

Numerische Simulationen des Wellenausbreitungsverhaltens in phononischen Zick-Zack- Gitterstrukturen mittels Spektrale-Elemente-Methoden

Von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften
(Dr.-Ing.)

vorgelegt von
Marius Mellmann, M.Sc.

Siegen, im Juli 2023

Betreuer und erster Gutachter

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Chuanzeng Zhang
Universität Siegen

Zweiter Gutachter

Prof. Dr.-Ing. habil. Ralf Müller
Technische Universität Darmstadt

Tag der mündlichen Prüfung

11. Juli 2023

Kurzfassung

In den letzten Jahrzehnten hat der Bereich der Strukturodynamik im Ingenieurwesen zunehmend an Bedeutung gewonnen. Beispielsweise muss bei der Planung von Bauwerken und Strukturen die Standsicherheit nicht nur hinsichtlich statischer sondern auch dynamischer Einwirkungen nachgewiesen werden. Dabei sind insbesondere steigende Anforderungen an neuartige Bauwerke und Strukturen im Ingenieurwesen zu nennen. Besonders streng sind die Grenzwerte im Bereich der Mikro- und Nanotechnologie, bei denen bereits Schwingungsamplituden von wenigen μm und sogar nm problematisch sein können. Aufgrund dieser steigenden Anforderungen wird an der Entwicklung neuartiger Materialien und Strukturen mit herausragenden elastodynamischen Eigenschaften geforscht. Dabei sind insbesondere die phononischen Materialien und Strukturen sehr vielversprechend, die sich durch eine periodische Anordnung von unterschiedlichen Materialien oder Geometrien auszeichnen. Diese periodischen Materialien oder Strukturen weisen bestimmte Frequenzbereiche auf, die in der Literatur häufig als Bandlücken oder Stop-Bänder bezeichnet werden, in denen sich akustische oder elastische Wellen nicht ausbreiten können.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der effizienten numerischen Simulation der elastischen Wellenausbreitungsprobleme in zweidimensionalen (2D) phononischen Strukturen mithilfe von Spektrale-Elemente-Methoden (SEM). Insbesondere soll in dieser Arbeit untersucht werden, wie die Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Materialien und Strukturen gezielt auf vorgegebene Anforderungen, beispielsweise eine optimale Schwingungsisolierung oder -dämpfung, abgestimmt werden können. Dabei werden sowohl die schlanken als auch die dickwandigen 2D phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen untersucht, die ein geringes Eigengewicht, eine hohe mechanische Tragfähigkeit und außergewöhnliche Wellenausbreitungseigenschaften aufweisen. Die Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften erfolgt dabei hauptsächlich durch passive und aktive Maßnahmen. Die passiven Maßnahmen basieren überwiegend auf den Variationen bzw. Kombinationen von geometrischen und materiellen Parametern, wobei die Lage der Knicke, die Auslenkung, die Gitterkonstante, die Anordnung von Perforationen sowie die Steifigkeits- und Massenverhältnisse die wesentlichen Einflussfaktoren darstellen. Als aktive Maßnahmen können verteilte Einzelmassen, lokale Resonatoren und äußere Belastungen unter der Ausnutzung der geometrischen Nichtlinearität gezielt eingesetzt werden.

Abstract

In recent decades, the field of structural dynamics has become increasingly important in engineering. For example, in the design of buildings and structures, the stability must be ensured not only with respect to static but also dynamic effects. In particular, there are increasing requirements for new types of buildings and structures in engineering. The limits are particularly strict in the field of micro- and nanotechnology, where vibration amplitudes of just a few μm and even nm can be problematic. Due to these increasing requirements, research is being conducted on the development of novel materials and structures with outstanding elastodynamic properties. In particular, phononic materials and structures are very promising, which are characterized by a periodic arrangement of different materials or geometries. These periodic materials or structures have certain frequency ranges, often referred to in the literature as band-gaps or stop-bands, where acoustic or elastic waves cannot propagate.

The present work addresses the efficient numerical simulation of elastic wave propagation problems in two-dimensional (2D) phononic structures using spectral element methods (SEM). In particular, this work aims to investigate how the wave propagation properties of phononic materials and structures can be specifically tuned to meet given requirements, such as optimal vibration isolation or damping. Both slender and thick-walled 2D phononic zig-zag lattice structures are investigated, which exhibit low self-weight, high mechanical load-carrying capacity, and exceptional wave propagation properties. In this work, the wave propagation characteristics are mainly affected by passive and active measures. The passive measures are mainly based on the variations or combinations of geometrical and material parameters, with the position of the kinks, the deflection, the lattice constant, the arrangement of perforations and the stiffness and mass ratios being the main influencing factors. Distributed single masses, local resonators and external loads can be used selectively as active measures, taking advantage of the geometric nonlinearity.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baustatik der Universität Siegen unter der Leitung von Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Chuanzeng Zhang. Ihm gilt mein außerordentlicher Dank dafür, dass er mir die Gelegenheit gegeben hat am Lehrstuhl zu arbeiten und diese Arbeit anzufertigen. Insbesondere seine Leidenschaft für die Forschung im Bereich der phononischen Strukturen war für mich sehr inspirierend. Auch für die vielen fachlichen Diskussionen und Anregungen sowie die stetigen Unterstützungen und Motivationen in allen Phasen meiner Dissertation möchte ich mich ganz ausdrücklich bedanken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Ralf Müller danke ich vielmals für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats. Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Schmidt für den Vorsitz dieses Promotionsverfahrens sowie bei Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Xin Jiang für das Mitwirken in der Promotionskommission.

Außerdem danke ich allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls, insbesondere Meike Stricker, Dr.-Ing. Benjamin Ankay, Dr.-Ing. Elias Perras, Dr.-Ing. Pedro Villamil, Dr.-Ing. Zhengyang Li, M.Sc. Christoph Bös, M.Sc. Christopher Nies und M.Sc. Peijun Zhang für die sehr gute und kollegiale Zusammenarbeit. Herrn Dr.-Ing. Elias Perras möchte ich besonders ausdrücklich danken, mit dem ich mich auch nach seiner Beschäftigung am Lehrstuhl häufig über Problemstellungen bei der Anfertigung dieser Arbeit austauschen konnte.

Zuletzt möchte ich meinen Großeltern Prof. Dr.-Ing. Heinz Mellmann und Igna-Maria Mellmann, meinen Eltern Dipl.-Ing. Thomas und Christine Mellmann, sowie meinem Bruder M.Eng. Julian Mellmann, für die fortwährende Unterstützung von ganzem Herzen danken.

Siegen, im April 2023

Marius Mellmann

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	iii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.3 Numerische Methoden zur Behandlung von Wellenausbreitungsproblemen	6
1.4 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit	10
2 Theoretische Grundlagen	13
2.1 Grundgleichungen der Elastodynamik	13
2.1.1 Bewegungsgleichungen für ein 3D Kontinuum	13
2.1.2 Bewegungsgleichungen für ein 2D Kontinuum	17
2.1.3 1D Stab- und Balkenschwingungen	18
2.2 Wellenausbreitung in phononischen Strukturen	21
2.2.1 Geometrische Beschreibung von periodischen Gitterstrukturen . . .	21
2.2.2 Mechanismen zur Entstehung von Bandlücken	23
2.2.3 Berechnung der Dispersionskurven	27
2.2.4 Berechnung der Wellentransmission	32
3 Spektrale-Elemente-Methoden (SEM) zur Behandlung von elastischen Wellenausbreitungsproblemen	35
3.1 Numerische Methoden für Randwertprobleme	35
3.1.1 Schwache Formulierung der Wellengleichung	37
3.1.2 Überblick über die spektralen Näherungsverfahren	39
3.2 Spektrale-Elemente-Methode nach Doyle	44
3.2.1 Spektrale Elementmatrix für Stäbe	44
3.2.2 Spektrale Elementmatrix für Balken nach Theorie II. Ordnung . .	46
3.3 Spektrale-Elemente-Methode nach Patera	51
3.3.1 Herleitung von spektralen Elementen	51
3.3.2 Interpolationsfunktionen	55
3.3.3 Numerische Integration	60
3.4 Berücksichtigung von fiktiven Berandungen	63
3.4.1 Throw-off-Elemente	64
3.4.2 Perfectly Matched Layers (PMLs)	66

4	Analyse von 2D schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen	72
4.1	Beschreibung der Problemstellung	72
4.2	Bestimmung der Dispersionskurven	76
4.2.1	Einheitszelle und periodische Randbedingungen	76
4.2.2	Lösung des Eigenwertproblems	78
4.3	Bestimmung der Wellentransmission	85
4.4	Beeinflussung der Wellenausbreitung in Zick-Zack-Gitterstrukturen	93
4.4.1	Beeinflussung durch die geometrischen Parameter	94
4.4.2	Beeinflussung durch die Steifigkeits- und Massenverhältnisse	109
4.4.3	Beeinflussung durch die diskreten Einzelmassen	116
4.4.4	Beeinflussung durch die geometrische Nichtlinearität	121
4.4.5	Zusammenfassung der Erkenntnisse	125
5	Analyse von 2D dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen	127
5.1	Beschreibung der Problemstellung	127
5.2	Bestimmung der Dispersionskurven	128
5.2.1	Einheitszelle und periodische Randbedingungen	128
5.2.2	Lösung des Eigenwertproblems	129
5.3	Bestimmung der Wellentransmission	133
5.4	Beeinflussung der Wellenausbreitung durch Perforationen	137
5.4.1	Einflüsse der kreisförmigen Perforationen	138
5.4.2	Äquidistante Anordnung mehrerer kreisförmiger Perforationen	143
5.4.3	Optimierte Form und Anordnung der Perforationen	147
5.5	Beeinflussung der Wellenausbreitung durch die lokalen Resonatoren	151
5.6	Beeinflussung der Wellenausbreitung durch die Staffelung verschiedener Zick-Zack-Gitterstrukturen	157
5.7	Zusammenfassung der Erkenntnisse	159
6	Zusammenfassung und Ausblick	161
6.1	Zusammenfassung	161
6.2	Ausblick	163
	Anhang	165
A	Fourier-Transformation	165
B	Spektrale Formfunktionen des EB-Balkens nach Theorie II. Ordnung	166
C	Spektrale Elementmatrix des EB-Balkens nach Theorie II. Ordnung	169
D	Koeffizientenmatrizen zur Berechnung der komplexen Dispersionskurven	172
	Literaturverzeichnis	175

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen und häufig verwendete Indizes

BG	BRAGG(-Bandlücke)
BL	Bandlücke
BZ	BRILLOUIN-Zone
ED	Äquidistant verteilte Nodalbasis
ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
GL	Elementmatrizen mittels GAUSS-LEGENDRE-Quadratur
GLL	GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Nodalbasis
IBZ	Irreduzible BRILLOUIN-Zone
LOB	Elementmatrizen mittels LOBATTO-Quadratur
LR	Lokale Resonanz
PML	Perfectly Matched Layer
SEM	Spektrale-Elemente-Methode
TO	Throw-Off(-Element)

Lateinische Großbuchstaben

<i>A</i>	Fläche
B	Ableitungsmatrix zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen
D	Elastizitätstensor
<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<i>I</i> , I	Flächenträgheitsmoment, Einheitsmatrix
J	JACOBI-Matrix
$LA_{p,n}$	LAGRANGE-Polynom der Ordnung p und Knotennummer n
LO_p	LOBATTO-Polynom der Ordnung p
<i>M</i> , M , M	Biegemoment, Punkt hoher Symmetrie in der BRILLOUIN-Zone, Massenmatrix

Lateinische Großbuchstaben - Fortsetzung

N, \mathbf{N}	Normalkraft, Anzahl, Matrix der Formfunktionen
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
S, \mathbf{S}	Longitudinalkraft, spektrale Steifigkeitsmatrix
T	Transversalkraft
V	Volumen
X	Punkt hoher Symmetrie in der BRILLOUIN-Zone
Y	Punkt hoher Symmetrie in der BRILLOUIN-Zone

Lateinische Kleinbuchstaben

a, \mathbf{a}	Querschnittshöhe, Translationsvektor
c_S, c	Wellengeschwindigkeit, Federsteifigkeit
d	Abstand, Gitterkonstante
\mathbf{f}, f	Lastvektor, Frequenz
i	Imaginäre Einheit
\mathbf{k}, k	Wellenvektor, Wellenzahl
l	Gitterkonstante
\mathbf{n}	Einheitsnormalenvektor
p	Ordnung
t, \mathbf{t}	Dicke, Spannungsvektor, Kraftvektor
$\mathbf{u}, (u, v, w)$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{x}, (x, y, z)$	Kartesische Koordinaten im Raum

Griechische Großbuchstaben und Operatoren

Γ	Rand eines Gebiets, Punkt hoher Symmetrie in der BRILLOUIN-Zone
Δ	LAPLACE-Operator
Λ_R, Λ_L	Transformationsmatrizen
Ω	Gebiet
$\nabla, \tilde{\nabla}$	NABLA-Operator, Matrizen-Differentialoperator

Griechische Kleinbuchstaben

δ	KRONECKER-Delta
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_2$	Dehnung, Verzerrungstensor, l_2 -Fehler
$\lambda, \lambda_x, \lambda_y$	Wellenlänge, Ausbreitungskonstanten
ν	Querkontraktionszahl
$\boldsymbol{\xi}, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$	Koordinaten im Referenzraum
ρ	Massendichte
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
φ_k	Formfunktion mit der Nummer k
ω	Kreisfrequenz

1 Einleitung

1.1 Motivation

Seit Beginn des 20. Jahrhunderts gewinnen die Akustik und die Strukturodynamik im Ingenieurwesen zunehmend an Bedeutung. Im Bauwesen haben dabei anfänglich zahlreiche Unglücke, bei denen Bauwerke durch dynamische Einwirkungen und mangelhafte Planung eingestürzt sind, auf dramatische Weise die Relevanz der Baudynamik bei der Errichtung von Bauwerken bewiesen. Ein bekanntes Beispiel ist die Tacoma-Narrows Brücke im Bundesstaat Washington, die im Jahr 1940 aufgrund von windinduzierten Torsionsschwingungen einstürzte. Heutzutage wird daher bereits in der Planungsphase das dynamische Verhalten von schwingungsanfälligen Bauwerken untersucht. Bei Bedarf können Schwingungstilger angebracht oder ähnliche technische Vorkehrungen getroffen werden, um die Standsicherheit hinsichtlich der dynamischen Einwirkungen zu gewährleisten. Neben den Anforderungen an die Standsicherheit sind in den letzten Jahren jedoch auch die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit hinsichtlich dynamischer und akustischer Einwirkungen gestiegen. Beispielhaft seien hier der Schallschutz in Wohngebäuden, der Schallschutz vor Straßen- und Bahnverkehrslärm oder der Schutz vor Lärm und Erschütterungen durch Baumaßnahmen genannt. Besonders streng sind die Anforderungen im Bereich der Mikro- und Nanotechnologie, bei denen bereits Schwingungspegel von $0,5-6 \mu\text{m/s}$ problematisch sein können [48].

Aufgrund dieser steigenden Anforderungen wird zunehmend an der Entwicklung neuartiger Materialien und Strukturen mit herausragenden akustischen und elastodynamischen Eigenschaften geforscht. Dabei sind insbesondere die phononischen Materialien und Strukturen, beispielhaft in Abb. 1.1 dargestellt, sehr vielversprechend. Diese Strukturen

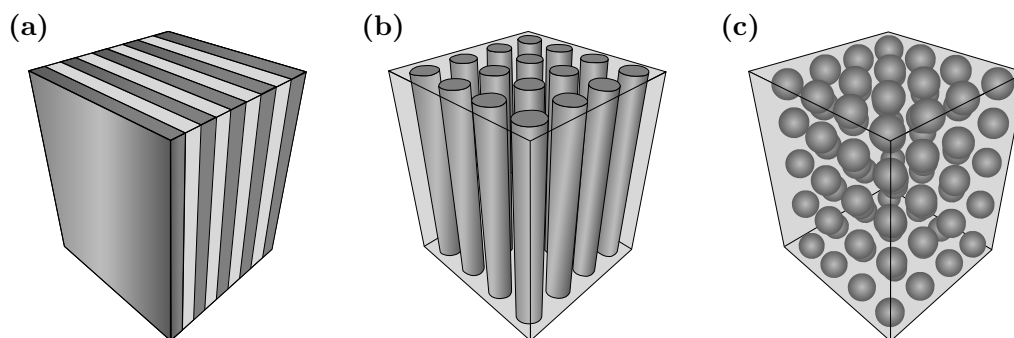


Abbildung 1.1: Beispiele für phononische Strukturen: (a) 1D phononische Struktur, (b) 2D phononische Struktur und (c) 3D phononische Struktur.

zeichnen sich durch eine periodische Anordnung von unterschiedlichen Materialien oder Geometrien aus [26, 55]. In Abhängigkeit von der Periodizität wird, wie ebenfalls in Abb. 1.1 veranschaulicht, zwischen eindimensionalen (1D), zweidimensionalen (2D) und dreidimensionalen (3D) phononischen Strukturen unterschieden. Der Begriff eines „Phonons“ stammt dabei aus dem Bereich der Physik von kondensierter Materie und wird dort im Kontext der Vibrationen von Atomen in einem Kristallgitter verwendet [55, 66]. Trotz deutlicher Unterschiede in den geometrischen Dimensionen zwischen einem Atomgitter und üblichen phononischen Materialien und Strukturen gibt es einen starken Zusammenhang hinsichtlich des Wellenausbreitungsverhaltens. Infolgedessen haben sich die Begriffe „phononisches Material“ und „phononische Struktur“ auch für großskalige Systeme etabliert [55]. Das steigende Forschungsinteresse an den phononischen Materialien und Strukturen begründet sich in den einzigartigen akustischen und elastodynamischen Eigenschaften. Insbesondere weisen diese Strukturen bestimmte Frequenzbereiche auf, die als Bandlücken oder Stop-Bänder bezeichnet werden, in denen sich elastische und akustische Wellen nicht ausbreiten können. Entsprechend eignen sich diese Materialien und Strukturen beispielsweise sehr gut zur selektiven Schall- und Schwingungsisolierung und übertreffen die Dämpfungseigenschaften von herkömmlichen isolierenden Materialien innerhalb des Frequenzbereiches einer Bandlücke zumeist sehr deutlich [84, 119].

Im Rahmen dieser Arbeit soll untersucht werden, wie die Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Materialien und Strukturen gezielt auf vorgegebene Anforderungen, beispielsweise eine optimale Schall- und Schwingungsisolierung, abgestimmt werden können. Dabei werden die sogenannten phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen untersucht, die ein geringes Eigengewicht, eine hohe mechanische Tragfähigkeit und außergewöhnliche Wellenausbreitungseigenschaften aufweisen. Die Simulation der Wellenausbreitungsprobleme in phononischen Materialien und Strukturen ist allerdings in der Regel sehr aufwendig. Aus diesem Grund erfolgt die numerische Simulation der Wellenausbreitungsprobleme in dieser Arbeit mithilfe von effizienten Spektrale-Elemente-Methoden (SEM), welche sich durch eine sehr hohe Genauigkeit bei einer gleichzeitig geringen Anzahl von Freiheitsgraden auszeichnen.

1.2 Stand der Forschung

Die erste wissenschaftliche Arbeit zu 1D periodischen Strukturen geht bereits auf NEWTON im 17. Jahrhundert zurück, der mithilfe eines periodischen Feder-Masse-Systems versuchte die Schallgeschwindigkeit in der Luft zu ermitteln [14]. Das gleiche System wurde im 18. Jahrhundert auch von JOHN und DANIEL BERNOULLI untersucht, die nachwiesen, dass ein System aus N Massen durch die N Eigenmoden und die zugehörigen Eigenfrequenzen charakterisiert ist und schufen somit die Grundlage des Prinzips der

Superposition [55]. Die ersten mathematischen Grundlagen zur Analyse von 1D periodischen Strukturen anhand von analytischen Lösungen entwickelte FLOQUET im Jahr 1883, wobei die Periodizität über bestimmte periodische Koeffizienten in den Differentialgleichungen berücksichtigt wurde [36, 135]. In den folgenden Jahren wurden ausschließlich diskrete periodische Feder-Masse-Systeme untersucht. Die erste Veröffentlichung zu kontinuierlichen periodischen Systemen stammte von RAYLEIGH aus dem Jahr 1887, der das Wellenausbreitungsverhalten in einem Stab mit periodischer Änderung der Dichte entlang der Stabachse untersuchte [86, 135]. Einen wesentlichen Beitrag zur mathematischen Behandlung von räumlichen periodischen Strukturen mittels periodischer Randbedingungen lieferte BLOCH, der die Ansätze von FLOQUET im Jahr 1928 auf den allgemeinen 3D Fall erweiterte [12]. Mithilfe dieser sogenannten BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen sowie der geometrischen Interpretation des Wellenausbreitungsverhaltens in periodischen Strukturen durch BRILLOUIN (1946) [14] können die Dispersionskurven (auch Bandstrukturen oder Dispersionsrelationen genannt) von periodischen Materialien und Strukturen anhand von Einheitszellen bestimmt werden. BRILLOUIN zeigte dabei, dass das Wellenausbreitungsverhalten in periodischen Strukturen durch irreduzible Zonen im Raum der Wellenzahlen, die sogenannten BRILLOUIN-Zonen, vollständig beschrieben werden kann [14, 135]. In der Abb. 1.2 ist beispielhaft eine periodische Struktur bestehend aus Stahlzylindern in einer Silikonmatrix (a) mit der zugehörigen repräsentativen Einheitszelle (b) und den berechneten Dispersionskurven (c) dargestellt. Die Vorgehensweise zur Berechnung der Dispersionskurven wird im Abschnitt 2.2 detailliert beschrieben.

In der Arbeit von CREMER und LEILICH [21] wurde 1953 erstmals die Ausbreitung von Biegewellen in 1D periodischen Balkensystemen untersucht. Es folgten Arbeiten von HECKL [46, 47] und UNGAR [150], die ebenfalls periodische Balken-, sowie Platten-, und Trägerrostsyste analysierten. Bis in die 1990er Jahre wurde die Forschung im Bereich der elastischen periodischen Strukturen dann insbesondere durch die Arbeiten von MEAD

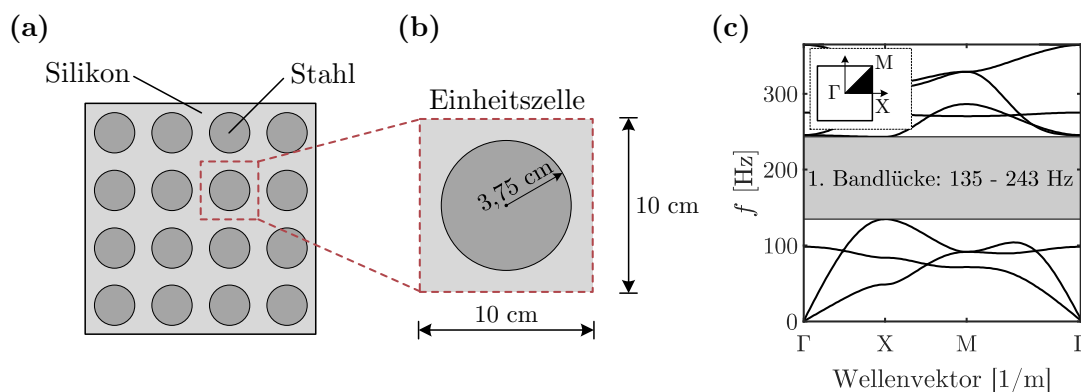
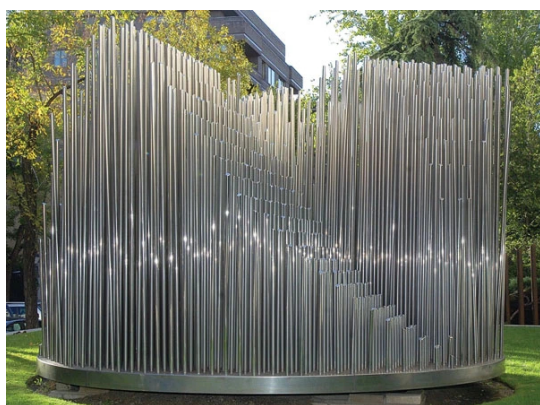


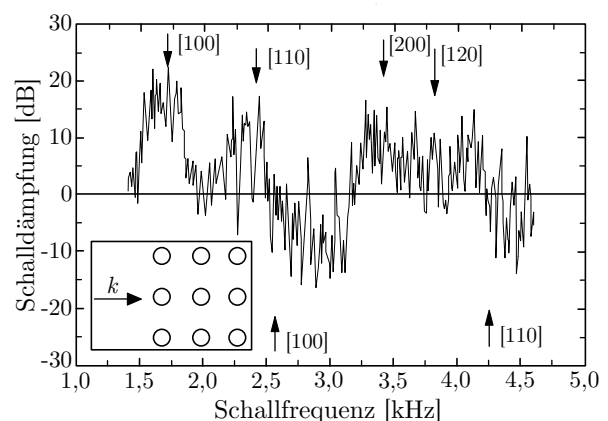
Abbildung 1.2: (a) Phononische Struktur bestehend aus Stahlzylindern in einer Silikonmatrix. (b) Zugehörige repräsentative Einheitszelle zur Bestimmung der Dispersionskurven. (c) Dispersionskurven der phononischen Struktur. Die eingebettete Abbildung zeigt die erste irreduzible BRILLOUIN-Zone.

geprägt [93–98]. Eine besonders schnelle Entwicklung fand im Bereich der periodischen dielektrischen Materialien statt, die eine gezielte Beeinflussung des Ausbreitungsverhaltens von elektromagnetischen Wellen erlauben. Wegweisend waren hier die Arbeiten von YABLONOVITCH [172] und JOHN [59], die im Jahr 1987 nahezu zeitgleich die ersten periodischen dielektrischen Materialien entwickelten, die später als photonische Kristalle bezeichnet wurden. Aufgrund der rasanten und vielversprechenden Entwicklung der photonischen Kristalle wurde das Konzept erstmals ab 1992 von SIGALAS und ECONOMOU [131, 132] sowie KUSHWAHA et al. [73, 74] für die Beeinflussung der akustischen und elastischen Wellenausbreitung vorgeschlagen. Sie untersuchten 2D ebene Strukturen bestehend aus einer Matrix und periodisch angeordneten Einschlüssen, die mittlerweile als phononische Kristalle bezeichnet werden. Beispielsweise untersuchten SIGALAS und ECONOMOU [132] einen phononischen Kristall bestehend aus periodisch angeordneten Goldzylindern in einer Berylliummatrix. Zeitnah folgten dann auch Arbeiten zu 3D phononischen Kristallen [30, 122, 134], sowie zu phononischen Kristallen bestehend aus unterschiedlichen Materialphasen (fest/fluid) [72, 140]. Besonders bekannt ist die Arbeit von MARTÍNEZ-SALA et al. [90], in der die erste experimentelle Messung der Schalldämpfung an einer periodischen Skulptur, dargestellt in der Abb. 1.3a, durchgeführt wurde. Die Messung ergab eine minimale Wellentransmission bei einer Frequenz von etwa 1,67 kHz (in der Abb. 1.3b mit der Ausbreitungsrichtung [100] markiert), die die Autoren die erste Bandlücke der phononischen Struktur zuordneten [65, 90]. Die Berechnung der exakten Dispersionskurven durch KUSHWAHA [71] zeigte jedoch, dass die Skulptur keine kompletten Bandlücken aufweist und die geringe Wellentransmission auf ein lokales Minimum der phononischen Zustandsdichte (engl.: *phononic density of states*) zurückzuführen ist.

