als Körper ansehen, in denen sich die mechanischen Druckwellen fortpflanzen, allerdings ohne piezoelektrische Anregung. Hier gelte deshalb die inhomogene gedämpfte Wellenausbreitung

$$A\varrho \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( AY \frac{\partial h}{\partial z} + A\eta \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial t} \right) = Af \quad (3.20)$$

mit dem YOUNG'schen Modul  $Y$ .

Nicht alle Bauteile des Injektors sind kraftschlüssig, sondern einige nur formschlüssig verbunden. So ist der Aktor zwischen dem Hydraulikkolben und der Ventilnadel durch die Vorspannkraft der Rohrfeder eingeklemmt, die Rückstellfeder liegt lose zwischen Gehäuse und Ventilnadel, und auch der Hydraulikkolben ist innerhalb seiner Kammer beweglich, solange er nicht an die Gehäusewand stößt. Obwohl angrenzende Bauteile sich im geschlossenen Zustand berühren, ist es je nach Betriebszustand und Ansteuerung des Injektors möglich, daß sie sich voneinander lösen. Dieser Umstand erfordert es, die Bauteile separat durch partielle Differentialgleichungen zu beschreiben, deren Randbedingungen hart nichtlinear vom Zustand des Modells abhängig sind.

Spätestens an dieser Stelle wird deutlich, daß es nicht zweckmäßig ist, die partiellen Differentialgleichungen analytisch lösen zu wollen, wenn dies bei den auftretenden nichtlinearen Randbedingungen überhaupt möglich ist. Stattdessen bietet es sich vielmehr an, aus der verteiltparametrischen Ersatzanordnung mittels Ortsdiskretisierung ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu entwickeln, welches dann im Zeitbereich numerisch lösbar ist. Ist dabei sowohl die zeitliche als auch die örtliche Schrittwerte der Diskretisierung hinreichend klein, so verhält sich das gewonnene konzentriertparametrische Modell nahezu wie der ursprüngliche verteiltparametrische Ansatz.

Zur Ortsdiskretisierung wird häufig das Differenzenverfahren verwendet, bei dem die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten genähert werden [Foel94] [BSMM01]. Die Ortsdiskretisierung der Gleichungen (3.16), (3.17) und (3.20) nach dem Differenzenverfahren erweist sich jedoch als problematisch. In der Abbildung 3.9 ist zu erkennen, daß die Querschnittsfläche  $A$  eine nichtstetige Funktion des Ortes ist, wie beispielsweise an der Stelle der Nadel, die eine Lose mit dem Ventil Sitz bildet. An diesen Stellen ist das Argument des Differentialoperators nicht eindeutig definiert und damit auch keine Diskretisierung möglich. Dennoch wäre gerade dort die Einführung eines konzentrierten Zustands erforderlich, um die nichtlineare Randbedingung berücksichtigen zu können.

Einen Ausweg bietet die finite Integrationstechnik [Mark98], bei der die Diskretisierung einer Funktion  $\varphi(z)$  mit einer gebietsweisen Mittelwertbildung

$$\varphi(z) \approx \bar{\varphi}(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} \varphi(z) dz$$

über der Schrittweite  $\Delta z$  der Ortsdiskretisierung einhergeht. Dadurch wird aus  $\varphi(z)$  eine stetige Funktion  $\bar{\varphi}(z)$ , auf welche dann ein Differenzenverfahren angewendet werden kann. Bei der Wahl von  $\Delta z$  ist zu beachten, daß die gebietsweise Mittelwertbildung der finiten Integration bei der ungedämpften Wellengleichung (und damit auch bei der ungedämpften partiellen Differentialgleichung für Piezoaktoren) im Frequenzbereich einer tiefpaßfilternden Faltung mit einer Rectangular-Funktion gleicht. Um mit der konzentrierten Ersatzanordnung einen gewünschten Frequenzbereich untersuchen zu können, muß demnach sichergestellt sein, daß sowohl die zeitliche als auch die örtliche Diskretisierung hinreichend klein gewählt sind.

Mit dem äquidistanten Gitter  $z_k = z_0 + k \cdot \Delta z$  und dem dagegen um einen halben Schrittweite verschobenen Hilfsgitter  $z'_k = z_0 + (k + \frac{1}{2}) \cdot \Delta z$  ergibt die finite Integration der Gleichungen (3.16) und (3.17) unter Verwendung der Differenzenquotienten

$$\frac{\partial \varphi(z_k)}{\partial z} \approx \frac{\bar{\varphi}(z'_k) - \bar{\varphi}(z'_{k-1})}{\Delta z} \quad \frac{\partial \varphi(z'_k)}{\partial z} \approx \frac{\bar{\varphi}(z_{k+1}) - \bar{\varphi}(z_k)}{\Delta z}$$

das gesuchte System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die  $h(z_k)$ .

$$\begin{aligned} & \bar{A} \varrho(z_k) \frac{d^2 h(z_k)}{dt^2} - \frac{\bar{A} \eta(z'_k)}{\Delta z^2} \frac{dh(z_{k+1})}{dt} + \frac{\bar{A} \eta(z'_k) + \bar{A} \eta(z'_{k-1})}{\Delta z^2} \frac{dh(z_k)}{dt} \\ & - \frac{\bar{A} \eta(z'_{k-1})}{\Delta z^2} \frac{dh(z_{k-1})}{dt} - \frac{\bar{A} s^{-1}(z'_k)}{\Delta z^2} h(z_{k+1}) + \frac{\bar{A} s^{-1}(z'_k) + \bar{A} s^{-1}(z'_{k-1})}{\Delta z^2} h(z_k) \\ & - \frac{\bar{A} s^{-1}(z'_{k-1})}{\Delta z^2} h(z_{k-1}) = \bar{A}(z_k) \bar{f}(z_k) - \frac{N_P}{l_P} \frac{\bar{A} ds^{-1}(z'_k) - \bar{A} ds^{-1}(z'_{k-1})}{\Delta z} U \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.22)

$$Q = \frac{N_P^2 \Delta z}{l_P^2} \sum_{k=k_{P1}}^{k_{P2}} \overline{A(\varepsilon - d^2 s^{-1})}(z'_k) U + \frac{N_P}{l_P} \sum_{k=k_{P1}}^{k_{P2}} \overline{A ds^{-1}}(z'_k) (h(z_{k+1}) - h(z_k))$$

Die hier angegebenen Gleichungen sind die mathematischen Formulierungen gekoppelter gedämpfter Feder-Masse-Schwinger, welche sowohl durch von außen angreifende Kräfte  $\bar{f}(z_k)$  als auch durch eine über der Anordnung konstante elektrische Spannung  $U$  angeregt werden. Um anstatt der Spannung die Ladung  $Q$  als Modelleingang zu verwenden, ist die Gleichung (3.22) nach  $U$  aufzulösen und in die Gleichung (3.21) einzusetzen.

Auf analoge Weise ist auch die partielle Wellengleichung (3.20) der übrigen Bauteile des Injektors Ortsdiskretisierbar. Das Ergebnis entspricht der Gleichung (3.21) mit  $s^{-1} = Y$  und  $d = 0 \frac{m}{V}$ . In die so erhaltenen Differentialgleichungssysteme lassen sich ebenfalls die konzentrierte Rohrfeder sowie die Bauteilreibungen integrieren.

Noch ist ungeklärt, wie die zustandsabhängigen Randbedingungen der partiellen Differentialgleichungen mathematisch zu formulieren sind und wie eine Integration der Differentialgleichungssysteme erfolgen kann. Prinzipiell ist es zwar wieder möglich, die Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen in eine Zustandsraum-schreibweise zu übertragen und dort für ein Zeitintervall  $T$  zu lösen. Wie aber schon bei dem konzentriertparametrischen Modell beschrieben wurde, führt jede Lose der Ersatzanordnung zu einer Fallunterscheidung zwischen einzelnen Zustandsraummodellen. Bei den 6 Losen der verteilten Ersatzanordnung sind dies insgesamt 64 verschiedene Kombinationen aus 31 spezifischen Differentialgleichungssystemen unterschiedlicher Größe. Ein einziges Zustandsraummodell hingegen, in dem alle Nichtlinearitäten der Randbedingungen analytisch enthalten sind, ist nur mit einem hohen Aufwand numerisch lösbar.

Praktikabler ist es dagegen, die Systeme der einzelnen Bauteile zunächst so zu formulieren, daß sich alle Bauteile unabhängig von einander bewegen. Die Gleichungssysteme der einzelnen Bauteile sind dann für ein Zeitintervall  $T$  sehr einfach lösbar. Stellt sich während der Simulation am Ende eines Zeitintervalls bei  $t = t_i$  heraus, daß sich zwei Bauteile berühren oder in der Berechnung bereits ineinander eingedrungen sind, dann sind die Positionen und Geschwindigkeiten der Randmassen in geeigneter Weise zu korrigieren, bevor das nächste Zeitintervall simuliert wird.

$$v_A(z_{A2}, t_i^+) = v_A(z_{A2}, t_i^-) + \Delta v_A \quad (3.23)$$

$$v_B(z_{B1}, t_i^+) = v_B(z_{B1}, t_i^-) + \Delta v_B \quad (3.24)$$

$$h_A(z_{A2}, t_i^+) = h_A(z_{A2}, t_i^-) + \Delta h_A \quad (3.25)$$

$$h_B(z_{B1}, t_i^+) = h_B(z_{B1}, t_i^-) + \Delta h_B \quad (3.26)$$

$h_A(z_{A2}, t_i^-)$  und  $v_A(z_{A2}, t_i^-)$  sind hier die unkorrigierten Positionen und Geschwindigkeiten des rechten Endes eines Bauteils A,  $h_B(z_{B1}, t_i^-)$  und  $v_B(z_{B1}, t_i^-)$  die des linken Endes eines Bauteils B.

Je nachdem, ob sich die Bauteile tatsächlich unabhängig bewegen, ob sie im letzten Zeitintervall aufeinander gestoßen sind oder ob sie sich gegenseitig berührend gemeinsam bewegen, fällt die Korrektur unterschiedlich aus: Berühren sich die Bauteile nicht, so ist auch keine Korrektur erforderlich ( $\Delta v_A = \Delta v_B = \Delta h_A = \Delta h_B = 0$ ), denn dies entspricht dem Fall, für den die Differentialgleichungssysteme im Zeitbereich aufgestellt und gelöst sind. Sind die Bauteile im letzten Zeitintervall aufeinander gestoßen ( $h_A(z_{A2}, t_i^-) < h_B(z_{B1}, t_i^-)$ ), ist ein möglicher Korrekturansatz die Nachbildung eines zentralen elastischen Stoßes der beiden Randmassen [Heri92].

$$\begin{aligned}\Delta v_A &= \frac{2m_B(z_{B1})}{m_A(z_{A2}) + m_B(z_{B1})} (v_B(z_{B1}, t_i^-) - v_A(z_{A2}, t_i^-)) \\ \Delta v_B &= \frac{2m_A(z_{A2})}{m_A(z_{A2}) + m_B(z_{B1})} (v_A(z_{A2}, t_i^-) - v_B(z_{B1}, t_i^-)) \\ \Delta h_A &= \frac{h_A(z_{A2}, t_i^-) - h_B(z_{B1}, t_i^-)}{v_A(z_{A2}, t_i^-) - v_B(z_{B1}, t_i^-)} (v_A(z_{A2}, t_i^+) - v_A(z_{A2}, t_i^-)) \\ \Delta h_B &= \frac{h_A(z_{A2}, t_i^-) - h_B(z_{B1}, t_i^-)}{v_A(z_{A2}, t_i^-) - v_B(z_{B1}, t_i^-)} (v_B(z_{B1}, t_i^+) - v_B(z_{B1}, t_i^-))\end{aligned}$$

Haben die Bauteile bereits zu Beginn der Simulation Kontakt und entfernen sich nicht während eines Zeitintervalls, so ist eine andere Korrektur erforderlich, beispielsweise die des zentralen inelastischen Stoßes.

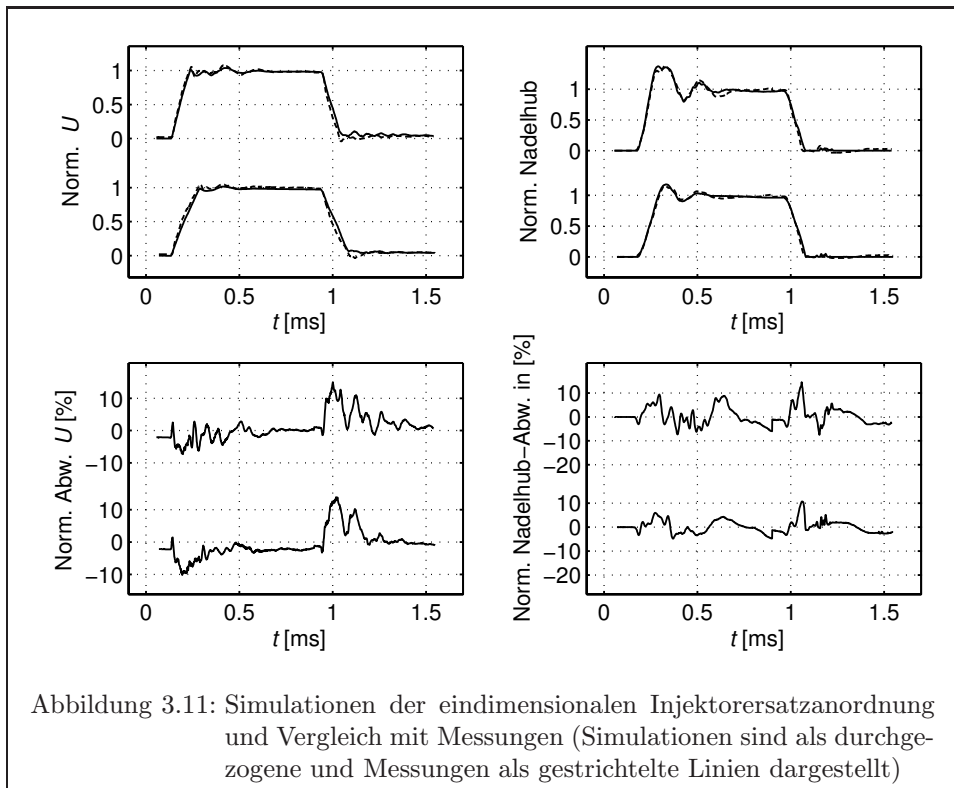
$$\begin{aligned}\Delta v_A &= \frac{m_B(z_{B1})}{m_A(z_{A2}) + m_B(z_{B1})} (v_B(z_{B1}, t_i^-) - v_A(z_{A2}, t_i^-)) \\ \Delta v_B &= \frac{m_A(z_{A2})}{m_A(z_{A2}) + m_B(z_{B1})} (v_A(z_{A2}, t_i^-) - v_B(z_{B1}, t_i^-)) \\ \Delta h_A &= \frac{m_B(z_{B1})}{m_A(z_{A2}) + m_B(z_{B1})} (h_B(z_{B1}, t_i^-) - h_A(z_{A2}, t_i^-)) \\ \Delta h_B &= \frac{m_A(z_{A2})}{m_A(z_{A2}) + m_B(z_{B1})} (h_A(z_{A2}, t_i^-) - h_B(z_{B1}, t_i^-))\end{aligned}$$

Die Näherungslösung der partiellen Differentialgleichungen (3.16) und (3.20) für die oben beschriebene Ersatzanordnung setzt sich somit aus den für ein Zeitintervall gelösten Differentialgleichungssystemen (3.21) zuzüglich der konzentrierten Bauteile und den zustandsabhängigen Korrekturen (3.23) bis (3.26) zusammen.

Wie gut ein solches Modell die Realität wiederzugeben vermag, veranschaulicht die **Abbildung 3.11**. Simuliert wurde ein Modell mit insgesamt 120 Zuständen, was einer Ortsdiskretisierung der Ersatzanordnung von  $\Delta z = 2\text{mm}$  entspricht. Die Abweichungen zwischen dem simulierten und dem gemessenen Nadelhub sind hier mit bis zu 14 Prozent jetzt nur noch halb so groß wie die der konzentrierten Modelle. Somit ist die Überlegung bestätigt, daß durch eine verteiltparametrischen Modellansatz das mechanische Verhalten besser abgebildet wird.

Außerdem ist zu beobachten, daß die berechnete Aktorspannung noch immer Abweichungen von bis zu 15 Prozent aufweist. Es stellt sich also die Frage, ob es ähnlich wie schon in den vorherigen Unterkapiteln auch hier wieder der elektrischen Modellgenauigkeit zugute kommt, die Wandlerhysterese im Modell zu berücksichtigen.





### 3.6 Verteilparametrische Ersatzanordnung mit Hysterese

In diesem Kapitel wird das verteilparametrische Modell des vorherigen Kapitels mit einer verteilten Wandlerhysterese kombiniert und im Zeitbereich gelöst. Der Vergleich mit Messungen zeigt wieder die auf diese Weise erzielbare Modellgenauigkeit.

In dem vorangegangenen Unterkapitel wurde bereits erläutert, daß sich schon die linearen partiellen Differentialgleichungen (3.18) und (3.20) aufgrund der mechanischen Losen kaum für eine analytische Lösung eignen, weshalb die Simulation numerisch zu erfolgen hat. Umso mehr gilt dies für die nichtlineare partielle Differentialgleichung des hysteresebehafteten Stapelaktors. Während in einem konzentrierten Hystereseoperator lediglich einzelne Reibelemente oder Merkervariablen die Zeitabhängigkeit prägen, sind dies im verteilten Falle gar Reib- oder Merkerfunktionale. Eine solche partielle Differentialgleichung ist nur noch numerisch durch eine Orts- und Zeitdiskretisierung lösbar, wodurch dann wieder diskrete Hystereseoperatoren entstehen.

Dieser Gedanke legt den Schluß nahe, für eine verteiltparametrische hysteresebehaftete Ersatzanordnung den linearen piezoelektrischen Ansatz in dem Gleichungssystem (3.21) und (3.22) durch einen geeigneten nichtlinearen zu ersetzen. Wie schon für das konzentriertparametrische Modell in Kapitel 3.4 wird auch hier wieder der inverse erweiterte Hystereseoperator nach DAHL und WILDER aus der Gleichung (2.26) verwendet. Ein Koeffizientenvergleich zwischen den Gleichungen (2.30) bis (2.32) der nichtlinearen Piezoelektrizität und den Differentialgleichungen (3.21) und (3.22) ergibt das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
& \overline{A\varrho}(z_k) \frac{d^2 h(z_k)}{dt^2} + \frac{\overline{A\eta}(z'_k) + \overline{A\eta}(z'_{k-1})}{\Delta z^2} \frac{dh(z_k)}{dt} \\
& - \frac{\overline{A\eta}(z'_k)}{\Delta z^2} \frac{dh(z_{k+1})}{dt} - \frac{\overline{A\eta}(z'_{k-1})}{\Delta z^2} \frac{dh(z_{k-1})}{dt} - \frac{\overline{A(s^P)^{-1}}(z'_k)}{\Delta z^2} h(z_{k+1}) \\
& + \frac{\overline{A(s^P)^{-1}}(z'_k) + \overline{A(s^P)^{-1}}(z'_{k-1})}{\Delta z^2} h(z_k) - \frac{\overline{A(s^P)^{-1}}(z'_{k-1})}{\Delta z^2} h(z_{k-1}) \\
& = \overline{A}(z_k) \overline{f}(z_k) - \frac{\overline{A k^\sigma (s^P)^{-1}}(z'_k)}{\Delta z} P(z'_k) + \frac{\overline{A k^\sigma (s^P)^{-1}}(z'_{k-1})}{\Delta z} P(z'_{k-1}) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

mit der diskretisierten Polarisationsverteilung

$$\begin{aligned}
P(z'_k) &= \Gamma^{-1} \left( \frac{N_P}{l_P} U + \overline{k^E (s^P)^{-1}}(z'_k) \frac{h(z_{k+1}) - h(z_k)}{\Delta z}, t, \underline{\hat{\theta}} \right) \quad (3.28) \\
&\text{mit } \underline{\hat{\theta}}_4 = \theta_4 + \overline{k^\sigma k^E (s^P)^{-1}}(z'_k)
\end{aligned}$$

und der Gesamtladung des Aktors

$$Q = \frac{N_P^2 \Delta z}{l_P^2} \sum_{k=k_{P1}}^{k_{P2}} \overline{A\varepsilon^P}(z'_k) U + \frac{N_P \Delta z}{l_P} \sum_{k=k_{P1}}^{k_{P2}} \overline{A}(z'_k) P(z'_k) \quad (3.29)$$

Diese Gleichungen beschreiben eine ortsdiskrete Ersatzanordnung für einen hysteresebehafteten piezoelektrischen Wandler, welcher durch eine elektrische Spannung angeregt wird.

Auch dieses Modell läßt sich so umformulieren, daß anstelle der Spannung die Gesamtladung des Aktors als Modelleingang fungiert. Dazu muß das Modell aus der gegebenen Gesamtladung die einzelnen diskreten Teilladungen berechnen, wobei an allen einzelnen Scheiben des Aktors stets die gleiche Spannung anliegt. Aus einer gegebenen Änderung der Gesamtladung ist demnach die Änderung der Aktorspannung zu bestimmen.

Ein Auflösen der Gleichung (3.29) nach  $U$  mit anschließender zeitlicher Ableitung ergibt

$$\frac{dU}{dt} = \frac{l_P}{N_P \sum_{k=k_{P1}}^{k_{P2}} \overline{A\varepsilon^P}(z'_k)} \left( \frac{l_P}{N_P \Delta z} \frac{dQ}{dt} - \sum_{k=k_{P1}}^{k_{P2}} \overline{A}(z'_k) \frac{dP(z'_k)}{dt} \right) \quad (3.30)$$

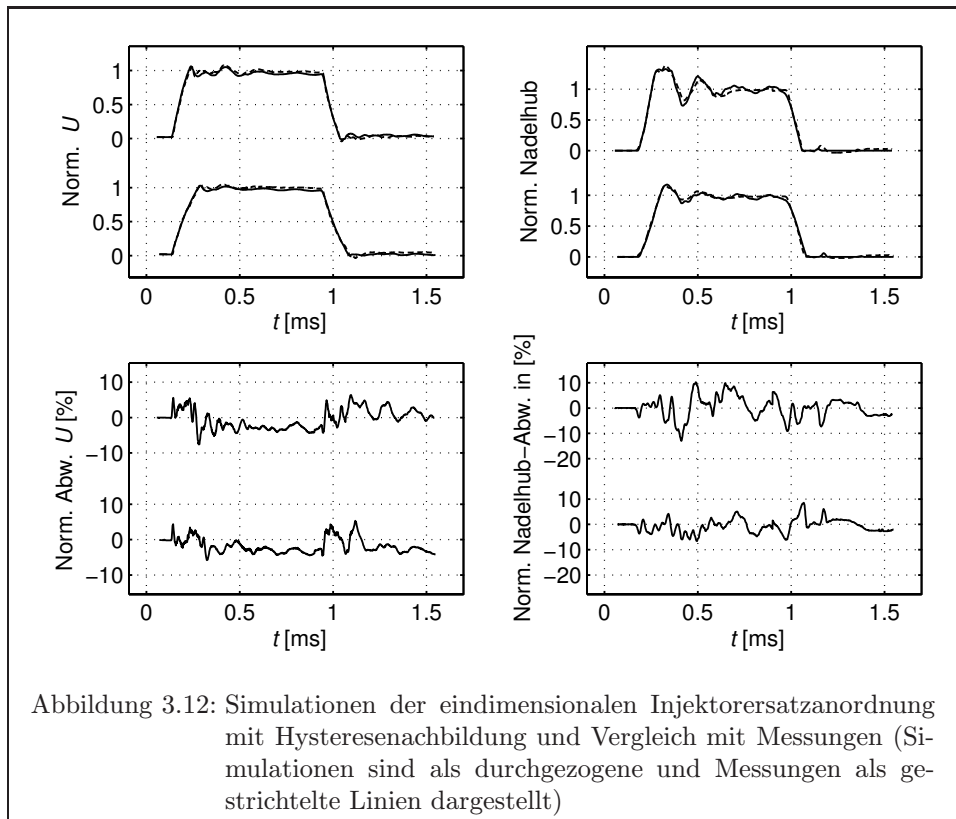
Dabei sind die  $\frac{dP(z'_k)}{dt}$  wiederum von  $\frac{dU}{dt}$  abhängig, wie die Differentialgleichung des Hystereseeoperators in der Gleichung (3.28) zeigt.

$$\begin{aligned} \frac{N_P}{l_P} \frac{dU}{dt} + \overline{k^{E(s^P)^{-1}}(z'_k)} \frac{d}{dt} \frac{h(z_{k+1}) - h(z_k)}{\Delta z} = & \quad (3.31) \\ \left[ \theta_1 \left( 2 - \frac{1}{\theta_2} \operatorname{sign} \left( \frac{dP(z'_k)}{dt} \right) \right) \left( \frac{N_P}{l_P} (U - U^{\text{Merk}}) - \theta_4 (P(z'_k) - P^{\text{Merk}}(z'_k)) \right) \right. \\ \left. + \frac{\overline{k^{E(s^P)^{-1}}(z'_k)}}{\Delta z} \left( h(z_{k+1}) - h^{\text{Merk}}(z_{k+1}) - h(z_k) + h^{\text{Merk}}(z_k) \right) \right]^{\theta_3} + \theta_4 \frac{dP(z'_k)}{dt} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.30) und (3.31) sind ein implizites und unstetig nichtlineares Differentialgleichungssystem für  $P(z'_k)$  und  $U$  in Abhängigkeit von den Zuständen der Positionen  $h(z_k)$ , der Geschwindigkeiten  $\frac{dh(z_k)}{dt}$  sowie von dem Modelleingang  $Q$ . Zwar stimmt darin die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten überein, aber im allgemeinen ist ein System dieser Art trotzdem nicht notwendigerweise eindeutig lösbar. Für den hier vorliegenden speziellen Fall läßt sich jedoch zeigen, daß zu jedem Zeitpunkt genau eine Lösung existiert. Wird die aus der Definition des Hystereseeoperators resultierende Beschränkung  $\frac{dU}{dP(z'_k)} > 0$  beachtet, so führt eine Strukturanalyse der Koeffizientenmatrix zu dem Schluß, daß das Gleichungssystem unabhängig von den Werten der Signum-Funktionen immer den vollen Rang hat und deshalb immer *mindestens* eine Lösung aufweist. Für den Beweis, daß *maximal* eine Lösung existiert, sei angenommen, daß durch die Signum-Funktion zwei Lösungen  $\frac{dP_1(z'_k)}{dt}$  und  $\frac{dP_2(z'_k)}{dt}$  möglich seien, wobei  $\operatorname{sign} \left( \frac{dP_1(z'_k)}{dt} \right) < \operatorname{sign} \left( \frac{dP_2(z'_k)}{dt} \right)$  gelten möge. Mit den beiden Polarisationsänderungsraten erhält man ebenfalls zwei Anstiegsgeschwindigkeiten der Spannung  $\frac{dU_1}{dt}$  und  $\frac{dU_2}{dt}$ , wobei nach Gleichung (3.30)  $\frac{dU_1}{dt} > \frac{dU_2}{dt}$  und nach Gleichung (3.31)  $\frac{dU_1}{dt} < \frac{dU_2}{dt}$  gelten muß. Durch diesen Widerspruch kann es *maximal* eine Lösung geben. Das implizite Differentialgleichungssystem in den Gleichungen (3.30) und aus (3.31) ist also zu jedem Zeitpunkt eindeutig in ein explizites System überführbar.

Um eine Methode zur Lösung des Gleichungssystems zu finden, ist die Erkenntnis hilfreich, daß sich der Wertebereich der Signum-Funktion auf die Elemente  $\{-1, 0, 1\}$  beschränkt. Mittels einer Fallunterscheidung entstehen damit aus dem einen impliziten und unstetig nichtlinearen Differentialgleichungssystem insgesamt  $3^{(k_{P2} - k_{P1} + 1)}$  explizite Differentialgleichungssysteme, welche mit dem EULERSchen Polygonzugverfahren vergleichsweise einfach zu lösen sind. Ein praktikabler Weg zur numerischen Integration ist also, in jedem Zeitschritt zunächst eine mögliche Kombination der Signum-Funktionswerte auszuwählen und für diese das daraus entstehende explizite Gleichungssystem zu lösen. Bestätigt diese Lösung die zuvor angenommenen Werte der Signum-Funktionen, so ist auch das ursprüngliche implizite System gelöst. Widerspricht die Lösung stattdessen den Annahmen, so sind andere Fälle zu untersuchen, bis das Ergebnis schließlich die Annahmen erfüllt.

In der **Abbildung 3.12** sind die Simulationen der parametrisierten Gleichungen (3.27) bis (3.29) den Messungen aus der Abbildung 3.3 gegenübergestellt; besondere Beachtung findet dabei wieder die Bestimmung des Anfangszustands der Hystereseeoperatoren. Auch hier liegt der Berechnung wieder ein Modell der Ordnung 120 zugrunde. Wie erwartet ist die Abweichung zwischen der simulierten und der berechneten Aktorspannung mit bis zu 9 Prozent deutlich geringer als bei dem vorangegangenen Modell ohne Hysterese, und auch der simulierte Verlauf der Nadelbewegung konnte mit maximalen Abweichungen von nunmehr 11 Prozent etwas besser an den gemessenen angeglichen werden.

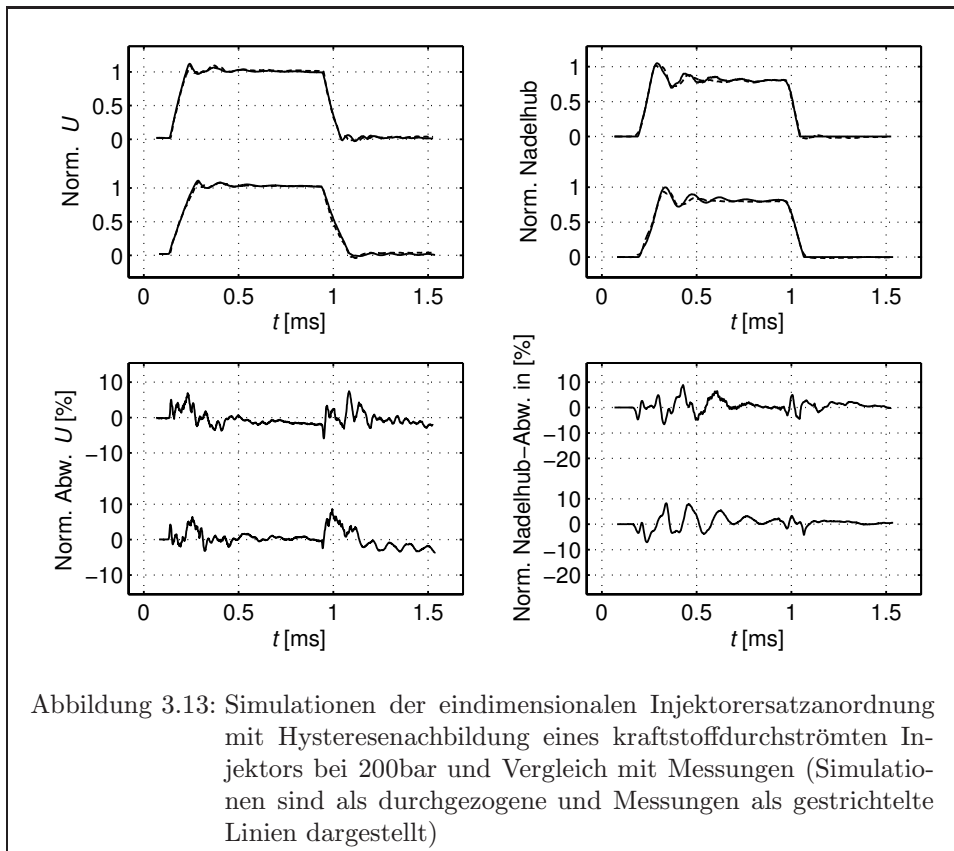


### 3.7 Verteiltparametrische Ersatzanordnung des kraftstoffdurchströmten Injektors mit Hysterese

Aus den Messungen im Unterkapitel 3.2 an einem Injektor mit und ohne Kraftstoffdruck geht hervor, daß die hydraulischen Wechselwirkungen das mechanische Verhalten nur geringfügig beeinflussen. Aus diesem Grund wird in diesem Unterkapitel gezeigt, welche Genauigkeit durch den zuletzt beschriebenen Modellansatz einer trockenen Injektormechanik in Verbindung mit einer für den kraftstoffdurchflossenen Injektor angepaßten Parametrierung erzielbar ist.

Bei dem untersuchten Injektor führt der Kraftstoffdruck zu einem verringerten Nadelhub. Dieses Verhalten läßt sich dadurch erklären, daß die Verhältnisse der hydraulischen Angriffsflächen so gewählt sind, daß durch den Innendruck eine zusätzliche Schließkraft auf die Nadel wirkt. Auch im geöffneten Zustand ergeben sich durch die Strömung des Fluids zusätzliche Kräfte auf die Injektornadel, welche vom Öffnungsquerschnitt des Injektors abhängig sind. Beide Effekte lassen sich in dem mathematischen Modell des Injektors durch geänderte Parameter der Nadelfeder abbilden. Ferner ist die dämpfende Wirkung des Kraftstoffs mittels veränderter Koeffizienten der Bauteilreibungen berücksichtigt.

Neben dem Kraftstoffdruck im Inneren des Injektors wirkt im Motorbetrieb auch der Gasdruck im Zylinder von außen auf die Nadel ein. Bei nicht aufgeladenen OTTO-Motoren variiert der Zylinderdruck während der Kompressionsphase abhängig von der Gasmenge und der momentanen Verdichtung zwischen 0,2bar und 30bar [Kirs01] [Bosc03]. Dieser Druck wirkt einer Öffnung der Ventlnadel des Injektors entgegen.



Da die Angriffsfläche des Drucks aber nur wenige Quadratmillimeter groß ist, beeinflussen die resultierenden Schließkräfte in der Größenordnung von 10N das Injektorverhalten nur sehr wenig. Zudem führt gerade die Entdrosselung des Motors im geschichteten Betrieb dazu, daß sich die Luftmenge im Zylinder zum Zeitpunkt der momentenbildenden Einspritzung je nach Betriebspunkt nur in geringem Maße ändert, und auch der Zeitpunkt der Einspritzung ist bis auf wenige Grad Kurbelwinkel stets gleich. Aus diesem Grund ist der Gasgegendruck auf den Injektor im Motorbetrieb nahezu konstant und erfordert deshalb keine Berücksichtigung als Modelleingang oder als Störgröße.

In der **Abbildung 3.13** sind wieder die simulierten Ergebnisse der parametrisierten Gleichungen (3.27) bis (3.29) zwei Messungen gegenübergestellt, allerdings an dieser Stelle denen des durchflossenen Injektors aus der Abbildung 3.4. Während die simulierte Spannung des Aktors wiederum um maximal 9 Prozent von der gemessenen abweicht, sind die Fehler der berechneten Nadelbewegung von maximal 9 Prozent sogar noch etwas geringer als die Modellfehler des trocken betriebenen Injektors in der Abbildung 3.12.

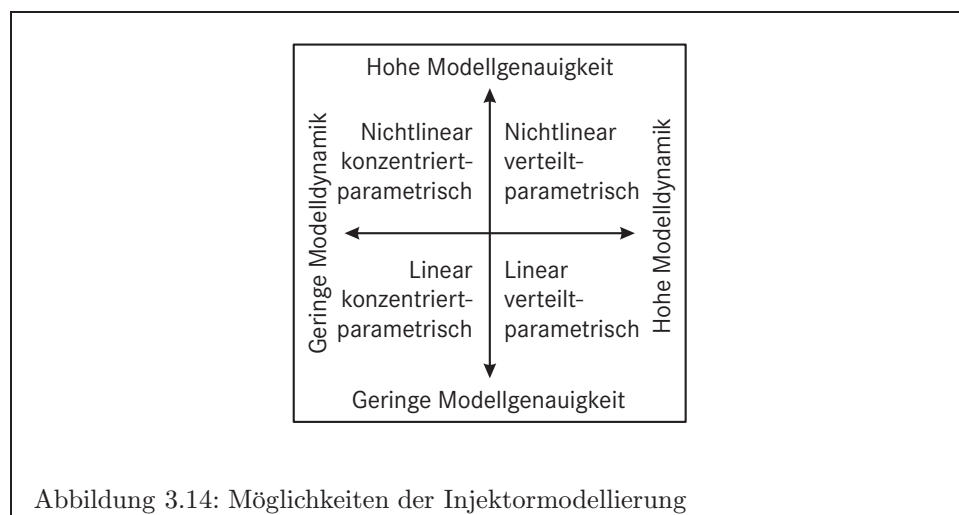
Die Ähnlichkeit zwischen den Messungen und den Simulationsergebnissen bestätigt die Annahme, daß die hydraulischen Effekte nur einen untergeordneten Einfluß auf das Verhalten des Injektors haben. Mit den Gleichungen (3.27) bis (3.29) läßt sich demnach bei geeigneter Parametrierung die Kinetik der Injektormechanik sowohl rein mechanisch ohne Kraftstoff als auch im Normalbetrieb unter Kraftstoffdruck berechnen.

### 3.8 Ergebnisse und Überleitung

In diesem Kapitel wurde das reale elektromechanische Verhalten des Injektors auf verschiedene mechanische Ersatzmodelle zurückgeführt, welche anschließend mathematisch formuliert wurden. Die erhaltenen mathematischen Gleichungssysteme unterscheiden sich zum einen hinsichtlich der Modellierung der mechanischen Injektoraufbaus als konzentrierte oder als verteilte Massen und zum anderen durch das verwendete Aktormodell, wie die **Abbildung 3.14** verdeutlicht. Insbesondere die Nachbildung der schaltenden Streckendynamik als Fallunterscheidung und die Hysteresenachbildung im verteiltparametrischen Ansatz heben sich dabei von den bisher veröffentlichten Injektormodellen ab. Ein Vergleich zwischen Messungen und Simulationen der Modelle ergibt, daß sich die Berücksichtigung der Wandlerhysterese bei der hier behandelten Anwendung insbesondere in der simulierten Aktorspannung auswirkt, während die Modellierung der Bauteile des Injektors als verteiltparametrisches System mit formschlüssigen Verbindungen der mechanischen Modellgenauigkeit zugute kommt. Die erzielten Simulationsergebnisse weichen um weniger als 10 Prozent der Nennwerte von dem gemessenen Streckenverhalten ab.

Bei den beschriebenen verteiltparametrischen Modellen besteht die Problematik weniger in der Berechnung des Modells als vielmehr in der Parametrierung. Von den insgesamt etwa 40 Materialkonstanten, Bauteilabmessungen, Reibbeiwerten und Vorspannkräften ist nur grob die Hälfte direkt messbar, und die Nichtlinearitäten der Strecke und des Modells erschweren den Einsatz von Parameteridentifikationsverfahren. Die nicht meßbaren Modellparameter sind deshalb mittels einer Simulation im Rechnerdialog zu bestimmen. Darüber hinaus ist zu beachten, daß insbesondere die Bauteilreibungen in der Realität weit komplexer sind als hier modelliert, wodurch zusätzliche Modellfehler entstehen.

Als Abschluß der Modellbildung und Überleitung zu dem nächsten Kapitel soll das zuletzt beschriebene verteiltparametrische Modell mit Hysteresenachbildung einen Einblick in die mechanischen Abläufe im Inneren des Injektors gewähren. Die **Abbildung 3.15** zeigt dazu zwei Simulationen von Einspritzvorgängen. Die Öffnungs- und die Schließzeiten betragen in den oberen Graphen jeweils  $100\mu\text{s}$  und in den unteren jeweils  $150\mu\text{s}$ .



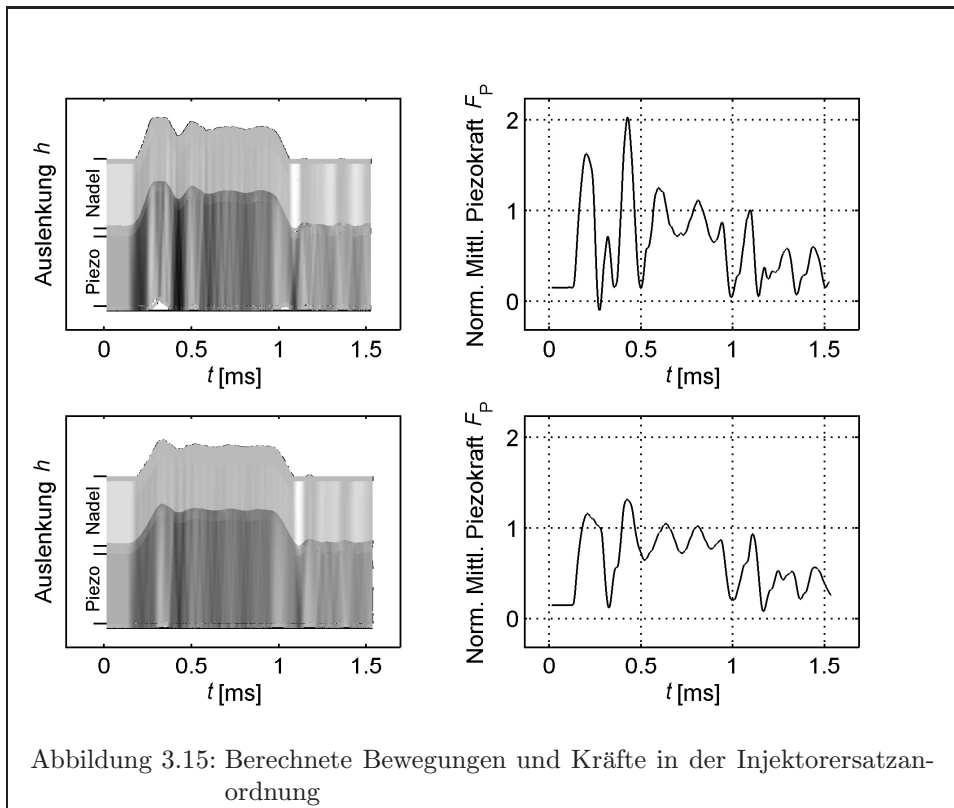


Abbildung 3.15: Berechnete Bewegungen und Kräfte in der Injektorsatzanordnung

Auf der linken Seite ist für die beiden bekannten Ansteuerverläufe die Druckspannung in der bewegten Injektormechanik als Funktion des Ortes aufgetragen; je größer die Druckspannung ist, umso dunkler ist die Schattierung. Von unten nach oben ist der Druck in dem Hydraulikkolben, dem Piezoaktor, der Fußplatte, der Ventlnadel und dem Ventilteller in ihrer ausgelenkten Position aufgetragen, wobei die Auslenkungen für die Darstellung stark vergrößert dargestellt sind. Die rechte Seite zeigt jeweils die über den Ort gemittelte Druckkraft in der Piezokeramik.

Bei den beiden Einspritzvorgängen ist zu erkennen, daß das Öffnen des Injektors durch einen Anstieg der Druckspannung im Aktor eingeleitet wird. Je nach Geschwindigkeit des Ladungsanstiegs regt dies mehr oder weniger große Schwingungen in den beweglichen Injektorbauteilen an, welche im ungünstigen Fall dazu führen, daß der Aktor an seiner Fußplatte den Kontakt zum Gehäuse verliert, um wenig später auf dem Gehäuse wieder aufzuschlagen. Auch im geöffneten Zustand bleibt die Injektormechanik ständig in Bewegung — selbst dann noch, wenn sich der Aktor bereits zum Schließen des Ventils kontrahiert. Erfolgt dabei die Entladung zu schnell, so verliert auch hier der Aktor wieder die Bodenhaftung. Obwohl das Ventil nach dem Entladen des Aktors in den geschlossenen Zustand übergeht, sind die mechanischen Bestandteile des Ventils dann noch lange nicht in der Ruhelage angekommen.

Die mechanischen Belastungen, denen das Ventil bei den abgebildeten Einspritzvorgängen unterliegt, sind also größer, als sie zum Betrieb des Ventils erforderlich sind. Wie das Ventil in einer besser geeigneten Art und Weise geöffnet und geschlossen werden kann, wird im folgenden Kapitel erklärt.





## Kapitel 4

# Optimale Steuerung des Injektors

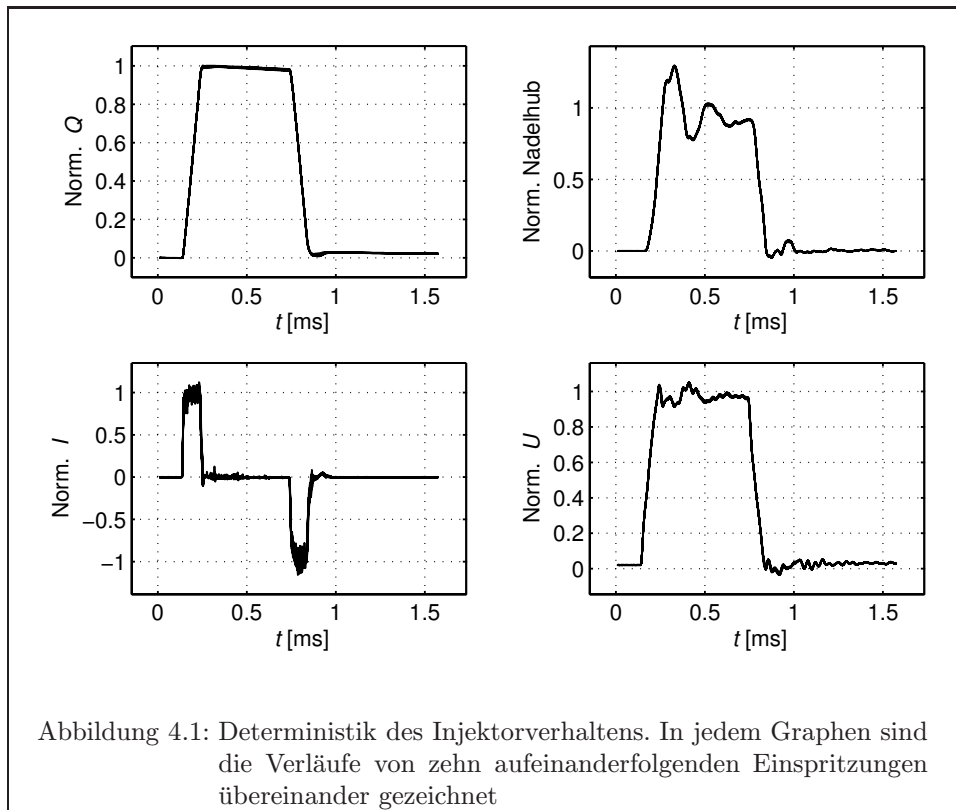
Mit den im vorangehenden Kapitel vorgestellten Möglichkeiten der Modellierung piezoelektrisch aktiver Injektoren ist der Entwickler in der Lage, die Auswirkungen einer elektrischen Ansteuerung auf das elektromechanische Verhalten vorherzusagen. In diesem Kapitel wird dieses Wissen ausgenutzt, um zeitliche Ansteuerungsverläufe zu bestimmen, welche das Ventil in möglichst kurzer Zeit und bei möglichst geringer mechanischer Belastung öffnen und schließen. Zuletzt wird eine Endstufentopologie beschrieben, welche in der Lage ist, den gefundenen Ansteuerungsverlauf elektrisch umzusetzen. Einige Messungen an einem entsprechend angesteuerten Injektor dienen schließlich dazu, die entwickelte Vorgehensweise zu bewerten.