Die ersten phononischen Kristalle mit kompletten Bandlücken, also Frequenzbereichen in denen sich unabhängig von der Ausbreitungsrichtung, jedoch gegebenenfalls nur für



(a)



(b)

Abbildung 1.3: Experimenteller Nachweis zur Schalldämpfung in einer phononischen Struktur durch MARTÍNEZ-SALA et al. [90]. **(a)** Untersuchte phononische Skulptur von EUSEBIO SEMPERE, Madrid (Photo entnommen aus [144]). **(b)** Messergebnisse der Schalldämpfung [90].

bestimmte Polarisationsmoden [75], keine akustischen oder elastischen Wellen ausbreiten können, wurden erstmals im Jahr 1998 in den Arbeiten von MONTERO DE ESPINOSA et al. [31] und SÁNCHEZ-PÉREZ et al. [140] präsentiert. Neben den kompletten Bandlücken (engl.: *complete band-gaps*) wird noch zwischen richtungsabhängigen Bandlücken (engl.: *directional band-gaps*) und vollständigen Bandlücken (engl.: *full band-gaps*)¹ unterschieden. Bei den richtungsabhängigen Bandlücken ist die Ausbreitung von akustischen und elastischen Wellen nur in bestimmten Richtungen unterbunden, während in vollständigen Bandlücken unabhängig von der Ausbreitungsrichtung und der Polarisation der Wellen keine Ausbreitung möglich ist [75]. Die Bandlücken können dabei generell durch zwei unterschiedliche physikalische Mechanismen, die BRAGG-Streuung bzw. -Beugung und die lokale Resonanz, entstehen [75]. Der Mechanismus der BRAGG-Streuung leitet sich aus der BRAGG-Gleichung ab, die die Interferenz von Wellen bei der Streuung an einem periodischen Gitter beschreibt [13]. In Abhängigkeit der Gitterkonstante, der Geometrie und der Anordnung der Einschlüsse (engl.: *scatterer*), sowie der Materialparameter, tritt in bestimmten Frequenzbereichen destruktive Interferenz auf und es können dadurch Bandlücken entstehen. Dabei muss zur Entstehung breiter Bandlücken ein großer Kontrast in den Materialeigenschaften (Dichte, Wellengeschwindigkeit) zwischen den Einschlüssen und der Matrix vorliegen. Außerdem muss der Füllfaktor, also das Volumen- oder Flächenverhältnis zwischen Einschluss und Matrix, ausreichend groß sein [65]. Der zweite Mechanismus zur Entstehung von Bandlücken, die lokale Resonanz, wurde erstmals im Jahr 2000 von LIU et al. [85] zur gezielten Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in phononischen Strukturen vorgeschlagen. Dabei untersuchten die Autoren einen phononischen Kristall, der aus periodisch angeordneten und mit Silikon ummantelten Bleikugeln in einer Epoxidmatrix bestand. Bei derartigen Strukturen treten in bestimmten Frequenzbereichen ausgeprägte Resonanzeffekte zwischen den schwingenden Einschlüssen (Resonatoren) und den einfallenden Wellen auf. Im Gegensatz zu den BRAGG-Bandlücken muss zur Entstehung von Resonanz-Bandlücken die Periodizität der Struktur nicht streng eingehalten werden. Außerdem können durch die lokale Resonanz Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich mit einer zugehörigen Wellenlänge unterhalb der Gitterkonstante erzielt werden [178]. Häufig werden diese Strukturen auch als Metamaterialien bezeichnet, da in bestimmten Frequenzbereichen ein ungewöhnliches dynamisches Verhalten, wie beispielsweise eine negative Brechung, eine negative Gruppengeschwindigkeit oder auch eine negative effektive Masse, auftreten kann [55].

In der Praxis ist es generell schwierig phononische Materialien oder Strukturen mit einer perfekten Periodizität zu fertigen. Unregelmäßigkeiten in der Periodizität können zu den sogenannten defekten oder ungeordneten Zuständen (engl.: *defect/disordered states*)

¹Der Begriff wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Häufig wird auch der Begriff *absolute band-gaps* verwendet, wie z. B. in [65].

oder einer Lokalisierung von akustischen oder elastischen Wellen innerhalb der Struktur führen [57, 133, 155]. Der gezielte Einbau von linienförmigen Defekten in eine phononische Struktur, beispielsweise durch Entfernen von bestimmten Einschlüssen, kann aber auch ausgenutzt werden um die akustischen und elastischen Wellen in eine bestimmte Richtung umzuleiten (Wellenleiter) [117, 157]. Durch punktförmige Defekte können zusätzliche lokale Resonanzeffekte auftreten, die beispielsweise zum Filtern bestimmter Frequenzen genutzt werden können [117]. Das Wellenausbreitungsverhalten in Wellenleitern ist sehr komplex und außergewöhnliche Phänomene wie die kanalisierten Spektren, die durch die Interferenz von vor- und rücklaufenden BLOCH-Wellen entstehen, sind Gegenstand der jüngsten Forschung [157]. Ebenso sind Untersuchungen alternativer Mechanismen zur Wellenleitung, wie beispielsweise die topologischen phononischen Wellenleiter [106, 107, 154], hoch aktuell.

Neben der Lokalisierung von akustischen und elastischen Wellen infolge von Defekten in einer phononischen Struktur kann auch eine Lokalisierung an Oberflächen oder Grenzflächen auftreten. Diese Oberflächenwellen, in der Literatur üblicherweise als SAW (engl.: *surface acoustic waves*) bezeichnet, weisen eine hohe akustische Energiedichte in der Nähe der Oberfläche auf, die mit steigendem Abstand von der Oberfläche exponentiell abnimmt. Aufgrund dieser Eigenschaften sind die phononischen SAWs sehr vielversprechend, beispielsweise im Bereich von Sensorsystemen [5, 77, 111, 127], und sind daher ebenfalls Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten.

Ein weiterer wichtiger Forschungsbereich stellt die passive und aktive Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Materialien und Strukturen dar. Eine passive Beeinflussung kann beispielsweise durch eine Modifizierung der geometrischen oder materiellen Parameter erfolgen [55, 65]. Ansätze für eine aktive Beeinflussung umfassen die Verwendung von piezoelektrischen Komponenten [51, 77], die Steuerung durch Magnet- [124, 160] oder Temperaturfelder [54, 58], sowie die Steuerung durch eine elastische Vordehnung [32].

1.3 Numerische Methoden zur Behandlung von Wellenausbreitungsproblemen

Zur Charakterisierung des Wellenausbreitungsverhaltens in phononischen Materialien und Strukturen können sowohl Dispersionskurven als auch Wellentransmissionen herangezogen werden. Zur Bestimmung der Dispersionskurven und Wellentransmissionen werden neben den analytischen und experimentellen Methoden häufig numerische Methoden verwendet. Dazu wurden bereits eine Vielzahl von unterschiedlichen numerischen Methoden entwickelt. Besonders verbreitet sind die Entwicklungsmethode nach ebenen Wellen (PWE - engl.: *plane wave expansion method*), die Finite-Differenzen-Methode im Zeitbereich

(FDTD - engl.: *finite difference time domain method*), die Mehrfachstreumethode (MS - engl.: *multiple scattering method*), die Randelementemethode (BEM - engl.: *boundary element method*) und die Finite-Elemente-Methode (FEM - engl.: *finite element method*), wobei alle Methoden ihre jeweiligen Vor- und Nachteile aufweisen.

Die PWE-Methode ist insbesondere bei der Berechnung der Dispersionskurven von kontinuierlichen Systemen sehr verbreitet und basiert auf einer FOURIER-Reihenentwicklung des gesuchten Wellenfeldes und der Materialeigenschaften. Bereits in den ersten Arbeiten zu phononischen Kristallen von SIGALAS und ECONOMOU [132] oder KUSHWAHA et al. [73] wurde die PWE-Methode zur Berechnung der Dispersionskurven verwendet. Die PWE-Methode ist sehr effizient für die Berechnung der Dispersionskurven von phononischen Kristallen, deren Matrix und Einschlüsse einen niedrigen Kontrast in den Materialeigenschaften besitzen. Hingegen eignet sich diese Methode nicht für phononische Kristalle, die aus unterschiedlichen Materialphasen bestehen, da die Übergangsbedingungen an den Grenzschichten aufgrund der Kontinuität der Lösungen nicht erfüllt werden können [55, 65]. Des Weiteren kann diese Methode nicht für die Berechnung von komplexeren phononischen Strukturen eingesetzt werden.

Auch die FDTD-Methode genießt zur Berechnung der Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Materialien und Strukturen eine große Beliebtheit, wobei die entsprechenden Wellengleichungen sowohl räumlich als auch zeitlich diskretisiert werden, um schließlich die Lösung im Zeitbereich zu berechnen. Zur Bestimmung der Dispersionskurven muss die Lösung anschließend mithilfe der Fast-Fourier-Transformation (FFT) vom Zeit- in den Frequenzbereich transformiert werden [55, 65]. Der gebräuchlichste FDTD-Ansatz, bei dem die BLOCH-FLOQUET-Bedingungen direkt in die Wellengleichungen eingebaut werden und somit die Berechnung einer Einheitszelle erlaubt, wurde von TANAKA et al. [141] entwickelt. Im Gegensatz zur PWE-Methode kann die FDTD-Methode auch für die Berechnung von periodischen Strukturen, die aus unterschiedlichen Materialphasen bestehen, verwendet werden. Allerdings ist die FDTD-Methode, wie auch die PWE-Methode, nicht für komplexere phononische Strukturen geeignet.

Die MS-Methode eignet sich, wie der Name der Methode schon andeutet, besonders gut für phononische Strukturen, die aus Streuelementen (*scatterer*) und einer Matrix bestehen, also die typischen phononischen Kristalle [55]. Erstmals wurde die MS-Methode im Jahr 1999 von KAFESAKI und ECONOMOU [61] zur Bestimmung der Dispersionskurven eines phononischen Kompositmaterials eingesetzt. Im Gegensatz zu vielen anderen numerischen Methoden können mit der MS-Methode auch Strukturen, die aus unterschiedlichen Materialphasen mit einem sehr hohen Kontrast in den Materialeigenschaften bestehen, mit einer hohen Genauigkeit analysiert werden [55]. Ähnlich wie die FDTD- und PWE-Methode ist auch die MS-Methode nicht für phononische Materialien oder Strukturen mit komplexer Geometrie geeignet und ihre Implementierung ist außerdem recht kompliziert.

Bei der BEM wird nur der Rand (bzw. die Oberfläche im 3D Fall) der Struktur diskretisiert und die unbekanntes Zustandsgrößen befinden sich ausschließlich auf diesem Rand. Die Lösungen innerhalb der Struktur können, wenn die Zustandsgrößen auf dem Rand berechnet wurden, mithilfe von GREENSchen Einflussfunktionen ermittelt werden. Im Vergleich zu vielen anderen numerischen Methoden, wie beispielsweise der FEM, werden deutlich weniger Freiheitsgrade benötigt. Allerdings ergeben sich vollbesetzte, unsymmetrische und indefinite Systemmatrizen, wodurch der Aufwand zum Lösen des Gleichungssystems deutlich zunimmt und der Vorteil der vergleichsweise geringen Anzahl an Freiheitsgraden teilweise kompensiert wird. Trotzdem ist die BEM in einigen Fällen, insbesondere bei den klassischen phononischen Kristallen bestehend aus einer Matrix und periodisch angeordneten Einschlüssen, sehr gut für die Bestimmung der Wellenausbreitungseigenschaften geeignet [81, 82].

Die FEM ist die am weitesten verbreitete numerische Methode im Ingenieurwesen und wurde bereits im Jahr 1974 von ORRIS und PETYT [110] für die Berechnung der Dispersionskurven einer periodischen Struktur verwendet. Bei der FEM wird das Berechnungsgebiet in eine endliche Anzahl von Teilgebieten bzw. finiten Elementen unterteilt und die gesuchte Lösung innerhalb eines Elements durch Formfunktionen approximiert [162]. Im Gegensatz zu den finiten Differenzenverfahren ist dabei jedoch die schwache Formulierung der Wellengleichung der Ausgangspunkt für die Diskretisierung [60]. Daraus resultiert insbesondere eine niedrigere Anforderung an die Glattheit der Lösung und damit einhergehend auch niedrigere Anforderungen bezüglich der Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Formfunktionen [49, 60]. Üblicherweise werden lineare oder quadratische Formfunktionen verwendet, wobei für ein zuverlässiges Ergebnis bei der Berechnung von Wellenausbreitungsproblemen mit linearen Formfunktionen mindestens zehn Knoten und bei Verwendung von quadratischen Formfunktionen mindestens sechs Knoten pro Wellenlänge erforderlich sind [88]. Der wesentliche Vorteil der FEM gegenüber den zuvor erwähnten Methoden ist ihre sehr hohe geometrische Flexibilität, so können auch sehr komplexe Geometrien durch eine entsprechend feine Vernetzung der Elemente abgebildet werden [55, 162]. Allerdings kann ein sehr feines Netz, wie es beispielsweise bei Grenzschichten mit einer sehr hohen akustischen Impedanz (z. B. fest/fluid) [178] oder bei Berechnungen im höheren Frequenzbereich [119] erforderlich ist, die Effizienz der FEM erheblich reduzieren. Auch bei höheren Anforderungen an die Genauigkeit können unter Umständen deutlich mehr Freiheitsgrade notwendig sein, die wiederum die Größe des zu lösenden Gleichungssystems und somit auch den Berechnungsaufwand erhöhen. Im Hinblick auf die Berechnung der komplexen Dispersionskurven von phononischen Materialien und Strukturen kommt der Größe des Gleichungssystems eine noch entscheidendere Rolle zu. Im Berechnungsablauf sollten die sogenannten Slave-Freiheitsgrade (engl.: *slave degrees of freedom*) kondensiert werden. Für die Kondensierung muss wiederum die entsprechende Untermatrix inver-

tiert werden, wobei der Berechnungsaufwand für die Invertierung einer $n \times n$ -Matrix mit etwa $\mathcal{O}(n^3)$ exponentiell mit steigender Größe der Matrix zunimmt. Nach der Kondensation ergibt sich, je nach dem betrachteten Rand der BRILLOUIN-Zone, eine reduzierte quadratische oder quartische Eigenwertgleichung zur Bestimmung der komplexen Dispersionskurven. Auch hier steigt der Berechnungsaufwand exponentiell mit steigender Größe des Gleichungssystems. Aus den oben genannten Gründen ist die FEM für die Berechnung der komplexen Dispersionskurven nicht besonders gut geeignet. Eine Möglichkeit, die Vorteile der FEM beizubehalten und gleichzeitig die Berechnungseffizienz deutlich zu erhöhen, stellt die Verwendung von den Spektrale-Elemente-Methoden (SEM - engl.: *spectral element methods*) dar.

Der Begriff „Spektrale-Elemente-Methode“ wird für zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren verwendet, wobei jedoch beide Verfahren, analog zur FEM, auf einer Diskretisierung des Gebietes in Elemente basieren [119]. Bei der SEM nach DOYLE [29] werden frequenzabhängige exakte dynamische Steifigkeitsmatrizen aus den jeweiligen zeitabhängigen Wellengleichungen hergeleitet. Dazu werden die entsprechenden Wellengleichungen zunächst mithilfe der FOURIER-Transformation in den Frequenzbereich überführt. Anschließend werden die Wellengleichungen im Frequenzbereich exakt gelöst und daraus frequenzabhängige dynamische Formfunktionen hergeleitet. Mithilfe der Formfunktionen kann schließlich die spektrale Elementmatrix, ähnlich zur Vorgehensweise in der FEM, berechnet werden. Die spektrale Elementmatrix ist exakt und liefert bei analytischen Berechnungen im Frequenzbereich exakte Ergebnisse [80]. Lediglich durch die numerische Lösung des Gleichungssystems können die Lösungen mit einem numerischen Fehler behaftet sein. Somit ist es ausreichend ein Strukturelement, beispielsweise einen Stab oder Balken, mit nur einem spektralen Element abzubilden. Eine feinere Diskretisierung ist nur bei geometrischen oder materiellen Diskontinuitäten erforderlich [80]. Die SEM nach DOYLE weist also eine sehr hohe Genauigkeit selbst bei einer sehr geringen Anzahl von verwendeten Freiheitsgraden auf. Der wesentliche Nachteil dieser Methode stellt die Beschränkung auf sehr einfache Probleme dar, da für die Formulierung der spektralen Elementmatrix die exakte Lösung der jeweiligen Wellengleichung benötigt wird.

Bei der SEM nach PATERA [116] handelt es sich eigentlich um eine fortschrittliche FEM, welche Formfunktionen hoher Ordnung und eine spezielle Nodalbasis verwendet. Der Name „Spektrale-Elemente-Methode“ leitet sich bei dieser Formulierung aus dem spektralen Konvergenzverhalten ab [119]. Im Vergleich zur FEM werden bei der SEM nach PATERA deutlich weniger Knoten pro Wellenlänge bei gleichen Anforderungen an die Genauigkeit der Lösung benötigt. Folglich weist diese Methode deutliche Vorteile bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven, aber auch bei der Transmissionsberechnung im höheren Frequenzbereich, auf. Ein ausführlicher Überblick über den Stand der Forschung der SEM wird im Unterabschnitt 3.1.2 gegeben.

1.4 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der effizienten numerischen Simulation der Wellenausbreitungsprobleme in verschiedensten phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen. Dabei wird zur Analyse von schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen die SEM nach DOYLE verwendet. Für 2D Strukturen, beispielsweise Platten- oder Schalenträgerwerke, ist diese Methode nur bedingt geeignet, da für die Herleitung der spektralen Elementmatrizen die analytische Lösung der jeweiligen Bewegungsgleichungen benötigt wird. Daher ist diese Methode bei derartigen Tragwerken auf sehr einfache Probleme beschränkt. Aus diesem Grund wird für die Analyse der 2D dickwandigen bzw. gedrungenen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen die SEM nach PATERA verwendet, die die geometrische Flexibilität der FEM beibehält und gleichzeitig deutlich weniger Freiheitsgrade bei den gleichen Anforderungen an die Genauigkeit der Lösung benötigt. Auch wenn sowohl die SEM nach DOYLE [34, 118, 167] als auch die SEM nach PATERA [42, 119, 130] bereits vereinzelt zur Behandlung der Wellenausbreitungsprobleme in phononischen Materialien und Strukturen eingesetzt wurden, gibt es nach Wissen des Autors bisher keine Untersuchungen zur Effizienz der Verfahren hinsichtlich der Berechnung der komplexen Dispersionskurven und der Wellentransmissionen. Daher ist es ein Ziel dieser Arbeit, diese Lücke zu schließen.

Weiterhin soll in dieser Arbeit untersucht werden, wie die Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen gezielt auf vorgegebene Anforderungen, beispielsweise eine optimale Schall- und Schwingungsisolierung, abgestimmt werden können. Dabei werden insbesondere passive und aktive Maßnahmen zur Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften vorgeschlagen und ausführlich untersucht.

Die Hauptziele dieser Arbeit können wie folgt zusammengefasst werden:

- Entwicklung eines numerischen Werkzeugs auf der Basis der SEM nach DOYLE zur Analyse der Wellenausbreitungseigenschaften von 2D schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.
- Analyse der Genauigkeit und Effizienz des entwickelten numerischen Werkzeugs auf der Basis der SEM nach DOYLE.
- Untersuchungen zur passiven und aktiven Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in 2D schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.
- Entwicklung eines numerischen Werkzeugs auf der Basis der SEM nach PATERA zur Analyse der Wellenausbreitungseigenschaften von 2D dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.

- Analyse der Genauigkeit und Effizienz des entwickelten numerischen Werkzeugs auf der Basis der SEM nach PATERA.
- Untersuchungen zur passiven und aktiven Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.

Die vorliegende Arbeit umfasst insgesamt, einschließlich dieser Einleitung, sechs Kapitel. Nach der Einleitung in diesem Kapitel werden in **Kapitel 2** die wesentlichen theoretischen Grundlagen dargestellt. Im ersten Teil des Kapitels werden die Grundgleichungen der Elastodynamik hergeleitet, beginnend mit den Wellenausbreitungsproblemen in 3D sowie 2D Kontinua und gefolgt von den Stab- und Balkenschwingungen. Im zweiten Teil des Kapitels werden die Grundlagen der Wellenausbreitungsprobleme in phononischen Materialien und Strukturen bereitgestellt.

Im **Kapitel 3** werden die Grundlagen der SEM nach DOYLE und der SEM nach PATERA dargestellt. Im ersten Teil des Kapitels wird die Herleitung des spektralen Stabelements sowie des Balkenelements nach der Theorie II. Ordnung für die SEM nach DOYLE erläutert. Im zweiten Teil des Kapitels werden die Grundlagen der SEM nach PATERA beschrieben. Dabei werden die verwendeten Formfunktionen hergeleitet und die zugehörige spezielle Knotenverteilung sowie die numerischen Vorteile erläutert. Im letzten Teil des Kapitels werden für die beiden SEM-Varianten die Möglichkeiten zur Berücksichtigung von endlichen fiktiven Berandungen dargelegt.

Mithilfe des entwickelten numerischen Werkzeugs auf der Basis der SEM nach DOYLE werden im **Kapitel 4** 2D schlanke phononische Zick-Zack-Gitterstrukturen analysiert. Dabei wird zunächst die Vorgehensweise zur Bestimmung der Dispersionskurven erläutert und die Effizienz und Genauigkeit des Verfahrens untersucht. Es folgen dann umfangreiche Untersuchungen zur passiven und aktiven Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in 2D schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen. Dabei werden die Einflüsse der geometrischen Parameter, der Steifigkeitsverhältnisse, der diskreten Einzelmassen als Resonatoren und der geometrischen Nichtlinearität untersucht.

Im **Kapitel 5** erfolgt die Analyse von 2D dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen mithilfe der SEM nach PATERA. Auch hier wird zunächst die Vorgehensweise zur Bestimmung der Dispersionskurven erläutert und die Effizienz und Genauigkeit des Verfahrens untersucht. Anschließend folgen ausführliche Untersuchungen zur passiven und aktiven Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens durch die Verwendung von Perforationen in den Zick-Zack-Armen, durch die Einführung von lokalen Resonatoren, und durch die Staffelung von unterschiedlichen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.

Abschließend werden die Ergebnisse dieser Arbeit im **Kapitel 6** zusammengefasst und ein Ausblick auf künftige Forschungsarbeiten gegeben.

Im **Anhang 6.2** wird zunächst die FOURIER-Transformation zur Überführung von Differentialgleichungen vom Zeit- in den Frequenzbereich beschrieben. Anschließend werden die spektralen Formfunktionen und die spektrale Steifigkeitsmatrix des Balkenelements nach der Theorie II. Ordnung angegeben. Zuletzt werden die Eigenwertgleichungen zur Bestimmung der komplexen Dispersionskurven und die zugehörigen benötigten Koeffizientenmatrizen dargestellt.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen dieser Arbeit dargestellt. Im Abschnitt 2.1 werden zuerst die allgemeinen Fälle der Wellenausbreitung in 3D und 2D Kontinua erläutert und anschließend die für diese Arbeit wichtigen Grundgleichungen der Stab- und Balkenschwingungen hergeleitet. Im Abschnitt 2.2 werden die Grundlagen der Wellenausbreitung in phononischen Strukturen beschrieben.

Die theoretischen Grundlagen in diesem Kapitel sind in zahlreichen Arbeiten ausführlich beschrieben und werden hier nur zusammenfassend dargestellt. Für eine ausführlichere Darstellung der Grundlagen der Kontinuumsmechanik wird auf HOLZAPFEL [50], BECKER und GROSS [10] oder ALTENBACH [3] verwiesen. Zur Thematik der Stab- und Balkenschwingungen werden die Werke von OÑATE [109], GASCH et al. [38] oder GROSS et al. [41] empfohlen. Eine vertiefte Beschreibung des Wellenausbreitungsverhaltens in periodischen Materialien und Strukturen wird in den Arbeiten von KITTEL [66], ASHCROFT [6], LAUDE [75], DEYMIER [26] und KHELIF et al. [65] gegeben.

2.1 Grundgleichungen der Elastodynamik

2.1.1 Bewegungsgleichungen für ein 3D Kontinuum

Die Wellenausbreitung im 3D elastischen Kontinuum kann mithilfe der dynamischen Gleichgewichtsgleichungen, der Kinematik und des Materialgesetzes beschrieben werden. Dabei können die Gleichgewichtsgleichungen der linearen Elastizitätstheorie anhand der Gleichgewichtsbetrachtungen an einem finiten Teilvolumen, wie in Abb. 2.1 dargestellt, hergeleitet werden. Zur Vereinfachung wird zunächst der statische Fall, also unter Ver-

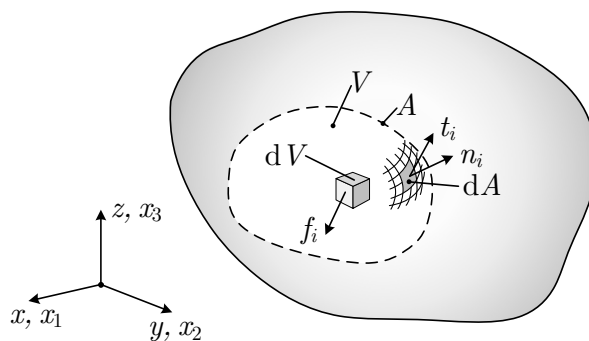


Abbildung 2.1: Finites Teilvolumen, an dem eine Volumenkraft f_i und eine Oberflächenkraft t_i wirken.

nachlässigung der Trägheitskräfte, betrachtet. Die resultierenden Kräfte infolge der Volumenkraft f_i und der Oberflächenkraft t_i müssen im Gleichgewicht stehen, d.h.,

$$\int_A t_i dA + \int_V f_i dV = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

wobei A die Oberfläche und V das Volumen des Körpers ist. Für eine verkürzte Schreibweise wird nachfolgend die EINSTEINSche Summationskonvention verwendet, nach der über doppelt auftretende Indizes in einer Gleichung aufsummiert wird. Mithilfe der CAUCHYschen Formel kann bei gegebenem Spannungstensor σ_{ij} jedem Normalenvektor n_i eine Oberflächenkraft bzw. ein Spannungsvektor t_i über die Beziehung $t_i = \sigma_{ij}n_j$ mit $i, j = 1, 2, 3$ zugeordnet werden. Dabei sind σ_{ij} die Komponenten des CAUCHYschen Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

wobei die Hauptdiagonale die Normalspannungen und die Nebendiagonalen die Schubspannungen darstellen. Der Spannungstensor ist aufgrund des lokalen Momentengleichgewichts zudem symmetrisch und es gilt $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Mithilfe des GAUSSschen Integralsatzes [174] kann nun das Oberflächenintegral aus Gl. (2.1) durch ein Volumenintegral ersetzt werden und es ergibt sich daraus

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Der Index nach dem Komma kennzeichnet dabei die Variable x_j , nach der partiell differenziert wird, beispielsweise $f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Gleichung (2.3) kann nur erfüllt werden, wenn der Integrand den Wert Null annimmt. Somit lauten die Gleichgewichtsgleichungen

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Spannungstensor σ_{ij} ist durch das lineare Elastizitätsgesetz mit dem Verzerrungstensor ε_{kl} über

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

verknüpft. Der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ eines infinitesimalen Elements ist unter Annahme kleiner Deformationen durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

gegeben, wobei $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T$ der Verschiebungsvektor mit den Verschiebungskomponenten u in x -Richtung, v in y -Richtung und w in z -Richtung ist. Meistens werden auf den Nebendiagonalen anstelle der Verzerrungen ε_{ij} die Gleitungen γ_{ij} verwendet, wobei der Zusammenhang $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$ und $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$ besteht. Der NABLA-Operator ist definiert als $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$. Ebenso wie der Spannungstensor ist auch der Verzerrungstensor symmetrisch und es gilt $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Der Elastizitätstensor D_{ijkl} in Gl. (2.6) hat im allgemeinen Fall eines anisotropen Materials 21 unabhängige Elastizitätskonstanten. In dieser Arbeit werden ausschließlich isotrope Materialien betrachtet, für die sich die Anzahl der unabhängigen Konstanten auf 2 reduziert. Aufgrund der Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors ist auch der Elastizitätstensor symmetrisch und es gilt

$$D_{ijkl} = D_{jikl}, \quad D_{ijkl} = D_{jilk}, \quad D_{ijkl} = D_{klij}.$$

Mithilfe der NYEschen Notation kann der Elastizitätstensor 4. Stufe zu einer Matrix D_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) bzw. \mathbf{D} , also einem Tensor 2. Stufe, mit

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

zusammengefasst werden. Dabei bezeichnet E den Elastizitätsmodul und ν die POISSON-Zahl des Materials. Auch der Spannungs- und der Verzerrungstensor 2. Stufe können zu den Vektoren $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$, also Tensoren 1. Stufe, mit

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T \quad (2.9)$$

zusammengefasst werden. Für das Elastizitätsgesetz folgt somit die kompakte Schreibweise

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.10)$$

Schließlich ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (2.6) und Gl. (2.7) in Gl. (2.4) ein System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dabei werden die drei Gleichgewichtsgleichungen aus (2.5) mithilfe eines Matrizen-Differentialoperators

$$\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

zusammengefasst zu

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0. \quad (2.12)$$

Diese Gleichung beschreibt die Gleichgewichtsbedingungen eines 3D Körpers infolge einer statischen oder quasi-statischen äußeren Belastung. Im Fall einer dynamischen Beanspruchung wirken zusätzlich die Trägheitskräfte $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ mit der Massendichte ρ . Nachfolgend wird die übliche NEWTONsche Notation verwendet und die erste Zeitableitung einer Variable durch $\frac{d\bullet}{dt} = \dot{\bullet}$, bzw. die zweite Zeitableitung durch $\frac{d^2\bullet}{dt^2} = \ddot{\bullet}$, gekennzeichnet. Somit ergeben sich die Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum im Zeitbereich zu

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.13)$$

In dieser Arbeit werden insbesondere die Bewegungsgleichungen im Frequenzbereich benötigt, die sich durch die Anwendung der FOURIER-Transformation (s. Anhang A) auf Gl. (2.13) herleiten als

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = -\rho \omega^2 \mathbf{u}. \quad (2.14)$$

Teilweise ist es sinnvoll die Gl. (2.14) mithilfe der kinematischen Beziehungen aus der Gl. (2.7) und dem Elastizitätsgesetz aus der Gl. (2.10) in

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad \text{mit } \lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.15)$$

zu überführen, wobei λ und μ die LAMÉ-Konstanten sind. Diese gekoppelten Verschiebungsdifferentialgleichungen 2. Ordnung werden auch als NAVIER-LAMÉsche Gleichungen bezeichnet.

2.1.2 Bewegungsgleichungen für ein 2D Kontinuum

Häufig sind ingenieurtechnische Problemstellungen unabhängig von einer der drei Raumrichtungen und lassen sich in guter Näherung als 2D bzw. ebene Probleme behandeln. Bei der Modellierung dieser ebenen Probleme wird in Abhängigkeit der getroffenen Annahmen zwischen dem ebenen Verzerrungszustand (EVZ) und dem ebenen Spannungszustand (ESZ) unterschieden. Beim ebenen Verzerrungszustand wird unterstellt, dass die Verschiebungskomponente in z -Richtung verschwindet und die übrigen Verschiebungskomponenten unabhängig von der z -Richtung sind. Folglich verschwinden auch sämtliche Verzerrungskomponenten in z -Richtung, also ε_{zz} , ε_{yz} und ε_{xz} , und man spricht daher vom *ebenen Verzerrungszustand*. Der EVZ kann in sehr guter Näherung zur Modellierung von Bauteilen verwendet werden, deren Geometrie und Belastung invariant in z -Richtung sind und bei denen gleichzeitig die Verschiebung w verhindert ist. Bauteile oder Bauwerke, die eine sehr große Ausdehnung entlang der z -Achse aufweisen, wie der in Abb. 2.2a dargestellte Staudamm, können in sehr guter Näherung mithilfe des EVZ modelliert werden. Hingegen kann der ebene Spannungszustand für Bauteile verwendet werden, deren Dicke deutlich kleiner gegenüber den übrigen Abmessungen ist und die zudem nur in ihrer Ebene belastet werden. Meistens liegen diese Bedingungen in Scheibenproblemen vor. Folglich sind die Spannungskomponenten σ_{zz} , σ_{yz} und σ_{xz} an den Scheibenoberflächen gleich Null und aufgrund der geringen Dicke sind sie auch im Scheibeninneren näherungsweise gleich Null, es liegt also ein *ebener Spannungszustand* vor. Das im Bauwesen bekannteste Beispiel für ein scheibenartiges Bauteil, welches entsprechend gut mit dem ESZ berechnet werden kann, stellt die in Abb. 2.2b veranschaulichte dünne Wandstruktur dar.

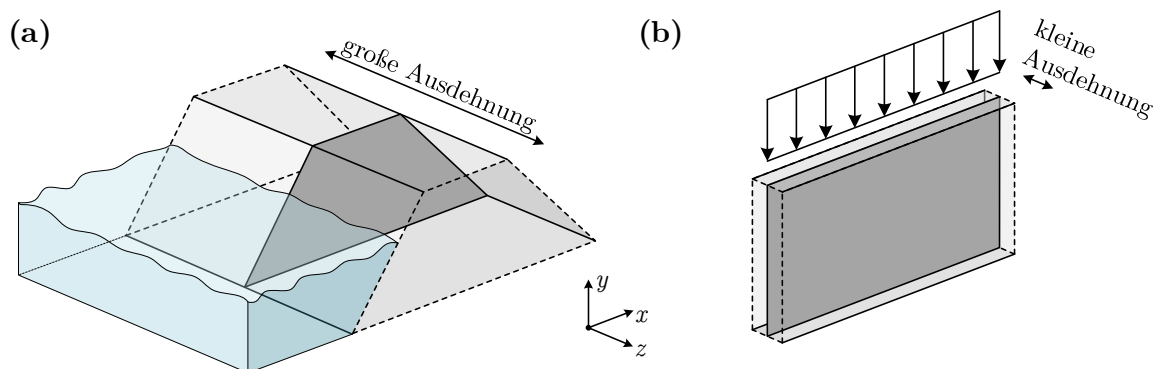


Abbildung 2.2: (a) Ein Staudamm als Beispiel für ein Bauwerk, welches in guter Näherung mittels EVZ berechnet werden kann. (b) Eine Wand als Beispiel für ein scheibenartiges Bauteil, welches in guter Näherung mittels ESZ berechnet werden kann. Die dunkelgrau dargestellten Ebenen veranschaulichen beispielhaft die Modellierung als ebene Flächen.

Die Bewegungsgleichungen für 2D bzw. ebene Strukturen nach dem EVZ oder ESZ lassen sich direkt aus den im Unterabschnitt 2.1.1 dargestellten Bewegungsgleichungen für das 3D Kontinuum herleiten. Im Rahmen dieser Arbeit wird allerdings nur der ESZ betrachtet,

für den die wesentlichen Änderungen gegenüber dem 3D Fall nachfolgend zusammengefasst sind.

Ebener Spannungszustand

Im ESZ eines isotropen Körpers sind die Komponenten σ_{zz} , $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ und $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ im Spannungstensor Gl. (2.2) und somit auch in dem Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ aus Gl. (2.9) gleich Null. Durch Einsetzen in das Elastizitätsgesetz aus Gl. (2.10) und Auflösen nach den Verzerrungen erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E}, & \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2\sigma_{xy}(1 + \nu)}{E} & \text{und} & & \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Folglich liegt im ESZ zwar ein ebenes Problem vor, es können jedoch in allen drei Raumrichtungen Verzerrungen und Verschiebungen auftreten. Setzt man nun die Beziehung für ε_{zz} aus Gl. (2.16) wieder in das Elastizitätsgesetz aus Gl. (2.10) ein, erhält man nach einer Umformung

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Der isotrope Elastizitätstensor \mathbf{D}_{ESZ} für den ESZ ist also definiert durch

$$\mathbf{D}_{\text{ESZ}} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

2.1.3 1D Stab- und Balkenschwingungen

Die Bewegungsgleichungen für 1D Stäbe und Balken können anhand der dynamischen Gleichgewichtsbetrachtungen an einem infinitesimalen Element hergeleitet werden. Dabei wird für die folgenden Herleitungen eine übliche Notation verwendet, nach der die erste Ableitung einer Variable nach x durch $\frac{d\bullet}{dx} = \bullet'$, die zweite Ableitung nach x durch $\frac{d^2\bullet}{dx^2} = \bullet''$ und so weiter ad infinitum, gekennzeichnet wird.

Stabschwingungen

Für die Herleitung der Differentialgleichung für 1D Stabschwingungen wird das in Abb. 2.3 dargestellte infinitesimale Stabelement mit der Massendichte ρ und der konstanten Querschnittsfläche A betrachtet. Das Stabelement führt Longitudinalschwingungen in x -Richtung mit der zeitabhängigen Verschiebung $u = u(x, t)$ aus. An den Schnittufern des

Elements wirkt die Normalkraft N und am rechten Schnittufer wirkt zusätzlich die infinitesimale Änderung der Normalkraft $N'dx$. Im Schwerpunkt des Stabelements wirkt zudem die D'ALEMBERTSche Trägheitskraft $\rho A \cdot dx \cdot \ddot{u}$. Durch eine äußere Streckenlast $n = n(x, t)$ wird das Stabelement zu Schwingungen angeregt. Es folgt das axiale Kräftegleichgewicht

$$\rho A \ddot{u} dx = n dx - N + (N + N' dx) \Rightarrow \rho A \ddot{u} = n + N', \quad (2.19)$$

wobei die Normalkraft N über das lineare Elastizitätsgesetz mit der Verschiebung u durch

$$N = EAu' \quad (2.20)$$

verknüpft ist. Ableiten von Gl. (2.20) nach x und Einsetzen in Gl. (2.19) liefern schließlich die Bewegungsgleichung für longitudinale Stabschwingungen als

$$EAu'' - \rho A \ddot{u} = -n. \quad (2.21)$$

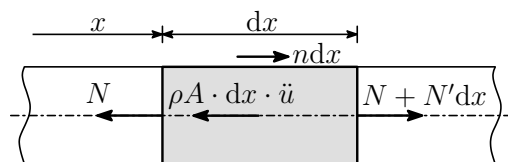


Abbildung 2.3: Dynamisches Gleichgewicht am infinitesimalen Stabelement.

Balkenschwingungen

Aufgrund der Untersuchungen im Kapitel 4 zum Einfluss der geometrischen Nichtlinearität auf das Wellenausbreitungsverhalten in phononischen Balkenstrukturen wird bei der Herleitung der Bewegungsgleichung für 1D Balkenschwingungen die geometrische Nichtlinearität für kleine Verformungen (Theorie II. Ordnung) berücksichtigt. Dabei kann die Bewegungsgleichung für Balken nach Theorie II. Ordnung anhand der dynamischen Gleichgewichtsbetrachtung an einem verformten infinitesimalen Balkenelement hergeleitet werden. An den Schnittufer wirken, wie in Abb. 2.4 veranschaulicht, die Transversalkraft T , die Longitudinalkraft S und das Biegemoment M . Am rechten Schnittufer werden zusätzlich die infinitesimalen Änderungen der Schnittgrößen innerhalb des Balkenelements berücksichtigt. Außerdem wird die D'ALEMBERTSche Trägheitskraft ergänzt, die sich aus dem Produkt der Massendichte ρ mit der Querschnittsfläche A , der infinitesimalen Länge dx des Elements und der Beschleunigung \ddot{w} ergibt. Dabei ist $w = w(x, t)$ die transversale Auslenkung in Abhängigkeit der Längskoordinate x und der Zeit t . Durch eine äußere Streckenlast $q = q(x, t)$ wird das Balkenelement zu Schwingungen angeregt. Weiterhin wird angenommen, dass die Längskraft über die Balkenlänge konstant ist und die BERNOULLI-Theorie für schubstarre Balken gültig ist. Dementsprechend gilt für den

Zusammenhang zwischen dem Biegemoment M und der transversalen Verschiebung w , sowie zwischen der Verschiebung w und der Verdrehung θ

$$M = -EIw'' \quad \text{und} \quad \theta = -w', \quad (2.22)$$

wobei I das Flächenträgheitsmoment um die y -Achse ist. Aus den Gleichgewichtsbedingungen $\sum S = 0$, $\sum T = 0$ und $\sum M = 0$ folgt

$$\sum S = 0: \quad S - (S + S'dx) = 0 \quad \Rightarrow S = \text{konst.}, \quad (2.23)$$

$$\sum T = 0: \quad T - (T + T'dx) + \rho A \ddot{w} dx - q dx = 0 \quad \Rightarrow T' = \rho A \ddot{w} - q, \quad (2.24)$$

$$\sum M = 0: \quad M - (M + M'dx) + T dx - S w' dx - q dx \frac{dx}{2} = 0. \quad (2.25)$$

Auflösen von Gl. (2.25) nach M' unter der Vernachlässigung des Produkts aus differentiellen Größen und anschließendes Ableiten nach x liefern unter Berücksichtigung von Gl. (2.24)

$$M'' = -S w'' + T' \xrightarrow{T' = \rho A \ddot{w} - q} M'' = -S w'' + \rho A \ddot{w} - q. \quad (2.26)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen M und w aus Gl. (2.22) folgt unter der Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit EI und nach zweimaligem Ableiten nach x

$$EI w'''' + M'' = 0. \quad (2.27)$$

Anschließendes Einsetzen von Gl. (2.26) in Gl. (2.27) liefert

$$EI w'''' - S w'' + \rho A \ddot{w} = q. \quad (2.28)$$

Gleichung (2.28) ist die Bewegungsgleichung zur Beschreibung von transversalen Balkenschwingungen nach Theorie II. Ordnung unter Vernachlässigung der Einflüsse aus der Dämpfung und der Drehträgheit.

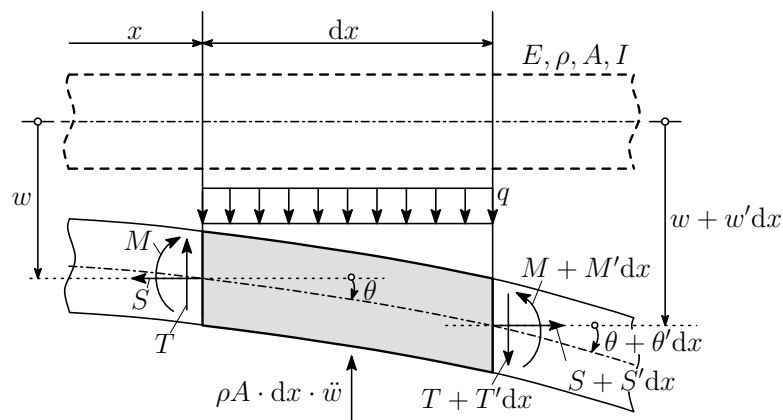


Abbildung 2.4: Dynamisches Gleichgewicht am verformten infinitesimalen Balkenelement.

2.2 Wellenausbreitung in phononischen Strukturen

Die Wellenausbreitung in periodischen phononischen Materialien und Strukturen kann typischerweise charakteristische Bandlücken (BL) aufweisen. Grundsätzlich können die Bandlücken von phononischen Materialien und Strukturen durch zwei unterschiedliche physikalische Mechanismen, die BRAGG-Streuung und die lokale Resonanz, entstehen. Dabei leitet sich der Mechanismus der BRAGG-Streuung aus der BRAGG-Gleichung ab, die die Interferenz von Wellen bei der Streuung an einem Kristallgitter beschreibt [13]. Das Wellenausbreitungsverhalten in phononischen Materialien und Strukturen wird also durch das Wellenausbreitungsverhalten in kristallinen Strukturen bestimmt. Der Ausgangspunkt für die Beschreibung der Symmetrieeigenschaften von kristallinen oder ähnlichen periodisch aufgebauten Strukturen ist das Konzept der sogenannten BRAVAIS-Gitter [26]. Im Gegensatz zu den BRAGG-Bandlücken muss die Periodizität der Struktur zur Entstehung von Resonanz-Bandlücken nicht streng eingehalten werden. Dabei treten in bestimmten Frequenzbereichen ausgeprägte Resonanzeffekte auf. Beispielsweise bei den klassischen phononischen Kristallen zwischen den schwingenden Einschlüssen (Resonatoren) und den einfallenden Wellen.

2.2.1 Geometrische Beschreibung von periodischen Gitterstrukturen

Allgemein ist ein BRAVAIS-Gitter definiert als ein unendliches Feld mit diskreten Punkten, die so angeordnet und ausgerichtet sind, dass das Feld immer genau gleich aussieht, unabhängig davon welcher der Punkte betrachtet wird [6]. Mathematisch kann ein 2D BRAVAIS-Gitter somit durch eine Sammlung von Punkten mit den jeweiligen Ortsvektoren

$$\mathbf{r} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (2.29)$$

beschrieben werden, wobei \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 die Translationsvektoren des BRAVAIS-Gitters sind und das Gitter aufspannen. Im allgemeinen 3D Fall gibt es 14 verschiedene BRAVAIS-Gitter die wiederum 7 verschiedenen Kristallsystemen zugeordnet werden. Allerdings reduziert sich die Anzahl der unterschiedlichen BRAVAIS-Gitter im 2D Fall auf 5, wobei im Rahmen dieser Arbeit nur das quadratische und das rechteckige BRAVAIS-Gitter betrachtet werden. Die im realen Raum definierten BRAVAIS-Gitter werden häufig auch als direkte Gitter (engl.: *direct lattice*) bezeichnet. Für die Beschreibung und Analyse der Wellenausbreitung in kristallinen Strukturen ist jedoch insbesondere das reziproke Gitter (engl.: *reciprocal lattice*) von besonderer Bedeutung. Dabei ergibt sich das reziproke Gitter durch die Menge aller Wellenvektoren $\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots]$, die ebene Wellen mit der Periodizität des gegebenen BRAVAIS-Gitters beschreiben [6]. Der reziproke Raum wird daher auch als

Raum der Wellenvektoren oder k -Raum bezeichnet. Das reziproke 2D Gitter kann analog zum direkten Gitter durch Translationsvektoren $\bar{\mathbf{a}}_1$ und $\bar{\mathbf{a}}_2$ beschrieben werden, die mit den Translationsvektoren des direkten Gitters über

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|^2}, \quad \bar{\mathbf{a}}_2 = 2\pi \frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|^2} \quad (2.30)$$

verknüpft sind. Auf eine ausführliche Beschreibung der BRAVAIS-Gitter und der zugehörigen reziproken Gitter wird in dieser Arbeit verzichtet und stattdessen wird auf die Werke von ASHCROFT [6] und KITTEL [66] verwiesen.

In Abb. 2.5 ist beispielhaft ein quadratisches BRAVAIS-Gitter (a) mit dem zugehörigen reziproken Gitter (b) dargestellt. Dabei sind sowohl für das direkte als auch das reziproke Gitter die durch die Translationsvektoren aufgespannten Einheitszellen in hellgrau markiert. Häufig gibt es verschiedene Möglichkeiten die Translationsvektoren und Einheitszellen eines Gitters festzulegen. Üblicherweise wird jedoch die WIGNER-SEITZ-Zelle als Einheitszelle gewählt, die im reziproken Raum der ersten BRILLOUIN-Zone entspricht [14,26]. Dabei ist die erste BRILLOUIN-Zone die Menge aller Punkte im Raum der Wellenvektoren, die vom Ursprung erreicht werden können ohne eine BRAGG-Linie zu kreuzen. Als BRAGG-Linien werden wiederum alle Linien bezeichnet, welche die Linien, die einen bestimmten Punkt des Gitters mit allen anderen Punkten des reziproken Gitters verbinden, halbieren [26]. Auf analoge Weise können auch höhere BRILLOUIN-Zonen konstruiert werden, so ergibt sich die n -te BRILLOUIN-Zone durch die Menge aller Punkte, die vom Ursprung durch Kreuzung von $(n - 1)$ BRAGG-Linien erreicht werden können. Die ersten drei BRILLOUIN-Zonen sowie die ersten BRAGG-Linien des 2D quadratischen BRAVAIS-Gitters sind in Abb. 2.5b dargestellt.

Im Hinblick auf die Analyse des Wellenausbreitungsverhaltens in periodischen Strukturen

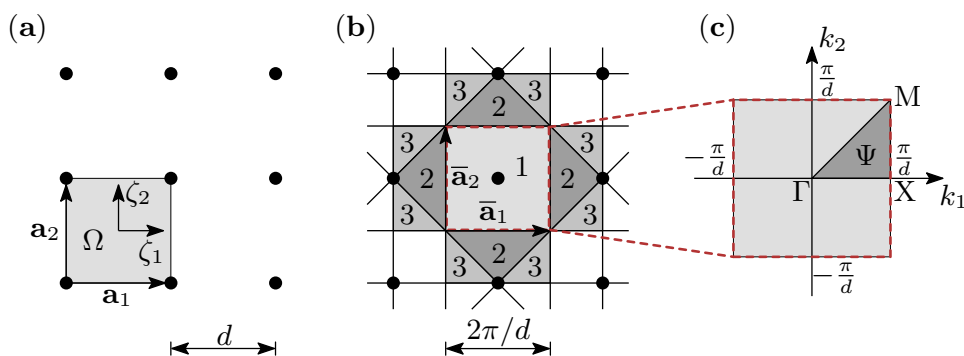


Abbildung 2.5: (a) Quadratisches BRAVAIS-Gitter im realen Raum (direktes Gitter) mit der Gitterkonstante d . (b) Zugehöriges reziprokes Gitter mit den ersten drei BRILLOUIN-Zonen, wobei die erste BRILLOUIN-Zone der WIGNER-SEITZ-Zelle entspricht. Die Linien stellen die verschiedenen BRAGG-Linien des Gitters dar. (c) Die erste BRILLOUIN-Zone und der irreduzible Teil Ψ der ersten BRILLOUIN-Zone (IBZ), der durch die hohen Symmetriepunkte Γ , X und M aufgespannt wird.

kommt dabei jedoch nur der ersten BRILLOUIN-Zone eine große Bedeutung zu, da aufgrund der Periodizität der Struktur sämtliche Eigenschaften innerhalb der ersten BRILLOUIN-Zone beschrieben werden können [26]. Liegen zudem bestimmte Symmetrieeigenschaften in der Einheitszelle Ω des direkten Gitters vor, dann kann die erste BRILLOUIN-Zone reduziert werden. Dazu müssen alle Einflussparameter, beispielsweise der E-Modul E , die Massendichte ρ oder auch die Geometrie der Einheitszelle, die entsprechende Symmetrieeigenschaft erfüllen. Zur Vereinfachung können die genannten unterschiedlichen Einflussfaktoren in einem Parameter p zusammengefasst werden [27]. Weiterhin kann die räumliche Änderung von p innerhalb von Ω durch die lokalen Koordinaten ζ_1, ζ_2 , wie in Abb. 2.5a dargestellt, beschrieben werden. Ist $p(\zeta_1, \zeta_2)$ invariant unter den Transformationen

$$(\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (-\zeta_1, -\zeta_2), \quad (\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (-\zeta_1, \zeta_2), \quad (\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (\zeta_2, \zeta_1),$$

dann sind nach COX und DOBSON [20] auch alle ebenen Wellen, die durch die Wellenvektoren $\mathbf{k} = [k_1, k_2]^T$ in der ersten BRILLOUIN-Zone beschrieben werden, invariant gegenüber den Transformationen

$$(k_1, k_2) \mapsto (-k_1, -k_2), \quad (k_1, k_2) \mapsto (-k_1, k_2), \quad (k_1, k_2) \mapsto (k_2, k_1),$$

und die erste BRILLOUIN-Zone kann auf den in Abb. 2.5c dargestellten dreieckförmigen Bereich Ψ reduziert werden. Der Bereich Ψ wird auch als erste irreduzible BRILLOUIN-ZONE (IBZ - engl.: *irreducible Brillouin-zone*) bezeichnet. Die Eckpunkte Γ, X und M der IBZ sind dabei die sogenannten hohen Symmetriepunkte der BRILLOUIN-Zone. Mithilfe der IBZ kann eine effiziente Berechnung der Dispersionskurven von periodischen Materialien und Strukturen erfolgen.