Vor einer tiefergehenden Erörterung der regelungstechnischen und elektrischen Details einer optimalen Ansteuerung gelten noch einige grundsätzliche Vorüberlegungen der Vorgehensweise der Entwicklung und der erforderlichen Struktur der Implementierung.

### 4.1 Vorüberlegungen

Eine optimale Ansteuerung des Injektors kann entweder mittels einer Steuerung oder mittels einer Regelung erfolgen. Während eine Steuerung für die Zielerreichung zumeist einen bestimmten Anfangszustand der Strecke voraussetzt und eventuelle Störungen oder Stellfehler das Ergebnis empfindlich beeinträchtigen können, erreicht die Regelung einen gewünschten Zustand trotz unbekannter Startwerte und wirkt dabei äußeren Störeinflüssen entgegen. Dazu benötigt sie aber zusätzliche Meßdaten von der Strecke, die innerhalb einer zulässigen Reaktionszeit in eine entsprechende Stellgröße umzurechnen sind. Es ist daher zu klären, ob die Zielsetzung einer optimalen Ansteuerung durch eine Steuerung des Injektors erreichbar ist oder ob dazu eine Regelung mit einer entsprechenden Sensorik vonnöten ist.

Inwieweit das Injektorverhalten durch variierende Anfangszustände oder äußere Störeinflüsse beeinflusst wird, zeigt die **Abbildung 4.1** anhand zehn aufeinanderfolgender Ansteuerungen eines Injektors, bei denen er jeweils innerhalb etwa  $100\mu\text{s}$  auf eine elektrische Sollladung aufgeladen und wenig später wieder entladen wird. Oben links ist die normierte Ladung des piezoelektrischen Aktors, darunter der Aktorstrom aufgetragen. Die rechts oben dargestellten Hubmessungen der Injektornadel



belegen, daß die Schwingungen der Injektormechanik eine weitgehend deterministische Reaktion auf die elektrische Ansteuerung sind. Auch der rechte untere Graph der gemessenen Aktorspannung verdeutlicht, daß der Injektor auf gleiche elektrische Ansteuerungen mechanisch und elektrisch stets vergleichbar reagiert. Offensichtlich ist also der Zustand des Injektors zu Beginn einer Einspritzung sehr genau festgelegt, und äußere Störeinflüsse sind zu gering, um das Injektorverhalten nennenswert zu beeinträchtigen. Demnach ist keine zusätzliche Sensorik für eine Regelung erforderlich und es reicht völlig aus, den Injektor zu steuern, um ein gewünschtes Öffnungs- und Schließverhalten zu bewirken.

Vor der Suche nach einem optimalen Ansteuerungsverlauf ist eine geeignete Stellgröße für den Injektor zu wählen. Die Verfügbarkeit leistungsstarker, breitbandiger und genauer Spannungsquellen hat die vielfältige Verwendung piezoelektrischer Aktoren sicherlich begünstigt, und nach wie vor ist die Hubsteuerung mittels der Aktorspannung ein etabliertes Verfahren [CrSD01], [Dirs00], [Pief01]. Dem steht gegenüber, daß der Aktorhub stärker mit der Aktorladung korreliert als mit der Aktorspannung [Fläm97], [MaGa97]. Dies gilt nicht nur hinsichtlich der Wandlerhysterese (siehe dazu die Abbildung 2.10) und den damit verbundenen Kriechprozessen [KoSK99], sondern auch in Bezug auf Alterungs- und Temperatureffekte [KoSK99], [Schu01], [PKSM04]. Eine Ladungssteuerung wird also eine geringere Streuung des Injektorverhaltens zur Folge haben als eine Spannungssteuerung. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Aktorladung als Stellgröße verwendet.

Die Optimierung des zeitlichen Lade- und Entladevorgangs ist ein dynamisches Optimierungsproblem, für dessen Lösung prinzipiell verschiedene Verfahren entwickelt wurden, wie beispielsweise das HAMILTON-Verfahren oder die dynamische Programmierung nach BELLMANN. Diesen Lösungsverfahren ist gemeinsam, daß die Berech-

nung des optimalen Steuergrößenverlaufs auf einem hinreichend genauen mathematischen Modell beruht. In welchem Maß das Lösungsergebnis dann in der praktischen Anwendung tatsächlich die Optimierungskriterien erfüllt, hängt entscheidend davon ab, wie gut bereits das mathematische Modell der Realität entspricht. Die Simulationen des vorigen Kapitels belegen, daß eine akzeptable Übereinstimmung mit dem realen Injektorverhalten nur durch Modelle erreichbar ist, die sowohl die Hysterese des Aktors als auch den verteiltparametrischen und den schaltenden Charakter der Injektormechanik berücksichtigen. All diese Aspekte bewirken, daß das dynamische Optimierungsproblem durch die erforderliche Modellkomplexität nur mit erheblichem Aufwand lösbar ist.

Entscheidend vereinfacht wird die Optimierungsaufgabe durch eine geeignete Parametrisierung des kontinuierlichen Ladungsverlaufs: Statt eines Funktionals ist die gesuchte Lösung jetzt ein optimaler Parametervektor. Aus der dynamischen Optimierungsaufgabe wird so eine statische, deren Lösungsaufwand direkt von der Größe des Parametervektors abhängt.

Die verschiedenen Lösungsverfahren für statische Optimierungsprobleme beruhen auf einer wiederholten Sensitivitätsanalyse des Gütemaßes des Lösungsvektors [NoWr99]. Diese Sensitivitätsanalyse kann entweder analytisch anhand eines Modells, numerisch mittels wiederholter Modellsimulation oder auch empirisch durch Auswertung der realen Streckenantwort geschehen.

Von diesen drei Möglichkeiten ist hier die letztgenannte zu bevorzugen, verspricht sie doch die beste Lösung. Die erforderliche Zahl elektrischer Ansteuerungen stellt auch keine unzumutbare Belastung für einen Injektor dar, der für mehrere Millionen Zyklen ausgelegt ist. Nicht zuletzt dauert eine reale Einspritzung zudem kürzer als eine Simulation einer Einspritzung, wodurch die Durchführung des Verfahrens sogar beschleunigt wird.

Eine notwendige Bedingung für das Gelingen des Verfahrens ist, daß die Ermittlung der Güte einer Streckenantwort mit hinreichender Genauigkeit erfolgt. Nicht immer steht dafür eine geeignete Sensorik zur Verfügung, sei es aus konstruktiven oder aus wirtschaftlichen Gründen. Als Abhilfe wird deshalb im folgenden der Entwurf eines Zustandsschätzers beschrieben, um aus den meßbaren Größen weitere relevante Zustandsgrößen des Injektors berechnen zu können.

## 4.2 Entwurf eines Zustandsschätzers

Trotz der erreichten Genauigkeit sind selbst die in dieser Arbeit entwickelten Injektormodelle nur mathematische Näherungen der tatsächlich in dem Ventil stattfindenden physikalischen Prozesse. Unterschiede zwischen dem berechneten und dem meßbaren Verhalten sind deshalb unvermeidbar. So ist ein Nachteil der bisherigen Injektormodelle, daß sie entweder nur die Aktorladung oder nur die Aktorspannung nutzen, um die übrigen Modellgrößen zu berechnen, obwohl beide Eingangssignale gleichermaßen meßbar sind und deshalb auch beide in der Simulation als Modellgänge verwendbar wären.

Im Gegensatz dazu zeichnen sich Zustandsschätzer dadurch aus, daß sie alle verfügbaren Meßdaten verwenden, um kontinuierlich den wahrscheinlichsten beziehungsweise den zutreffendsten Modellzustand zu errechnen und somit etwaige Mess- und Modellfehler auszugleichen. Auf diesem Wege lassen sich aus der Gesamtheit der gemessenen Größen weitaus genauere Zustandsinformationen erschließen, ohne dazu zusätzliche, kostenintensive Sensorik einsetzen zu müssen.

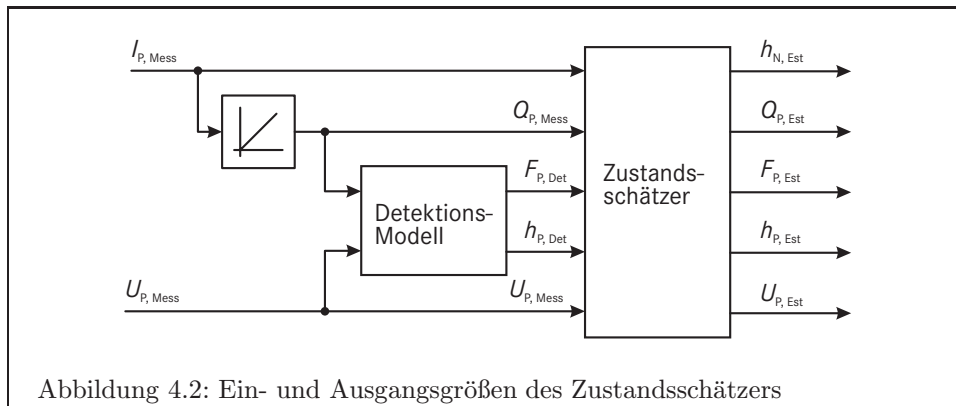


Abbildung 4.2: Ein- und Ausgangsgrößen des Zustandsschätzers

Aufgrund der Nichtlinearität der Strecke sowie der damit verbundenen Modellunsicherheit steht bei der Auswahl eines geeigneten Beobachertyps hier die Robustheit des Verfahrens im Vordergrund. In diesem Aspekt zeigt das KALMAN-Filter Vorteile gegenüber dem LUENBERGER Beobachter [Foel94]. Dem Nachteil eines erhöhten Rechenaufwands des Filters ist bei der hier beschriebenen Anwendung keine größere Bedeutung zuzumessen, da die Durchführung nicht in Echtzeit stattfinden muß.

Mit vergleichsweise einfachen Maßnahmen sind insbesondere der Aktorstrom und die Aktorspannung meßbar — weitaus bedeutender für die Beurteilung des Injektorverhaltens sind jedoch die mechanischen Größen wie Aktorhub und Nadelhub. Wenn eine direkte Messung derselben ausscheidet, ist es mittels eines Detektionsmodells wie in den Gleichungen (2.21) bis (2.23) möglich, aus den Messwerten der elektrischen Signale die Aktorkraft und den Aktorhub zu berechnen. Dabei ist zu beachten, daß die Güte der so bestimmten mechanischen Größen sehr stark von der Größe des Meßrauschens der elektrischen Signale abhängt. Aber auch wenn die berechneten Signale nur bedingt vertrauenswürdig sind, können sie einem Zustandsschätzer als eine ergänzende Referenz dienen, wenn die tatsächlichen mechanischen Größen nicht als Meßdaten zur Verfügung stehen.

Die **Abbildung 4.2** zeigt die sich so ergebenden Ein- und Ausgänge eines Zustandsschätzers. Aus der gemessenen Aktorladung und -spannung berechnet ein Detektionsmodell vorläufige Werte für den Aktorhub und die Aktorkraft. Ein Zustandsschätzer benutzt dann all diese Informationen, um entsprechend der jeweiligen Rauschprozesse den tatsächlichen Zustand des Injektors zu schätzen.

Als ein dem Zustandsschätzer zugrunde liegendes mathematisches Modell des Injektors ist das Differentialgleichungssystem der konzentriertparametrischen Ersatzanordnung mit Hysteresenachbildung aus Kapitel 3.4 hinreichend genau, denn es bildet in wenigen Zuständen die Dynamik der Strecke ab, ohne die Nichtlinearitäten des Aktors und des Ventils zu vernachlässigen. Einzig die Ablöseprozesse der Bauteile untereinander, so wie sie bei zu kleinen Öffnungs- und Schließzeiten auftreten können, sind mit diesem Modell nicht darstellbar. Das ist aber nicht weiter von Belang, weil das KALMAN-Filter zur Auswertung suboptimaler Ansteuerungen eingesetzt werden soll, die sich gerade dadurch auszeichnen, daß solche Prellvorgänge nur in geringem Maße stattfinden.

Für den Abgleich des Modellzustands mit den gemessenen Werten sind an dieser Stelle zusätzliche Modellausgänge vonnöten; ein entsprechender Ausgangsvektor  $\underline{y} = (h_N \quad Q_P \quad U_P \quad F_P \quad h_P)^T$  ist durch eine Erweiterung der Ausgangs- und der Durchgriffsmatrix des Injektormodells realisierbar.

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial U_P}{\partial Q_P} & \frac{\partial U_P}{\partial P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_P}{\partial P} & \frac{\partial F_P}{\partial h_P} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zustandsabhängigkeit der Übergangs- und der Steuermatrix fordert den Einsatz eines Linearized KALMAN-Filters, dessen Gleichungen

$$\hat{\underline{x}}^i(k) = \underline{G}^i(\hat{\underline{x}}^+(k-1)) \hat{\underline{x}}^+(k-1) + \underline{H}^i(\hat{\underline{x}}^+(k-1)) \underline{u}(k-1) \quad (4.1)$$

$$\hat{\underline{y}}^i(k) = \underline{C} \hat{\underline{x}}^i(k) + \underline{D} \underline{u}(k) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \underline{p}^i(k) &= \underline{G}^i(\hat{\underline{x}}^+(k-1)) \underline{p}^i(k-1) \underline{G}^{i,T}(\hat{\underline{x}}^+(k-1)) \\ &\quad + \underline{H}^i(\hat{\underline{x}}^+(k-1)) \underline{q} \underline{H}^{i,T}(\hat{\underline{x}}^+(k-1)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

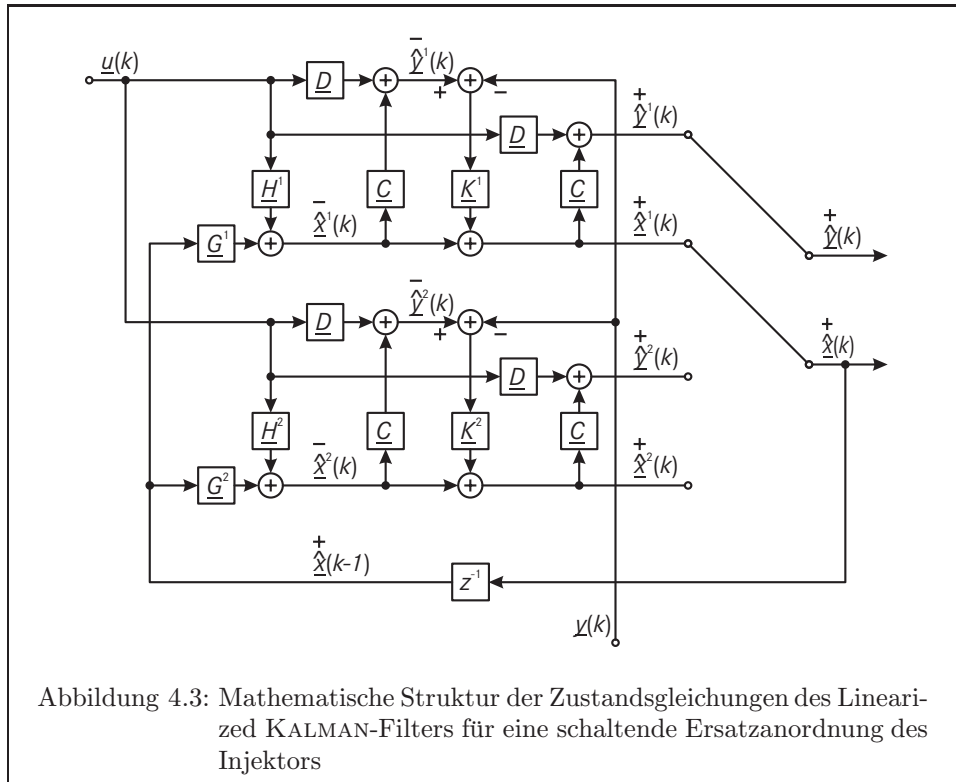
$$\underline{K}^i(k) = \underline{p}^i(k) \underline{C}^T \left[ \underline{C} \underline{p}^i(k) \underline{C}^T + \underline{r} \right]^{-1} \quad (4.4)$$

$$\hat{\underline{x}}^i(k) = \hat{\underline{x}}^i(k) + \underline{K}^i(\underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}^i(k)) \quad (4.5)$$

$$\hat{\underline{y}}^i(k) = \underline{C} \hat{\underline{x}}^i(k) + \underline{D} \underline{u}(k) \quad (4.6)$$

$$\underline{p}^i(k) = \underline{p}^i(k) - \underline{K}^i \underline{C} \underline{p}^i(k) \quad (4.7)$$

in jedem Zeitschritt  $k$  für jede Stellung  $i$  in Abhängigkeit der Kovarianzen des Steuer- und des Messvektors  $\underline{q}$  und  $\underline{r}$  einen geschätzten Modellzustand  $\hat{\underline{x}}^i(k)$  sowie dessen Kovarianz  $\underline{p}^i(k)$  ergeben [GrAn93], [Gelb74].



Der schaltende Charakter des Ventils bedingt nicht nur die Notwendigkeit einer Fallunterscheidung

$$\hat{\underline{x}}^+(k) = \begin{cases} (\hat{x}_1^+(k) \quad \hat{x}_2^+(k) \quad \hat{x}_3^+(k) \quad \hat{x}_4^+(k) \quad 0 \quad 0)^T & \text{für } \hat{h}_N^+(k) \leq 0 \\ (\hat{x}_1^+(k) \quad \hat{x}_2^+(k) \quad \hat{x}_3^+(k) \quad \hat{x}_4^+(k) \quad \hat{x}_5^+(k) \quad \hat{x}_6^+(k))^T & \text{für } \hat{h}_N^+(k) > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

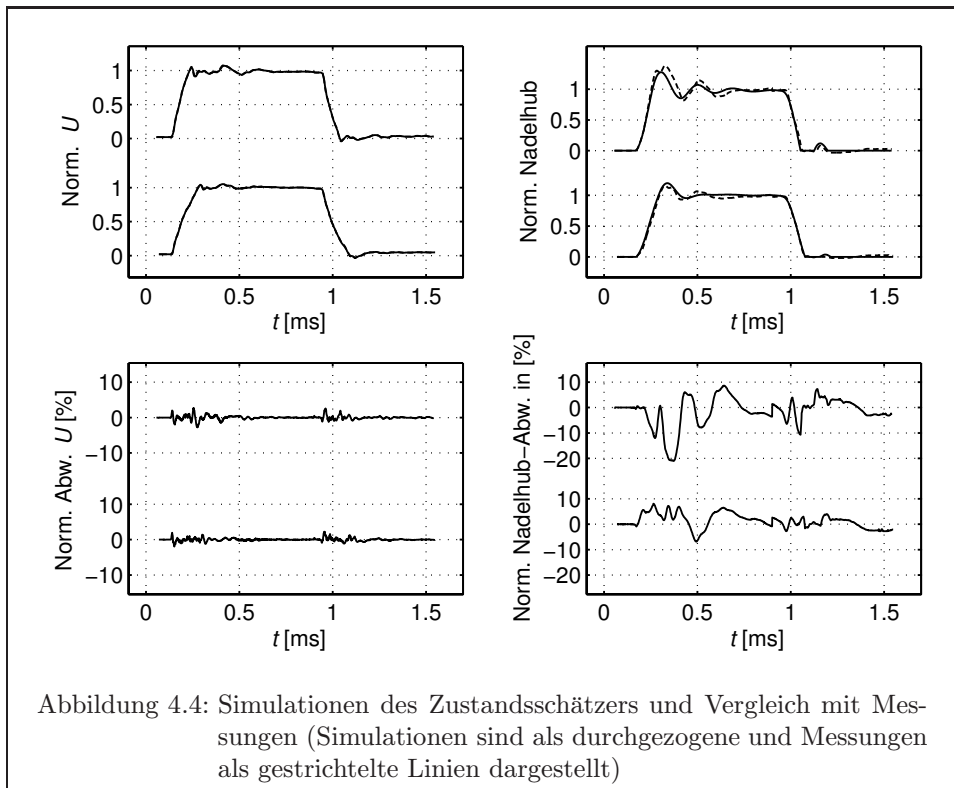
gemäß  $\hat{h}_N^+(k) = \hat{x}_5^+(k)$  für die Berechnung des Zustandsvektors  $\hat{\underline{x}}^+(k)$ , sondern auch für dessen geschätzte Rauschprozesse

$$\underline{p}^+(k) = \begin{cases} \underline{p}^1(k) & \text{für } \hat{h}_N^+(k) \leq 0 \\ \underline{p}^2(k) & \text{für } \hat{h}_N^+(k) > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

und für den geschätzten Ausgangsvektor

$$\underline{\hat{y}}^+(k) = \begin{cases} \underline{\hat{y}}^1(k) & \text{für } \hat{h}_N^+(k) \leq 0 \\ \underline{\hat{y}}^2(k) & \text{für } \hat{h}_N^+(k) > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Die Methode des Schaltens zwischen mehreren KALMAN-Filtern ist in ähnlicher Form in [Nybe99] ausführlich beschrieben und wird dort als Grundlage einer modellbasierten Diagnose erfolgreich eingesetzt.



Die so erhaltene Struktur der Zustandsgleichungen (4.1), (4.2), (4.5), (4.6), (4.8) und (4.10) wird in der **Abbildung 4.3** verdeutlicht, wobei die darin enthaltenen Verstärkungsmatrizen  $\underline{K}^i(k)$  aus den Gleichungen (4.3), (4.4), (4.7) und (4.9) hervorgehen.

In der **Abbildung 4.4** werden die Simulationsergebnisse mit den Messungen verglichen. Für die jeweils unten dargestellte Ansteuerung mit einer längeren Öffnungs- und Schließzeit von  $150\mu\text{s}$  betragen die Abweichungen gegenüber dem gemessenen mechanischen Verhalten maximal 7 Prozent des Nennwertes des Nadelhubs und sind damit merklich geringer als die der einfachen Vorwärtsrechnung des zugrundeliegenden Modells (**Abbildung 3.8**). Für die jeweils oben abgebildete Ansteuerung mit einer kürzeren Öffnungs- und Schließzeit von  $100\mu\text{s}$  betragen sie trotz des Beobachtereinsatzes noch immer bis zu 20 Prozent. Das ist darauf zurückzuführen, daß der Kraftschluß der Bauteile des Injektors bei einer verkürzten Öffnungs- und Schließzeit zeitweise unterbrochen ist, wohingegen der Modellansatz des Beobachters von einem ständigem Kraftschluß ausgeht.

Leider ließ es die zur Verfügung stehende Ausstattung des Meßplatzes nicht zu, die durch das KALMAN-Filter berechnete Aktorkraft mit der tatsächlich auftretenden zu vergleichen. Die hier gezeigten Ergebnisse lassen aber erwarten, daß der Modellfehler der Aktorkraft ebenfalls in der Größenordnung von 7 Prozent der Amplitude des Kräftespiels liegt.

### 4.3 Optimaler Ansteuerungsverlauf

Um einen Injektor bestmöglich anzusteuern, sind zunächst die in der Problemstellung beschriebenen Kriterien des Ventilverhaltens als ein Gütemaß in Abhängigkeit der zeitlichen Ansteuerung zu formulieren. Die Optimierungsaufgabe besteht dann darin, einen Verlauf zu finden, dessen Gütemaß minimal ist.

Ein optimaler Ansteuerungsverlauf für einen Injektor minimiert die während des Öffnungs- und Schließvorgangs auftretenden Kräftespiele im Aktor. Dabei ist zu erwarten, daß die größten Änderungen der Aktorkraft während des Öffnens und Schließens des Ventils auftreten. Von besonderem Interesse für die Bewertung einer Ansteuerung ist demnach der Verlauf der Aktorkraft jeweils während der Schaltprozesse.

Darüberhinaus soll die Ansteuerung auch eventuelle Mechanikschwingungen im geöffneten und geschlossenen Zustand eliminieren. Mit anderen Worten: Am Ende eines Schaltvorgangs soll der angestrebte Schaltzustand möglichst stabil erreicht sein. Dies entspricht einem minimalen MAYERSchen Kriterium zu den Zeitpunkten jeweils am Ende der Schaltprozesse. Prinzipiell ist es möglich, ein solches Gütemaß zu implementieren, beispielsweise mit Hilfe des im vorigen Unterkapitel beschriebenen Zustandsschätzers. In der Praxis kann sich eine solche Vorgehensweise allerdings als problematisch erweisen, da das MAYERSche Kriterium als Momentaufnahme der Modellzustände stark von den jeweiligen Rauschprozessen beeinflusst wird. Es ist deshalb zweckdienlicher, den Nadelhub nicht zu einem Zeitpunkt, sondern stattdessen über ein bestimmtes Zeitintervall unmittelbar nach den Schaltprozessen zu bewerten. Die **Abbildung 4.5** erläutert, für welchen Zeitraum welche Größe im Gütemaß zu berücksichtigen ist.

Im folgenden bezeichnen  $t_{R0}$  und  $t_{R1}$  die Zeitpunkte des Beginns und des Endes des Öffnungsvorgangs. Das Intervall zwischen  $t_{R1}$  und  $t_{R2}$  dient der Auswertung des Nadelhubs im geöffneten Zustand. Entsprechend geben  $t_{F0}$ ,  $t_{F1}$  und  $t_{R2}$  Beginn und Ende des Schließvorgangs sowie das Ende des Auswertungsintervalls für den Nadelhub im geschlossenen Zustand an.

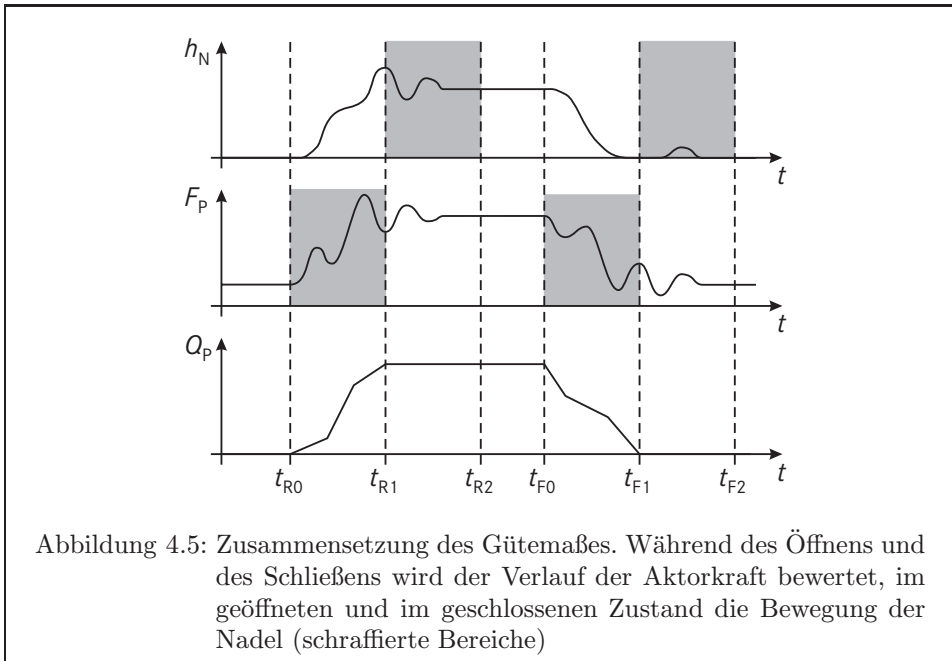
Sowohl im geöffneten als auch im geschlossenen Zustand ist je ein Sollwert  $h_N^O$  und  $h_N^C$  für den Nadelhub bekannt. Die Welligkeit

$$J^h = \frac{1}{t_{R2} - t_{R1}} \int_{t_{R1}}^{t_{R2}} (h_N - h_N^O)^2 dt + \frac{1}{t_{F2} - t_{F1}} \int_{t_{F1}}^{t_{F2}} (h_N - h_N^C)^2 dt \quad (4.11)$$

des Nadelhubs entspricht dann der Größe der Oszillationen um den Sollzustand und eignet sich deshalb in besonderem Maße als ein Gütemaß der Mechanikschwingungen.

Im Gegensatz dazu ist es deutlich schwieriger, Sollwerte für die Aktorkraft anzugeben, denn eine optimale Solltrajektorie für den zeitlichen Kraftverlauf ist nicht unmittelbar aus den genannten Anforderungen an einen Schaltvorgang ableitbar. Vielmehr wäre eine Trajektorie der Aktorkraft selber das Ergebnis eines dynamischen Optimierungsproblems, dessen Lösung wie bereits erwähnt aufgrund der zu beachtenden Nichtlinearitäten der Strecke einen erheblichen mathematischen Aufwand bedeutet.





Um dennoch dem eingangs definierten Wunsch nach einem möglichst sanften und materialschonenden Einspritzvorgang zu entsprechen, wird hier die Größe des Wertebereichs der Aktorstellkraft während des Ladens und Entladens als ein Maß für die Güte der Ansteuerung verwendet.

$$J^F = \left( \max(F_P(t_R)) - \min(F_P(t_R)) \right)^2 + \left( \max(F_P(t_F)) - \min(F_P(t_F)) \right)^2 \quad (4.12)$$

$$\text{mit } t_R \in [t_{R0}, t_{R1}] \quad t_F \in [t_{F0}, t_{F1}]$$

Das Gütemaß  $J$  setzt sich demnach aus einem Anteil  $J^F$  für die Aktorkraft und einem Anteil  $J^h$  für die Oszillationen des Nadelhubs zusammen.

$$J = g^F J^F + g^h J^h$$

$g^F$  und  $g^h$  sind dabei normierende Gewichtungsfaktoren.

Die beiden Anteile  $J^h$  und  $J^F$  reichen aber nicht in jedem Fall aus, um eine optimale Ansteuerung eindeutig zu definieren. Gibt es nämlich einen Ladungsverlauf mit den Öffnungs- und Schließzeiten  $T_R = t_{R1} - t_{R0}$  und  $T_F = t_{F1} - t_{F0}$ , der bei einem minimalen Wertebereich der Aktorstellkraft die Nadelendlagen  $h_N^O$  und  $h_N^C$  ohne Nachschwingen anfährt, dann läßt sich in der Simulation zeigen, daß es beliebig viele Ansteuerungsverläufe für größere Öffnungs- oder Schließzeiten  $\tilde{T}_R > T_R$  beziehungsweise  $\tilde{T}_F > T_F$  gibt, deren  $J^h$  und  $J^F$  den gleichen optimalen Wert aufweisen. Für welche Öffnungs- und Schließzeiten solche minimale Gütemaße erzielbar sind, hängt von den Eigenschaften des Injektors ab.

Eine solche Mannigfaltigkeit optimaler Ansteuerungen als Lösung der Optimierungsaufgabe steht zwar nicht im Widerspruch zu der Aufgabenstellung, birgt aber Nachteile in zweierlei Hinsicht: Die verschiedenen Lösungen der Optimierungsaufgabe können bei sonst gleichen Betriebsbedingungen des Injektors zu unterschiedlichen Mengen abgegebenen Kraftstoffs führen, da im Kriterium nicht enthalten ist, wann der erstrebte Schaltzustand einzunehmen ist. Außerdem sind bei der Suche des Ansteuerungsverlaufs auch eventuelle Nebenbedingungen der verwendeten Endstufe zu beachten, denn mit der Komplexität des zu generierenden Ladungsverlaufs steigen auch die Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Ladungsquelle.

Aus diesen Gründen wird das Gütemaß

$$J = g^F J^F + g^h J^h + g^I J^I \quad (4.13)$$

hier zugunsten einer eindeutigen Lösung der Optimierungsaufgabe um einen Anteil

$$J^I = \frac{1}{t_{R1} - t_{R0}} \int_{t_{R0}}^{t_{R1}} (I_P)^2 dt + \frac{1}{t_{F1} - t_{F0}} \int_{t_{F0}}^{t_{F1}} (I_P)^2 dt \quad (4.14)$$

erweitert, welcher die Welligkeit des Aktorstroms bewertet. Ist  $J^I$  minimal, dann wird die zur Verfügung stehende Öffnungs- und Schließzeit ausgenutzt, um den Aktor möglichst gleichmäßig zu bestromen.

Dieses Maß strebt den bisherigen Optimierungszielen entgegen, denn ein günstiges Öffnungs- und Schließverhalten ist kaum mit einem gleichmäßigen Lade- und Entladestrom erzielbar, und eine minimale Welligkeit des Aktorstroms führt höchst unwahrscheinlich zu einem gewünschten Ventilverhalten. Der Gewichtungsfaktor  $g^I$  der elektrischen Güte ist deshalb sorgfältig zu dimensionieren.

Die Suche eines zeitlichen Ladungsverlauf  $Q(t)$  zur Minimierung

$$J \rightarrow \min \quad (4.15)$$

des Gütemaßes (4.13) unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$F_P(t) = F_P(Q(t)) \quad h_N(t) = h_N(Q(t)) \quad I_P(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

ist ein kontinuierliches dynamisches Optimierungsproblem. Je nach verwendeter elektrischer Endstufe sind weitere einschränkende Nebenbedingungen wie beispielsweise Strombegrenzungen möglich.

Im Unterkapitel 4.1 wurde bereits diskutiert, warum es sich als nützlich erweist, die dynamische Optimierung der Zielfunktion  $Q(t)$  durch eine Parametrisierung des Ladungsverlaufs in eine statische Optimierung zu überführen. Im folgenden wird für  $Q(t)$  eine abschnittsweise lineare Funktion verwendet, welche zwischen den Lade- und Entladevorgängen konstante Werte annimmt. Die zulässigen Wertebereiche für die Stützstellen der Lade- und der Entladeflanke sind im allgemeinen so groß, daß die Lösung des Optimierungsproblems innerhalb der Intervalle zu erwarten ist, sodaß bei der Lösungssuche keine Beschränkungen des Parameterraums zu beachten sind.

Bevor die Ergebnisse der Optimierungen vorgestellt und diskutiert werden, ist anzumerken, daß es die Problemstellung in den seltensten Fällen erlaubt, das tatsächliche Optimum der Ansteuerung zu finden. Dies ist darin begründet, daß sich die Schwingneigung der Strecke in einer Vielzahl lokaler Minima des Gütemaßes im Parameterraum widerspiegelt. Insbesondere zu kurze Zeithorizonte für die Berechnung von  $J^h$  können sich dabei negativ auf den Erfolg des Optimierungsverfahrens auswirken.

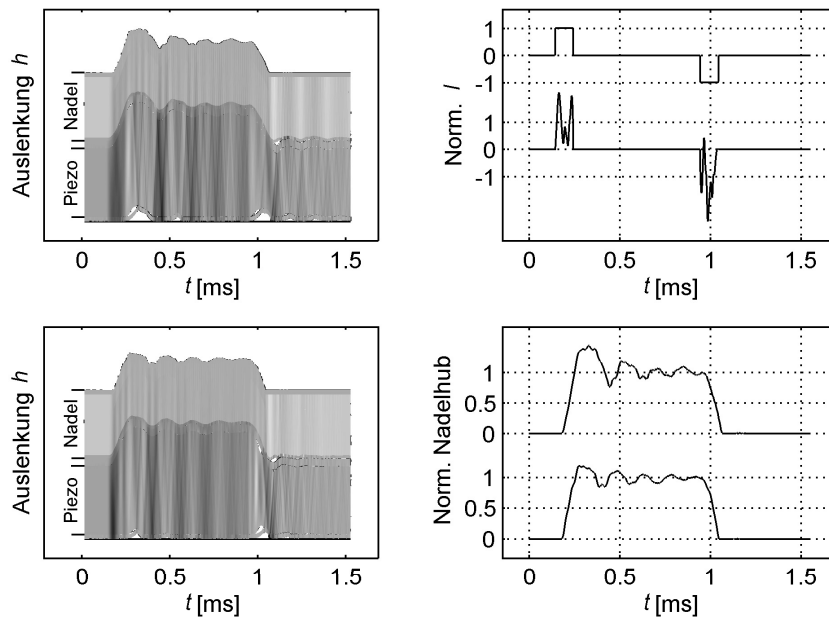


Abbildung 4.6: Simulativer Vergleich zwischen einer herkömmlichen Ansteuerung und einem optimalen Verlauf bei Anstiegs- und Abfallzeiten von jeweils  $100\mu\text{s}$

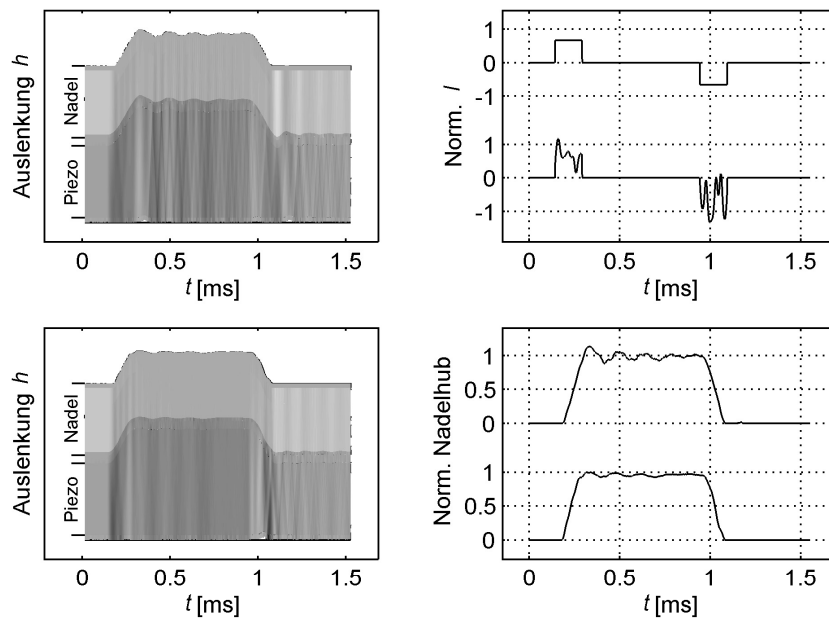
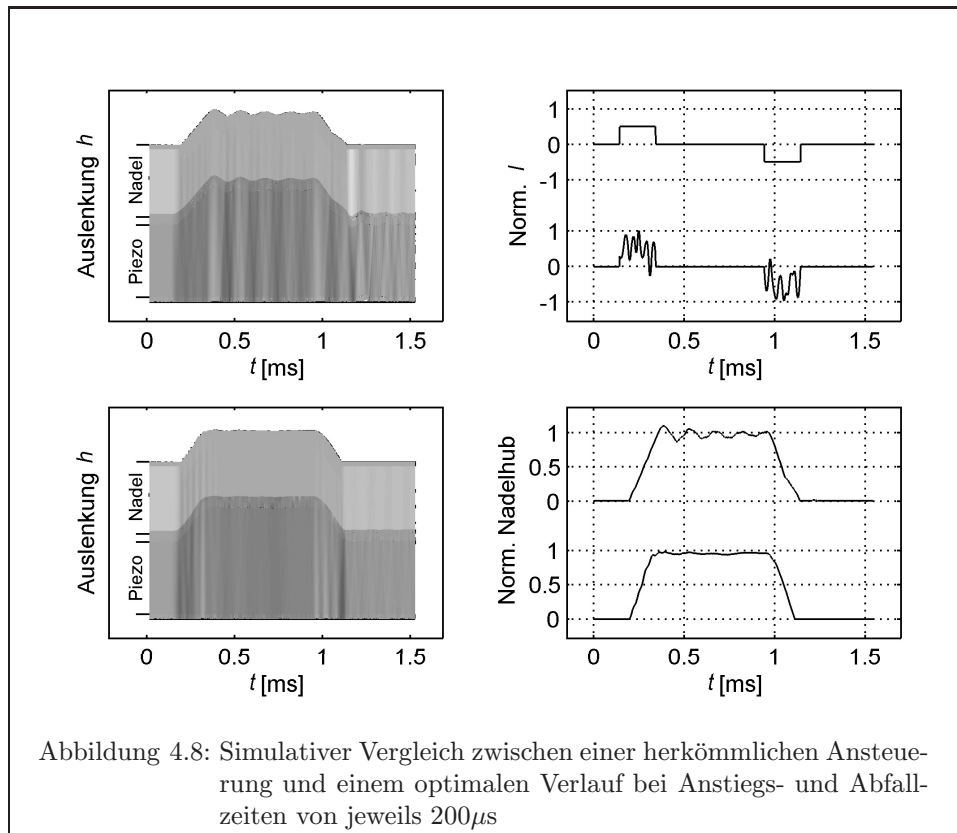


Abbildung 4.7: Simulativer Vergleich zwischen einer herkömmlichen Ansteuerung und einem optimalen Verlauf bei Anstiegs- und Abfallzeiten von jeweils  $150\mu\text{s}$



Viele der üblicherweise verwendeten Optimierungsverfahren (wie beispielsweise die Methoden der OPTIMIZATION TOOLBOX von MATLAB) sind allerdings auf streng konvexe Probleme ausgerichtet und versprechen deshalb nur mäßige Ergebnisse. Spezielle Verfahren für derartige Problemstellungen (wie beispielsweise das Simulated Annealing) erzielen zwar oft bessere Ergebnisse, allerdings mit erhöhtem Aufwand. In dieser Arbeit wird eine Kombination aus einem GAUSS-NEWTON- und einem Koordinatenabstiegsverfahren mit dynamischer Schrittweitensteuerung angewendet.

Die **Abbildung 4.6** zeigt oben links, wie der untersuchte Injektor auf einen herkömmlichen, jeweils in  $100\mu\text{s}$  gleichförmig steigenden und fallenden Ladungsverlauf reagiert. Die Darstellung ist erneut das Simulationsergebnis des Modells aus Kapitel 3.6. Deutlich erkennbar ist das Prellen der Nadel sowie die sich in der Mechanik fortplantzenden Schwingungen großer Amplitude. In der gleichen Abbildung unten links ist das Simulationsergebnis eines optimalen Ansteuerungsverlaufs zu sehen. Im Vergleich der beiden Simulationen ist erkennbar, daß das Kraftspektrum bei der optimalen Ansteuerung stark reduziert ist, und auch das Prellen fällt dort weitaus kleiner aus als bei einer herkömmlichen Ansteuerung. Auf der rechten Seite der Abbildung sind oben die Aktorströme und unten die Bewegungen der Injektornadel für beide Ansteuerungsverläufe gegenübergestellt. Es ist ablesbar, daß die Schwingungen der Nadel im geöffneten Zustand durch den optimalen Ansteuerungsverlauf nur noch die halbe Amplitude aufweisen. Auch wenn mit dieser optimalen Ansteuerung noch nicht die Zielsetzung erreicht ist, das Prellen und Schwingen der Mechanik vollständig zu eliminieren, so zeigt sich doch anschaulich, daß ein geeigneter Ansteuerungsverlauf zu einem durchaus günstigeren Injektorverhalten führt.

In gleicher Weise läßt sich den **Abbildungen 4.7** und **4.8** entnehmen, welches Verbesserungspotenzial ein optimaler Ansteuerverlauf bei Öffnungs- und Schließzeiten von jeweils  $150\mu\text{s}$  beziehungsweise  $200\mu\text{s}$  bietet. Schon der optische Eindruck ruhigerer Bilder für die optimalen Ansteuerverläufe läßt erahnen, daß diese eine geringere Belastung für den Injektor darstellen. Aber auch faktisch läßt sich durch die elektrische Anregung bei Ventilschaltzeiten von  $150\mu\text{s}$  das schädliche Prellen des Aktormoduls beinahe vollständig vermeiden, und der Nadelhubverlauf weist bei Öffnungszeiten von  $200\mu\text{s}$  und einer optimalen Ansteuerung keine nennenswerten Schwingungen mehr auf.

## 4.4 Ansteuerelektronik

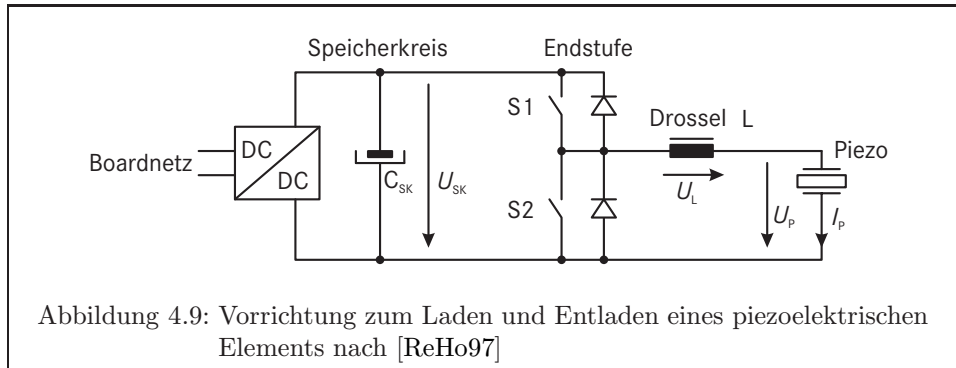
Die Erzeugung eines zeitlichen Ladungsverlaufs, wie er im vorhergehenden Unterkapitel beschrieben wurde, stellt besondere Ansprüche an die Funktionalität der elektrischen Ansteuerschaltung. Ein weiteres, für den Einsatz in Kraftfahrzeugen nicht minder wichtiges Attribut ist der Wirkungsgrad der Endstufe. Dieses Unterkapitel beschreibt eine Endstufentopologie mitsamt einer neuartigen Betriebsstrategie, die diesen Anforderungen genügen.