2.2.2 Mechanismen zur Entstehung von Bandlücken

Mechanismus der BRAGG-Streuung

Der Mechanismus der BRAGG-Streuung (BRAGG-Mechanismus) zur Entstehung von Bandlücken (BL) in phononischen Materialien und Strukturen leitet sich aus der im Jahr 1913 von W. L. BRAGG und W. H. BRAGG vorgeschlagenen Gleichung zur Beschreibung der Beugung von Röntgenstrahlen an kristallinen Feststoffen ab [13], die heutzutage als BRAGG-Gleichung bekannt ist. Das Beugungsphänomen geht dabei auf die Streuung der Röntgenstrahlen an den einzelnen Atomen des Kristallgitters zurück. W. L. BRAGG und W. H. BRAGG interpretierten die Streuung als Reflexionen der Röntgenstrahlen in den verschiedenen Gitterebenen des Kristalls [13]. Der Eindruck einer Reflexion entsteht al-

lerdings nur auf makroskopischer Ebene, der dadurch auftritt, dass jedes Teilchen des Gitters als Streuzentrum der einfallenden Röntgenstrahlen wirkt und entsprechend eine Sekundärwelle emittiert [105]. Diese Sekundärwellen setzen sich nach HUYGENS zu einer reflektierten Welle zusammen, wobei die reflektierten Wellen aller parallelen Gitterebenen interferieren [91, 105]. Die BRAGG-Gleichung beschreibt dabei die Bedingung, unter der diese Wellen konstruktiv interferieren, wodurch makroskopisch der Eindruck einer Reflexion entsteht. Dazu muss der Gangunterschied 2δ zwischen den gebeugten Wellen zweier Gitterebenen, wie in Abb. 2.6 dargestellt, einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ entsprechen. Es muss also gelten

$$2\delta = n\lambda, \quad (2.31)$$

wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ als Beugungsordnung bezeichnet wird. Der Gangunterschied δ kann wiederum durch die Gitterkonstante d und den BRAGG-Winkel θ über

$$\delta = d \sin(\theta) \quad (2.32)$$

ausgedrückt werden. Einsetzen von Gl. (2.32) in Gl. (2.31) liefert die BRAGG-Gleichung

$$n\lambda = 2d \sin(\theta). \quad (2.33)$$

Auch im Hinblick auf phononische Materialien und Strukturen beschreibt die BRAGG-Gleichung die Bedingung für eine Reflexion der einfallenden Welle. Erfüllt eine einfallende Welle die BRAGG-Gleichung kann diese sich folglich nicht in der Struktur ausbreiten und es liegt eine Bandlücke vor. Derartige Bandlücken, die infolge der BRAGG-Streuung entstehen, werden auch als BRAGG-Bandlücken (BG-BL) bezeichnet. Die erste BRAGG-Bandlücke ist dabei zugehörig zu der Beugungsordnung $n = 1$, die zweite BRAGG-Bandlücke ist zugehörig zu der Beugungsordnung $n = 2$, und so weiter ad infinitum. Beispielsweise ergibt sich aus Gl. (2.33) für die Beugungsordnung $n = 1$ und eine senkrecht zur Gitterebene einfallende Welle ($\theta = 90^\circ$) eine Wellenlänge von

$$\lambda = 2d. \quad (2.34)$$

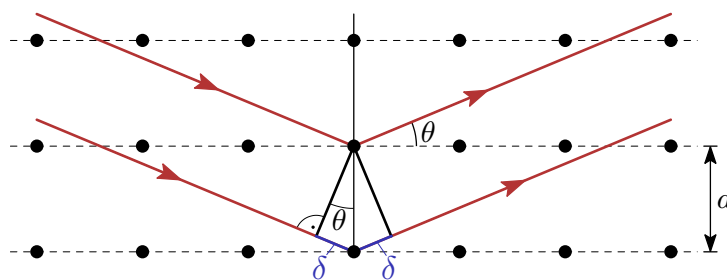


Abbildung 2.6: Beugungsgeometrie am Kristallgitter nach W. L. BRAGG und W. H. BRAGG.

Setzt man nun in Gl. (2.34) die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c_S}{f} \quad (2.35)$$

ein, wobei c_S [m/s] die Wellengeschwindigkeit der jeweiligen Welle im Ausbreitungsmedium und f [Hz] die Frequenz ist, und löst man nach der Frequenz f auf, dann erhält man

$$f = \frac{c_S}{2d}. \quad (2.36)$$

Die Frequenz, die sich aus Gl. (2.36) ergibt, wird auch als BRAGG-Frequenz f_B bezeichnet und gibt ungefähr die Mittenfrequenz der ersten BRAGG-Bandlücke an [62,65]. Es besteht also ein inverser Zusammenhang zwischen der Mittenfrequenz f_B der ersten Bandlücke und der Gitterkonstante d . Bei gleichbleibenden Materialeigenschaften folgt daraus beispielsweise, dass sich die Mittenfrequenz f_B bei einer Verdopplung der Gitterkonstante d ungefähr halbiert. Weiterhin muss zur Entstehung von Bandlücken, beispielsweise bei phononischen Kompositen bzw. Verbundwerkstoffen, ein ausreichend hoher Kontrast in den Materialeigenschaften zwischen der Matrix und den Einschlüssen vorliegen und zudem der sogenannte Füllfaktor, der das Verhältnis zwischen der Fläche der Einschlüsse und der Gesamtfläche bei 2D-Strukturen angibt, ausreichend groß sein. Insbesondere der Füllfaktor beeinflusst auch die Mittenfrequenz der Bandlücken sowie die Breiten der Bandlücken [65]. Neben den bereits genannten Einflussfaktoren hat auch die Form der Einschlüsse einen nennenswerten Einfluss, so ergeben sich beispielsweise unterschiedliche Mittenfrequenzen und Breiten der Bandlücken bei Verwendung von quadratischen gegenüber runden Einschlüssen [152]. Aufgrund der unterschiedlichen Einflussfaktoren auf die Entstehung und Beschaffenheit der BRAGG-Bandlücken kann über Gl. (2.36) nur die ungefähre Mittenfrequenz der ersten Bandlücke abgeschätzt werden. Dennoch offenbart sich in Gl. (2.36) die praktische Einschränkung des BRAGG-Mechanismus: Für die Entstehung von Bandlücken im sehr niedrigen Frequenzbereich muss die Gitterkonstante d und damit auch die Abmessungen der gesamten phononischen Struktur unpraktisch groß werden. Der zweite Mechanismus zur Entstehung von Bandlücken, die lokale Resonanz, weist eine derartige Einschränkung nicht direkt auf.

Mechanismus der lokalen Resonanz

Der Mechanismus der lokalen Resonanz (LR) weist im Vergleich zum BRAGG-Mechanismus zwei wesentliche Vorteile auf. Zum einen können Resonanz-Bandlücken (LR-BL) deutlich unterhalb der BRAGG-Grenze nach Gl. (2.36) erzielt werden und zum anderen sind die Resonanz-Bandlücken weniger sensitiv hinsichtlich Störungen oder Defekten in der Periodizität der phononischen Struktur [22, 139]. Im Allgemeinen bestehen die lokal-resonanten Materialien und Strukturen (engl.: *locally resonant material/structure*), wie

in Abb. 2.7a veranschaulicht, aus einem harten Kern (z. B. Metall), der durch eine dünne weiche Materialschicht (z. B. Silikon) umhüllt ist und in einer Matrix (z. B. Epoxidharz) eingebettet ist. Die dünne weiche Ummantelung des harten Kerns ermöglicht lokale Resonanzeffekte zwischen dem Kern und der umgebenden Matrix, wodurch Resonanz-Bandlücken in Frequenzbereichen entstehen können, die zwei Ordnungen unterhalb der BRAGG-Bandlücken liegen [65]. Dabei schwingt der Kern (Resonator) bei der Resonanzfrequenz, wie in Abb. 2.7b veranschaulicht, in Gegenphase zu der sich in der Matrix ausbreitenden Welle. Beide Wellenanteile interferieren destruktiv und es tritt eine teilweise oder vollständige Auslöschung der sich in der Matrix ausbreitenden Welle auf, sodass also eine Bandlücke vorliegt.

Analog zu den lokal-resonanten phononischen Kristallen können auch in anderen mechanischen Systemen Resonanz-Bandlücken auftreten. In Abb. 2.7c ist die Einheitszelle eines 1D periodischen Feder-Masse-Systems mit einem Resonator dargestellt. Dabei ist die Masse m_1 der Einheitszelle über die Feder der Steifigkeit c_1 mit den beidseitig benachbarten Einheitszellen gekoppelt. Innerhalb der Masse m_1 ist ein Resonator mit der Federsteifigkeit c_R und der Masse m_R angebracht. Bei diesem einfachen System wird die Resonanzfrequenz f_R bzw. die Resonanzkreisfrequenz ω_R bestimmt durch

$$f_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{c_R}{m_R}}, \quad (2.37)$$

in deren Nähe die lokal-resonante Bandlücke entsteht [55]. Aus Gl. (2.37) wird deutlich, dass die Entstehung von Resonanz-Bandlücken im Gegensatz zur Entstehung von BRAGG-Bandlücken unabhängig von den Dimensionen der phononischen Struktur (Gitterkonstante d) ist. Somit können theoretisch selbst bei sehr kleinen Strukturen Bandlücken im sehr niedrigen Frequenzbereich erzielt werden. Allerdings gibt es praktische Einschränkungen

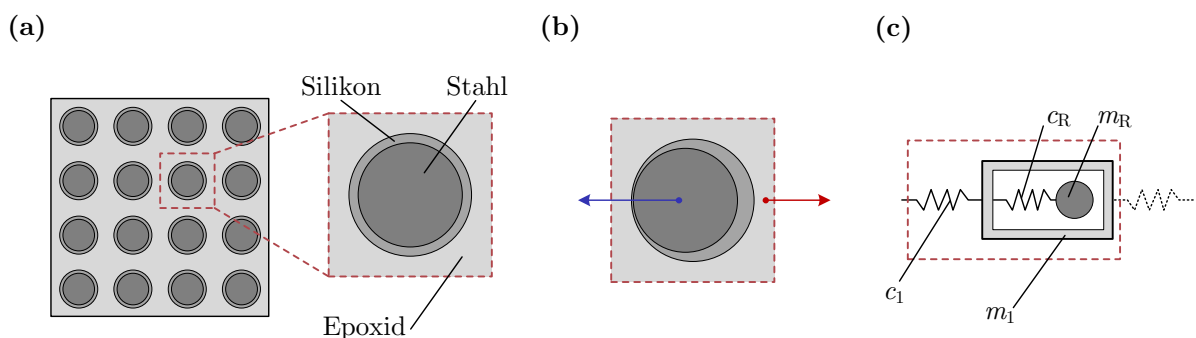


Abbildung 2.7: (a) 2D lokal-resonanter phononischer Kristall und die zugehörige Einheitszelle. (b) Schematisches Verschiebungsfeld einer Einheitszelle im Frequenzbereich einer Bandlücke. Die Pfeile deuten die Bewegungsrichtung des Kerns bzw. die Ausbreitungsrichtung der Welle in der Matrix an. (c) Einheitszelle eines 1D periodischen Feder-Masse-Systems mit einem Resonator.

hinsichtlich der Dichte und Steifigkeit der jeweiligen Komponenten, durch die indirekt eine Abhängigkeit zwischen den geometrischen Dimensionen und der erreichbaren niedrigsten Bandlücke entsteht.

Die lokal-resonanten phononischen Materialien und Strukturen werden auch als Metamaterialien bezeichnet, da in bestimmten Frequenzbereichen außergewöhnliche Materialeigenschaften, wie beispielsweise eine negative effektive Masse, eine negative effektive Steifigkeit oder eine negative Beugung, auftreten. Für eine detaillierte Beschreibung der Eigenschaften von Metamaterialien wird an dieser Stelle auf [33, 52, 53, 79, 148] verwiesen.

Gegenüberstellung der Mechanismen zur Entstehung von Bandlücken

In der Tab. 2.1 sind die wesentlichen Vor- und Nachteile des BRAGG-Mechanismus und des LR-Mechanismus zusammengefasst und gegenübergestellt. Beim BRAGG-Mechanismus ist insbesondere der Vorteil zu nennen, dass sehr breite Bandlücken erzielt werden können. Allerdings können aufgrund der geometrischen Beschränkungen nur Bandlücken in vergleichsweise hohen Frequenzbereichen entstehen. Durch den LR-Mechanismus können zwar Bandlücken in sehr niedrigen Frequenzbereichen erzielt werden, allerdings beschränken sich die Bandlücken auf die unmittelbare Nähe zur Resonanzfrequenz und sind entsprechend sehr schmal.

Tabelle 2.1: Gegenüberstellung der Vor- und Nachteile des BRAGG-Mechanismus und des LR-Mechanismus.

Mechanismus	Vorteile	Nachteile
BRAGG	Sehr breite BL	BL im höheren Frequenzbereich
	Große Anzahl an BL	Strenge Periodizität notwendig
LR	BL im niedrigen Frequenzbereich	Sehr schmale BL
	Keine strenge Periodizität notwendig	Benötigt schwere Resonatoren

2.2.3 Berechnung der Dispersionskurven

Zur Beschreibung des Wellenausbreitungsverhaltens in phononischen Materialien und Strukturen einschließlich ihrer Bandlücken können die Dispersionsrelationen bzw. -kurven herangezogen werden. Die Berechnung der Dispersionskurven von periodischen Materialien und Strukturen erfolgt mithilfe des BLOCH-Theorems [12], dem zufolge das Wellenfeld in einem periodischen Medium ebenfalls periodisch ist. Dabei wird die Periodizität des Wellenfeldes wiederum durch die Dispersionsrelation, also der Beziehung zwischen der Frequenz f und dem Wellenvektor \mathbf{k} , beschrieben [26]. Weiterhin impliziert das BLOCH-Theorem, dass die Änderung der Wellenamplitude zwischen zwei benachbarten Zellen

unabhängig von den Positionen dieser Zellen ist, da diese Zellen ein repräsentativer Teil eines unendlich ausgedehnten Gitters sind [55]. Folglich können die Wellenausbreitungseigenschaften eines periodischen Mediums, zumindest für nicht dissipative Materialien, vollständig durch die Analyse einer repräsentativen Einheitszelle ermittelt werden [55,65]. Über das BLOCH-Theorem bzw. die periodischen BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen sind die Verschiebungen \mathbf{u}^j einer beliebigen Zelle des Gitters mit den Verschiebungen \mathbf{u}^0 einer Referenzzelle über

$$\mathbf{u}^j = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\mathbf{u}^0 \quad (2.38)$$

verknüpft, wobei \mathbf{r} die Translation der Referenzzelle auf die Zelle j des Gitters nach Gl. (2.29) angibt. Die genaue Vorgehensweise zur Berechnung der Dispersionskurven wird im Folgenden anhand des in der Literatur bekannten [52, 53, 55] und in der Abb. 2.8 dargestellten 1D periodischen Feder-Masse-Systems mit Resonatoren erläutert. Die sich periodisch wiederholende Einheitszelle besteht aus einer Masse m_1 , die über die Feder der Steifigkeit c_1 mit den beidseits angrenzenden Einheitszellen gekoppelt ist. Zusätzlich ist an der Masse m_1 ein Resonator mit der Federsteifigkeit c_R und der Masse m_R angebracht. Somit besitzt die Referenzzelle n die zwei Freiheitsgrade u_1^n und u_R^n die wiederum mit den Freiheitsgraden der benachbarten Zellen nach Gl. (2.38) über

$$\mathbf{u}^{n-1} = \begin{bmatrix} u_1^{n-1} \\ u_R^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_R^n \end{bmatrix} \cdot e^{-ikd} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_R^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_R^n \end{bmatrix} \cdot e^{ikd} \quad (2.39)$$

verknüpft sind. Dabei reduziert sich der Wellenvektor \mathbf{k} aus der Gl. (2.38) für den 1D Fall auf die Wellenzahl k und der Gittertranslationsvektor \mathbf{r} für die linke Zelle auf den skalaren Wert $-d$ sowie für die rechte Zelle auf den skalaren Wert $+d$, wobei d die Gitterkonstante ist. Die Bewegungsgleichungen für die repräsentative Einheitszelle (Referenzzelle) n können aus dem dynamischen Gleichgewicht abgeleitet werden als

$$\begin{aligned} (-\omega^2 m_1 + 2c_1) u_1^n - c_1 (u_1^{n-1} + u_1^{n+1}) - c_R (u_R^n - u_1^n) &= 0, \\ (-\omega^2 m_R + c_R) u_R^n - c_R u_1^n &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

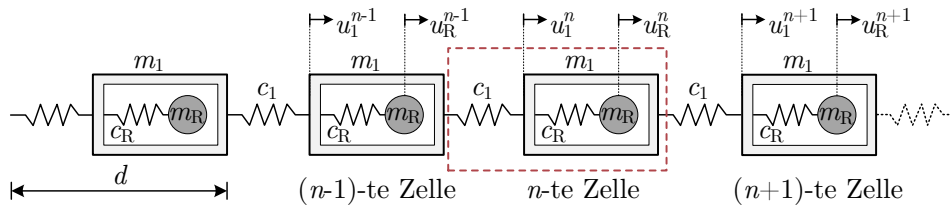


Abbildung 2.8: Ein 1D periodisches Feder-Masse-System mit Resonatoren. Die repräsentative Einheitszelle ist durch eine rote gestrichelte Linie gekennzeichnet.

Mithilfe der GUYAN-Kondensation [44] kann der Freiheitsgrad u_R des Resonators in der Gl. (2.40) eliminiert werden und man erhält dann

$$\left(-\omega^2 m_1 + 2c_1 - \frac{c_R^2}{c_R - \omega^2 m_R} + c_R\right) u_1^n - c_1 (u_1^{n-1} + u_1^{n+1}) = 0. \quad (2.41)$$

Die Freiheitsgrade u_1^{n-1} und u_1^{n+1} können schließlich mithilfe des BLOCH-Theorems durch u_1^n nach Gl. (2.39) ausgedrückt werden. Somit folgt aus der Gl. (2.41) unter Berücksichtigung der EULER-Formel

$$\left(-\omega^2 m_1 + 2c_1 - \frac{c_R^2}{c_R - \omega^2 m_R} + c_R - 2c_1 \cos(kd)\right) u_1^n = 0, \quad (2.42)$$

wobei zur nichttrivialen Lösung der Gleichung der Klammerausdruck gleich Null sein muss. Die nichttriviale Lösung entspricht der Dispersionsrelation des Systems, die sich mit den Beziehungen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, \quad \omega_R = \sqrt{\frac{c_R}{m_R}} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{m_R}{m_1}$$

in kompakter Form als

$$2[1 - \cos(kd)] - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left(1 + \frac{\gamma}{1 - \omega^2/\omega_R^2}\right) = 0 \quad (2.43)$$

darstellen lässt. Aus Gl. (2.43) resultiert die Eigenwertgleichung zur Ermittlung der Dispersionskurven, wobei es zwei Möglichkeiten zur Lösung der Eigenwertgleichung gibt. Bei der ersten Möglichkeit wird die Wellenzahl vorgegeben und nach der Eigenkreisfrequenz ω aufgelöst, man erhält also eine Dispersionsrelation der Form $\omega(k)$. Dabei muss die Eigenwertgleichung für eine diskrete Anzahl von Wellenzahlen in der ersten BRILLOUIN-Zone gelöst werden. Für eine effiziente Berechnung wird die Berechnung üblicherweise auf die Kanten der ersten irreduziblen BRILLOUIN-Zone (IBZ) beschränkt. Im vorliegenden 1D Fall reduziert sich die IBZ auf das Intervall $k \in [0, \pi/d]$ bzw. die Kante Γ -X. Bei der zweiten Möglichkeit zur Lösung der Eigenwertgleichung wird die Kreisfrequenz ω vorgegeben und nach der Wellenzahl k aufgelöst, man erhält also eine Dispersionsrelation der Form $k(\omega)$. Im Gegensatz zur ersten Möglichkeit können die Wellenzahlen hierbei auch komplexe Werte annehmen. Dabei ist der Imaginärteil der Wellenzahl ein Indikator für das Abklingverhalten der evaneszenten Wellen innerhalb der Bandlücken und ist innerhalb des Frequenzbereichs einer Bandlücke betragsmäßig immer größer als Null [76, 153]. Die zweite Möglichkeit liefert also komplexe Dispersionskurven, die auch als komplexe Bandstruktur bezeichnet werden, wohingegen die erste Möglichkeit ausschließlich reelle Dispersionskurven liefert, die auch als klassische Bandstruktur bezeichnet werden. Die

zu den Eigenwerten zugehörigen Eigenformen werden auch als BLOCH-Wellen bezeichnet. Im Allgemeinen liefern die komplexen Dispersionskurven zusätzliche Informationen zum Abklingverhalten der evaneszenten BLOCH-Wellen, also zu den Eigenformen innerhalb der Bandlücken. Dafür ist jedoch der Berechnungsaufwand im Vergleich zur ersten Möglichkeit in der Regel deutlich höher.

In Abb. 2.9a sind beispielhaft die komplexen Dispersionskurven nach Gl. (2.43) des 1D Feder-Masse-Systems mit Resonatoren für $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_R = 2 \text{ kg}$, $c_1 = 1000 \text{ N/m}$ und $c_R = 125 \text{ N/m}$ dargestellt. Auf der linken Seite ist der Realteil der Wellenzahl $\Re(k)$ und auf der rechten Seite der Imaginärteil der Wellenzahl $\Im(k)$ gegen die Frequenz f aufgetragen. Bei der $k(\omega)$ -Dispersionsrelation ist die Wellenzahl im Allgemeinen jedoch nicht auf die erste BRILLOUIN-Zone beschränkt. Während der Realteil aufgrund der durch die Randbedingungen erzwungenen Periodizität auf die erste BRILLOUIN-Zone beschränkt bleibt, ist der Imaginärteil vollständig unbeschränkt [76]. Das in Abb. 2.9 dargestellte Intervall des Imaginärteils der Wellenzahl ist entsprechend beliebig.

Das System weist zwei Bandlücken auf, wobei die erste Bandlücke eine Resonanz-Bandlücke (LR-BL) ist. Die Abschätzung nach Gl. (2.37) für die Entstehung der Resonanz-Bandlücke mit

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_R}{m_R}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{125 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = 1,26 \text{ Hz}$$

bestätigt sich in diesem Beispiel. Allerdings tritt die Frequenz von $f_R = 1,26 \text{ Hz}$ nicht in der Mitte der Bandlücke, sondern am unteren Rand auf. Aus Abb. 2.9a wird deutlich, dass der Imaginärteil zum unteren Rand der Bandlücke hin spitz zuläuft und bei der Resonanzfrequenz ein lokales Maximum aufweist. Die evaneszenten BLOCH-Wellen der

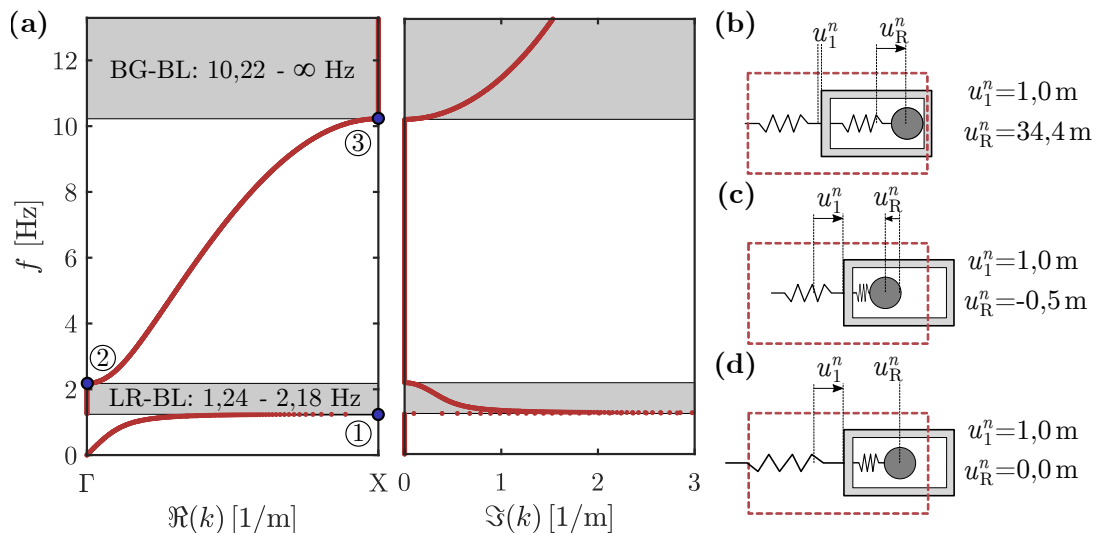


Abbildung 2.9: (a) Komplexe Dispersionskurven des 1D Feder-Masse-Systems mit Resonatoren. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 1. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle Γ , Band 2. (d) Zugehörige Eigenform zum Punkt ③: Stelle X, Band 3.

ersten Bandlücke klingen folglich bei der Resonanzfrequenz am schnellsten ab. Die zweite Bandlücke aus Abb. 2.9a ergibt sich infolge des BRAGG-Mechanismus (BG-BL), wobei die Bandlücke nach oben unbegrenzt ist, da das System nur zwei Freiheitsgrade und somit auch nur zwei Bänder besitzt. Unter Vernachlässigung des Resonators kann die Einheitszelle aus Abb. 2.8 als diskrete Form eines Dehnstabs der Länge d aufgefasst werden. Für den Zusammenhang zwischen der Federsteifigkeit c_1 und der Dehnsteifigkeit EA , wobei E der E-Modul und A die Querschnittsfläche ist, sowie für den Zusammenhang zwischen der Masse m_1 und der Massendichte ρ , gilt

$$c_1 = \frac{EA}{d} \quad \text{bzw.} \quad m_1 = \rho d A.$$

Somit ergibt sich die Wellengeschwindigkeit c_S im periodischen Feder-Masse-System als

$$c_S = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_1 d^2}{m_1}} = d \cdot \sqrt{\frac{c_1}{m_1}},$$

wobei sich der Einfluss der Querschnittsfläche A aufhebt. Einsetzen der Schallgeschwindigkeit in die BRAGG-Bedingung nach Gl. (2.36) liefert als Abschätzung für die Entstehung der BRAGG-Bandlücke

$$f_B = \frac{c_S}{2d} = \frac{d \cdot \sqrt{c_1 m_1^{-1}}}{2d} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1000 \text{ N/m}}{1 \text{ kg}}} = 15,81 \text{ Hz.}$$

In diesem Beispiel ergibt sich über die BRAGG-Frequenz also nur eine Abschätzung über die Größenordnung des unteren Randes der BRAGG-Bandlücke. Der Imaginärteil der Wellenzahl nimmt ab dem unteren Rand der BRAGG-Bandlücke kontinuierlich zu. Folglich klingen die BLOCH-Wellen innerhalb dieser Bandlücke mit steigender Frequenz schneller ab.