Eine Leistungsabschätzung soll zunächst unterstreichen, warum dem Wirkungsgrad der Endstufe eine besondere Bedeutung zukommt. Ein Einspritzventil, wie es in dieser Arbeit untersucht wird, setzt während des üblichen Motorbetriebs eine mittlere elektrische Leistung von bis zu etwa  $20\text{W}$  um. Unter der Annahme, daß das Motorsteuergerät diese Leistung mit einem vergleichsweise hohen Wirkungsgrad von 75 Prozent zur Verfügung stellt und der Motor sechs solcher Injektoren enthält, entstehen etwa  $40\text{W}$  elektrische Verlustwärme im Steuergerät.

Kontinuierlich arbeitende Stromquellen, wie sie beispielsweise [Schu01] und [PKSM04] diskutieren, bestechen zwar durch das hohe Maß an erreichbarer Steuerbarkeit und Signalqualität, erreichen aber prinzipbedingt einen maximalen Wirkungsgrad von nur 50 Prozent. Das bedeutet, daß die Verlustleistung im Steuergerät leicht eine Größenordnung von  $100\text{W}$  erreichen kann. Um sicherzustellen, daß derartige Verlustleistungen unter allen Betriebsbedingungen abgeführt werden, muß der Steuergerätestwickler gegebenenfalls zusätzliche konstruktive Maßnahmen ergreifen, welche häufig auch weitere Kosten verursachen.

Besser geeignet für den Einsatz in Kraftfahrzeugen sind schaltende Stromsteller. Die **Abbildung 4.9** zeigt eine Halbbrücke zum Laden und Entladen eines Piezoaktors, wie sie in [Fläm97] und [ReHo97] ausführlich beschrieben ist.

Es sind auch Mischformen zwischen getakteten und kontinuierlichen Endstufen möglich sind. [JaMa00] stellt eine Kombination eines bidirektionalen Schaltnetzteils und eines Analogverstärkers kleiner Leistung vor, um eine hohe Signalgüte bei einem Wirkungsgrad größer 50 Prozent zu erzielen. Abgesehen von dem bedeutend größeren Bauteilbedarf erreicht auch diese Schaltung nicht die Effizienz einfacher Schaltregler, weshalb sie und ähnliche Varianten für den Einsatz in Kraftfahrzeugen nicht geeignet sind.



Zur mathematischen Beschreibung des schaltenden Stromstellers in der **Abbildung 4.9** mit idealisierten und verlustfreien Bauteilen wird vereinfachend davon ausgegangen, daß zu jedem Zeitpunkt entweder S1 oder S2 leitend ist. Der Schaltzustand läßt sich dann mittels einer diskreten Variable  $s$  erfassen, welche den Wert 1 hat, wenn S1 leitend ist, und den Wert 0 annimmt, wenn S2 leitet.

$$\frac{dI_P}{dt} = \frac{1}{L} (s U_{SK} - U_P) \quad (4.16)$$

$$\frac{dQ_P}{dt} = I_P \quad (4.17)$$

$$U_P = \frac{1}{C_P} Q_P \quad (4.18)$$

$$\frac{dQ_{SK}}{dt} = -s I_P \quad (4.19)$$

$$U_{SK} = \frac{1}{C_{SK}} Q_{SK} \quad (4.20)$$

$C_P$  ist dabei eine genäherte Großsignalkapazität des piezoelektrischen Aktors, beispielsweise die energetische Äquivalenzkapazität [Fläm97].

Prinzipiell sind verschiedene Betriebsstrategien denkbar. So stellt sich beispielsweise durch eine periodische Taktung der Schalter mit einer festen Puls- und Pausenbreite im zeitlichen Mittel ein bestimmter zeitlicher Aktorstromverlauf ein, welcher aber aufgrund von Schwankungen der Anfangsbedingungen und aufgrund von Toleranzen der Bauteilparameter nicht exakt steuerbar ist. Genau das wäre aber für den Betrieb von Injektoren zwingend erforderlich, um ein Höchstmaß an Reproduzierbarkeit des Aktorhubs zu gewährleisten.

Im Vergleich zur Steuerung verbessert eine Regelung des Aktorstroms die Stellgenauigkeit des Aktors entscheidend. Das **Blockdiagramm 4.10** zeigt eine Reglerstruktur, wie sie in [ReHo97] beschrieben wird. Die Differenz zwischen dem Sollstrom  $I_{P, \text{Soll}}$  und dem Iststrom  $I_P$  wird durch die Endstufensteuerung in digitale Ansteuersignale  $s$  der Leistungsschalter S1 und S2 umgesetzt. Sehr bewährt haben sich Zweipunkt- oder Dreipunktregler; letztere ermöglichen, daß ein konstanter Sollwert in einer endlichen Zeit stabil erreicht wird. Je kleiner der Abstand der Schaltschwellen des Reglers gewählt wird, desto geringer wird die bleibende Reglerabweichung, allerdings nimmt die Schalthäufigkeit näherungsweise reziprok zu [KlSo04]. Für hinreichend kleine Schaltschwellen läßt sich das Schalten der Halbbrücke vereinfachend durch eine kontinuierliche Variable  $s \in [0, 1]$  beschreiben, die die relative Pulsbreite von S1 angibt.

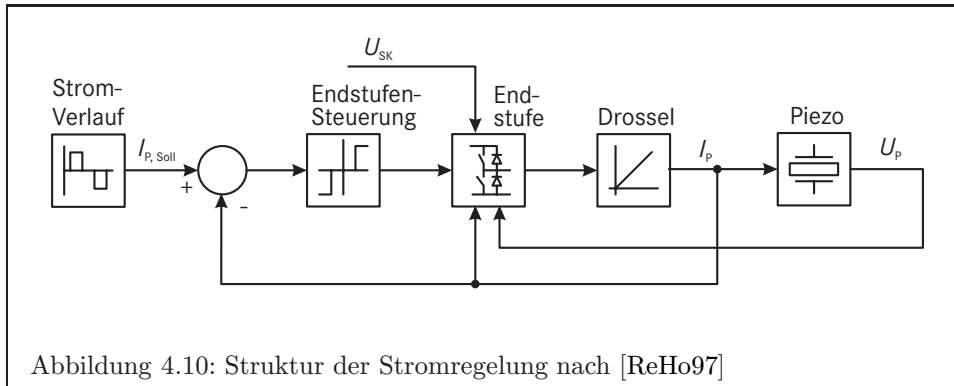


Abbildung 4.10: Struktur der Stromregelung nach [ReHo97]

Gelegentlich kann es erforderlich sein, den Aktorstrom zu begrenzen, sei es zum Schutz der verwendeten Halbleiterschalter, zur Vermeidung des Sättigungsbereiches der Drossel oder um den Aktor zu schützen. Die Aufgabe des Stromreglers ist es also, mittels der Stellgröße  $s$  den Aktorstrom  $I_P$  innerhalb des Intervalls  $[I_{P, \min}, I_{P, \max}]$  auf den Sollstrom  $I_{P, \text{Soll}}$  zu regeln.

Ein solcher Zwei- oder Dreipunktregler entspricht einem Sliding Mode-Regler mit dem Regelgesetz

$$s = \begin{cases} 0 & \text{für } I_P < I_{P, \text{Soll}} \wedge I_P > I_{P, \max} \\ \frac{U_P}{U_{SK}} & \text{für } I_P < I_{P, \text{Soll}} \wedge I_P = I_{P, \max} \\ 1 & \text{für } [I_P < I_{P, \text{Soll}} \wedge I_{P, \min} < I_P < I_{P, \max}] \\ & \vee [I_P = I_{P, \text{Soll}} \wedge L \frac{dI_{P, \text{Soll}}}{dt} \geq U_{SK} - U_P] \\ \frac{1}{U_{SK}} (U_P + L \frac{dI_{P, \text{Soll}}}{dt}) & \text{für } I_P = I_{P, \text{Soll}} \wedge I_{P, \min} < I_P < I_{P, \max} \\ & \wedge -U_P < L \frac{dI_{P, \text{Soll}}}{dt} < U_{SK} - U_P \\ 0 & \text{für } [I_P > I_{P, \text{Soll}} \wedge I_{P, \min} < I_P < I_{P, \max}] \\ & \vee [I_P = I_{P, \text{Soll}} \wedge -U_P \geq L \frac{dI_{P, \text{Soll}}}{dt}] \\ \frac{U_P}{U_{SK}} & \text{für } I_P > I_{P, \text{Soll}} \wedge I_P = I_{P, \min} \\ 1 & \text{für } I_P > I_{P, \text{Soll}} \wedge I_P < I_{P, \min} \end{cases} \quad (4.21)$$

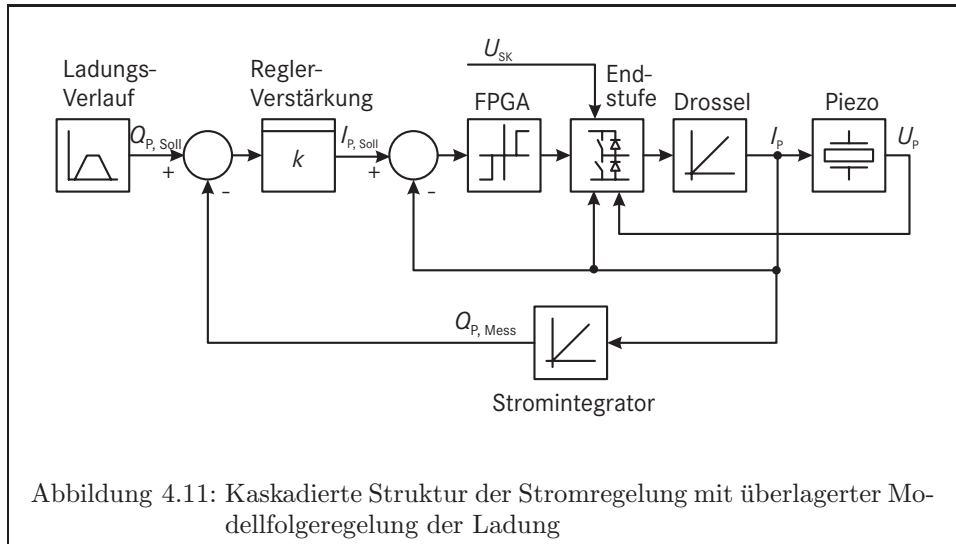
und den Gleitflächen

$$I_P = I_{P, \text{Soll}} \quad (4.22)$$

$$I_P = I_{P, \min} \quad (4.23)$$

$$I_P = I_{P, \max} \quad (4.24)$$

für die Stromregelung auf  $I_{P, \text{Soll}}$  sowie die Strombegrenzung auf  $I_{P, \min}$  und  $I_{P, \max}$  [Utki77], [DeZM88].



Aber auch eine Stromregelung kann nicht verhindern, daß sich unvermeidbare Regelabweichungen zu Ladungsfehlern und gleichermaßen zu Aktorhubfehlern akkumulieren. Um solche Fehler so klein wie möglich zu halten, muß der Stromregelung eine Ladungsregelung übergeordnet werden. Das **Blockdiagramm 4.11** ist dazu gegenüber der **Abbildung 4.10** um einen Integrator erweitert, welcher aus dem gemessenen Aktorstrom  $I_P$  eine aktuelle Aktorladung  $Q_P$  bildet. Der Vergleich der Istladung  $Q_P$  mit der Sollladung  $Q_{P, \text{Soll}}$  ist dann ein Maß dafür, wie sich die Aktorladung ändern soll, also für den gewünschten Aktorstrom

$$I_{P, \text{Soll}} = k (Q_{P, \text{Soll}} - Q_P) \quad (4.25)$$

mit dem Verstärkungsfaktor  $k$ . Entlang der Gleitfläche (4.22) folgt der Ladungsregler  $pT_1$ -verzögert dem Sollwert  $Q_{P, \text{Soll}}$ , die Zeitkonstante beträgt hierbei  $T = \frac{1}{k}$ .

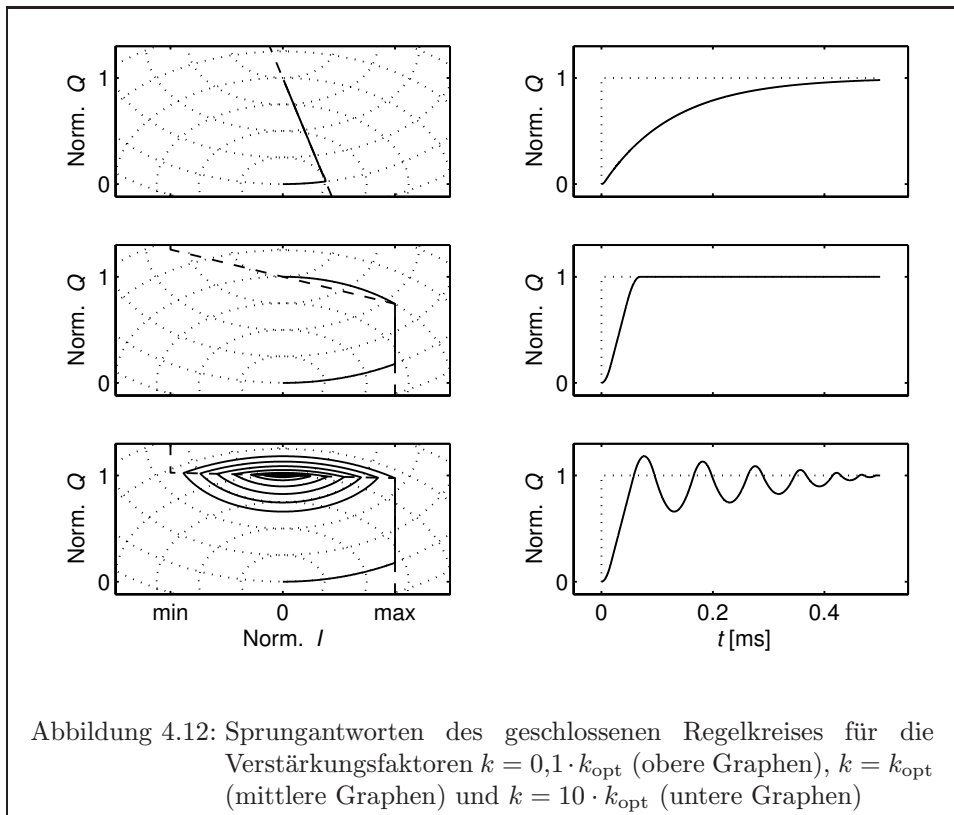
Aufgrund der kleinen Zeitkonstanten des elektrischen Systems im Bereich um 30 Mikrosekunden ist es ratsam, sowohl den Stromregler als auch den Ladungsregler als elektrische Anologschaltung auszuführen, wobei die logischen Gleichungen der Schaltersteuerung (4.21) beispielsweise in einem programmierbaren logischen Schaltkreis (GAL, CPLD oder FPGA) darstellbar sind.

Wie bei den meisten Regelaufgaben ist es auch hier zweckdienlich, wenn die Regelgröße  $Q_P$  der Führungsgröße  $Q_{P, \text{Soll}}$  mit möglichst geringer Verzögerung folgt, was eine möglichst große Reglerverstärkung impliziert. Auf der anderen Seite besteht die Gefahr, daß der Regler durch eine zu groß gewählte Verstärkung instabil wird oder zu unzulässigem Überschwingen neigt. Als ein erster Ansatz soll deshalb das Regelgesetz (4.21) mit der darin enthaltenen notwendigen Bedingung für die Einhaltung des Gleitbetriebes dazu dienen, den maximalen Verstärkungsfaktor zu bestimmen [PaLa99].

$$k < \begin{cases} \frac{1}{L} \frac{U_{SK} - U_P}{\dot{Q}_{P, \text{Soll}} - I_P} & \text{für } \dot{Q}_{P, \text{Soll}} > I_P \\ -\frac{1}{L} \frac{U_P}{\dot{Q}_{P, \text{Soll}} - I_P} & \text{für } \dot{Q}_{P, \text{Soll}} < I_P \end{cases}$$

Diese Ungleichung läßt erkennen, daß insbesondere große Änderungsgeschwindigkeiten der Führungsgröße  $\dot{Q}_{P, \text{Soll}}$  sowie geringe Aktorspannungen  $U_P$  den erlaubten Bereich des Verstärkungsfaktors und somit auch die erreichbare Güte des Reglers stark einschränken. Bei einem un stetigen Verlauf der Sollladung ergibt sich sogar



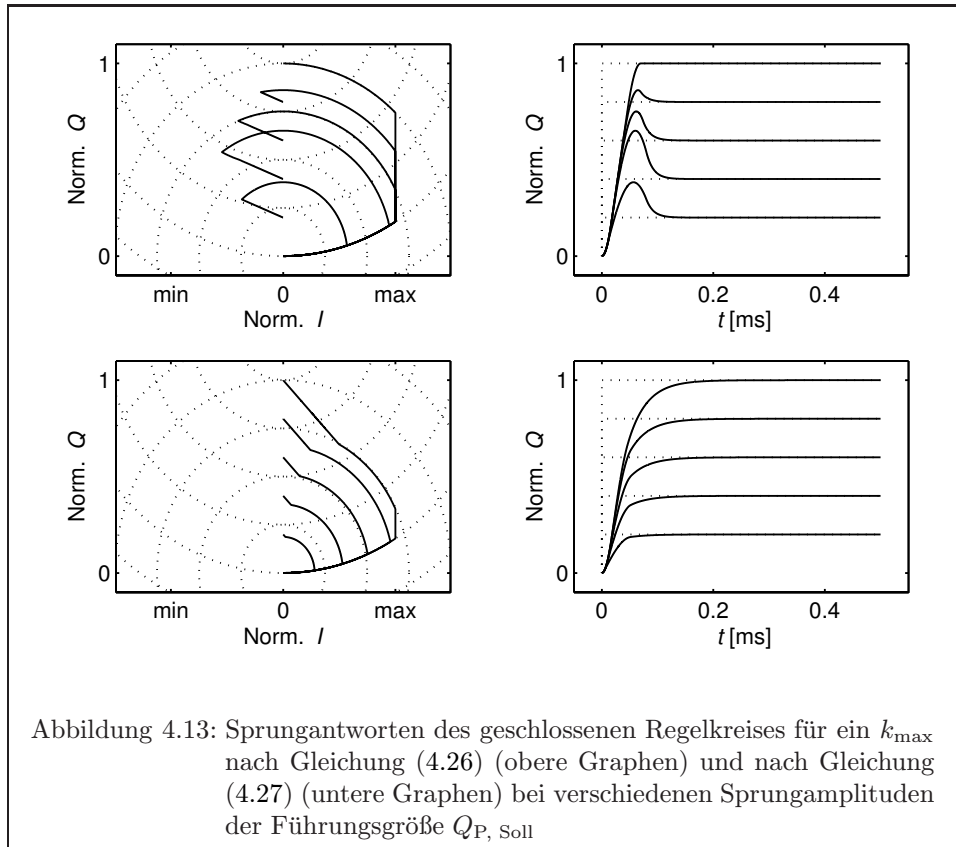


$k = 0$ , was gleichbedeutend damit ist, daß ein Gleitbetrieb nicht möglich ist. Die Aussagekraft der Gleitbedingung für die Wahl eines geeigneten oder gar optimalen Verstärkungsfaktors wie in [PaLa99] ist deshalb in Frage zu stellen.

Die **Abbildung 4.12** unterstreicht diesen Sachverhalt und vergleicht die simulierten Sprungantworten des geschlossenen Regelkreises für verschiedene Verstärkungsfaktoren  $k$ . Auf der linken Seite sind in der normierten  $(Q_P, I_P)$ -Zustandsebene die Zustandstrajektorien des Reglers eingezeichnet. Zur Orientierung enthalten die Graphen auch punktiert angedeutet die Lösungen des Differentialgleichungssystems für  $s = 0$  und  $s = 1$  und die Gleitflächen (4.22), (4.23) und (4.24) als gestrichelte Linien. Rechts daneben ist der zeitliche Verlauf der Aktorladung dem Sollwertverlauf gegenübergestellt.

Für einen sehr kleinen Verstärkungsfaktor zeigt die obere Diagrammzeile, daß der Regler der sprunghaften Änderung der Sollgröße folgt, indem der Aktorstrom zunächst mit maximaler Geschwindigkeit aufgebaut wird, bis die Gleitfläche der Ladungsregelung (4.22) erreicht ist. Entlang dieser Gleitfläche nähert sich die Aktorladung dann asymptotisch dem Sollwert, allerdings vergleichsweise schleppend.

Ein sehr großer Verstärkungsfaktor, wie er für die unteren Graphen gewählt worden ist, führt dagegen zu einem Einschwingen auf den Sollwert. Zu Beginn der Simulation nähert sich der Reglerzustand mit maximaler Geschwindigkeit der Gleitfläche der Strombegrenzung (4.24) und folgt ihr bis zum Übergang in die Gleitfläche der Ladungsregelung (4.22). Hier wird die Gleitfläche verlassen, denn durch die Induktivität der Strecke ist der Regler außerstande, die Gleitbedingung aufrecht zu erhalten. Nachdem der Reglerzustand schließlich mehrmals die Gleitfläche gekreuzt hat, ist der angestrebte Endzustand bis auf einen geringen Abstand erreicht.