In der Abb. 2.9a sind außerdem die begrenzenden Stellen der Bandlücken durch drei Punkte markiert. Die begrenzenden Stellen der ersten Bandlücke sind dabei durch den Punkt ① am unteren Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 2.9b, und den Punkt ② am oberen Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 2.9c, gekennzeichnet. Die zweite Bandlücke ist nur am unteren Rand begrenzt, wobei die entsprechende Stelle durch den Punkt ③ markiert ist und die zugehörige Eigenform in Abb. 2.9d dargestellt ist. Die Eigenformen sind dabei auf die Verschiebung $u_1^n = 1,0 \text{ m}$ normiert und die rote gestrichelte Linie markiert die Ausgangsposition der Einheitszelle. Bei der Eigenform aus der Abb. 2.9b weist der Resonator eine deutlich größere Auslenkung als die Masse m_1 auf, wobei der Resonator und die Masse m_1 in Phase schwingen. Hingegen schwingt der Resonator bei der Eigenform aus der Abb. 2.9c in Gegenphase zur Masse m_1 . In diesem Fall ist die Auslenkung des Resonators betragsmäßig halb so groß wie die Auslenkung der Mas-

se m_1 . Die Auswertung weiterer Eigenformen, die hier nicht detailliert dargestellt sind, zeigt, dass der Resonator bis zur Resonanzfrequenz, also $f < f_R = 1,26 \text{ Hz}$, in Phase zur Masse m_1 schwingt und für $f \geq f_R = 1,26 \text{ Hz}$ in Gegenphase zur Masse m_1 schwingt. Dieses Verhalten ist charakteristisch für LR-Bandlücken. Bei der Eigenform aus der Abb. 2.9d weist der Resonator hingegen keine Auslenkung auf, da die zugehörige Frequenz von $f = 10,22 \text{ Hz}$ deutlich über der Resonanzfrequenz des Resonators liegt.

Insbesondere bei der Interpretation des Imaginärteils von komplexen Bandstrukturen ist zu beachten, dass die Berechnung nur für eine unendlich ausgedehnte Struktur gültig ist. Bei realen Strukturen mit endlicher Ausdehnung unterliegt das Wellenausbreitungsverhalten anderen Einflüssen, die durch eine Berechnung einer Einheitszelle nicht berücksichtigt werden können. Daher ist zur Beschreibung des Wellenausbreitungsverhaltens von periodischen Strukturen neben den Dispersionskurven auch die Berechnung der Wellentransmission in einer endlich ausgedehnten Struktur sinnvoll.

2.2.4 Berechnung der Wellentransmission

Die Berechnung der Wellentransmission erfolgt im Gegensatz zur Berechnung der Dispersionskurven an einem endlich ausgedehnten System. In Abb. 2.10 ist das System zur Berechnung der Wellentransmission des 1D periodischen Feder-Masse-Systems aus Abb. 2.8, bestehend aus N Einheitszellen, schematisch dargestellt. Das System wird am linken Rand durch eine vorgegebene zeitharmonische Verschiebung $u_1^0 = u_0 e^{i\omega t}$ angeregt, wobei u_0 die Amplitude ist und im Folgenden als $u_0 = 1 \text{ m}$ gewählt wird. Die Wellentransmission $T(\omega)$ wird durch die Verschiebung u_1^N am rechten Rand über

$$T(\omega) = 10 \log_{10} \left(\frac{u_1^N(\omega)}{u_0} \right) \quad (2.44)$$

bestimmt. Die Berechnung der Verschiebung u_1^N erfolgt im Frequenzbereich, wobei das Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.45)$$

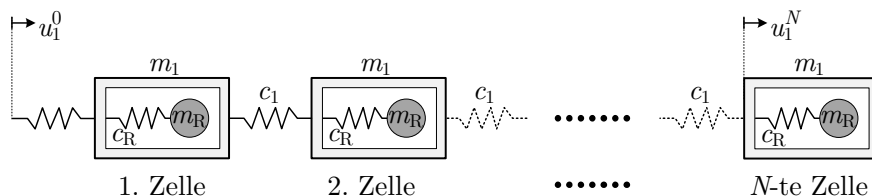


Abbildung 2.10: Ein endlich ausgedehntes 1D System bestehend aus N Einheitszellen zur Ermittlung der Wellentransmission. Das System wird am linken Rand durch die vorgegebene Verschiebung u_1^0 angeregt. Die Wellentransmission wird am rechten Rand durch die Verschiebung u_1^N bestimmt.

für eine endliche Anzahl von diskreten Frequenzen ω_i gelöst werden muss. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und die Massenmatrix \mathbf{M} ergeben sich über die übliche Vorgehensweise für den Zusammenbau von Systemmatrizen (s. z. B. [162]) und werden hier nicht näher erläutert. Der Lastvektor \mathbf{f} im Frequenzbereich ergibt sich aus der vorgegebenen Verschiebung u_1^0 . Zur Ermittlung von \mathbf{f} muss die vorgegebene zeitharmonische Verschiebung $u_1^0 = u_0 e^{i\omega t}$ mit der ersten Spalte der dynamischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{dyn} = \mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}$ multipliziert und auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht werden.

In Abb. 2.11 sind die komplexen Dispersionskurven und die Wellentransmission für $N = 20$ Einheitszellen des 1D periodischen Feder-Masse-Systems dargestellt. Die Wellentransmission fällt innerhalb der Bandlücken erwartungsgemäß sehr gering aus, wobei ein direkter Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Wellenzahl $\Im(k)$ und der Wellentransmission erkennbar ist. Dabei ist die Wellentransmission desto geringer bzw. die Dämpfung desto größer, je größer der Imaginärteil der Wellenzahl ist. Dieser Zusammenhang wird auch aus Abb. 2.12 deutlich, in der die Verschiebungen der Knoten $n = 0 - 20$ für (a) $f = 6,0$ Hz und $\Im(k) = 0$, (b) $f = 10,3$ Hz und $\Im(k) = 0,25$ sowie (c) $f = 12,0$ Hz und $\Im(k) = 1,18$ dargestellt sind. Die Frequenz aus (a) mit $f = 6,0$ Hz befindet sich außerhalb der Bandlücken und die Welle mit dieser Frequenz kann sich entsprechend ohne Dämpfung in der Struktur ausbreiten. Hingegen befindet sich die Frequenz aus (b) mit $f = 10,3$ Hz in der Nähe des unteren Randes der zweiten Bandlücke mit einem vergleichsweise geringen Imaginärteil der Wellenzahl von $\Im(k) = 0,25$. In diesem Fall wird die Welle entsprechend leicht gedämpft und klingt über die 20 Einheitszellen langsam auf eine Amplitude von etwa $u_1^N = 0$ ab. Im Fall (c) mit der Frequenz $f = 10,3$ Hz ist der Imaginärteil der Wellenzahl $\Im(k) = 1,18$ deutlich größer und die Welle klingt bereits nach

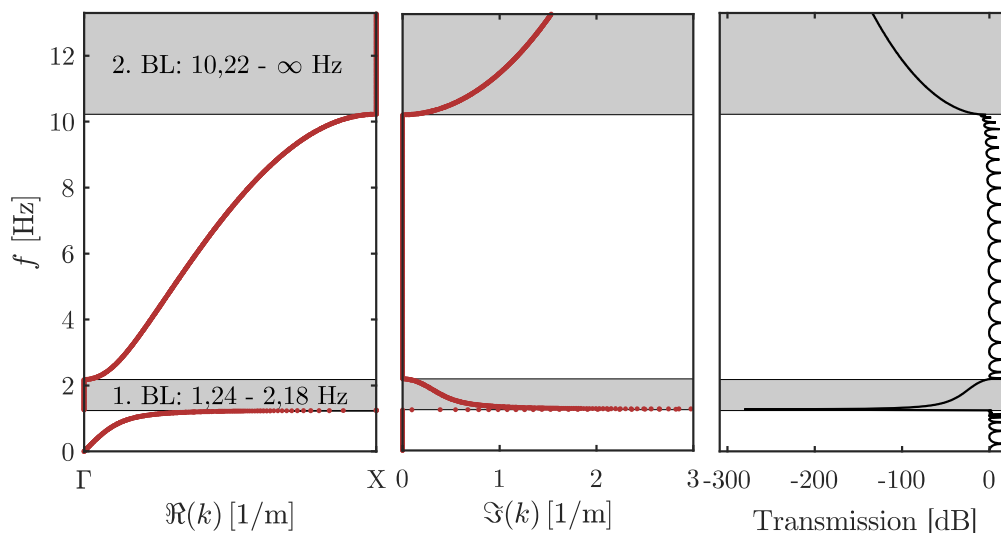


Abbildung 2.11: Komplexe Dispersionskurven und Transmissionsspektrum des 1D Feder-Masse-Systems mit Resonatoren für $m_1 = 1$ kg, $m_R = 2$ kg, $c_1 = 1000$ N/m, $c_R = 125$ N/m und $N = 20$.

3–4 Einheitszellen vollständig ab. Insbesondere im Fall **(b)** wird deutlich, dass bei der Berechnung der Wellentransmission eine ausreichend große Anzahl N an Einheitszellen verwendet werden sollte. Bei einer zu geringen Anzahl an Einheitszellen können die Schwingungsamplituden sonst am rechten Rand des Systems auch innerhalb einer Bandlücke noch groß sein. Allerdings führt eine zu große Anzahl an Einheitszellen zu einem unnötig hohen Rechenaufwand und sollte daher ebenfalls vermieden werden. Eine allgemeingültige Regel für die Wahl der Anzahl an Einheitszellen existiert jedoch nicht, da die Wellentransmission von vielen verschiedenen Faktoren (Frequenzbereich, BLOCH-Moden, Randbedingungen, etc.) abhängig ist. Bei den meisten numerischen und experimentellen Untersuchungen zur Wellentransmission in phononischen Materialien und Strukturen (s. z. B. [34, 151, 173]) werden mindestens 8 – 12 Einheitszellen in Richtung der Wellenausbreitung angeordnet.

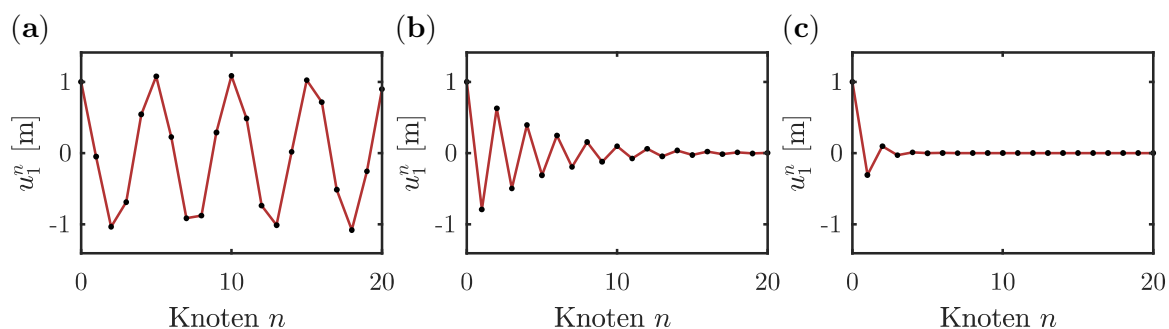


Abbildung 2.12: Verschiebungen u_1^n der Knoten $n = 0 - 20$ für **(a)** $f = 6,0$ Hz und $\Im(k) = 0$, **(b)** $f = 10,3$ Hz und $\Im(k) = 0,25$ sowie **(c)** $f = 12,0$ Hz und $\Im(k) = 1,18$.

Das obige Beispiel zeigt die Bedeutung der komplexen Dispersionskurven und der Wellentransmission zur Interpretation des Wellenausbreitungsverhaltens in phononischen Strukturen. In diesem einfachen Beispiel zeigt sich auch eine direkte Abhängigkeit zwischen dem Imaginärteil der Wellenzahl $\Im(k)$ und dem Abklingverhalten der Wellen. Bei komplexen Strukturen können jedoch verschiedene Einflüsse, wie beispielsweise Reflexionen an den Rändern des Berechnungsgebietes, die Ergebnisse der Transmissionsberechnung stark beeinflussen. Aus diesem Grund werden bei Transmissionsberechnungen häufig absorbierende, dämpfende oder ähnliche Randbedingungen oder auch Schichten an den Rändern des Berechnungsgebietes angeordnet. Diese Maßnahmen zur Berücksichtigung von fiktiven Berandungen sind auch abhängig von der jeweils verwendeten numerischen Methode und werden im Abschnitt 3.4 näher behandelt.

3 Spektrale-Elemente-Methoden (SEM) zur Behandlung von elastischen Wellenausbreitungsproblemen

In diesem Kapitel wird zunächst ein Überblick über die numerischen Methoden zur Lösung von Randwertproblemen gegeben. Anschließend werden die Grundlagen und Prinzipien der SEM nach DOYLE sowie der SEM nach PATERA dargestellt. Dabei werden die spektralen Elementmatrizen nach DOYLE für den Stab sowie den EULER-BERNOULLI-Balken hergeleitet. Außerdem wird die Vorgehensweise zur Diskretisierung und Lösung von Wellengleichungen mithilfe der SEM nach PATERA beschrieben.

3.1 Numerische Methoden für Randwertprobleme

Viele physikalische Vorgänge und Naturgesetze können mithilfe von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Beispielhaft seien hier die Gleichungen der Elastodynamik aus Kapitel 2, die NAVIER-STOKES-Gleichungen zur Beschreibung der Strömung von linear-viskosen NEWTONSchen Flüssigkeiten und Gasen, oder auch die MAXWELL-Gleichungen zur Beschreibung der Phänomene des Elektromagnetismus genannt. Um eine eindeutige Lösung für eine Differentialgleichung zu erhalten, sind bestimmte Einschränkungen erforderlich. Werden dazu Bedingungen am Rand des betrachteten Gebietes gestellt, spricht man von einem Randwertproblem. Wenn hingegen die Zeit t eine unabhängige Variable ist und Bedingungen zu einem bestimmten Zeitpunkt gestellt werden, beispielsweise eine vorgegebene Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit bei einem Schwingungsvorgang, dann spricht man von einem Anfangswertproblem. Werden sowohl Rand- als auch Anfangsbedingungen gestellt, dann spricht man von einem Anfangs-Randwertproblem [49]. Häufig ist es jedoch sinnvoll, dass ursprüngliche Anfangs-Randwertproblem mithilfe der FOURIER-Transformation (s. Anhang A) vom Zeitbereich in den Frequenzbereich zu transformieren. Dadurch verschwinden die Abhängigkeiten von der Zeit t und das ursprüngliche Anfangs-Randwertproblem wird in ein Randwertproblem überführt. Zur Vereinfachung der Darstellung wird im Folgenden die skalare Wellengleichung als Beispiel betrachtet. Die skalare Wellengleichung im Zeitbereich ist gegeben durch

$$c_S^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T). \quad (3.1)$$

Die Anwendung der FOURIER-Transformation auf Gl. (3.1) liefert die Wellengleichung im Frequenzbereich als

$$c_S^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}) - \omega^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.2)$$

Dabei ist im 2D Fall u die skalare Verschiebung am Ort $\mathbf{x} = [x \ y]^T$ im Gebiet Ω , c_S die Wellengeschwindigkeit, ω die Kreisfrequenz und f die Anregung. Aus Gl. (3.2) ergibt sich ein Randwertproblem zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung für $u(\mathbf{x})$. Beispielsweise seien für das in Abb. 3.1 dargestellte 2D Gebiet mit den Rändern $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ die Randbedingungen

$$u(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (3.3)$$

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = g_2(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (3.4)$$

$$\alpha u(\mathbf{x}) + \beta \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = g_3(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (3.5)$$

gegeben. Dabei ist \mathbf{n} der Einheitsnormalenvektor mit $\mathbf{n} \perp \Gamma$, und g_1 , g_2 und g_3 sind vorgegebene Funktionen auf den Rändern Γ_1 , Γ_2 bzw. Γ_3 . Bei Gl. (3.3) handelt es sich um eine sogenannte DIRICHLET-Randbedingung, die auch als wesentliche Randbedingung bezeichnet wird, und bei der die Funktion $u(\mathbf{x})$ auf dem Rand vorgegeben wird. Auf dem Rand Γ_2 ist mit Gl. (3.4) eine NEUMANN-Randbedingung vorgegeben, die häufig auch als natürliche Randbedingung bezeichnet wird. Bei einer NEUMANN-Randbedingung wird die

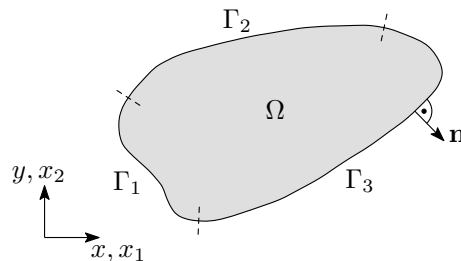


Abbildung 3.1: Ein Gebiet Ω mit den Rändern $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Normalenableitung der Lösung $\partial u(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ auf dem Rand festgelegt, wodurch z. B. eine Kraft auf einem Rand vorgeschrieben werden kann. Eine gemischte Randbedingung, wie sie am Rand Γ_3 durch Gl. (3.5) vorgegeben ist, kombiniert mit den Gewichtungsfaktoren α und β die DIRICHLET- und NEUMANN-Randbedingungen. Dieser dritte Typ von Randbedingungen wird als ROBIN-Randbedingung bezeichnet und dient z. B. zur Formulierung einer Impedanzrandbedingung.

Für Gl. (3.2) ist also eine zweimal stetig differenzierbare Lösung gesucht die neben der Wellengleichung auch die Randbedingungen der Gln. (3.3)-(3.5) erfüllt. In vielen Fällen können selbst einfache Probleme, wie im obigen Beispiel, nur noch mithilfe von numeri-

schen Methoden effizient gelöst werden. Weit verbreitete numerische Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen sind beispielsweise die finiten Differenzenverfahren, die Kollokationsverfahren, die Randelementemethode und die Finite-Elemente-Methode (FEM). Die Kollokations- und finite Differenzenverfahren sind vergleichsweise einfache Verfahren zur Lösung von Wellengleichungen basierend auf ihren direkten Diskretisierungen (starke Formulierung der Wellengleichung). Der größte Nachteil dieser Verfahren ist die Beschränktheit auf vergleichsweise einfache Geometrien. Bei der Randelementemethode wird, im Gegensatz zu den anderen genannten Verfahren, nur der Rand des Gebietes diskretisiert. Zur Beschreibung der Eigenschaften innerhalb des Gebietes werden die Differentialgleichungen zu Integralgleichungen umgewandelt. Dadurch ist die Randelementemethode meistens nur für homogene Materialien vorteilhaft. Die FEM hat sich insbesondere durch die große Flexibilität bewährt und stellt den Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit verwendeten Spektrale-Elemente-Methoden (SEM) dar. Die FEM geht auf die Verfahren von B. G. GALERKIN und W. RITZ zurück, welche mithilfe einer schwachen Formulierung der Wellengleichung im folgenden Unterabschnitt erläutert werden.

3.1.1 Schwache Formulierung der Wellengleichung

Im Folgenden wird die Vorgehensweise der schwachen Formulierung der Wellengleichung im Frequenzbereich nach Gl. (3.2) demonstriert. Die Multiplikation der Wellengleichung (3.2) mit der Testfunktion $v(\mathbf{x})$ liefert

$$c_S^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) - \omega^2 u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.6)$$

Im nächsten Schritt werden beide Seiten integriert, es folgt

$$c_S^2 \int_{\Omega} \nabla^2 u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dA - \omega^2 \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dA = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dA. \quad (3.7)$$

Dabei sei darauf hingewiesen, dass die zulässigen Testfunktionen die homogene DIRICHLET-Randbedingung ($v(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_1$) und gewisse Stetigkeitsanforderungen erfüllen müssen [49, 60]. Im letzten Schritt wird der erste Term aus Gl. (3.7) mithilfe des GREEN-GAUSSSchen Theorems umgeformt. Für eine genaue Beschreibung der Umformung wird auf [113, 174] verwiesen. Mit der verkürzten Schreibweise $u = u(\mathbf{x})$ und $v = v(\mathbf{x})$ ergibt sich

$$c_S^2 \int_{\Omega} (\nabla u)^T \nabla v dA - \omega^2 \int_{\Omega} u v dA - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} v dS = \int_{\Omega} f v dA. \quad (3.8)$$

Bei Gl. (3.8) handelt es sich um die schwache Formulierung der Wellengleichung (3.2), wobei die gesuchte Lösung nun nicht mehr zweimal stetig differenzierbar sondern nur noch einmal schwach differenzierbar sein muss.

RITZ-Verfahren, GALERKIN-Verfahren und FEM

Beim Verfahren von RITZ wird die Wellengleichung in eine äquivalente Variationsaufgabe überführt und das Minimum des zugehörigen Funktional gesucht. Dabei wird eine Näherungslösung bestimmt, indem ein System linear unabhängiger globaler Ansatzfunktionen mit zunächst unbekanntem Koeffizienten für die gesuchte Lösung in das Funktional eingesetzt wird. Die Ansatzfunktionen müssen dabei die wesentlichen DIRICHLET-Randbedingungen erfüllen und differenzierbar sein. Schließlich können die unbekanntem Koeffizienten aus der Forderung der Minimierung des Funktional bestimmt werden und man erhält die gesuchte Näherungslösung [49, 60]. Die Genauigkeit der Näherungslösung hängt dabei von der Anzahl und der Art bzw. dem Grad (z. B. Polynome p -ten Grades, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen, etc.) der gewählten Ansatzfunktionen ab [60].

Beim GALERKIN-Verfahren wird hingegen das Residuum einer durch die globalen Ansatzfunktionen angenäherten Lösung der Wellengleichung minimiert. In diesem Fall müssen die globalen Ansatzfunktionen sämtliche Randbedingungen erfüllen. Die unbekanntem Koeffizienten der Ansatzfunktionen, die aus Testfunktionen v_i aufgebaut sind, werden aus der Forderung ermittelt, dass das innere Produkt des Residuums mit jeder Testfunktion v_i verschwindet. Der Grundgedanke von GALERKIN war dabei, dass man genügend Testfunktionen v_1, v_2, \dots wählt um den ganzen Raum aufzuspannen, denn in diesem Fall ist auch das Residuum orthogonal zum gesamten Raum und die ermittelte Näherungslösung entspricht der gesuchten exakten Lösung [49]. Dazu müssten jedoch unendlich viele Testfunktionen verwendet werden, sodass eine exakte Lösung im Allgemeinen nicht mithilfe des GALERKIN-Verfahrens ermittelt werden kann. Allerdings eignet sich das Verfahren um eine Näherungslösung zu bestimmen, wobei jedoch ein großer Aufwand damit verbunden ist die Integrale zur Bestimmung der unbekanntem Koeffizienten zu lösen. Dieser Aufwand kann reduziert werden, indem die betrachtete Wellengleichung in die schwache Form überführt wird. Dadurch ergeben sich geringere Anforderungen an die Stetigkeiten der verwendeten Ansatz- und Testfunktionen und somit an die Glattheit der gesuchten Lösung.

Das GALERKIN- und das RITZ-Verfahren sind eng verwandt und liefern bei Verwendung derselben Ansatzfunktionen dieselbe Näherungslösung für eine gegebene Differentialgleichung [49]. Es bestehen lediglich geringe Unterschiede, beispielsweise kann das RITZ-Verfahren nur auf selbstadjungierte Differentialgleichungen angewandt werden, während

mithilfe des GALERKIN-Verfahrens beliebige lineare Differentialgleichungen behandelt werden können [49]. Die FEM geht auf die beiden beschriebenen Verfahren zurück, wobei das Lösungsgebiet allerdings zuerst in eine endliche Anzahl von Teilbereichen, die sogenannten finiten Elemente, diskretisiert wird. Die Verschiebung u und die Testfunktion v werden mithilfe von Ansatzfunktionen approximiert, die im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen beim GALERKIN- oder RITZ-Verfahren, einen lokalen Träger haben und nur in dem zugehörigen finiten Element von Null verschieden sind [60]. Aufgrund der oben beschriebenen geringeren Anforderungen an die Stetigkeit der Ansatz- bzw. Testfunktionen basieren alle klassischen FEM-Formulierungen auf der Lösung der schwachen Form einer gegebenen Differentialgleichung. Üblicherweise werden für u und v dieselben Ansatzfunktionen verwendet, dann spricht man auch von BUBNOV-GALERKIN-FEM. Werden hingegen unterschiedliche Ansatzfunktionen benutzt, dann ist der Begriff PETROV-GALERKIN-FEM gebräuchlich [123]. Aus dem ersten Term der Gl. (3.8) ergibt sich nach der FE-Diskretisierung die Elementsteifigkeitsmatrix und aus dem zweiten Term die Elementmassenmatrix. Über den dritten Term der Gleichung können die NEUMANN- und ROBIN-Randbedingungen der Gln. (3.4) und (3.5) eingearbeitet werden. Auf eine genaue Darstellung der Einarbeitung dieser Randbedingungen wird an dieser Stelle verzichtet, da in dieser Arbeit nur DIRICHLET- und periodische Randbedingungen verwendet werden, die nachträglich in das FE- bzw. SE-Gleichungssystem eingearbeitet werden können.

Es sei abschließend darauf hingewiesen, dass auch ein Forschungsgebiet zu starken FE-Formulierungen (SFEM - engl.: *strong formulation finite element method*) existiert, beispielhaft seien hier die Arbeiten von TORNABENE et al. [146,147] und FANTUZZI et al. [35] genannt.