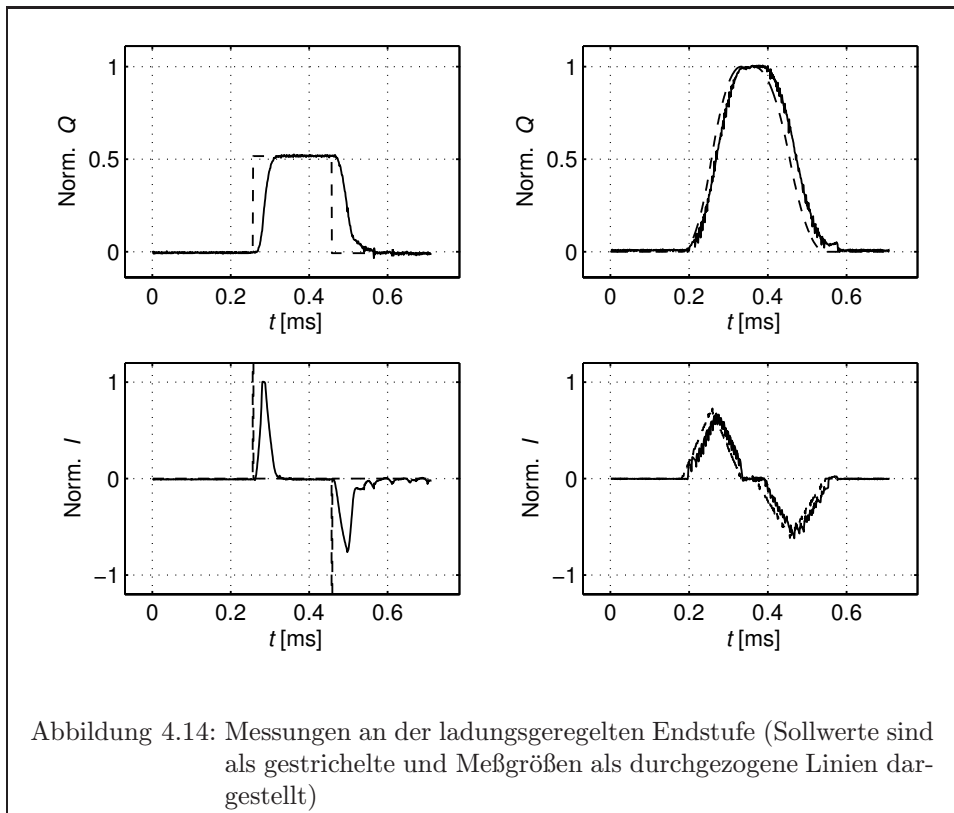
In der mittleren Zeile ist der Verstärkungsfaktor derart gewählt, daß der Auf- und der Abbau des Stroms in der Drosselspule möglichst schnell erfolgt und zu dem Zeitpunkt des Nulldurchgangs des Stroms exakt die gewünschte Ladungsmenge transferiert wird. Anhand dieser Forderung läßt sich aus dem mathematischen Modell des geschlossenen Regelkreises für einen Sprung der Führungsgröße  $Q_{P, \text{Soll}}$  von 0 auf  $Q_{\text{Soll}}$  eine optimale Reglerverstärkung

$$k_{\text{opt}}(Q_{\text{Soll}}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{LC_P} \frac{Q_{\text{Soll}} + \Delta Q_{\text{SK}}}{Q_{\text{Soll}} - \Delta Q_{\text{SK}}}} & \text{für } \max(I_P) < I_{P, \text{max}} \\ \frac{I_{P, \text{max}}}{Q_{\text{Soll}} - \sqrt{Q_{\text{Soll}}^2 - LC_P I_{P, \text{max}}^2}} & \text{für } \max(I_P) \geq I_{P, \text{max}} \end{cases} \quad (4.26)$$

mit  $\Delta Q_{\text{SK}} = C_{\text{SK}} U_{\text{SK}}^0 - \sqrt{(C_{\text{SK}} U_{\text{SK}}^0)^2 - \frac{C_{\text{SK}}}{C_P} Q_{\text{Soll}}^2}$

ableiten, welche zwischen den beiden zuvor beschriebenen Werten liegt.  $U_{\text{SK}}^0$  ist dabei die Spannung im Speicherkreis zu Beginn des Ladevorgangs. Die Simulation mit diesem Verstärkungsfaktor zeigt, daß der Strom wieder zunächst den Maximalwert erreicht. Hierbei beginnt der Stromabbau aber bereits zu einem früheren Zeitpunkt, so daß für  $I_P = 0$  genau der Sollwert der Ladung transferiert wird.

In diesem letztgenannten Grenzfall zwischen asymptotischem und einpendelndem Erreichen des Sollwerts wird der Endzustand zeitoptimal eingenommen, beachtenswerterweise aber ohne der Gleitfläche der Ladungsregelung (4.22) zu folgen. Die Simulation belegt also, daß die Gleitbedingung keineswegs immer erfüllt sein muß, um die Regelziele zu erfüllen und um ein optimales Reglerverhalten zu gewährleisten.



Mit der Beziehung (4.26) ist die maximale Reglerverstärkung nur für eine bestimmte Sprungamplitude  $Q_{\text{Soll}}$  ausgelegt. Wie der Regler bei gleicher Parametrierung auf kleinere Sprungamplituden reagiert, verdeutlicht die obere Zeile der **Abbildung 4.13**. Die Überschinger der Regelgröße deuten darauf hin, daß der Verstärkungsfaktor für kleinere Endwerte der Ladung zu groß gewählt ist.

Um Überschinger in der Sprungantwort des Reglers in jedem Falle auszuschließen, ergibt eine Grenzwertbetrachtung

$$k_{\max} = \lim_{Q_{\text{Soll}} \rightarrow 0} k_{\text{opt}}(Q_{\text{Soll}}) = \frac{1}{\sqrt{LC_P}} \quad (4.27)$$

für infinitesimal kleine Sollgrößen Sprünge einen oberen Grenzwert der Reglerverstärkung. Wie sich der Regler mit diesem Wert verhält, zeigt die untere Zeile in der **Abbildung 4.13**. Offensichtlich treten zwar keine Überschinger mehr auf, aber im Gegenzug wird der Endwert stärker verzögert erreicht.

Die nichtlinearen Eigenschaften des Injektors und die Effekte einer realen geregelten Endstufe führen dazu, daß eine endgültige Parameterwahl letztlich empirisch erfolgen muß, sei es mittels einer detaillierteren Simulation oder durch Untersuchung der Wechselwirkung zwischen der realen Strecke und dem realisierten Regler. Einige Untersuchungen an einer solchen realen Testumgebung belegen, daß die mit der Gleichung (4.26) berechneten Reglerparameter trotz der groben Näherungen sowohl des Aktors als auch des Stromreglers nur geringen Korrekturen um wenige Prozentpunkte bedürfen.

Die **Abbildung 4.14** zeigt exemplarisch zwei Messungen an einer realen Endstufe mit dem hier dargestellten Regelkonzept. Auf der linken Seite ist die Sprungantwort des Regelkreises zu sehen. Auch bei der gewählten Sprungamplitude von nur etwa der halben Nennladung ist kein Überschwingen des Reglers erkennbar. Auf der rechten Seite ist ergänzend ein glatter Ladungsverlauf vorgegeben, welcher zu dreiecksförmigen Lade- und Entladeströmen führt. Die Ladung des Aktors folgt hier der Vorgabe mit etwa  $12\mu\text{s}$  Verzögerung und erzielt dabei eine akzeptable Genauigkeit des Endwerts.

## 4.5 Ergebnisse

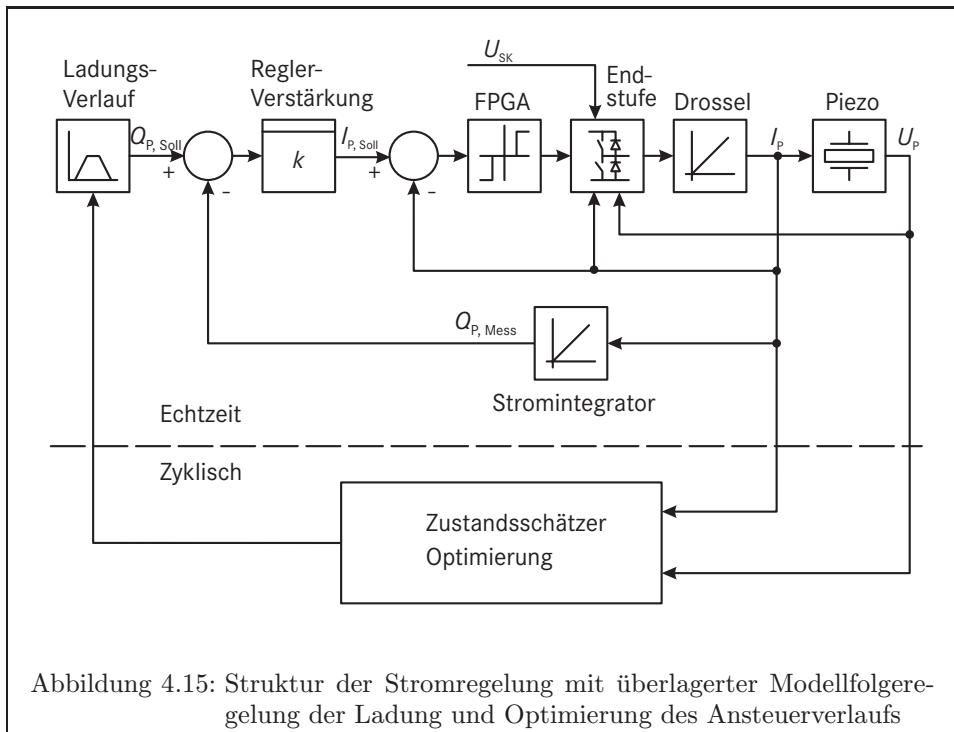
Zum Abschluß verdeutlicht dieses Unterkapitel anhand von Messungen die Wirksamkeit des beschriebenen Optimierungsverfahrens unter Verwendung der flexiblen Endstufe zur Ladungssteuerung an einem realen Injektor.

In der **Abbildung 4.15** ist schematisch dargestellt, wie die Ansteuerelektronik und das Optimierungsverfahren zusammenwirken. Ausgehend vom Strom- und Spannungsverlauf am Piezoaktor während einer Einspritzung bestimmt der Zustandsschätzer den Verlauf der Aktorkraft. Das Optimierungsverfahren bewertet die zeitlichen Verläufe des Aktorhubs, der Aktorkraft und des Aktorstroms, um iterativ den Ansteuerverlauf zu modifizieren und sukzessive zu verbessern. Der so bestimmte Ladungsverlauf liegt der Endstufe wiederum als Sollwertverlauf vor und wird bei der nächsten Einspritzung umgesetzt.

Inwieweit ist diese Struktur nun in der Lage, die zu Beginn gestellte Forderung nach einem günstigen Öffnungs- und Schließvorgang zu erfüllen? Die **Abbildungen 4.16** und **4.17** geben eine Antwort auf diese Frage. Hier ist dargestellt, welcher Stromverlauf aus der oben gezeigten Ladungsregelung und Verlaufsoptimierung für einen realen Injektor ohne und mit Kraftstoffdurchfluss ermittelt wird und wie das Ventil darauf mechanisch reagiert. Die Lade- und Entladezeiten betragen jeweils  $100\mu\text{s}$  in der oberen und  $150\mu\text{s}$  in der unteren Messung. Der in den Injektor eingepreßte Aktorstrom ist oben links über der Zeit aufgetragen, und rechts oben ist der gemessene Nadelhub des Injektors zu sehen. Im Vergleich zu den Meßergebnissen mit herkömmlichen rechteckförmigen Stromverläufen in den **Abbildungen 3.3** und **3.4** fällt auf, daß das Injektorverhalten durch das in dieser Arbeit beschriebene Ansteuerverfahren merklich verbessert wird. Durch einen geeigneten Ladungsverlauf sind um etwa  $50\mu\text{s}$  reduzierte Schaltzeiten realisierbar, ohne dabei einen schlechteren Einspritzverlauf oder eine größere Belastung des Injektors in Kauf nehmen zu müssen. Dies gilt in gleichem Maße für den trockenen Injektor als auch für den kraftstoffdurchflossenen.

Daß die Schwingungen der Injektormechanik nicht vollständig durch den Verlauf der elektrischen Ansteuerung eliminierbar sind, ließen schon die Simulationen im Kapitel 4.3 erahnen. Der Hauptgrund dafür dürfte darin liegen, daß der Aktor während des Öffnens und Schließens je nach Stromverlauf aufgrund der geringen Vorspannkraft des untersuchten Injektors zeitweise den Kraftschluß zum Gehäuse verliert. Vereinfachend ausgedrückt beschränken die Ablöseeffekte die möglichen Stellkräfte und verringern somit gleichermaßen die Steuerbarkeit des mechanischen Systems.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die an einem realen Injektor durchgeführten Untersuchungen in den Darstellungen 4.16 und 4.17 die in der Simulation prognostizierten Potentiale der Verbesserung des Einspritzverlaufs bestätigen.



Durch die Verwendung eines Zustandsschätzers ist keine zusätzliche Sensorik im Injektor erforderlich, was eine Implementierung des Verfahrens im Steuergerät eines Verbrennungsmotors begünstigt. Während des Motorbetriebes ist das Steuergerät dann in der Lage, ständig den Ansteuerverlauf zu optimieren und somit das gewünschte Einspritzverhalten bei verminderter Beanspruchung des Injektors sicherzustellen. Daneben ist das Verfahren aber auch dazu geeignet, die gesuchten Ansteuerverläufe einmalig während der Entwicklungsphase des Einspritzsystems an einem Prüfstand zu bestimmen und für die Umsetzung in den Motorsteuergeräten fest abzuspeichern. Diese Variante ist insbesondere dann vorzuziehen, wenn unabhängig vom Betriebspunkt des Motors oder der Laufzeit des Ventils keine wesentlichen Veränderungen des Injektorverhaltens zu erwarten sind.

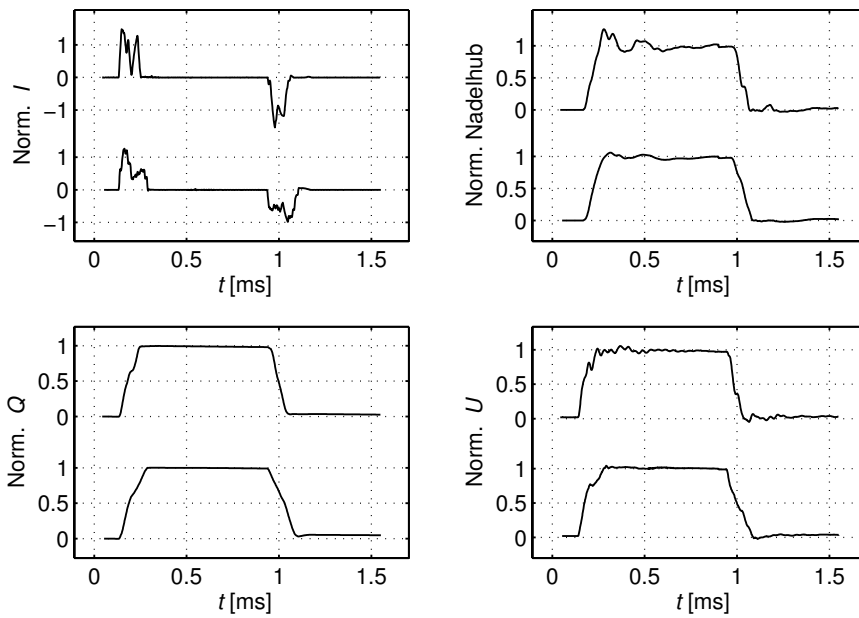


Abbildung 4.16: Gemessenes Verhalten eines Injektors ohne Kraftstoffdurchfluss mit optimalem Ansteuerungsverlauf bei Lade- und Entladezeiten von jeweils  $100\mu\text{s}$  (oben) und  $150\mu\text{s}$  (unten)

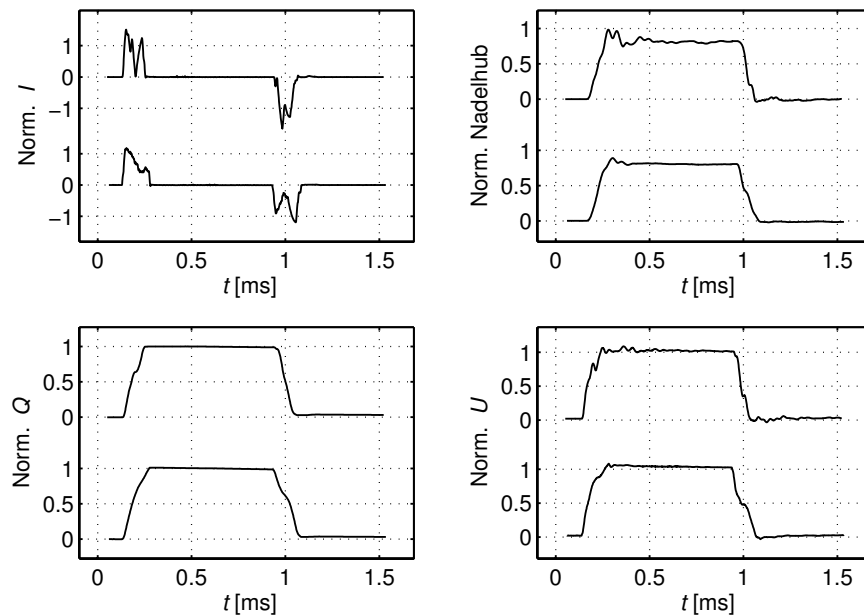


Abbildung 4.17: Gemessenes Verhalten eines kraftstoffdurchflossenen Injektors mit optimalem Ansteuerungsverlauf bei einem Kraftstoffdruck von 200bar und bei Lade- und Entladezeiten von jeweils  $100\mu\text{s}$  (oben) und  $150\mu\text{s}$  (unten)

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Ansteuerverfahren entwickelt, mit dem die Stellgeschwindigkeit piezoelektrisch aktiver Injektoren erhöht wird.

Dazu werden im Kapitel 2 zunächst verschiedene Ansätze für die mathematische Modellierung des Aktors hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit gegenübergestellt. Die Wandlermodelle der Kapitel 2.3 bis 2.5 bilden sowohl das Aktor- als auch das Sensorverhalten nach und sind gleichermaßen als Simulations- und als Detektionsmodell verwendbar. Daneben zeichnet sich das in dieser Arbeit entwickelte thermodynamisch basierte Modell des Polarisationszustands dadurch aus, daß es die charakteristischen Großsignaleigenschaften von Ferroelektrika, wie beispielsweise die Schmetterlingskurve, wiederzugeben vermag.

Diese Wandlermodelle dienen als Basis verschiedener mathematischer Modelle eines piezoelektrisch aktiven Injektors, die im Kapitel 3 formuliert und verifiziert werden. Die Untersuchungen ergeben, daß das vorgestellte verteiltparametrische Modell mit Hysteresenachbildung mit einem maximalen Fehler von 9 Prozent die geringsten Abweichungen zum Verhalten des realen Injektors aufweist.

Die Injektormodelle ermöglichen in der Simulation einen Einblick in die mechanischen Abläufe während einer Einspritzung. Ferner bilden sie im Kapitel 4 die Basis zur Erstellung eines Zustandsschätzers. Die Kenntnis der mechanischen Vorgänge im Ventil ermöglicht die Bestimmung eines optimalen Ansteuerungsverlaufs, welcher die während des Öffnungs- und Schließvorgangs auftretenden Kräfte minimiert. Zur Realisierung der berechneten Ansteuerungsverläufe wird eine geeignete Ansteuerschaltung beschrieben. Messungen an einem realen Injektor belegen die Wirksamkeit des vorgestellten Ansteuerverfahrens.





# Anhang A

## A.1 Geschichte der Piezoelektrizität

Der folgende Abriß der Geschichte der Piezoelektrizität ist im Wesentlichen [Piez02] und [Pief01] entnommen.

Auf ihren Reisen nach Indien und Ceylon kamen holländische Seefahrer als erste mit dem eigentümlichen Verhalten von Turmalin in Berührung. Turmalin zieht, in heiße Asche gelegt, an einer Seite Aschepartikel an und stößt sie an der gegenüberliegenden Seite ab. Nach einiger Zeit kehrt sich dieser Effekt des Anziehens und Abstoßens um. Fasziniert von dieser Erscheinung brachten die Seefahrer einige dieser Kristalle unter dem Namen *Ceylonmagnete* nach Europa. 1747 führt CARL LINNAEUS (1707–1778) für Turmalin den wissenschaftlichen Namen *lapis electricus* ein.

FRANZ AEPINUS (1724–1802) verwendet 1766 zur Beschreibung der elektrischen Polarität erhitzter Turmalinkristalle den Begriff der *Pyroelektrizität*. Bei seinen Untersuchungen im Jahre 1877 fand LORD WILLIAM THOMSON KELVIN (1824–1907) heraus, daß der weitaus größte Teil der pyroelektrischen Aufladung des Turmalins auf die Bildung von Oberflächenladungen durch die elastischen Beanspruchungen des Kristalls bei Temperaturänderungen und damit auf die piezoelektrischen Eigenschaften von Turmalin zurückzuführen ist. Dabei stützt er sich auf Arbeiten des französischen Mineralogen RENÉ JUST HAÜY (1734–1822), der 1817 erstmals die Bezeichnung *Piezoelektrizität* einführt (*piezo* stammt von dem griechischen Verb *piezein* und bedeutet übersetzt *Ich drücke*).

Basierend auf den theoretischen Arbeiten von RENÉ JUST HAÜY und LORD KELVIN zu den thermodynamischen Zusammenhängen in Kristallen entdeckten JACQUES und PIERRE CURIE (1856–1941 und 1859–1906) bei Experimenten mit Quarz, Rochellesalz und anderen Kristallen, daß auch diese unter einer mechanischen Spannung eine temperaturabhängige elektrische Feldstärke erzeugen. Ein Jahr nach der Veröffentlichung der Gebrüder CURIE im Jahre 1880 leitete LIPPMANN (1845–1921) aus thermodynamischen Prinzipien ab, daß es ebenfalls einen umgekehrten Effekt geben müsse, bei dem eine elektrische Feldstärke zu einer mechanischen Dehnung führt. Dieser Effekt wurde kurz darauf von JACQUES und PIERRE CURIE experimentell nachgewiesen und später als inverser piezoelektrischer Effekt bezeichnet.

In den darauffolgenden 25 Jahren fanden verstärkt Untersuchungen auf dem Forschungsgebiet der Piezoelektrizität statt, welche 1910 von WOLDEMAR VOIGT (1850–1919) in dem *Lehrbuch der Kristallphysik* zusammengefaßt wurden [Voig66].

Während der Elektromagnetismus zu dieser Zeit schon in vielen Bereichen des täglichen und wissenschaftlichen Lebens Einzug gehalten hatte, fand die Piezoelektrizität lange keinen Weg aus den Forschungslabors hin zu einer technischen Verwendung.

Name	Strukturformel	CURIE- Temperatur	Dehnung pro Feldstärke
Quarz	SiO <sub>2</sub>	570°C	$2...7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}$
Seignettesalz	NaKC <sub>4</sub> H <sub>4</sub> O <sub>6</sub> · H <sub>2</sub> O	24°C	$170 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}$
Bariumtitanat	BaTiO <sub>3</sub>	120°C	$80...190 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}$
Bleizirkonat- titanat	PbZr <sub>x</sub> Ti <sub>(1-x)</sub> O <sub>3</sub>	180°C...400°C	$50...760 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}}{\text{V}}$

Tabelle A.1: Einige piezoelektrische Materialien nach [Fasc94], [SoSt74]

Zu obskur war diese Eigenschaft der Materie und vielen erschienen die thermodynamischen Beziehungen zu kompliziert, um einen Nutzen erkennen zu können. Als Erster setzte PAUL LANGEVIN (1872–1946) im Jahr 1917 Quarzkristalle zur Konstruktion eines Unterwasserecholots ein, wobei er ein Mosaik aus Piezoelementen mit einem Gleichstrompuls zum Schwingen anregte und die vom Meeresboden reflektierten Druckwellen mit einem zweiten ähnlichen Komposit empfing. Diese aufseherregende und während des ersten Weltkrieges bedeutsame Erfindung eröffnete der Piezoelektrizität nicht nur das breite Anwendungsgebiet der Schallwandlung, sondern ermutigte Forscher in aller Welt, ihre Kreativität diesem Thema zu widmen. Nur zwei Jahre später nutzte WALTER G. CADY (1874–1973) die große Güte von Quarz als elektromechanischer resonanter Schwinger zur Frequenzstabilisierung in einem MEISSNER-Oszillator.

Zu diesem Zeitpunkt beschränkte sich die Materialauswahl für piezoelektrische Aktoren und Sensoren noch auf die natürlichen Materialien. Im zweiten Weltkrieg entdeckten japanische Forscher auf der Suche nach neuen leistungsfähigen Dielektrika für elektrische Kondensatoren, daß bestimmte gesinterte Keramiken eine bis zu hundertfach höhere Dielektrizitätszahl aufweisen gegenüber bisher bekannten, natürlichen Kristallen. In Anlehnung an analoge Eigenschaften ferroelektrischer Materialien bezeichneten die Wissenschaftler die neu gefundene Gruppe der Piezoide als Ferroelektrika. Die Möglichkeit, piezoelektrische Werkstoffe mit den für die jeweilige Anwendung optimalen Eigenschaften synthetisch herzustellen, ebnete der Piezoelektrizität den Einzug in eine Vielzahl technischer Bereiche.