3.1.2 Überblick über die spektralen Näherungsverfahren

Die FEM ist zwar eine sehr effektive und weitverbreitete Methode zur Behandlung von Ingenieurproblemen mit komplexen Geometrien, allerdings ist die klassische FEM nicht sehr effizient bei der Berechnung von Wellenausbreitungsproblemen. Unter Verwendung von den üblichen linearen oder quadratischen Formfunktionen nimmt die Genauigkeit der numerischen Lösung bei zunehmender Wellenzahl sehr schnell ab [9,45]. Der Fehler ergibt sich infolge numerischer Dispersion, die die Änderung der Wellenlänge der numerischen Lösung gegenüber der exakten Lösung beschreibt und abhängig von der Wellenzahl k , der Elementgröße h und der Ordnung der Formfunktionen p ist [43,78]. Der Fehler kann a priori nach IHLENBURG und BABUŠKA [56] für die HELMHOLTZ-Gleichung, wie sie beispielsweise durch Gl. (3.2) gegeben ist, über

$$\varepsilon \leq C_1 \left(\frac{kh}{2p} \right)^p + C_2 k \left(\frac{kh}{2p} \right)^{2p} \quad (3.9)$$

abgeschätzt werden, wobei C_1 und C_2 Konstanten sind. Der erste Term beschreibt den Approximationsfehler und kann einfach kontrolliert werden, indem die Elementgröße reziprok proportional zur Wellenzahl verringert wird [63]. Der zweite Term wird als Pollution¹-Fehler oder auch Pollution-Effekt bezeichnet und wächst mit steigender Wellenzahl überproportional an [7, 56]. Beispielsweise steigt der Pollution-Fehler für $p = 1$ in der Größenordnung $\mathcal{O}(k^3 h^2)$. Die Elementgröße h muss folglich überproportional kleiner werden, um bei steigender Wellenzahl einen konstanten Fehler zu erhalten. Dadurch erhöht sich ebenfalls überproportional die Größe des FE-Gleichungssystems und damit auch der Berechnungsaufwand.

Während der Pollution-Fehler für 1D Probleme vollständig vermieden werden kann, ist dieser Fehler bei mehrdimensionalen Problemen unvermeidbar und dominiert den Gesamtfehler bei hohen Frequenzen bzw. Wellenzahlen [7]. Aus diesem Grund wurden in zahlreichen Forschungsarbeiten verschiedene numerische Verfahren analysiert und weiterentwickelt, um den Einfluss der numerischen Dispersion bei der Berechnung von Wellenausbreitungsproblemen zu minimieren. Als besonders vielversprechend stellten sich dabei die p -FEM und die Spektrale-Elemente-Methoden (SEM) heraus.

Als SEM wird ein Verfahren bezeichnet, welches auf die Arbeit von DOYLE [29] zurückgeht. Bei diesem Verfahren wird für ein gegebenes zeitabhängiges Problem eine exakte dynamische Elementsteifigkeitsmatrix (spektrale Elementmatrix) im Frequenzbereich hergeleitet. Für die Herleitung der spektralen Elementmatrix werden aus der exakten Lösung der jeweiligen Bewegungsgleichungen die zugehörigen exakten frequenzabhängigen Formfunktionen abgeleitet. Mithilfe dieser spektralen Formfunktionen kann, beispielsweise analog zur Vorgehensweise bei der FEM, die spektrale Elementmatrix berechnet werden. Die geometrische Diskretisierung des Berechnungsgebietes sowie die Assemblierung der spektralen Elementmatrizen zur exakten globalen dynamischen Steifigkeitsmatrix erfolgt ebenfalls analog zur FEM, jedoch mit dem wesentlichen Unterschied, dass man direkt eine frequenzabhängige *spektrale* globale dynamische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}(\omega)$ erhält. In dieser Matrix sind die Massenträgheitsanteile bereits implizit enthalten. Das zugehörige Gleichungssystem hat somit im Allgemeinen die Form

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Der wesentliche Vorteil der SEM nach DOYLE liegt in der extrem hohen Genauigkeit bei einer gleichzeitig sehr geringen Anzahl von Freiheitsgraden und liefert theoretisch sogar exakte Lösungen im Frequenzbereich [80]. Dadurch ist die Methode besonders effizient für die Behandlung von Problemen im Frequenzbereich, wengleich indirekt auch numerische Lösungen im Zeitbereich mithilfe der inversen FOURIER-Transformation gewonnen werden

¹engl. für *Verschmutzung*, in der deutschen Fachliteratur ist der englische Begriff gebräuchlich.

können. Im Gegensatz zur FEM müssen die spektralen Elementmatrizen und somit auch die globale spektrale dynamische Steifigkeitsmatrix für jede diskrete Frequenz neu berechnet werden. Aufgrund der sehr geringen Anzahl von Freiheitsgraden ist der Aufwand zur Berechnung dieser Matrizen jedoch verhältnismäßig gering, sodass sich insbesondere im höheren Frequenzbereich enorme Vorteile gegenüber der FEM ergeben können. Der größte Nachteil dieser Methode liegt in der Voraussetzung, dass für die jeweilige Problemstellung die exakte Lösung der Bewegungsgleichungen bekannt sein muss. Dadurch ist die SEM nach DOYLE hauptsächlich auf 1D und einfache 2D Wellenausbreitungsprobleme, z. B. rechteckige Platten mit bestimmten Lagerungsbedingungen, beschränkt [80]. In dieser Arbeit wird die SEM nach DOYLE ausschließlich für die Analyse von phononischen Balkenstrukturen verwendet, da sich bei Verwendung von 1D Elementen keinerlei Einschränkungen hinsichtlich möglicher Geometrien ergeben und gleichzeitig der Vorteil der extrem hohen Genauigkeit ausgenutzt werden kann. Die SEM nach DOYLE wurde bereits von einigen Autoren zur Analyse der Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Balkenstrukturen angewendet, wobei insbesondere die Arbeiten der Forschungsgruppe von WU und LI [161, 166, 168–170] zu nennen sind. In den genannten Arbeiten wurden beispielsweise hierarchische Strukturen, Kagome-Gitter und piezoelektrische quadratische Gitter mithilfe von spektralen Stab- und Balkenelementen untersucht. Dabei verwiesen die Autoren insbesondere auf die hohe Effizienz der SEM nach DOYLE zur Berechnung der Wellentransmission im Frequenzbereich. Die Dispersionskurven wurden von den Autoren hingegen in keiner der genannten Arbeiten berechnet. In der Arbeit von XIAO et al. [171] wurden die komplexen Dispersionskurven und die Wellentransmission eines 1D Balkensystems mit Resonatoren mithilfe der SEM nach DOYLE analysiert und Parameterstudien durchgeführt. Die Autoren verweisen, allerdings ohne detaillierte Untersuchungen anzugeben, auf die extrem hohe Genauigkeit und Effizienz der SEM.

Bei der p -FEM handelt es sich um eine FEM-Variante, bei der die Genauigkeit nicht wie üblich durch eine Verringerung der Elementgröße, sondern durch die Steigerung des Polynomgrades p der verwendeten Formfunktionen (auch als Elementordnung bezeichnet) verbessert wird. Dabei wird meistens anstelle einer nodalen Basis eine hierarchische Basis zur Konstruktion der Formfunktionen verwendet [121]. AINSWORTH [1] stellt mit der Ungleichung

$$p + \frac{1}{2} > \frac{kh}{2} + C(kh)^{1/3} \quad (3.10)$$

einen konkreten Vorschlag zur Wahl von der Elementordnung p und Elementgröße h zur effektiven Verringerung des Pollution-Fehlers auf, wobei C eine Konstante ist und zu Eins gesetzt werden kann. Aus Gl. (3.10) geht hervor, dass der Fehler super-exponentiell mit steigender Ordnung p abnimmt. Allerdings muss, wie auch aus Gl. (3.9) hervorgeht, zusätzlich die Bedingung $2p > kh$ erfüllt sein, sonst nimmt der Fehler sogar mit steigen-

der Elementordnung p zu. Untersuchungen zum Dispersionsverhalten der p -FEM finden sich beispielsweise in den Arbeiten von DEY et al. [24, 25]. Dabei haben die Autoren die Genauigkeit der klassischen FEM, die in dem Zusammenhang auch als h -FEM bezeichnet wird, und der p -FEM ausführlich untersucht und verglichen. Die Autoren konnten zeigen, dass eine Erhöhung des Polynomgrades der Formfunktionen (p -refinement) bei der p -FEM gegenüber der Reduzierung der Elementgröße (h -refinement) bei der klassischen FEM zu einem deutlich geringeren Fehler bei der gleichen Anzahl von Freiheitsgraden führt. In der Arbeit von LIEU et al. [83], in der die p -FEM mit der diskontinuierlichen GALERKIN-Methode (DGM - engl.: *discontinuous Galerkin method*) verglichen wird, zeigt sich die Notwendigkeit einer Knotenkondensation bei der Verwendung der p -FEM zur Reduktion der Freiheitsgrade. Durch die Kondensation kann die Berechnungszeit zur Lösung des linearen Gleichungssystems reduziert und die Kondition des Gleichungssystems verbessert werden. Außerdem zeigte die Arbeit, dass die DGM trotz Verwendung von wellenbasierten Formfunktionen aufgrund der inhärent schlechten Kondition des Gleichungssystems bestenfalls gleichwertige Ergebnisse im Vergleich zur p -FEM liefert. Der wesentliche Nachteil der p -FEM stellt laut WILLBERG et al. [163] die aufwändige Rückrechnung in eine physikalische Lösung dar, wie sie bei der klassischen FEM aufgrund der physikalischen Bedeutung der Stützknoten nicht erforderlich ist [119]. Ein Verfahren, das die Vorteile der p -FEM und der klassischen FEM vereint, stellt ein ebenfalls als SEM bezeichnetes Verfahren dar, welches auf die Arbeit von PATERA [116] zurückgeht.

Bei der SEM² nach PATERA [116] handelt es sich um eine weiter entwickelte Variante der FEM, bei der Formfunktionen hoher Ordnung und eine spezielle Nodalbasis verwendet werden. Der Name der Methode leitet sich aus den *spektralen* Konvergenzeigenschaften ab, wobei die Lösung schneller als jede Potenz von $1/p$ konvergiert [2, 17, 149]. Der Aufbau des Gleichungssystems ist analog zur FEM und führt zu

$$\mathbf{K}\mathbf{u} - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

im Frequenzbereich. Dabei ist \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, \mathbf{M} die Massenmatrix, ω die Kreisfrequenz, \mathbf{u} der Vektor der Knotenverschiebungen und \mathbf{f} die Anregung. In dieser Arbeit wird die bekannteste SEM-Variante unter Verwendung von LAGRANGE-Formfunktionen mit einem Polynomgrad $p \geq 3$ und der sogenannten GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO-Nodalbasis (GLL-Nodalbasis) verwendet. Durch die Verwendung von Formfunktionen höherer Ordnung ergibt sich im Vergleich zur klassischen h -FEM, analog zur p -FEM, ein deutlich verbessertes Konvergenzverhalten und durch die Verwendung der GLL-Nodalbasis ergibt sich zudem eine wesentliche Verbesserung der Kondition des Gleichungssystems

²Die Namensgebung der Methode ist in der Literatur nicht einheitlich, häufig wird diese Methode auch *Spectral Finite Element Method* (SFEM) genannt, s. z. B. [42, 115].

im Vergleich zur p -FEM. Ausführliche Analysen des Konvergenzverhaltens, sowie des Dispersions- und Dissipationsverhaltens der SEM nach PATERA finden sich in den Arbeiten von AINSWORTH und WAJID [2], CANUTO et al. [17] und WIRASAET et al. [164]. Die SEM nach PATERA wurde bereits in zahlreichen Arbeiten verwendet und erfreut sich beispielsweise in der Seismologie einer großen Beliebtheit [67–69, 128, 129]. Aufgrund der üblicherweise großskaligen und einfachen Geometrie der numerischen Modelle in der Seismologie ergibt sich der Vorteil, dass die Elementgröße sehr groß gewählt werden kann und die Effizienz der SEM nicht durch eine feine geometrische Diskretisierung reduziert wird. In den Arbeiten von PERRAS [119] und PERRAS et al. [120] wurde auf Basis der SEM ein virtuelles Messlabor zur Untersuchung von multifunktionalen Wandstrukturen entwickelt. Dabei zeigte sich ebenfalls eine sehr hohe Genauigkeit und Effizienz der SEM für Probleme der Akustik, Elastodynamik und Fluid-Struktur-Interaktion. Nach bestem Wissen des Autors wurde die SEM nach PATERA erstmals von GUARÍN-ZAPATA und GOMEZ [42] für die Analyse von phononischen Kristallen verwendet. Die Autoren untersuchten verschiedene 2D phononische Kristalle und verglichen die Effizienz und Genauigkeit der SEM mit der FEM bei der Berechnung der klassischen Dispersionskurven. Dabei ergaben sich erwartungsgemäß besonders im höheren Frequenzbereich wesentliche Vorteile hinsichtlich der Genauigkeit und Effizienz bei der SEM im Vergleich zur FEM. In der Arbeit von SHI et al. [130] wurden die klassischen Dispersionskurven von verschiedenen 3D phononischen Kristallen mithilfe der SEM berechnet und die Effizienz mit einer FEM-Berechnung verglichen. Die Autoren zeigten dabei, dass sich das spektrale Konvergenzverhalten auch bei der Berechnung der klassischen Dispersionskurven einstellt. Außerdem ergab sich bei allen Berechnungen eine höhere Genauigkeit bei gleichzeitig deutlich weniger Freiheitsgraden im Vergleich zur FEM-Referenzlösung. Auch in jüngsten Arbeiten wurde die SEM nach PATERA, beispielsweise zur Berechnung der Wellenausbreitung in geschichteten phononischen Platten mit Interface-Delaminationen [156], verwendet.

Nachfolgend wird zuerst die Herleitung der spektralen Elementmatrizen nach DOYLE und anschließend die Vorgehensweise der SEM nach PATERA erläutert. Für einen ausführlichen Vergleich der beiden SEM-Varianten wird auf die Arbeit von PALACZ [115] und für eine detaillierte Übersicht über die spektralen Näherungsverfahren auf die Arbeit von CANUTO et al. [17] verwiesen. Außerdem sei angemerkt, dass einige der spektralen Methoden auf den starken Formulierungen der Wellengleichungen basieren, wobei beispielsweise für die spektralen Kollokationsmethoden auf die Arbeit von ANKAY [4] verwiesen wird.

3.2 Spektrale-Elemente-Methode nach Doyle

Grundsätzlich können die spektralen Elementmatrizen nach DOYLE auf unterschiedlichen Wegen hergeleitet werden. In der Arbeit von LEE [80] finden sich die Herleitungen auf Basis der Kraft-Weg-Beziehung, der Variationsmethode und der Zustandsvektorgleichung. Nachfolgend erfolgen die Herleitungen der spektralen Stab- und Balkenelementmatrizen mithilfe der GALERKIN-Methode und entsprechen im Wesentlichen den Herleitungen mittels der Variationsmethode aus der Arbeit von LEE [80].

3.2.1 Spektrale Elementmatrix für Stäbe

Der Ausgangspunkt für die Herleitung der spektralen Elementmatrix für Stäbe ist die Wellengleichung bzw. Bewegungsgleichung für freie Stabschwingungen (äußere Belastung $n = 0$) nach Gl. (2.21). Mithilfe der FOURIER-Transformation bzw. der Annahme einer zeitharmonischen Schwingung $u(x, t) = u(x)e^{i\omega t}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung im Frequenzbereich zu

$$EAu''(x) + \omega^2 \rho Au(x) = 0, \quad (3.11)$$

mit dem E-Modul E , der Querschnittsfläche A , der Massendichte ρ und der longitudinalen Verschiebung $u(x)$. Die Multiplikation von Gl. (3.11) mit der Testfunktion $v(x)$ und anschließende Integration über die Stablänge l liefert mit den verkürzten Schreibweisen $u \hat{=} u(x)$ und $v \hat{=} v(x)$

$$\int_0^l (EAu''v + \omega^2 \rho Auv) dx = 0. \quad (3.12)$$

Nach Umformung des ersten Terms von Gl. (3.12) mittels partieller Integration ergibt sich die schwache Form der Bewegungsgleichung zu

$$-\int_0^l EAu'v' dx + \int_0^l \omega^2 \rho Auv dx + EAu'v \Big|_0^l = 0, \quad (3.13)$$

wobei über den dritten Term mithilfe der Beziehung für die Normalkraft $N = EAu'$ die Krafrandbedingungen am linken und rechten Rand des Stabes vorgegeben werden könnten. Für die folgenden Betrachtungen hat dieser Term allerdings keine Relevanz.

Im nächsten Schritt müssen die spektralen Formfunktionen hergeleitet werden. Dazu wird für die Verschiebung u der Ansatz

$$u(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (3.14)$$

gemacht. Einsetzen des Ansatzes aus Gl. (3.14) in Gl. (3.11) liefert die Dispersionsrelation

$$k^2 - k_L^2 = 0 \quad \text{mit} \quad k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA}}, \quad (3.15)$$

wobei k_L die Wellenzahl für die longitudinale Wellenmode ist. Die Dispersionsrelation hat die Nullstellen $k_1 = -k_2 = k_L$ und die allgemeine Lösung von Gl. (3.11) ist somit durch

$$u(x) = a_1 e^{-ik_L x} + a_2 e^{ik_L x} = \mathbf{e}_S(x, \omega) \mathbf{a}_S, \quad (3.16)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{e}_S(x, \omega) = [e^{-ik_L x} \quad e^{ik_L x}] \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_S = [a_1 \quad a_2]^T, \quad (3.17)$$

gegeben. Die Knotenverschiebungen \mathbf{d}_S des Stabelements können mithilfe von Gl. (3.16) durch

$$\mathbf{d}_S = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_S(0, \omega) \\ \mathbf{e}_S(l, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a}_S = \mathbf{H}_S(\omega) \mathbf{a}_S \quad (3.18)$$

ausgedrückt werden, wobei

$$\mathbf{H}_S(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik_L l} & e^{ik_L l} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

In Abb. 3.2 ist die zugehörige Vorzeichenkonvention des Stabelements dargestellt. Das Verschiebungsfeld des spektralen Stabelements kann nun in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen \mathbf{d}_S über

$$u(x) = \mathbf{N}_S(x, \omega) \mathbf{d}_S \quad (3.20)$$

mit den spektralen Formfunktionen

$$\mathbf{N}_S = \mathbf{e}_S(x, \omega) \mathbf{H}_S^{-1}(\omega) = [\csc(k_L l) \sin(k_L(l-x)) \quad \csc(k_L l) \sin(k_L x)] \quad (3.21)$$

berechnet werden. Im letzten Schritt wird der Ansatz von Gl. (3.20) für die Verschiebung u und die Testfunktion v in die Integralausdrücke von Gl. (3.13) eingesetzt, woraus sich schließlich die spektrale Elementmatrix des Stabs als

$$\mathbf{S}_S(\omega) = \int_0^l E A \mathbf{N}_S^T \mathbf{N}'_S dx - \omega^2 \int_0^l \rho A \mathbf{N}_S^T \mathbf{N}_S dx = E A k_L \begin{bmatrix} \cot(k_L l) & -\csc(k_L l) \\ -\csc(k_L l) & \cot(k_L l) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

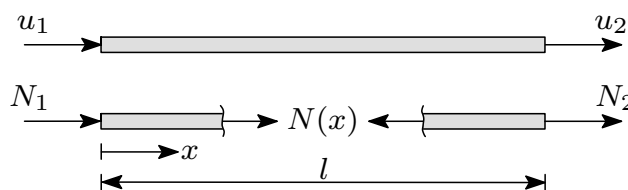


Abbildung 3.2: Vorzeichenkonvention vom Stabelement.

ergibt. Dabei wurde die Annahme getroffen, dass die Querschnitts- und Materialeigenschaften konstant über die Stablänge sind.

3.2.2 Spektrale Elementmatrix für Balken nach Theorie II. Ordnung

Nachfolgend wird das spektrale EULER-BERNOULLI-Balkenelement nach Theorie II. Ordnung hergeleitet, welches nach bestem Wissen des Autors in dieser kompakten Form bisher nicht in der Literatur bekannt ist. Allerdings haben bereits einzelne Autoren spektrale Steifigkeitsmatrizen für Balken unter Berücksichtigung von axialen Kräften hergeleitet. Beispielsweise haben BANERJEE und FISHER [8] die spektrale Steifigkeitsmatrix für ein gekoppeltes Biege-Torsions-Problem unter Berücksichtigung von axialen Kräften hergeleitet. Außerdem haben CAPRON und WILLIAMS [18] eine exakte dynamische Steifigkeitsmatrix für den TIMOSHENKO-Balken unter Berücksichtigung einer axialen Belastung und einer elastischen Bettung angegeben.

Der Ausgangspunkt für die Herleitung ist die Biegewellengleichung bzw. Bewegungsgleichung für freie Balkenschwingungen (äußere Belastung $q = 0$) nach Gl. (2.28), die unter der Annahme einer zeitharmonischen Schwingung im Frequenzbereich durch

$$EIw''''(x) - Sw''(x) - \omega^2 \rho Aw(x) = 0 \quad (3.23)$$

gegeben ist. Dabei ist E der E-Modul, I das Flächenträgheitsmoment, A die Querschnittsfläche, ρ die Massendichte, S die Stabnormalkraft und $w(x)$ die transversale Verschiebung. Die Multiplikation von Gl. (3.23) mit der Testfunktion $v(x)$ und anschließende Integration über die Balkenlänge l liefert mit den verkürzten Schreibweisen $w \hat{=} w(x)$ und $v \hat{=} v(x)$

$$\int_0^l (EIw''''v - Sw''v - \omega^2 \rho Awv) dx = 0. \quad (3.24)$$

In diesem Fall muss der erste Term von Gl. (3.24) durch zweifache und der zweite Term durch einfache partielle Integration umgeformt werden und es ergibt sich die schwache Form der Bewegungsgleichung zu

$$\int_0^l EIw''v'' dx + \int_0^l Sw'v' dx - \int_0^l \omega^2 \rho Awv dx + EIw''''v \Big|_0^l - EIw''v' \Big|_0^l - Sw'v \Big|_0^l = 0, \quad (3.25)$$

wobei über die letzten drei Terme die Krastrandbedingungen am linken und rechten Rand des Balkens vorgegeben werden können. Analog zum Stabelement haben diese Terme für

die folgenden Betrachtungen keine Relevanz.

Für die Herleitung der spektralen Formfunktionen wird für die Verschiebung w , analog zum Stabelement, der Ansatz

$$w(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (3.26)$$

gemacht. Einsetzen des Ansatzes aus der Gl. (3.26) in die Gl. (3.23) liefert zunächst

$$EIk^4 + Sk^2 - \omega^2\rho A = 0, \quad (3.27)$$

woraus nach einer Umformung die Dispersionsrelation

$$k^4 \pm 2\lambda^2 k^2 - k_B^4 = 0, \quad \text{mit} \quad \lambda = \sqrt{\frac{|S|}{2EI}} \quad \text{und} \quad k_B = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (3.28)$$

folgt. Dabei ist λ der Knickbeiwert und k_B die Wellenzahl für die Biegewellenmode nach Theorie I. Ordnung. Das Vorzeichen vor dem zweiten Term der Gl. (3.28) ist positiv wenn S eine Zugkraft ist, und entsprechend negativ wenn S eine Druckkraft ist. Die vier Nullstellen der Dispersionsrelation ergeben sich für eine Druckkraft S zu

$$k_1 = -k_2 = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}}, \quad k_3 = -k_4 = i\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}}, \quad (3.29)$$

und für eine Zugkraft S zu

$$k_1 = -k_2 = \sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}}, \quad k_3 = -k_4 = i\sqrt{\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}}. \quad (3.30)$$

Für eine kürzere Schreibweise werden die Wurzelterme für eine Druckkraft S mittels

$$k_{\lambda 1} = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}} \quad \text{und} \quad k_{\lambda 2} = \sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}}, \quad (3.31)$$

beziehungsweise für eine Zugkraft S mittels

$$k_{\lambda 1} = \sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}} \quad \text{und} \quad k_{\lambda 2} = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{k_B^4 + \lambda^4}}, \quad (3.32)$$

zusammengefasst. Dabei können $k_{\lambda 1}$ und $k_{\lambda 2}$ als Wellenzahlen für die Biegewellenmoden nach Theorie II. Ordnung aufgefasst werden. Die allgemeine Lösung von der Gl. (3.23) ist somit durch

$$w(x) = a_1 e^{-ik_{\lambda 1}x} + a_2 e^{-k_{\lambda 2}x} + a_3 e^{ik_{\lambda 1}x} + a_4 e^{k_{\lambda 2}x} = \mathbf{e}_B^I(x, \omega) \mathbf{a}_B, \quad (3.33)$$

mit

$$\mathbf{e}_B^{II}(x, \omega) = [e^{-ik_{\lambda 1}x} \ e^{-k_{\lambda 2}x} \ e^{ik_{\lambda 1}x} \ e^{k_{\lambda 2}x}] \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_B = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T, \quad (3.34)$$

gegeben. Folglich können die Knotenfreiheitsgrade \mathbf{d}_B^{II} über

$$\mathbf{d}_B^{II} = \begin{bmatrix} w(0) \\ -w'(0) \\ w(l) \\ -w'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_B^{II}(0, \omega) \\ -(\mathbf{e}_B^{II})'(0, \omega) \\ \mathbf{e}_B^{II}(l, \omega) \\ -(\mathbf{e}_B^{II})'(l, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a}_B = \mathbf{H}_B^{II}(\omega) \mathbf{a}_B \quad (3.35)$$

ausgedrückt werden, wobei die zugehörige Vorzeichenkonvention in der Abb. 3.3 dargestellt ist. Aus Gl. (3.35) folgt zudem

$$\mathbf{H}_B^{II}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ik_{\lambda 1} & k_{\lambda 2} & -ik_{\lambda 1} & -k_{\lambda 2} \\ e^{-ik_{\lambda 1}l} & e^{-k_{\lambda 2}l} & e^{ik_{\lambda 1}l} & e^{k_{\lambda 2}l} \\ ik_{\lambda 1}e^{-ik_{\lambda 1}l} & k_{\lambda 2}e^{-k_{\lambda 2}l} & -ik_{\lambda 1}e^{ik_{\lambda 1}l} & -k_{\lambda 2}e^{k_{\lambda 2}l} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Das Verschiebungsfeld des spektralen Balkenelements nach Theorie II. Ordnung kann nun in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen und -verdrehungen \mathbf{d}_B^{II} über die Beziehung

$$w(x) = \mathbf{N}_B^{II}(x, \omega) \mathbf{d}_B^{II} \quad (3.37)$$

berechnet werden. Die spektralen Formfunktionen ergeben sich durch

$$\mathbf{N}_B^{II} = \mathbf{e}_B^{II}(x, \omega) (\mathbf{H}_B^{II})^{-1}(\omega) = [\varphi_{B1}^{II} \ \varphi_{B2}^{II} \ \varphi_{B3}^{II} \ \varphi_{B4}^{II}], \quad (3.38)$$

wobei diese aufgrund des Umfangs an dieser Stelle nicht ausführlich aufgelistet und stattdessen im Anhang B angegeben werden.

Der Ansatz von Gl. (3.37) wird im letzten Schritt für die Verschiebung w und die Testfunktion v in die Integralausdrücke von Gl. (3.25) eingesetzt, woraus sich schließlich die

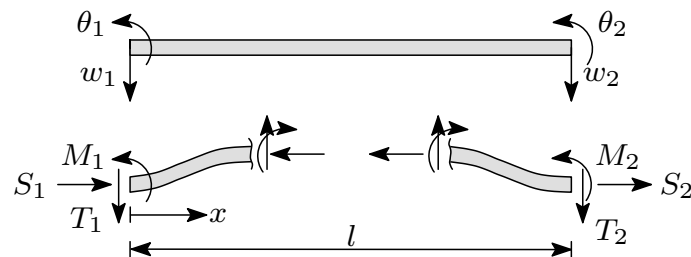


Abbildung 3.3: Vorzeichenkonvention vom EULER-BERNOULLI-Balkenelement.

spektrale Elementmatrix des EULER-BERNOULLI-Balkens nach Theorie II. Ordnung als

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_B^{II}(\omega) = & EI \int_0^l [(\mathbf{N}_B^{II})'']^T (\mathbf{N}_B^{II})'' dx + S \int_0^l [(\mathbf{N}_B^{II})']^T (\mathbf{N}_B^{II})' dx \\ & - \omega^2 \rho A \int_0^l (\mathbf{N}_B^{II})^T (\mathbf{N}_B^{II}) dx \end{aligned} \quad (3.39)$$

ergibt. Die spektrale Elementmatrix $\mathbf{S}_B^{II}(\omega)$ hat dabei die Form

$$\mathbf{S}_B^{II} = \begin{bmatrix} s_{B11}^{II} & s_{B12}^{II} & s_{B13}^{II} & s_{B14}^{II} \\ s_{B21}^{II} & s_{B22}^{II} & s_{B23}^{II} & s_{B24}^{II} \\ s_{B31}^{II} & s_{B32}^{II} & s_{B33}^{II} & s_{B34}^{II} \\ s_{B41}^{II} & s_{B42}^{II} & s_{B43}^{II} & s_{B44}^{II} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

wobei die Einträge der Matrix, analog zu den Formfunktionen, einen großen Umfang aufweisen und daher an dieser Stelle nicht ausführlich aufgeführt werden. Stattdessen werden sie im Anhang C aufgelistet. Dabei sei darauf hingewiesen, dass für eine Druckkraft die Wellenzahlen nach der Gl. (3.31) sowie die Stabkraft S mit einem negativen Vorzeichen einzusetzen sind. Für eine Zugkraft müssen entsprechend die Wellenzahlen nach der Gl. (3.32) verwendet werden. Zudem gilt in diesem Fall für die Stabkraft S das positive Vorzeichen. Die spektrale Elementmatrix nach Theorie I. Ordnung erhält man direkt aus $\mathbf{S}_B^{II}(\omega)$, indem man $\lambda = 0$ bzw. $S = 0$ einsetzt. Außerdem sei angemerkt, dass mit der hergeleiteten spektralen Elementmatrix $\mathbf{S}_B^{II}(\omega)$ auch die statischen Knicklasten eines Systems bestimmt werden können. Dazu muss entsprechend $\omega = 0$ eingesetzt werden und ein Eigenwertproblem für die Stabkraft S gelöst werden.

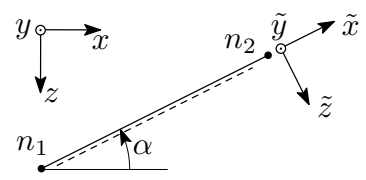
Transformation des erweiterten spektralen Balkenelements

Schließlich können die spektralen Elementmatrizen des Stabs und Balkens nach Theorie II. Ordnung zu einer 6×6 erweiterten spektralen EULER-BERNOULLI-Balkenelementmatrix nach Theorie II. Ordnung $\mathbf{S}_{EB}^{II}(\omega)$ mit den Knoten n_1 und n_2 sowie den zugehörigen Knotenfreiheitsgraden $[u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2]^T$ zusammengefasst werden. Im allgemeinen Fall liegt das Balkenelement schräg im Raum und muss dann vom lokalen $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ ins globale (x, y, z) Koordinatensystem über

$$\mathbf{S}_{EB,g}^{II}(\omega) = \mathbf{T} \mathbf{S}_{EB,l}^{II}(\omega) \mathbf{T}^T \quad (3.41)$$

transformiert werden, wobei $\mathbf{S}_{EB,g}^{II}(\omega)$ die spektrale Elementmatrix im globalen Koordi-

natensystem, $\mathbf{S}_{EB,l}^{II}(\omega)$ die spektrale Elementmatrix im lokalen Koordinatensystem und

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$


die Transformationsmatrix ist. Die Assemblierung der spektralen Elementmatrizen zur globalen spektralen dynamischen Steifigkeitsmatrix erfolgt analog zur FEM, wobei für eine ausführliche Darstellung auf [60, 162] verwiesen wird. Alle nachfolgenden Berechnungen mit der SEM nach DOYLE erfolgen mittels eines im Rahmen dieser Arbeit entwickelten MATLAB³-Programms.

Beispiel zur Validierung

Zur Validierung der zuvor hergeleiteten spektralen Elementmatrix des EULER-BERNOULLI-Balkens nach Theorie II. Ordnung werden nachfolgend die ersten beiden Eigenfrequenzen f_1 und f_2 des in der Abb. 3.4 dargestellten Kragträgers berechnet und mit einer FEM-Referenzlösung verglichen. Dabei beträgt die Länge des Kragträgers $l = 8$ m, die Biegesteifigkeit $EI = 200000$ kNm² und die längenbezogene Masse $\bar{m} = \rho A = 300$ kg/m. Die erste kritische Knicklast ergibt sich aus dem ersten EULER-Fall zu $F_{krit,1} = 771,06$ kN. In der Tab. 3.1 sind die Ergebnisse für die ersten beiden Eigenfrequenzen aus der SEM-Berechnung und einer FEM-Referenzberechnung für unterschiedliche Stabkräfte S gegenübergestellt. Es wird deutlich, dass die Eigenfrequenzen der SEM- und der FEM-Berechnungen für alle untersuchten Fälle bis zur mindestens vierten Nachkommastelle übereinstimmen. Die FEM-Lösungen basieren dabei auf einer Unterteilung des Kragträgers in 100 finite EULER-BERNOULLI-Balkenelemente, um Fehler infolge einer groben Diskretisierung zu minimieren. Bei den SEM-Berechnungen ist es hingegen ausreichend, den Kragträger mittels eines einzigen spektralen Elements zu modellieren. Das Validierungsbeispiel zeigt somit, dass die hergeleitete spektrale Elementmatrix des EULER-BERNOULLI-Balkens sowohl für Druck- als auch Zugkräfte gültig ist und genaue Ergeb-

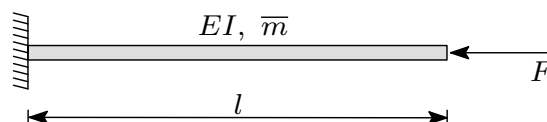


Abbildung 3.4: Kragträger mit der Länge $l = 8$ m, der Biegesteifigkeit $EI = 20000$ kNm² und der längenbezogenen Masse $\bar{m} = \rho A = 300$ kg/m.

³Software des Unternehmens MATHWORKS zur Lösung mathematischer Probleme.

nisse liefert. Ebenso wird die erste Eigenfrequenz erwartungsgemäß gleich Null, wenn die Druckkraft im Balken der ersten Knicklast entspricht.

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der SEM- und FEM-Berechnungen für die Eigenfrequenzen f_1 und f_2 für unterschiedliche Stabkräfte S .

S	SEM		FEM	
[kN]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]
300	2,6253	14,5935	2,6253	14,5935
0	2,2576	14,1481	2,2576	14,1481
-300	1,7908	13,6862	1,7908	13,6862
$-F_{krit,1}$	0,0000	12,9249	0,0000	12,9249

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass das hergeleitete spektrale EULER-BERNOULLI-Balkenelement nach Theorie II. Ordnung auf der exakten analytischen Lösung basiert und somit weiterführende Untersuchungen zur Genauigkeit und Konvergenz der Lösung entfallen.

3.3 Spektrale-Elemente-Methode nach Patera

Nachfolgend wird die Vorgehensweise zur Formulierung von spektralen Elementen nach PATERA [116] erläutert. Aufgrund inhärenter Unterschiede zur herkömmlichen FEM werden insbesondere die Interpolationsfunktionen und die numerische Quadratur ausführlich behandelt. Dabei basieren die folgenden Ausführungen auf den Arbeiten von PERRAS [119], JUNG [60] und POZRIKIDIS [121].

3.3.1 Herleitung von spektralen Elementen

Die Herleitung von spektralen Elementen nach PATERA erfolgt ganz analog zur FEM. Dabei wird das Berechnungsgebiet in eine endliche Anzahl von Teilgebieten, die sogenannten finiten Elemente, unterteilt und mithilfe von lokalen Ansatzfunktionen bzw. Formfunktionen eine Näherungslösung für die gegebene Problemstellung bestimmt. Die Verträglichkeit zwischen den angrenzenden finiten Elementen wird über problemabhängige Stetigkeitsbedingungen an die Ansatzfunktionen gewährleistet.

Der Ausgangspunkt für die FE-Diskretisierung ist die schwache Formulierung einer gegebenen Differentialgleichung. Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur Herleitung der Elementmatrizen anhand des ebenen Spannungszustand (ESZ) erläutert. Die schwache Formulierung der elastischen Wellengleichungen bzw. der Bewegungsgleichungen (2.14)

kann mithilfe der im Unterabschnitt 3.1.1 beschriebenen Vorgehensweise als

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} \, dA - \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \rho \mathbf{u} \, dA - \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} \, dS - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} \, dA = 0 \quad (3.43)$$

erhalten werden. Die Verschiebungen $\mathbf{u} = [u \ v]^T$ sowie die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T$ werden nun über die Formfunktionen \mathbf{N} und die zugehörigen Knotenverschiebungen \mathbf{u} durch

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (3.44)$$

approximiert, wobei der Matrizen-Differentialoperator $\tilde{\nabla}$ für den ESZ durch

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

gegeben ist. Außerdem gilt für die Spannungen $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T$ und die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ der Zusammenhang aus Gl. (2.17). Nach dem BUBNOV-GALERKIN-Ansatz werden dieselben Formfunktionen auch für die Testfunktionen \mathbf{v} verwendet. Einsetzen des Ansatzes aus Gl. (3.44) in Gl. (3.43) liefert unter Berücksichtigung von Gl. (2.17) und dem Elastizitätstensor \mathbf{D}_{ESZ} aus Gl. (2.18) schließlich

$$\underbrace{\left(\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{N})^T \mathbf{D}_{\text{ESZ}} \tilde{\nabla} \mathbf{N} \, dA \right)}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \mathbf{u} - \omega^2 \underbrace{\left(\rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dA \right)}_{\text{Massenmatrix}} \mathbf{u} = \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, dS}_{\text{Lastvektor } \mathbf{f}_R} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} \, dA}_{\text{Lastvektor } \mathbf{f}_F},$$

wobei der Elementlastvektor $\mathbf{f}_E = \mathbf{f}_R + \mathbf{f}_F$, der sich aus dem Elementrandlastvektor \mathbf{f}_R und dem Elementflächenlastvektor \mathbf{f}_F zusammensetzt, für diese Arbeit keine Relevanz hat. Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_E und die Elementmassenmatrix \mathbf{M}_E ergeben sich somit als

$$\mathbf{K}_E = \int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{N})^T \mathbf{D}_{\text{ESZ}} \tilde{\nabla} \mathbf{N} \, dA, \quad \mathbf{M}_E = \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dA. \quad (3.46)$$

Für eine effiziente Berechnung werden sowohl in der FEM als auch in der SEM die Formfunktionen auf einem Element im Referenzraum Ω_R definiert. Das hat insbesondere den Vorteil, dass die Formfunktionen nicht für jedes Element neu berechnet werden müssen, allerdings müssen dafür die Elemente vom Realraum in den Referenzraum trans-

formiert werden. Der Realraum verwendet das (x_1, x_2) -Koordinatensystem, in dem die Problemstellung und die physikalischen Größen definiert sind. Hingegen wird der Raum der natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^T$, in welchem die Formfunktionen definiert werden, als Referenzraum bezeichnet. Durch die Definition der Formfunktionen im Referenzraum werden die Elementmatrizen durch

$$\mathbf{K}_E = \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{\text{ESZ}} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) dA \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_E = \rho \int_{\Omega_E} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) dA \quad (3.47)$$

gegeben, wobei \mathbf{J} die JACOBI-Matrix und \mathbf{B} die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix ist. Die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} ergibt sich in Abhängigkeit des Matrizen-Differentialoperators $\tilde{\nabla}$ aus der Gl. (3.45) als

$$\mathbf{B} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}. \quad (3.48)$$

Aufgrund der Definition der Formfunktionen im Referenzraum müssen die partiellen Ableitungen im Matrizen-Differentialoperator $\tilde{\nabla}$ mittels

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

transformiert werden, wobei die JACOBI-Matrix \mathbf{J} die Form

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

besitzt. Die Matrix \mathbf{N} enthält die Formfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{(p+1)^2}$ und hat im allgemeinen Fall die Größe $n_{DoF} \times n_{DoF} \cdot (p+1)^2$, wobei n_{DoF} die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten bezeichnet. Im vorliegenden Fall mit zwei Freiheitsgraden pro Knoten hat man

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & \varphi_{(p+1)^2} & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \dots & 0 & \varphi_{(p+1)^2} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

In dieser Arbeit werden bei der SEM nach PATERA ausschließlich quadrilaterale Elemente (bilineare Viereckselemente) verwendet. Die verschiedenen viereckigen Elementtypen sind in Abb. 3.5 dargestellt, wobei das rechteckige Element einen Sonderfall der quadrilateralen Elemente darstellt und bei strukturierten Netzen zur Anwendung kommt. Die isoparame-

trischen Elemente weisen im Allgemeinen eine krummlinige Berandung auf und eignen sich entsprechend für die Diskretisierung von komplexen Geometrien, beispielsweise mit runden oder kreisförmigen Berandungen. Allerdings ist die Vernetzung mit isoparametrischen Elementen aufwendig und daher in den meisten kommerziellen FE-Programmen und Netzgeneratoren nicht implementiert. In dieser Arbeit wird der Open-Source Netzgenerator GMSH (abrufbar unter <https://gmsh.info>), entwickelt von C. GEUZAINÉ und J.-F. REMACLE [40], für die Erstellung der Elementgeometrien verwendet. Die Elementgeometrien werden dabei durch die Masterknoten, in der Abb. 3.5 durch die roten Quadrate gekennzeichnet, festgelegt. Alle zusätzlichen Interpolationsknoten, auch als Slaveknoten bezeichnet und in der Abb. 3.5 durch rote Kreise markiert, werden anschließend innerhalb des in dieser Arbeit entwickelten SEM-Programms in MATLAB automatisch hinzugefügt.

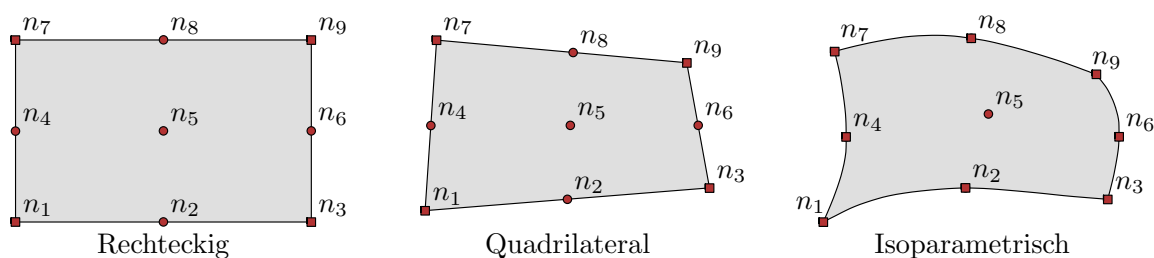


Abbildung 3.5: Verschiedene viereckige quadratische Elemente mit geradlinigen und krummlinigen Berandungen [119]. Die roten Quadrate markieren die formbestimmenden Knoten (Masterknoten) und die roten Kreise markieren die zusätzlichen Interpolationsknoten (Slaveknoten).

Bei quadrilateralen Elementen kann die Transformation der Masterknoten, im Realraum als $n_{\alpha,x}$ und im Referenzraum als $n_{\alpha,\xi}$ bezeichnet, mithilfe der Transformationsbeziehungen

$$\mathbf{x}_T(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} x_T(\boldsymbol{\xi}) \\ y_T(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^4 \begin{bmatrix} x^\alpha \\ y^\alpha \end{bmatrix} \varphi_{1,\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.52)$$

erfolgen. Dabei bezeichnet α die Nummer der dem Masterknoten mit den Realraum-Koordinaten (x^α, y^α) zugehörigen Formfunktion φ_α . Die Transformation eines quadrilateralen Elements vom Realraum in den Referenzraum ist in der Abb. 3.6 veranschaulicht. Bei den Formfunktionen φ_α handelt es sich um lineare LAGRANGE-Polynome, die im Referenzraum $\xi_1 \in [0; 1]$, $\xi_2 \in [0; 1]$ durch

$$\varphi_1 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \quad \varphi_2 = \xi_1(1 - \xi_2), \quad \varphi_3 = (1 - \xi_1)\xi_2, \quad \varphi_4 = \xi_1\xi_2 \quad (3.53)$$

definiert sind. Mithilfe der Transformationsbeziehungen aus Gl. (3.52) kann die JACOBI-Matrix aufgestellt werden. Dazu wird die Gl. (3.52) für x_i in die JACOBI-Matrix von Gl. (3.50) eingesetzt und nach der Koordinate ξ_i abgeleitet. Mithilfe der JACOBI-Matrix können die Elementsteifigkeits- und Elementmassenmatrizen sowohl bei der FEM als auch

bei der SEM nach PATERA berechnet werden. Die wesentlichen Unterschiede zwischen der FEM und der SEM nach PATERA liegen in der Verwendung unterschiedlicher Formfunktionen φ_i und unterschiedlicher numerischer Integrationsverfahren zur Berechnung der Elementmatrizen. Die anschließende Assemblierung der Elementmatrizen zu globalen Steifigkeits- und Massenmatrizen erfolgt bei der SEM nach PATERA wiederum analog zur FEM.

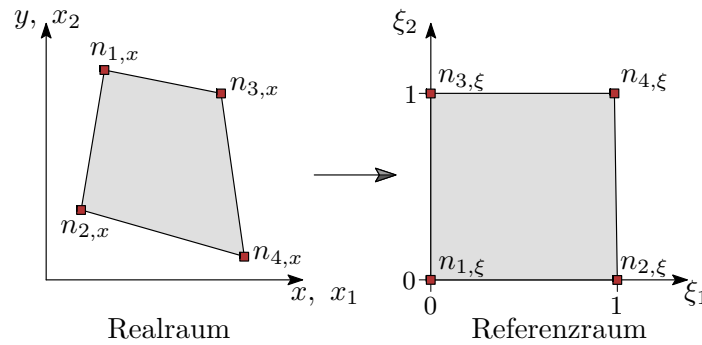


Abbildung 3.6: Transformation eines Elements vom Realraum in den Referenzraum [119].

3.3.2 Interpolationsfunktionen

Bei der SEM nach PATERA werden als Formfunktionen LAGRANGE-Interpolationspolynome verwendet, die im 1D Fall in Abhängigkeit der natürlichen Koordinate ξ durch

$$LA_{p,\beta}(\xi) = \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{p+1} \frac{\xi - \xi_\alpha}{\xi_\beta - \xi_\alpha} \quad (3.54)$$

berechnet werden können. Das LAGRANGE-Polynom vom Grad p wird aus den Stützstellen α und β konstruiert. Die Positionen der Stützstellen α und β in ξ -Richtung sind entsprechend ξ_α und ξ_β . Im Zusammenhang mit der FEM bzw. SEM werden die Stützstellen häufig auch als Knoten oder Nodes⁴ bezeichnet. Eine wesentliche Eigenschaft der LAGRANGE-Polynome ist die sogenannte kardinale Interpolationseigenschaft

$$LA_{p,\beta}(\xi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad (3.55)$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ das KRONECKER-Delta ist [121]. Die LAGRANGE-Polynome nehmen also an der Stützstelle β den Wert Eins und an allen anderen Stützstellen den Wert Null an. Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass die Lösung des SE-Gleichungssystems einer physikalischen Lösung an den entsprechenden Stützstellen entspricht. Im Rahmen der in dieser Arbeit

⁴engl. Begriff für „Knoten“, der teilweise auch in der deutschsprachigen Literatur verwendet wird.

verwendeten SE-Formulierungen sind die physikalischen Lösungen die Knotenverschiebungen \mathbf{u} . Finite und spektrale Elemente mit diesen Eigenschaften werden als Elemente mit einer nodalen Basis oder als knotenbasierte Elemente bezeichnet. Bei hierarchischen Elementen ist die kardinale Interpolationseigenschaft beispielsweise nicht gegeben und die Lösung des Gleichungssystems entspricht im Allgemeinen keiner physikalischen Lösung. Dadurch ist eine aufwendige Rückrechnung zu einer physikalischen Lösung in diesem Fall zwingend erforderlich.

Äquidistante Nodalbasis

Auch in der FEM werden häufig LAGRANGE-Polynome als Formfunktionen verwendet, wobei die Stützstellen bzw. die Knoten zur Konstruktion der Formfunktionen in der Regel äquidistant verteilt sind. Nachfolgend wird eine äquidistante Knotenverteilung basierend auf dem englischen Begriff *evenly distributed* als ED-Knotenverteilung bezeichnet. Die über diese Stützstellen konstruierten LAGRANGE-Formfunktionen bilden entsprechend die ED-Nodalbasis.

In der Abb. 3.7 sind die LAGRANGE-Formfunktionen mit einer ED-Knotenverteilung beispielhaft für die Ordnung $p = 4$ dargestellt. Bei Verwendung der ED-Knotenverteilung tritt bei steigender Polynomordnung p der sogenannte RUNGE-Effekt auf. Der RUNGE-Effekt beschreibt Oszillationen an den Rändern des Definitionsintervalls der Formfunktionen, welche die Genauigkeit der Interpolation beeinflussen können. In dieser Arbeit werden die Formfunktionen mit φ_n bezeichnet, wobei n dem Knoten entspricht, an dem die Formfunktion den Wert Eins annimmt. Die Nummerierung der Knoten erfolgt im 1D Fall beginnend bei $\xi = 0$ in aufsteigender Reihenfolge bis $\xi = 1$. In Abb. 3.7 tritt der RUNGE-Effekt bei den Formfunktionen φ_2 und φ_4 bereits auf, bei denen die Amplituden im Randbereich den Wert Eins übersteigen.

Mit zunehmender Ordnung p der Formfunktionen nimmt dieser Effekt weiter zu, wie aus den in Abb. 3.8 dargestellten LAGRANGE-Formfunktionen mit der Ordnung $p = 10$ und

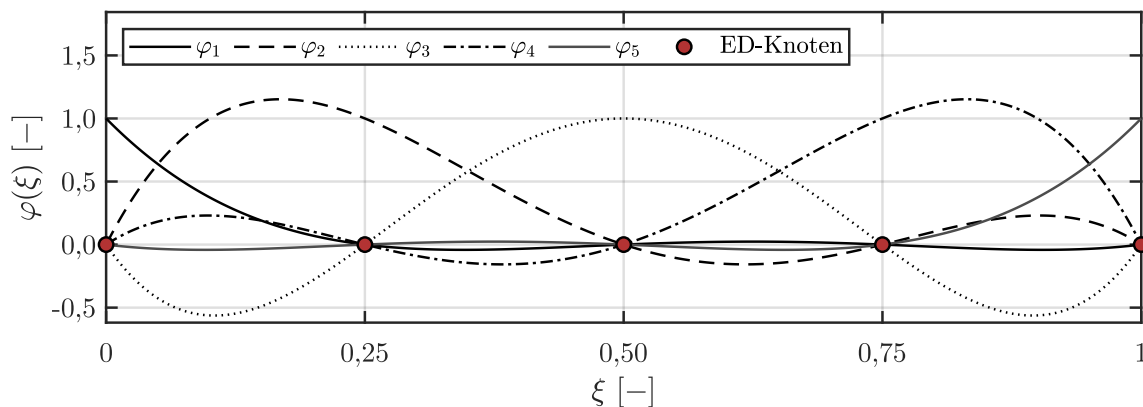


Abbildung 3.7: LAGRANGE-Formfunktionen für $p = 4$ und ED-Knotenverteilung.

einer ED-Knotenverteilung deutlich wird. In diesem Fall zeigen sich in den Randbereichen des Definitionsintervalls der Formfunktionen bereits sehr starke Oszillationen mit Amplituden von $\varphi_{max} \geq 5$. Als Folge dieser RUNGE-Oszillationen verschlechtert sich die Kondition des FE-Gleichungssystems bei Verwendung von LAGRANGE-Formfunktionen mit steigender Ordnung p überproportional. Die Kondition des Gleichungssystems kann wiederum den numerischen Fehler beim Lösen des Gleichungssystems negativ beeinflussen. Der RUNGE-Effekt kann allerdings vermieden werden, indem die Stützstellen nicht äquidistant verteilt werden. Eine Möglichkeit zur Anordnung der Stützstellen stellt die sogenannte GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO-Knotenverteilung dar.