Die Alltäglichkeit piezoelektrischer Wandler zeigt sich heute in Bezeichnungen wie *elektrisches* Feuerzeug, *Kristall*-Tonabnehmer oder *Quarz*-Uhr. Darüber hinaus reicht die Vielfalt der Einsatzgebiete von Beschleunigungssensoren (beispielsweise in Kraftfahrzeugen) über Stellglieder in Pumpen und Ventilen (beispielsweise in Tintenstrahldruckern), Wandler (beispielsweise medizinische Vaporisatoren oder Abstandssensoren) und Dielektrika für Kondensatoren hoher Energiedichte bis hin zu Mikromanipulatoren (beispielsweise in Rastertunnelmikroskopen). Selbst in Tennisschlägern helfen Piezoaktoren, die physische Belastung des Spielers zu reduzieren, indem im Schlägerrahmen gezielt Gegenkräfte erzeugt werden [CaKM03].

Einige piezoelektrische Werkstoffe sind in der Tabelle A.1 gegenübergestellt.

## A.2 Tensorrechnung

Das Ziel einer jeden mathematischen Modellierung ist es, geeignete Gesetzmäßigkeiten für die Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen eines Systems zu formulieren, die das reale Verhalten möglichst genau wiederzugeben vermögen. Für einen Piezoaktor bedeutet dies beispielsweise, die Abhängigkeit einer Dehnung oder einer elektrischen Feldstärke von der Temperatur zu beschreiben.

Die Temperatur eines Körpers ist eine skalare Größe, denn sie besitzt einen Betrag von beispielsweise  $\vartheta = 273,16\text{K}$ , aber keine Richtung. Für den Vektor der elektrischen Feldstärke, welcher einen Betrag  $|\underline{E}|_2$  und eine Richtung  $\frac{\underline{E}}{|\underline{E}|_2}$  besitzt, wird zumeist die Vektorschreibweise  $\underline{E} = E_1 \underline{e}_1^K + E_2 \underline{e}_2^K + E_3 \underline{e}_3^K$  verwendet. Da die Feldlinien in positiven Ladungen entspringen und in negativen Ladungen münden, ist mit der Richtung des Feldes zugleich die Orientierung der Feldlinien festgelegt.

Im Gegensatz dazu ist die Dehnung eine gerichtete Größe, die zwar richtungsabhängig, aber nicht orientierungsabhängig ist. So ist beispielsweise ein Abschleppseil zwischen zwei Fahrzeugen ebenso in Fahrtrichtung gedehnt wie auch entgegen der Fahrtrichtung. Aus diesem Grunde wird für die mechanische Dehnung wie auch für die mechanische Druckspannung die Tensorschreibweise verwendet.

Tensoren sind mehrdimensionale Felder von Skalaren oder skalaren Funktionen, wobei Indizes die einzelnen Komponenten des Tensors adressieren. Ein Tensor erster Stufe

$$a_i \quad i \in [1, 3]$$

besitzt die drei skalaren Komponenten  $a_1, a_2$  und  $a_3$ . Analog steht ein Tensor zweiter Stufe

$$a_{ij} \quad i, j \in [1, 3]$$

für ein zweidimensionales Feld mit insgesamt 9 Skalaren. Eine Folgerung hieraus ist, daß  $a_i$  und  $a_{ij}$  zwei unterschiedliche Tensoren benennen.

Im Gegensatz zur Vektorrechnung, in der lediglich Skalare, Vektoren und Matrizen definiert sind, erlaubt die Tensorrechnung auch Tensoren höherer Stufe mit drei oder mehr Indizes. Übliche Bezeichnungen der Indizes sind die lateinischen Kleinbuchstaben zwischen  $i$  und  $v$ .

Gilt für einen Tensor dritter Stufe die Beziehung  $a_{ijk} = a_{kji}$ , so ist der Tensor symmetrisch bezüglich  $i$  und  $k$ . Wenn sich die Elemente eines Tensors beim Vertauschen zweier Indizes im Vorzeichen unterscheiden, nennt man den Tensor schief-symmetrisch bezüglich dieser Indizes. Im allgemeinen weist ein beliebiger Tensor höherer Stufe keine Symmetrie auf.

Zwei Tensoren können nur dann addiert werden, wenn sie von gleicher Stufe und von gleichen Typs sind. Mit den beiden Tensoren erster Stufe

$$\begin{aligned} a_i & \quad i \in [1, 3] \\ b_i & \quad i \in [1, 3] \end{aligned}$$

ergibt die Summe  $c_i = a_i + b_i$  einen weiteren Tensor erster Stufe  $c_i$  des gleichen Typs, wobei die Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + b_1 \\ c_2 &= a_2 + b_2 \\ c_3 &= a_3 + b_3 \end{aligned}$$

lautet. Hier wird deutlich, daß zwei Tensoren unterschiedlichen Typs

$$\begin{aligned} a_i & \quad i \in [1, 3] \\ d_i & \quad i \in [1, 6] \end{aligned}$$

nicht addiert werden können, da die Indizes von  $a_i$  und  $d_i$  für unterschiedliche Wertebereiche definiert sind. Ebenso ist eine Summe  $a_i + b_{ij}$  nicht definiert, weil  $a_i$  und  $b_{ij}$  nicht von gleicher Stufe sind.

Bezüglich der Addition zweier Tensoren gleichen Typs gilt das Kommutativgesetz

$$a_i + b_i = b_i + a_i$$

sowie das Assoziativgesetz.

$$(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$$

Die Multiplikation zweier Tensoren ergibt einen neuen Tensor, dessen Stufe durch die Art der Multiplikation selbst festgelegt wird. Das äußere Produkt  $c_{ij} = a_i b_j$  zweier Tensoren  $a_i$  und  $b_i$  erster Stufe ergibt einen Tensor  $c_{ij}$  zweiter Stufe.

$$\begin{array}{lll} c_{11} = a_1 b_1 & c_{12} = a_1 b_2 & c_{13} = a_1 b_3 \\ c_{21} = a_2 b_1 & c_{22} = a_2 b_2 & c_{23} = a_2 b_3 \\ c_{31} = a_3 b_1 & c_{32} = a_3 b_2 & c_{33} = a_3 b_3 \end{array}$$

Die Indizes  $i$  und  $j$  sind in diesem Beispiel freie Indizes.

Tritt bei zwei zu multiplizierenden Tensoren der gleiche Index bei beiden Faktoren auf, so ist das Ergebnis die Summe der elementweisen Produkte über diesen Index. Als Beispiel für ein solches kontrahierendes oder inneres Produkt ergibt  $c = a_i b_i$  einen Tensor  $c$  nullter Stufe, also ein Skalar, mit dem Wert

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad .$$

In diesem Fall wird  $i$  als Summationsindex bezeichnet und darf in dem Produkt nur genau zweimal vorkommen.

Darüber hinaus sind auch Kombinationen der beiden Varianten möglich, wie beispielsweise  $w_{ik} = u_{ij} v_{jk}$ , wo jedes Element von  $w_{ik}$  die Summe der Produkte von  $u_{ij}$  und  $v_{jk}$  über dem Summationsindex  $j$  ist. Das Ergebnis für die Komponente  $w_{12}$  ist in diesem Beispiel

$$w_{12} = u_{11} v_{12} + u_{12} v_{22} + u_{13} v_{32} \quad .$$

Gelegentlich besteht die Notwendigkeit, bei zwei Tensoren in einem Produkt den gleichen Index zu verwenden, über den jedoch nicht summiert werden soll. In diesem Fall wird der Index in Klammern geschrieben. Die Gleichung  $c_{(i)} = a_{(i)} b_{(i)}$  entspricht ausgeschrieben

$$\begin{aligned}c_1 &= a_1 b_1 \\c_2 &= a_2 b_2 \\c_3 &= a_3 b_3\end{aligned}$$

Für die Multiplikation gilt das Assoziativgesetz

$$\begin{aligned}a_i b_j c_k &= (a_i b_j) c_k = a_i (b_j c_k) \\a_i b_j c_j &= (a_i b_j) c_j = a_i (b_j c_j) \\a_{ij} b_{jk} c_{kl} &= (a_{ij} b_{jk}) c_{kl} = a_{ij} (b_{jk} c_{kl})\end{aligned}$$

sowie das Distributivgesetz

$$\begin{aligned}a_i (b_j + c_j) &= a_i b_j + a_i c_j \\a_i (b_i + c_i) &= a_i b_i + a_i c_i \\a_{(i)} (b_{(i)} + c_{(i)}) &= a_{(i)} b_{(i)} + a_{(i)} c_{(i)} \quad ,\end{aligned}$$

aber das Kommutativgesetz nur in Ausnahmefällen. Während die Reihenfolge der Schreibweise zwar vertauschbar ist

$$a_{ij} b_{jk} = b_{jk} a_{ij} \quad ,$$

gilt dies für die Reihenfolge der Abbildungen durch die Tensoren im Allgemeinen nur dann, wenn entweder beide symmetrisch oder beide schiefsymmetrisch sind.

$$a_{ij} b_{jk} = b_{ij} a_{jk} \quad \text{i.A. nur dann, wenn} \quad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \wedge b_{ij} = b_{ji} \\ \text{oder} \\ a_{ij} = -a_{ji} \wedge b_{ij} = -b_{ji} \end{cases}$$

Ein besonderer Tensor ist der KRONECKER-Tensor  $\delta_{ij}$ , der durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

definiert ist. Das innere Produkt eines Tensors erster Stufe mit dem KRONECKER-Tensor ergibt wieder den Tensor selbst.

$$a_i = \delta_{ij} a_j$$

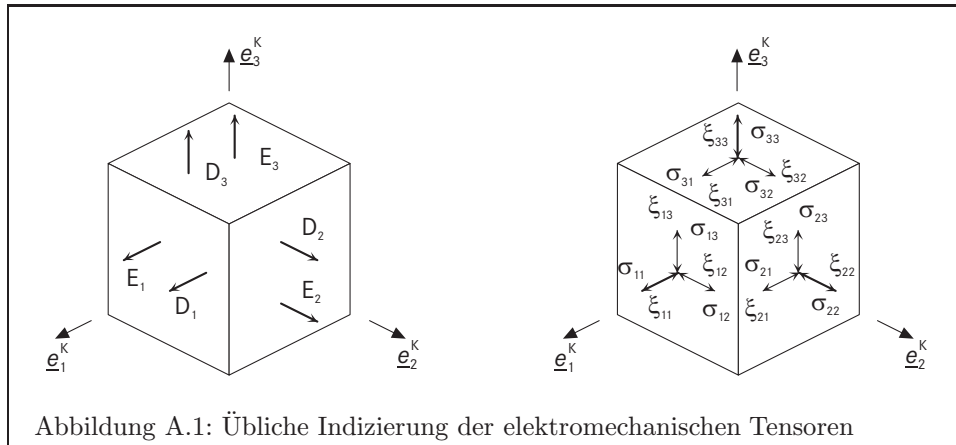
An dieser Stelle sind bereits einige Analogien zwischen Tensorrechnung und Vektorrechnung deutlich geworden. Dennoch gelten einige Operationen der Vektorrechnung nicht unmittelbar in der Tensorrechnung. So ist die Inverse eines Tensors nicht definiert. Sie wird in dieser Arbeit jedoch benötigt und in Anlehnung an die Vektorrechnung wie folgt definiert:

Seien  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  zwei quadratische Tensoren zweiter Stufe mit  $i, j \in [1, N]$ . Gilt

$$a_{ij} b_{jk} = b_{ij} a_{jk} = \delta_{ik} \quad ,$$

dann und nur dann ist  $a_{ij}$  der inverse Tensor zu  $b_{ij}$  und  $b_{ij}$  der inverse Tensor zu  $a_{ij}$ .

$$a_{ij} = b_{ij}^{-1} \quad \text{und} \quad b_{ij} = a_{ij}^{-1}$$



Die Berechnung des inversen Tensors erfolgt nach den gleichen Methoden wie in der Matrizenrechnung, beispielsweise dem Adjungierten- oder Austauschverfahren. Die Inverse ermöglicht es nun, Produkte nach Faktoren aufzulösen.

$$\begin{aligned}
 c_i &= a_{ij} b_j \\
 a_{ij}^{-1} c_j &= a_{ij}^{-1} a_{jk} b_k \\
 a_{ij}^{-1} c_j &= \delta_{ij} b_j \\
 a_{ij}^{-1} c_j &= b_i
 \end{aligned}$$

Sowohl in der Tensorrechnung als auch in der Vektorrechnung ist die Inverse eines Tensors erster Stufe beziehungsweise eines Vektors nicht definiert. Um trotzdem ein Gleichungssystem

$$c_{(i)} = a_{(i)} b_{(i)} \quad \text{mit } i \in [1, N]$$

nach  $b_i$  aufzulösen, wird ein Tensor erster Stufe mit den Kehrwerten der Elemente von  $a_i$  benötigt. In dieser Arbeit wird dafür die Schreibweise  $a_i^{-1}$  verwendet, wodurch  $b_i$  als

$$b_{(i)} = a_{(i)}^{-1} c_{(i)} \quad \forall i$$

angegeben werden kann. Auf ähnliche Weise sind auch Systeme der Art

$$c_{i(k)} = a_{ij(k)} b_{j(k)} \quad \text{mit } k \in [1, N], \quad i, j \in [1, M]$$

mit einem Tensor  $a_{ij(k)}$  dritter Stufe nach  $b_{i(k)}$  lösbar, indem die Gleichung als eine Gruppe durch  $k$  indizierter linearer Untersysteme interpretiert wird. Das Ergebnis lautet

$$b_{i(k)} = a_{ij(k)}^{-1} c_{j(k)}$$

mit

$$a_{ij(k)}^{-1} a_{jl(k)} = \delta_{il} \quad \forall k \quad .$$

Auch ein Gleichungssystem des Typs

$$c_{ij} = a_{ijkl} b_{kl} \quad \text{mit } i, k \in [1, N], \quad j, l \in [1, M]$$

kann nach  $b_{ij}$  umgestellt werden, indem es durch eine Umsortierung der Tensorelemente in die Form

$$c_i = a_{ij} b_j \quad \text{mit } i, j \in [1, N \cdot M]$$

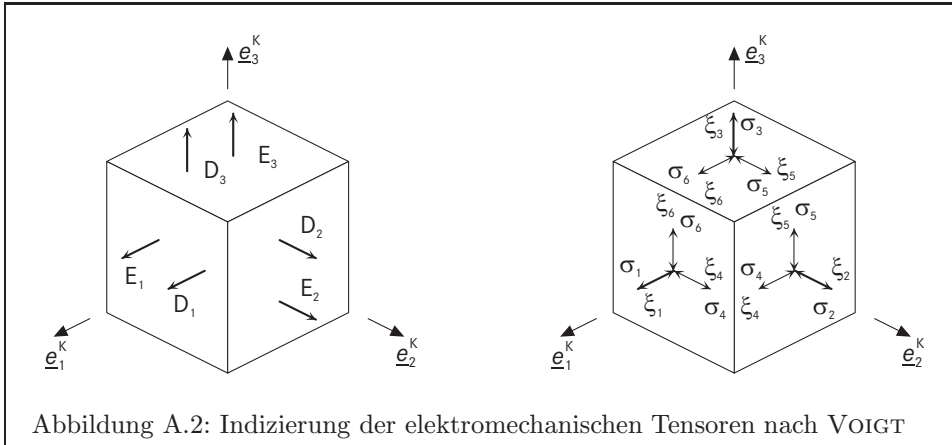


Abbildung A.2: Indizierung der elektromechanischen Tensoren nach VOIGT

gebracht und in dieser berechnet wird. Die Rückführung in die ursprüngliche Form ergibt das gesuchte

$$b_{ij} = a_{ijkl}^{-1} c_{kl} \quad .$$

Obwohl die Schreibweise  $a_{ijkl}^{-1}$  nicht gebräuchlich ist, soll sie in dieser Arbeit dennoch als Beschreibung der ihr zugrundeliegenden Operation helfen, die auftretenden Tensorgleichungen übersichtlich zu gestalten.

Vereinheitlichend lassen sich auch gerichtete physikalische Größen als Tensoren darstellen. Die Vektoren der elektrischen Flußdichte  $\underline{D}$  und der Feldstärke  $\underline{E}$  beispielsweise sind in einem kartesischen Koordinatensystem als Summe

$$\begin{aligned} \underline{D} &= D_1 \underline{e}_1^K + D_2 \underline{e}_2^K + D_3 \underline{e}_3^K \\ \underline{E} &= E_1 \underline{e}_1^K + E_2 \underline{e}_2^K + E_3 \underline{e}_3^K \end{aligned}$$

darstellbar, wie die linke Hälfte der **Abbildung A.1** erläutert. Mit der Zusammenfassung der kartesischen Einheitsvektoren in dem Tensor  $\underline{e}_i^K$  lassen sich  $\underline{D}$  und  $\underline{E}$  auch bequem als Tensorprodukte von  $D_i$  respektive von  $E_i$  und  $\underline{e}_i^K$  schreiben.

$$\underline{D} = D_i \underline{e}_i^K \quad \underline{E} = E_i \underline{e}_i^K$$

Die Dehnung  $\xi_{ij}$  und die mechanische Druckspannung  $\sigma_{ij}$  sind symmetrische Tensoren zweiter Stufe, wobei die Elemente der Diagonalen die Normalkomponenten und die übrigen Elemente die Scherkomponenten sind (rechte Hälfte der **Abbildung A.1**). Je nach Komplexität der physikalischen Beziehungen können so recht unübersichtliche Gleichungen entstehen. Das HOOKEsche Gesetz lautet dann

$$\xi_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{mit} \quad i, j, k, l \in [1, 3]$$

mit dem Elastizitätsmodul  $s_{ijkl}$  als einem Tensor vierter Stufe.

Um die Lesbarkeit zu verbessern, bietet sich die VOIGT-Notation an [Voig66], welche die Symmetrie der Spannungs- und Dehnungstensoren ausnutzt (rechte Hälfte der **Abbildung A.2**). Mit

$$\begin{array}{ll}
 \xi_1 = \xi_{11} & \sigma_1 = \sigma_{11} \\
 \xi_2 = \xi_{22} & \sigma_2 = \sigma_{22} \\
 \xi_3 = \xi_{33} & \sigma_3 = \sigma_{33} \\
 \xi_4 = 2 \xi_{12} = 2 \xi_{21} & \sigma_4 = 2 \sigma_{12} = 2 \sigma_{21} \\
 \xi_5 = 2 \xi_{23} = 2 \xi_{32} & \sigma_5 = 2 \sigma_{23} = 2 \sigma_{32} \\
 \xi_6 = 2 \xi_{31} = 2 \xi_{13} & \sigma_6 = 2 \sigma_{31} = 2 \sigma_{13}
 \end{array}$$

reduziert sich so die Anzahl der Indizes auf die Hälfte. So wird beispielsweise auch der Elastizitätsmodul  $s_{ij}$  im HOOKESchen Gesetz

$$\xi_i = s_{ij} \sigma_j \quad \text{mit } i, j \in [1, 6]$$

zu einem Tensor zweiter Stufe.



# Tabellenverzeichnis

2.1	Einige Bauformen piezoelektrischer Aktoren nach [JeKW97] . . . . .	26
3.1	Linearisierte Teilmodelle der Injektormechanik für die Stellungen <i>Geschlossen</i> und <i>Geöffnet</i> . . . . .	67
3.2	Physikalische Bedeutungen der Elemente der Zustandsvektoren der konzentriertparametrischen Ersatzanordnungen . . . . .	67
3.3	Physikalische Bedeutungen der Elemente der Zustandsvektoren der konzentriertparametrischen Ersatzanordnungen mit Hysterese . . . . .	71
A.1	Einige piezoelektrische Materialien nach [Fasc94], [SoSt74] . . . . .	114



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Zylindergeometrie direktspritzender OTTO-Motoren nach [KKBA97]	16
1.2	Angestrebter und gemessener zeitlicher Nadelhubverlauf eines Piezoinjektors . . . . .	17
2.1	Piezoelektrizität der Perowskitstruktur am Beispiel des Bariumtitanats $\text{BaTiO}_3$ nach [SoSt74] und [Fasc94] . . . . .	22
2.2	Domänen in Bariumtitanat [Arlt90] . . . . .	23
2.3	Polarisationsänderungen in Ferroelektrika nach [Gauc01] . . . . .	24
2.4	Aufbau eines gesinterten, piezoelektrischen Stapelaktors . . . . .	25
2.5	Struktur des Meßplatzes für Piezoaktoren [Schu01] . . . . .	27
2.6	Messungen zur Parametrierung der Aktormodelle . . . . .	27
2.7	Thermodynamik in Ferroelektrika: Das HECKMANN-Diagramm nach [Pief01], [Gauc01] . . . . .	29
2.8	Simulationen eines linearen Modells der Piezoelektrizität und Vergleich mit Messungen . . . . .	31
2.9	Messungen der aufgenommenen elektrischen und verrichteten mechanischen Energien eines Piezoaktors . . . . .	33
2.10	Messungen der Hysterese eines Piezoaktors . . . . .	33
2.11	Simulation eines Hysterese Modells nach DAHL und WILDER . . . . .	35
2.12	Simulationen eines Modells der Piezoelektrizität mit Hysterese nach DAHL und WILDER und Vergleich mit Messungen . . . . .	39
2.13	Modellierung der Hysterese mit linearen Spiel-Operatoren nach [GoCe97] . . . . .	41
2.14	Simulationen eines Modells der Piezoelektrizität mit linearen Spiel-Operatoren und Vergleich mit Messungen . . . . .	42
2.15	Stapelwandler, Korngefüge mit gesinterten Elektroden, Domänenstruktur an einer Korngrenze, Ionengitter . . . . .	45
2.16	Kartesische Einheitsvektoren und Einheitsvektoren der Polarisationsrichtungen in der tetragonalen Phase . . . . .	46
2.17	Simulationen der Entropie $S$ nach Gleichung (2.39) in Abhängigkeit von der Polarisation $\phi_p$ unter verschiedenen elektrischen und mechanischen Lastbedingungen . . . . .	52

2.18	Messungen der ferroelektrischen Schmetterlingskurve in [Zhou03] . . .	53
2.19	Charakteristisches Verhalten des thermodynamischen Modells des Polarisationszustands ohne Sättigung und ohne Hysterese . . . . .	54
2.20	Charakteristisches Verhalten des thermodynamischen Modells des Polarisationszustands mit Sättigung und mit Hysterese . . . . .	55
2.21	Simulationen eines Modells des Polarisationszustands mit Hysterese und mit Sättigung und Vergleich mit Messungen . . . . .	56
3.1	Bauteile eines Injektors nach [GKMM01] . . . . .	62
3.2	Meßaufbau für Piezoinjektoren . . . . .	63
3.3	Gemessenes Verhalten eines Injektors ohne Kraftstoffdurchfluss bei Lade- und Entladezeiten von jeweils $100\mu s$ und $150\mu s$ . . . . .	64
3.4	Gemessenes Verhalten eines kraftstoffdurchflossenen Injektors bei einem Kraftstoffdruck von 200bar und bei Lade- und Entladezeiten von jeweils $100\mu s$ und $150\mu s$ . . . . .	64
3.5	Modellierung der Injektormechanik durch eine Ersatzanordnung mit konzentrierten Massen . . . . .	66
3.6	Struktur des mathematischen Modells der Ersatzanordnung mit konzentrierter Masse . . . . .	69
3.7	Simulationen der Injektorersatzanordnung mit konzentrierter Masse und Vergleich mit Messungen . . . . .	70
3.8	Simulationen der Injektorersatzanordnung mit konzentrierter Masse und Hysteresenachbildung und Vergleich mit Messungen . . . . .	73
3.9	Explosionsskizze der eindimensionalen Injektorersatzanordnung . . .	74
3.10	Eindimensionale Injektorersatzanordnung. In dieser Darstellung ist das Ventil geschlossen . . . . .	75
3.11	Simulationen der eindimensionalen Injektorersatzanordnung und Vergleich mit Messungen . . . . .	81
3.12	Simulationen der eindimensionalen Injektorersatzanordnung mit Hysteresenachbildung und Vergleich mit Messungen . . . . .	84
3.13	Simulationen der eindimensionalen Injektorersatzanordnung mit Hysteresenachbildung eines kraftstoffdurchströmten Injektors bei 200bar und Vergleich mit Messungen . . . . .	85
3.14	Möglichkeiten der Injektormodellierung . . . . .	86
3.15	Berechnete Bewegungen und Kräfte in der Injektorersatzanordnung .	87
4.1	Deterministik des Injektorverhaltens. In jedem Graphen sind die Verläufe von zehn aufeinanderfolgenden Einspritzungen übereinander gezeichnet . . . . .	90
4.2	Ein- und Ausgangsgrößen des Zustandsschätzers . . . . .	92
4.3	Mathematische Struktur des Linearized KALMAN-Filters für eine schaltende Ersatzanordnung des Injektors . . . . .	94
4.4	Simulationen des Zustandsschätzers und Vergleich mit Messungen .	95

4.5	Zusammensetzung des Gütemaßes. Während des Öffnens und des Schließens wird der Verlauf der Aktorkraft bewertet, im geöffneten und im geschlossenen Zustand die Bewegung der Nadel . . . . .	97
4.6	Simulativer Vergleich zwischen einer herkömmlichen Ansteuerung und einem optimalen Verlauf bei Anstiegs- und Abfallzeiten von jeweils $100\mu s$ . . . . .	99
4.7	Simulativer Vergleich zwischen einer herkömmlichen Ansteuerung und einem optimalen Verlauf bei Anstiegs- und Abfallzeiten von jeweils $150\mu s$ . . . . .	99
4.8	Simulativer Vergleich zwischen einer herkömmlichen Ansteuerung und einem optimalen Verlauf bei Anstiegs- und Abfallzeiten von jeweils $200\mu s$ . . . . .	100
4.9	Vorrichtung zum Laden und Entladen eines piezoelektrischen Elements nach [ReHo97] . . . . .	102
4.10	Struktur der Stromregelung nach [ReHo97] . . . . .	103
4.11	Kaskadierte Struktur der Stromregelung mit überlagerter Modellfolgeregelung der Ladung . . . . .	104
4.12	Sprungantworten des geschlossenen Regelkreises für die Verstärkungsfaktoren $k = 0,1 \cdot k_{opt}$ , $k = k_{opt}$ und $k = 10 \cdot k_{opt}$ . . . . .	105
4.13	Sprungantworten des geschlossenen Regelkreises für ein $k_{max}$ nach Gleichung (4.26) und nach Gleichung (4.27) bei verschiedenen Sprungamplituden der Führungsgröße $Q_{P, Soll}$ . . . . .	106
4.14	Messungen an der ladungsgeregelten Endstufe . . . . .	107
4.15	Struktur der Stromregelung mit überlagerter Modellfolgeregelung der Ladung und Optimierung des Ansteuerverlaufs . . . . .	109
4.16	Gemessenes Verhalten eines Injektors ohne Kraftstoffdurchfluss mit optimalem Ansteuerverlauf bei Lade- und Entladezeiten von jeweils $100\mu s$ und $150\mu s$ . . . . .	110
4.17	Gemessenes Verhalten eines kraftstoffdurchflossenen Injektors mit optimalem Ansteuerverlauf bei einem Kraftstoffdruck von 200bar und bei Lade- und Entladezeiten von jeweils $100\mu s$ und $150\mu s$ . . . . .	110
A.1	Übliche Indizierung der elektromechanischen Tensoren . . . . .	118
A.2	Indizierung der elektromechanischen Tensoren nach VOIGT . . . . .	119



# Literaturverzeichnis

- [AFMS05] Allmendinger, K.; Flämig-Vetter, T.; Mehlfeldt, D.; Stöhr, G. et al.: *Verfahren zur Ermittlung der Position eines beweglichen Verschlusselementes eines Einspritzventils*, Offenlegungsschrift DE 10 2004 023 545 A1, DaimlerChrysler AG, 2005
- [Arlt90] Arlt, G.: *Twinning in ferroelectric and ferroelastic ceramics*, Journal of Material Science, Vol. 25, Seiten 2655-2666, 1990
- [Back05] Back, M.: *Prädiktive Antriebsregelung zum energieoptimalen Betrieb von Hybridfahrzeugen*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2005
- [Bosc03] Robert Bosch GmbH: *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch*, 25. Auflage, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2003, ISBN 3-528-23876-3
- [BSMM01] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2001, ISBN 3-8171-2005-2
- [CaKM03] Cass, R. B.; Khan, A.; Mohammadi, F.: *Innovative Ceramic-Fiber Technology Energizes Advanced Cerametrics*, The American Ceramic Society, American Ceramic Society Bulletin, Seiten 9701-9706, 2003
- [CoHo86] Coleman, B. D.; Hodgdon, M. L.: *A constitutive relation for rate-independent hysteresis in ferromagnetically soft materials*, Int. J. Eng. Sci., Vol. 24(6), Seiten 897-919, 1986
- [CrDe98] Croft, D.; Devasia, S.: *Hysteresis and Vibration Compensation for Piezoactuators*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21 No. 5, Seiten 710-717, 1998
- [CrSD01] Croft, D.; Shed, G.; Devasia, S.: *Creep, Hysteresis, and Vibration Compensation for Piezoactuators: Atomic Force Microscopy Application*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 123, Seiten 35-43, 2001
- [Daim04] DaimlerChrysler AG: *Piezo und die Kunst der Einspritzung*, DaimlerChrysler AG, <http://www.daimlerchrysler.com>, 2004
- [DaWi85] Dahl, P. E.; Wilder, R.: *Math model of hysteresis in piezo-electric actuators for precision pointing systems*, Guidance and Control, Vol. 57, 1985
- [Devo54] Devonshire, A. F.: *Theory of Ferroelectrics*, Advances in Physics, Vol. 3, No. 10, Seiten 86-130, 1954

- [DeZM88] DeCarlo, R. A.; Zak, S. H.; Matthews, G. P.: *Variable Structure Control of Multivariable Systems*, Proceedings of the IEEE, Vol. 76, No. 3, Seiten 212-232, 1988
- [Dirs00] Dirscherl, K.: *Online Correction of Scanning Probe Microscopes with Pixes Accuracy*, Dissertation, Technical University of Denmark, Lyngby, 2000, ISSN 0909-3192
- [Fasc94] Fasching, G.: *Werkstoffe für die Elektrotechnik: Mikrophysik, Struktur, Eigenschaften*, 3. Auflage, Springer Verlag, Wien, 1994, ISBN 3-211-82610-6
- [Ferr00] Ferroperm: *Ceramic Multilayer Actuator*, Produktinformation, Ferroperm Piezoceramics A/S, Kvistgard, 2000
- [FGKE01] Fischer, B.; Gottlieb, B.; Kappel, A.; Ulivieri, E.: *DosierVorrichtung*, Offenlegungsschrift DE 101 10 678 A 1, Siemens AG, 2001
- [FJMS05] Flämig-Vetter, T.; Joos, K.; Mehlfeldt, D.; Schaupp, U.: *Verfahren zur Kompensation von Injektorstreuungen bei Einspritzventilen*, Offenlegungsschrift DE 103 51 141 A1, DaimlerChrysler AG und Robert Bosch GmbH, 2005
- [Fläm97] Flämig-Vetter, T.: *Untersuchungen zum Großsignalbetrieb von Piezoaktoren für Kfz-Anwendungen*, Dissertation, Technische Universität Dresden, 1997
- [FoCa98] Fotinich, Y.; Carman, G. P.: *Modeling of Polarization Switching in Piezoceramics*, SPIE Conference on Mathematics and Control in Smart Structures, San Diego, California, Seiten 96-108, 1998
- [Foel94] Föllinger, O.: *Regelungstechnik*, Hüthig Verlag, Heidelberg, 1994, ISBN 3-7785-2336-8
- [FrBL03] Fröhlich, K.; Borgmann, K.; Liebl, J.: *Potenziale zukünftiger Verbrauchstechnologien*, 24. Wiener Motorensymposium, Seiten 220-235, 2003
- [Gauc01] Gauckler, L. J.: *Funktionskeramik*, Vorlesungsscript, Professur für nichtmetallische Werkstoffe, ETH Zürich, 2001
- [GeJo97] Ge, P.; Jouaneh, M.: *Generalized Preisach model for hysteresis nonlinearity of piezoceramic actuators*, Precision Engineering, Vol. 20, Heft 2, Seiten 99-111, 1997
- [Gelb74] Gelb, A.: *Applied Optimal Estimation*, The Analytic Science Corporation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974, ISBN 0 262 20027-9
- [Gerd01] Gerdin, M.: *Control of a Fuel Injection Valve with a Piezoelectric Stack Actuator*, Examensarbeit, Reg nr. LiTH-ISY-EX-3219, Linköpings Universitet, Schweden, 2001
- [GeVo93] Gerthsen, C.; Vogel, H.: *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [GJMH97] Goldberg, R. L.; Jurgens, M. J.; Mills, D. M.; Henriquez, C. S. et al.: *Modeling of Piezoelectric Multilayer Ceramics Using Finite Element Analysis*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 44, No. 6, Seiten 1204-1214, 1997



- [GKMM01] Gottlieb, B.; Kappel, A.; Mock, R.; Meixner, H. et al.: *Dosier-ventil*, Patentschrift DE 199 40 055 C 1, Siemens AG, 2001
- [GoCe97] Goldfarb, M.; Celanovic, N.: *A Lumped Parameter Electromechanical Model for Describing the Nonlinear Behavior of Piezoelectric Actuators*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 119, Seiten 478-485, 1997
- [GoJo99] Goldfarb, M.; Jones, L. D.: *On the Efficiency of Electric Power Generation with Piezoelectric Ceramic*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 121, Seiten 566-571, 1999
- [GrAn93] Grewal, M. S.; Andrews, A. P.: *Kalman Filtering - Theory and Practice*, Prentice Hall, New Jersey, 1993, ISBN 0-13-211335-X
- [GUSK99] Goebel, H.; Ullmann, M.; Schindler, G.; Kastner, M.: *Distribution Function Integral Method for Modeling Ferroelectric Devices*, International Conference on Solid State Devices and Materials, Tokyo, Seiten 386-387, 1999
- [HaFr91] Haessig, D. A.; Friedland, B.: *On the modelling and simulation of friction*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 113(3), Seiten 354-362, 1991
- [Hall01] Hallor, M.: *Observer for a Fuel Injection Valve with a Piezoelectric Stack Actuator*, Examensarbeit, Reg nr. LiTH-ISY-EX-3220, Linköpings universitet, Schweden, 2001
- [Hein98] Heinrich, J.: *Modellierung und Simulation piezokeramischer Aktoren als Grundlage zur Entwicklung alternativer Steuer- und Regelprinzipien*, Dissertation, Otto-von Guericke-Universität Magdeburg, 1998, ISBN 3-932633-42-3
- [Heri92] Hering, E.; Martin, R.; Stohrer, M.: *Physik für Ingenieure*, VDI Verlag, Düsseldorf, 1992, ISBN 3-18-401227-1
- [HuWe97] Hughes, D.; Wen, J. T.: *Preisach Modeling of Piezoelectric and Shape Memory Alloy Hysteresis*, Smart Materials and Structures, Heft 3, Seiten 287-300, 1997
- [HWKP01] Heil, B.; Weinig, H. K.; Karl, G.; Panten, D. et al.: *Verbrauch und Emissionen - Reduzierungskonzepte beim Otto-Motor*, MTZ, 12/2001, Seiten 1022-1035, 2001
- [Jano99] Janocha, H.: *Neue Aktoren aus Sicht der Mechatronik*, Kolloquium Aktoren in Mechatronischen Systemen, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 743, Seiten 1-13, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1999
- [JaMa00] Janocha, H.; May, C.: *Wirkungsgradoptimierte Piezoantriebe für hochdynamische Anwendungen in der Flugzeughydraulik*, Abschlussbericht BMBF-Projekt 16 SV 563/4, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2000
- [JeKW97] Jendritza, J.; Karthe, W.; Wehrsdorfer, E.: *Aktoren in Bewegung*, F&M Mechatronik, Ausgabe 105, Seiten 623-632, Carl Hanser Verlag, München, 1997

- [Jend99] Jendritza, J.: *Piezoaktoren im Großsignalbetrieb*, F&M Mecha-  
tronik, Ausgabe 107, Seiten 49-54, Carl Hanser Verlag, München,  
1999
- [KaJi98] Kamlah, M.; Jiang, Q.: *A Model for PZT Ceramics under  
Uni-Axial Loading*, Wissenschaftlicher Bericht FZKA 6211, For-  
schungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 1998
- [KaSW97] Kasper, R.; Schröder, J.; Wagner, A.: *Schnellschaltendes Hy-  
draulikventil mit piezoelektrischem Stellantrieb*, Ölhydraulik und  
Pneumatik, Ausgabe 41, Nr. 9, Seiten 694-698, 1997
- [Kirs01] Kirschbaum, F.: *Modellbildung und dynamische Optimierung  
schnellschaltender magnetomechanischer Aktoren*, Dissertation,  
Universität-Gesamthochschule Siegen, 2001
- [Kitt02] Kittel, C.: *Einführung in die Festkörperphysik*, 13. Auflage, Ol-  
denbourg Verlag München, 2002, ISBN 3-486-27219-5
- [KKBA97] Karl, G.; Kemmler, R.; Bargende, M.; Abthoff, J.: *Analysis of a  
Direct Injected Gasoline Engine*, SAE International Congress &  
Exposition, Detroit, USA, SAE-Number 970624, 1997
- [KISK99] Klotins, E.; Stemberg, A.; Kundzins, K.: *Macroscopic Elastic and  
Electric Fields in Ferroelectrics: Phenomenology and Simulations*,  
Ferroelectrics, Vol. 235, Seiten 97-110, 1999
- [KlSo04] Kling, D.; Sokollik, F.: *Automatisierungstechnik II*, Vorlesungs-  
script, Fachhochschule Merseburg, 2004
- [Kneu88] Kneubühl, F. K.: *Repetitorium der Physik*, Teubner Verlag,  
Stuttgart, 1988
- [Koch88] Koch, J.: *Piezoxide (PXE) - Eigenschaften und Anwendungen*,  
Hüthig Verlag, Heidelberg, 1988, ISBN 3-7785-1755-4
- [KoSK99] Koops, K. R.; Scholte, P. M. L. O.; de Koning, W. L.: *Observation  
of zero creep in piezoelectric actuators*, Journal of applied Physics  
A 68, Seiten 691-697, 1999
- [KuJa98] Kuhnen, K.; Janocha, H.: *Compensation of the Creep and Hy-  
steresis Effects of Piezoelectric Actuators with Inverse Systems*,  
6th International Conference on New Actuators, Bremen, 1998
- [KuJa99] Kuhnen, K.; Janocha, H.: *Nutzung der inhärenten sensorischen  
Eigenschaften von piezoelektrischen Aktoren*, Technisches Messen  
tm66, Nr. 4, Seiten 132-138, 1999
- [LiLi01] Liu, J.-M.; Liu, Z. G.: *Dynamic Hysteresis in Multi-Domain  
POTTS Polar Systems: Monte-Carlo Simulation and Some Ex-  
periments*, Ferroelectrics, Vol. 252, Seiten 31-40, 2001
- [MaGa97] Main, J. A.; Garcia, E.: *Piezoelectric Stack Actuators and Con-  
trol System Design: Strategies and Pitfalls*, Journal of Guidance,  
Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 3, Seiten 479-485, 1997

- [Mark98] Marklein, R.: *Numerische Verfahren zur Modellierung von akustischen, elektromagnetischen, elastischen und piezoelektrischen Wellenausbreitungsproblemen im Zeitbereich basierend auf der Finiten Integrationstechnik*, Dissertation, Shaker Verlag, Aachen, 1998
- [Maye91] Mayergoyz: *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer Verlag, New York, 1991
- [McLa02] McMeeking, R. M.; Landis, C. M.: *A Phenomenological multi-axial Constitutive Law for Switching in Polycrystalline Ferroelectric Ceramics*, International Journal of Engineering Science, Vol. 40, Seiten 15531577, 2002
- [MeWa04] Mehlfeldt, D.; Wagner, B.: *Verfahren zum Ansteuern eines piezoelektrischen Elements*, Offenlegungsschrift DE 103 11 269 A1, ContiTemic microelectronic GmbH und DaimlerChrysler AG, 2004
- [MeWa04b] Mehlfeldt, D.; Wagner, B.: *Verfahren zum Ansteuern eines piezoelektrischen Elements*, Patentschrift WO 2004/082116 A2, ContiTemic microelectronic GmbH, 2004
- [MeWa05] Mehlfeldt, D.; Wagner, B.: *Verfahren zur Bestimmung der Stellung eines durch einen Piezoaktor bewegbaren Verstellelements*, Offenlegungsschrift DE 103 47 102 A1, ContiTemic microelectronic GmbH und DaimlerChrysler AG, 2004
- [NoWr99] Nocedahl, J.; Wright, S. J.: *Numerical Optimization*, Springer Verlag, New York, 1999, ISBN 0-387-98793-2
- [Nybe99] Nyberg, M.: *Model Based Fault Diagnosis - Methods, Theory and Automotive Engine Applications*, Linköping Studies in Science and Technology., Dissertations No. 591, Linköping University, Schweden, 1999, ISBN 91-7219-521-5
- [OÅWG98] Olsson, H.; Åström, K. J.; de Wit, C. C.; Gäfvert, M.; Lischinsky, P.: *Friction Models and Friction Compensation*, European Journal of Control, 1998
- [PaLa99] Palis, F.; Ladra, U.: *Verfahren und Schaltungsanordnung zur Strom- und Ladungsregelung von kapazitiven Lasten und deren Verwendung*, Patentschrift DE 198 10 321 A 1, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 1999
- [PaLD97] Palis, F.; Ladra, U., Dzhantimirov, S.: *Modelling and Control of Piezoelectric Actuators*, Third International Scientific and Technical Conference on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems, Alushta, 1997
- [Phys89] Physik Instrumente: *Piezo Guide*, Produktinformation PZ 36, Physik Instrumente GmbH & Co., Waldbronn, 1989
- [Pick98] Pickelmann, L.: *Piezomechanik*, Produktinformation, D. Lutz Pickelmann GmbH, München, 1998
- [Pief01] Piefort, V.: *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*, Dissertation, Université Libre de Bruxelles, 2001

- [Piez02] Piezo Systems, Inc.: *History of Piezoelectricity*, Cambridge, Massachusetts, USA, 2002
- [PKSM04] Predelli, O.; Kracke, T.; Schmidt, W.; Meyer, S.: *Neues Steuermodul für Piezoinjektoren*, MTZ, 1/2004, Seiten 36-42, 2004
- [ReHo97] Reineke, J.; Hock, A.: *Verfahren und Vorrichtung zum Laden und Entladen eines piezoelektrischen Elements*, Patentschrift DE 197 33 560 A 1, Robert Bosch GmbH, 1997
- [RMYM01] Ren, W.; Masys, A. J.; Yang, G.; Mukherjee, B. K.: *The Field and Frequency Dependence of the Strain and Polarisation in Piezoelectric and Electrostrictive Ceramics*, Ferroelectrics, Vol. 261, Seiten 27-32, 2001
- [Sche99] Schernewski, R.: *Modellbasierte Regelung ausgewählter Antriebssystemkomponenten im Kraftfahrzeug*, Dissertation, Universität Fridericiana zu Karlsruhe, 1999
- [Schu01] Schugt, M.: *Aktor-Sensorverhalten von Piezoelementen in Kfz-Diesel-Einspritzsystemen*, Dissertation, Shaker Verlag, Aachen, 2002, ISBN 3-8322-0636-1
- [ScJa00] Schwinn, A.; Janocha, H.: *Self-Configurable Actuator-Sensor-Array for Active Vibration Suppression*, Materialsweek, 25.-27.9.2000, München, 2000
- [SLKL00] Simkovics, R.; Landes, H.; Kaltenbacher, M.; Lerch, R.: *Messung der nichtlinearen Eigenschaften piezoelektrischer Aktoren*, VDI/VDE-GMA Sensoren und Meßsysteme, 2000
- [SmOu99] Smith, R. C.; Ounaies, Z.: *A Hysteresis Model for Piezoceramic Materials*, National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, Virginia 23681-2199, ICASE Report No. 99-29, 1999
- [SoSt74] Sonin, A. S.; Strukow, B. A.: *Einführung in die Ferroelektrizität*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974, ISBN 3-528-06802-7
- [SSUG02] Supriyanto, E.; Schultz, L., Ullmann, M.; Goebel, H.: *Ferroelectric Capacitor Compact Model including Dynamic and Temperature Behaviour*, Proceedings of International Symposium on the Applications of Ferroelectrics, Seiten 61-64, 2002
- [Stan99] Stan, C.: *Direkteinspritzsysteme für Otto- und Dieselmotoren*, Springer Verlag, Heidelberg, 1999
- [Tadi01] Tadič, B.: *Domain Wall Dynamics and Scaling of Barkhausen Noise in Ferroelectrics*, Ferroelectrics, Vol. 259, Seiten 3-8, 2001
- [Tonn03] Tonner, E.: *Erstellung und Parametrierung eines nichtlinearen Modells für Piezoaktoren*, Diplomarbeit, Fachhochschule Trier, 2003
- [Utki77] Utkin, V.: *Variable Structure Systems with Sliding Modes*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 2, Seiten 212-222, 1988

- [Voig66] Voigt, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik*, 3. Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1966
- [WaFC98] Wang, D.; Fotinich, Y.; Carman, G. P.: *Influence of temperature on the electromechanical and fatigue behavior of piezoelectric ceramics*, Journal of applied Physics, Vol. 83 No. 10, Seiten 5342-5350, 1998
- [WaTs01] Wada, S.; Tsurumi, T.: *Domain Switching Properties of 92%PZN-8%PZT Single Crystals as a Function of Crystallographic Orientations*, Ferroelectrics, Vol. 261, Seiten 305-310, 2001
- [Waue97] Wauer, J.: *Zur Modellierung piezoelektrischer Wandler mit verteilten Parametern*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Heft 77, Seiten 365-366, 1997
- [ZhHL02] Zhao, F. F.; Harrington, D. L.; Lai, M.: *Automotive Gasoline Direct-Injection Engines*, SAE (Society of Automotive Engineers, Inc.), Warrendale (U.S.A.), 2002, ISBN 0-7680-0882-4
- [Zhou03] Zhou, D.: *Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics*, Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 2003