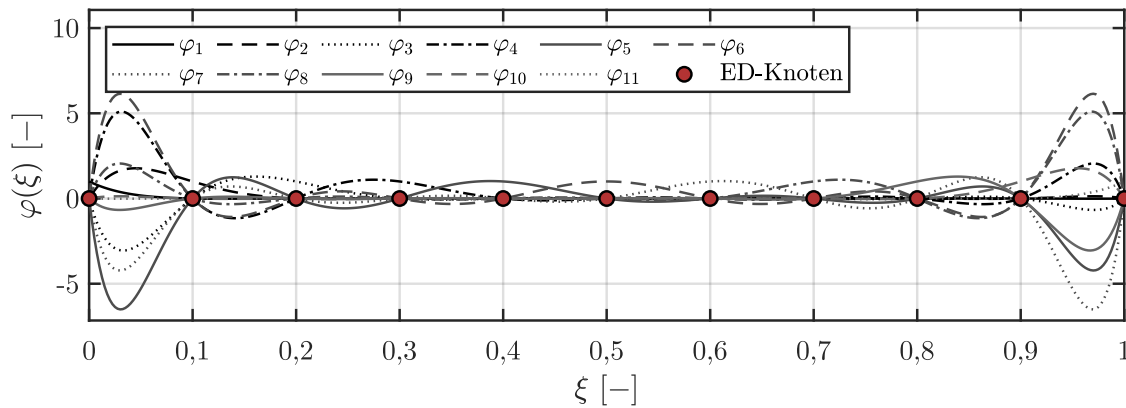


Abbildung 3.8: LAGRANGE-Formfunktionen für $p = 10$ und ED-Knotenverteilung.

GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Nodalbasis

Bei der GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Nodalbasis, nachfolgend als GLL-Nodalbasis bezeichnet, werden zur Konstruktion der LAGRANGE-Formfunktionen die inneren $p-1$ Knoten auf den Nullstellen der LOBATTO-Funktion LO_{p-1} angeordnet. Die beiden äußeren Knoten werden auf den Rändern des Definitionsintervalls angeordnet. Die LOBATTO-Funktion $LO_n(\xi)$ kann über

$$LO_n(\xi) = \frac{dL_{n+1}(\xi)}{d\xi} \quad (3.56)$$

bestimmt werden. Dabei ist $L_n(\xi)$ das LEGENDRE-Polynom, welches wiederum über

$$L_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!(n-k)!k!2^n} \xi^{n-2k}, \quad (3.57)$$

mit der GAUSS-Klammer $\lfloor n/2 \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$,

ermittelt werden kann. Die aus den Nullstellen der LOBATTO-Funktion berechneten Stützstellen werden als GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO-Stützstellen (bzw. GLL-Knotenverteilung)

ung) bezeichnet. Bei der in dieser Arbeit verwendeten SEM-Variante nach PATERA wird die GLL-Knotenverteilung zur Konstruktion der LAGRANGE-Formfunktionen verwendet. In der Tab. 3.2 sind die GLL-Stützstellen für die Polynomgrade $p = 1$ bis $p = 5$ und das Definitionsintervall $\xi \in [-1; 1]$ angegeben.

Tabelle 3.2: GLL-Stützstellen zur Konstruktion der LAGRANGE-Polynome.

GAUSS-LEGENDRE-LOBATTO Stützstellen $\xi_{i,GLL}$						
Ordnung	Stützstellen					
$p = 1$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\xi_1$				
$p = 2$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = 0$	$\xi_3 = -\xi_1$			
$p = 3$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\xi_3 = -\xi_2$	$\xi_4 = -\xi_1$		
$p = 4$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 = -\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\xi_3 = 0$	$\xi_4 = -\xi_2$	$\xi_5 = -\xi_1$	
$p = 5$	$\xi_1 = -1$	$\xi_2 \approx -0,7651$	$\xi_3 \approx -0,2852$	$\xi_4 = -\xi_3$	$\xi_5 = -\xi_2$	$\xi_6 = -\xi_1$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die GLL-Knotenverteilung bei der SEM nach PATERA am häufigsten verwendet wird, jedoch in der ursprünglichen Arbeit von PATERA [116] die sogenannten CHEBYCHEV-GAUSS-LOBATTO-Stützstellen (CGL-Knotenverteilung) zur Konstruktion der Formfunktionen verwendet wurden. Während die maximalen Funktionswerte der GLL-Formfunktionen auf Eins beschränkt sind, ist dies bei den CGL-Formfunktionen nicht der Fall und es können in der Nähe der Ränder des Definitionsintervalls geringfügig größere Werte als Eins auftreten. Vermutlich haben sich unter anderem aus diesem Grund die GLL-Formfunktionen bei der SEM nach PATERA gegenüber den CGL-Formfunktionen durchgesetzt. In der Abb. 3.9 sind die LAGRANGE-Formfunktionen für die Ordnung $p = 10$ und eine GLL-Knotenverteilung dargestellt. Es zeigt sich, dass durch die Verwendung der GLL-Knotenverteilung der RUNGE-Effekt vollständig vermieden wird und die Maximalwerte der Formfunktionen auf Eins begrenzt sind.

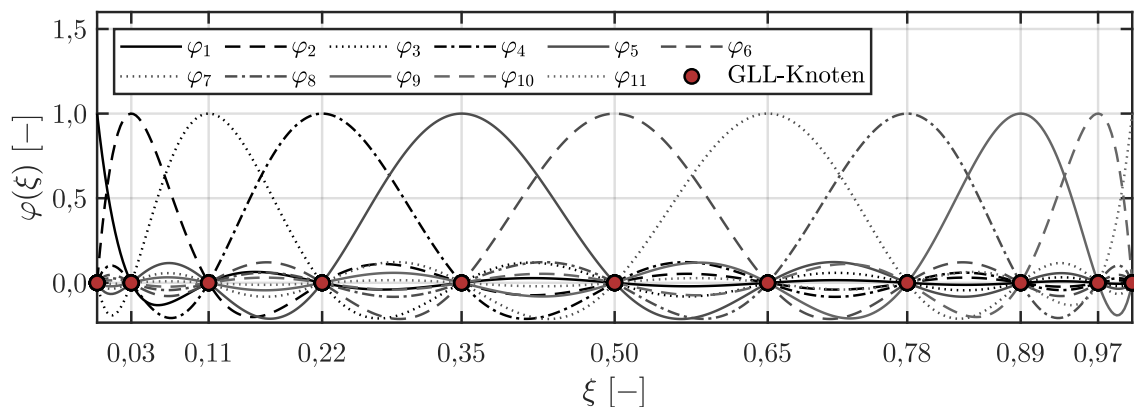


Abbildung 3.9: LAGRANGE-Formfunktionen für $p = 10$ und GLL-Knotenverteilung.

LAGRANGE-Formfunktionen im 2D Fall

Die 2D LAGRANGE-Formfunktionen φ_n können für quadrilaterale Elemente über das Produkt der 1D LAGRANGE-Formfunktionen φ_i und φ_j mittels $\varphi_n(\xi_1, \xi_2) = \varphi_i(\xi_1)\varphi_j(\xi_2)$ berechnet werden. Insgesamt müssen bei einem quadrilateralen Element also $(p + 1)^2$ Formfunktionen berechnet werden. In Abb. 3.10 ist die Vorgehensweise an einem Element der Ordnung $p = 4$ anhand der Formfunktion φ_{13} veranschaulicht. Dabei erfolgt die Nummerierung der Knoten in dieser Arbeit, wie ebenfalls in Abb. 3.10 dargestellt, zeilenweise in die positiven Richtungen der natürlichen Koordinaten. Die 2D LAGRANGE-Formfunktion φ_{13} gehört somit zum Knoten in der Elementmitte und ergibt sich aus dem Produkt der Formfunktionen $\varphi_3(\xi_1)$ und $\varphi_3(\xi_2)$, die jeweils aus Gl. (3.54) berechnet werden können.

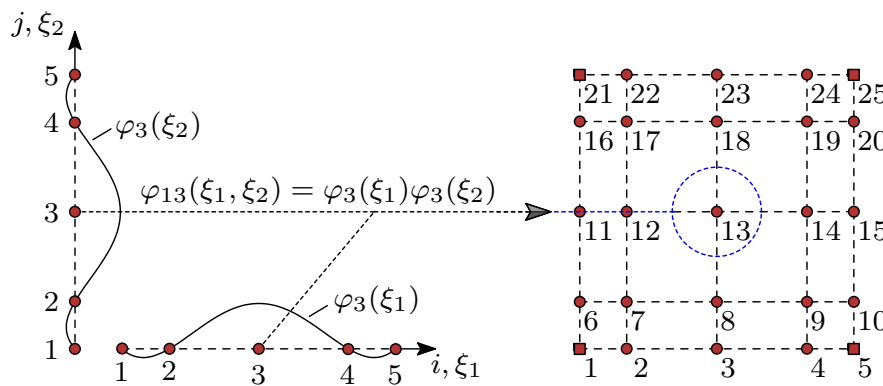


Abbildung 3.10: Konstruktion der 2D LAGRANGE-Formfunktionen am Beispiel der Formfunktion φ_{13} eines Elements mit der Ordnung $p = 4$ und einer GLL-Knotenverteilung.

In Abb. 3.11a ist die Formfunktion φ_{13} für die ED-Knotenverteilung und in Abb. 3.11b für die GLL-Knotenverteilung dargestellt. Analog zu den 1D LAGRANGE-Formfunktionen tritt auch bei den 2D LAGRANGE-Formfunktionen der RUNGE-Effekt bei Verwendung einer ED-Knotenverteilung auf. In Abb. 3.12a ist für die Elementordnung $p = 10$ die

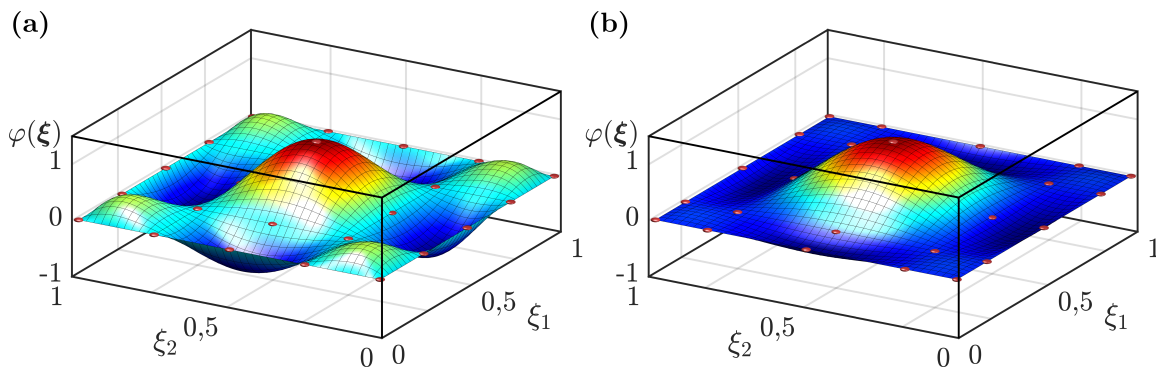


Abbildung 3.11: 2D LAGRANGE-Formfunktion φ_{13} für $p = 4$ und bei einer (a) ED-Knotenverteilung und (b) GLL-Knotenverteilung.

Formfunktion φ_{61} , zugehörig zum Knoten in der Elementmitte, bei einer ED-Knotenverteilung abgebildet. Im Vergleich zum 1D Fall ist der RUNGE-Effekt im 2D Fall noch ausgeprägter und es treten maximale Amplituden von $\varphi_{61,max} \geq 35$ auf. Wird hingegen die GLL-Knotenverteilung verwendet, dann kann der RUNGE-Effekt auch im 2D Fall, wie in Abb. 3.12b veranschaulicht, vollständig vermieden werden. Die maximale Amplitude ist analog zum 1D Fall auf Eins beschränkt.

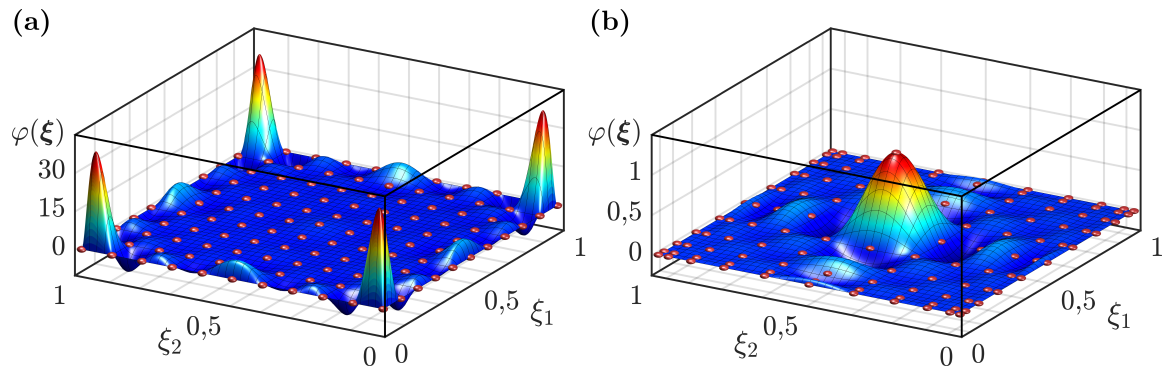


Abbildung 3.12: 2D LAGRANGE-Formfunktion φ_{61} für $p = 10$ und bei einer (a) einer ED-Knotenverteilung und (b) GLL-Knotenverteilung.

3.3.3 Numerische Integration

Für die Berechnung der Elementmatrizen werden sowohl in der FEM als auch in der SEM nach PATERA die auftretenden Integrale mithilfe von numerischen Integrationsverfahren ausgewertet. Von den zahlreichen existierenden numerischen Integrationsverfahren hat sich in der FEM insbesondere die numerische Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE durchgesetzt. Der Begriff *Quadratur* wird dabei für numerische Integrationsverfahren verwendet, bei denen bekannte Funktionswerte des Integranden herangezogen werden [174]. Die Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE kann auch für die Berechnung der Elementmatrizen bei der SEM nach PATERA eingesetzt werden, allerdings wird bei der SEM in der Regel die Quadratur nach LOBATTO bevorzugt [121]. Beide Quadraturverfahren werden im Folgenden kurz beschrieben und ihre jeweiligen Vor- und Nachteile werden aufgezeigt.

Numerische Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE

Die grundlegende Idee von GAUSS bestand darin, die Integrationsstützstellen und Integrationsgewichte so zu wählen, dass die resultierende Quadraturformel die maximale Genauigkeit besitzt [174]. Basierend auf der Idee von GAUSS haben sich die weiterentwickelten Quadraturverfahren nach GAUSS-LEGENDRE, GAUSS-CHEBYCHEV und GAUSS-LAGUERRE in der Anwendung etabliert. Bei der GAUSS-LEGENDRE-Quadratur (GL-Quadratur) wird der Integrand durch die LAGRANGE-Polynome $LA_{p,i}(\xi)$ approximiert und die sich ergebende Näherungsfunktion exakt integriert. Die Quadraturformel für eine

Funktion $f(\xi)$ mit $\xi \in [0; 1]$ lautet

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi \simeq \int_0^1 \sum_{i=1}^n f(\xi_i) LA_{p,i}(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n=p+1} w_i f(\xi_i), \quad (3.58)$$

wobei n die Anzahl der Stützstellen ξ_i ist [119]. Die Stützstellen ξ_i sind die Nullstellen des LEGENDRE-Polynoms L_n und werden als GAUSS-Punkte bezeichnet. Aus den daraus definierten LAGRANGE-Interpolationspolynomen können die Integrationsgewichte w_i über

$$w_i = \int_0^1 LA_{p,i}(\xi) d\xi \quad (3.59)$$

berechnet werden. Der wesentliche Vorteil bei der GL-Quadratur liegt in der hohen Genauigkeit mit einem Exaktheitsgrad von $(2n - 1)$. Polynome bis zum Grad $m = (2n - 1)$ können somit exakt integriert werden. Daraus folgt für die Anwendung der SEM nach PATERA, dass sowohl die Elementsteifigkeitsmatrix mit $m = 2(p - 1)$, als auch die Elementmassenmatrix mit $m = 2p$, exakt berechnet werden können. In der Tab. 3.3 sind die Integrationsstützstellen ξ_i und Integrationsgewichte w_i der GL-Quadratur für Elementordnungen bis $p = 3$ dargestellt.

Tabelle 3.3: Integrationsstützstellen und Integrationsgewichte für die GAUSS-LEGENDRE-Quadratur im Intervall $\xi \in [0; 1]$ [119].

Ordnung	Stützstellen		Gewichte	
$p = 1$	$\xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$w_1 = \frac{1}{2}$	$w_2 = w_1$
$p = 2$	$\xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\xi_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$w_1 = \frac{5}{18}$	$w_3 = w_1$
	$\xi_2 = \frac{1}{2}$		$w_2 = \frac{4}{9}$	
$p = 3$	$\xi_1 \approx 0,0694$	$\xi_3 = 1 - \xi_2$	$w_1 \approx 0,1739$	$w_3 = w_2$
	$\xi_2 \approx 0,3300$	$\xi_4 = 1 - \xi_1$	$w_2 \approx 0,3261$	$w_4 = w_1$

Numerische Quadratur nach LOBATTO

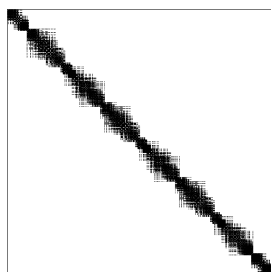
Grundsätzlich läuft die numerische Quadratur nach LOBATTO (LOB-Quadratur) analog zur GAUSS-LEGENDRE-Quadratur ab. Der einzige Unterschied liegt in der Verwendung unterschiedlicher Stützstellen, so werden bei der LOB-Quadratur die GLL-Stützstellen zur Konstruktion der LAGRANGE-Polynome verwendet. Durch die Integration der LAGRANGE-Polynome über das Integrationsintervall können wiederum die Integrationsgewichte bestimmt werden. In der Tab. 3.4 sind die Stützstellen und Integrationsgewichte der LOB-Quadratur für Elementordnungen bis $p = 3$ dargestellt. Die Verwendung der GLL-

Stützstellen hat zur Folge, dass der Exaktheitsgrad der LOB-Quadratur lediglich $(2n - 3)$ beträgt. Dadurch können die bei der Berechnung der Massenmatrix vorkommenden Polynome mit dem Grad $m = 2p$ nicht exakt integriert werden. Allerdings ergibt sich bei der Verwendung der LOB-Quadratur in Kombination mit einer GLL-Verteilung der Elementknoten der wesentliche Vorteil, dass die Massenmatrix nur auf der Hauptdiagonale

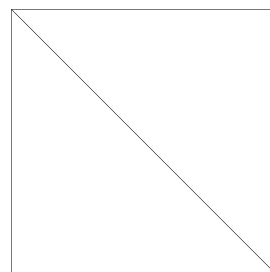
Tabelle 3.4: Integrationsstützstellen und Integrationsgewichte für die LOBATTO-Quadratur im Intervall $\xi \in [0; 1]$ [119].

Ordnung	Stützstellen		Gewichte	
$p = 1$	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 1$	$w_1 = \frac{1}{2}$	$w_2 = w_1$
$p = 2$	$\xi_1 = 0$	$\xi_3 = 1$	$w_1 = \frac{1}{6}$	$w_3 = w_1$
	$\xi_2 = \frac{1}{2}$		$w_2 = \frac{2}{3}$	
$p = 3$	$\xi_1 = 0$	$\xi_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$	$w_1 = \frac{1}{12}$	$w_3 = w_2$
	$\xi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$	$\xi_4 = 1$	$w_2 = \frac{5}{12}$	$w_4 = w_1$

mit von Null verschiedenen Werten belegt ist. In der Abb. 3.13 ist der prinzipielle Aufbau der Systemmassenmatrix der 2D skalaren Wellengleichung 3.2 für ein rechteckiges Gebiet unter Verwendung einer GLL-Knotenverteilung für die GL- und die LOB-Quadratur gegenübergestellt. Aufgrund der damit einhergehenden und teilweise enormen Steigerung der Berechnungseffizienz ist die LOB-Quadratur bei der SEM das am meisten verwendete numerische Integrationsverfahren zur Berechnung der Elementmatrizen. Bei Berechnungen im Zeitbereich können beispielsweise durch die diagonale Massenmatrix explizite Zeitintegrationsverfahren verwendet werden, wodurch das aufwendige Lösen des Gleichungssystems für jeden Zeitschritt entfällt. Wenngleich die Vorteile bei Berechnungen im Frequenzbereich etwas geringer ausfallen, ergibt sich auch hier der Vorteil, dass die Anzahl von Matrizen-Operationen zur Assemblierung der dynamischen Steifigkeitsmatrix niedriger wird.



(a) GAUSS-LEGENDRE-Quadratur



(b) LOBATTO-Quadratur

Abbildung 3.13: Prinzipieller Aufbau der Systemmassenmatrix der 2D skalaren Wellengleichung 3.2 für ein rechteckiges Gebiet bei den unterschiedlichen Quadraturverfahren mit einer GLL-Knotenverteilung.

Numerische Integration im 2D Fall

Für die numerische Berechnung von Doppelintegralen wird zuerst das innere Integral und anschließend das äußere Integral mithilfe der GL- oder LOB-Quadratur ausgewertet. Die Funktion $f(\xi_1, \xi_2)$ kann somit näherungsweise mittels

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \simeq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_i w_j f(\xi_{1,i}, \xi_{2,j}) \quad (3.60)$$

über das Referenzelement integriert werden. Dabei ist n_1 die Anzahl der Stützstellen $\xi_{1,i}$ in ξ_1 -Richtung und n_2 die Anzahl der Stützstellen $\xi_{2,j}$ in ξ_2 -Richtung. In der Abb. 3.14 sind die Stützstellen der GL- und der LOB-Quadratur im 2D Fall am Referenzelement gegenübergestellt. Die Integrationsgewichte w_i und w_j werden bei der Berechnung üblicherweise zu einem Integrationsgewicht w_{ij} zusammengefasst. Für die Quadraturverfahren gilt im 2D Fall der gleiche Exaktheitsgrad wie im 1D Fall.

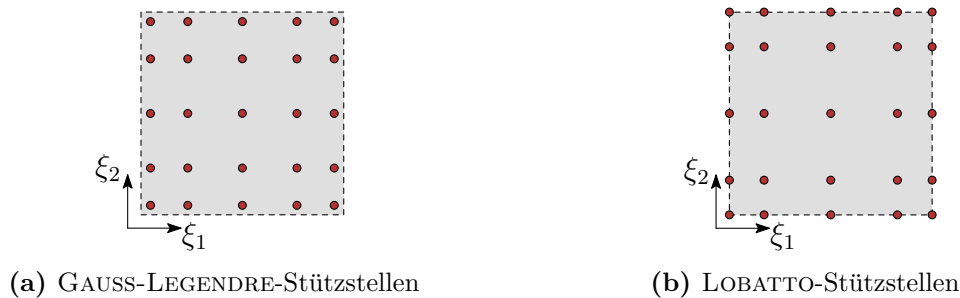


Abbildung 3.14: Vergleich der GL- und der LOB-Stützstellen im 2D Fall.

3.4 Berücksichtigung von fiktiven Berandungen

Die FEM und SEM werden meistens für die numerische Simulation von Wellenausbreitungsproblemen in berandeten Gebieten herangezogen. Bei der Behandlung von Wellenausbreitungsproblemen in unberandeten Gebieten bedarf es allerdings meistens einer Einführung von fiktiven Rändern im betrachteten unberandeten Gebiet, um die FEM oder SEM ohne spezielle Unendlich-Elemente (*infinite elements*) direkt anzuwenden. Diese Vorgehensweise verursacht leider zusätzliche Wellenreflexionen an den fiktiven Rändern, welche in Wirklichkeit gar nicht auftreten. Um bei der numerischen Simulation der Wellenausbreitungsprobleme in unberandeten Gebieten diese physikalisch unsinnigen Wellenreflexionen an den fiktiven Rändern zu minimieren, ist die Verwendung von absorbierenden oder nicht-reflektierenden Rändern zweckmäßig.

Bei der SEM nach DOYLE können zur Berücksichtigung der fiktiven Berandungen von Balkenstrukturen die sogenannten *Throw-off*-Elemente hergeleitet werden. Bei den *Throw-off*-Elementen handelt es sich um spektrale Stab- bzw. Balkenelemente mit nur einem

Knoten. Die Herleitung dieser Elemente basiert auf der Annahme, dass der zweite Knoten im Unendlichen liegt und im Grunde *abgeworfen* (dt. für *throw-off*) wird. Dadurch leiten die Throw-off-Elemente die Schwingungsenergie als Energieleiter aus dem System heraus und verhindern somit Reflexionen an den fiktiven Rändern [29].

Bei der FEM und den finiten Differenzenverfahren haben sich in den letzten Jahren die sogenannten *Perfectly Matched Layers*⁵ (PMLs) als besonders effizient erwiesen. Die PMLs stellen eine zusätzliche Schicht an den fiktiven Rändern des Berechnungsgebietes dar, wobei die einfallenden Wellen innerhalb der PMLs allmählich gedämpft werden. Dadurch besitzen die eventuellen Reflexionen an den freien Rändern der PMLs nur noch sehr niedrige Amplituden und beeinflussen das Berechnungsergebnis somit kaum nennenswert. In dieser Arbeit werden die PMLs bei den Transmissionsberechnungen im Rahmen der SEM nach PATERA verwendet. Im Folgenden werden die beiden Vorgehensweisen zur Berücksichtigung von fiktiven Berandungen, beginnend mit den Throw-off-Elementen, beschrieben.

3.4.1 Throw-off-Elemente

Die Throw-off-Elemente (TO-Elemente) basieren auf der Betrachtung von Elementen mit einer unendlichen Länge, wodurch Reflexionen am Fernrand $x = l = \infty$ keine Auswirkungen auf die Schwingungen im Nahfeld von dem Knoten bei $x = 0$ haben. Bei der Herleitung der Throw-off-Elemente werden daher die nach links laufenden Wellen der exakten Lösung beim Aufstellen der Formfunktionen vernachlässigt. Aufgrund der unendlichen Länge der Throw-off-Elemente kann die Herleitung allerdings nicht über die schwache Formulierung der Wellengleichung erfolgen. Die nachfolgenden Herleitungen der Throw-off-Elemente für den Stab und den EULER-BERNOULLI-Balken aus der Arbeit von DOYLE [29] basieren auf der Kraft-Verschiebungs-Beziehung.

Throw-off-Element des Stabs

Unter Vernachlässigung der nach links laufenden Welle ergibt sich aus Gl. (3.16) die allgemeine Lösung zu

$$u(x) = a_1 e^{-ik_L x}, \quad (3.61)$$

wobei in diesem Fall die Exponentialfunktion der Formfunktion φ_{S,T_o} und der unbekannte Koeffizient a_1 der Knotenverschiebung $d_{S,T_o} = u_1$ entspricht. Es gilt somit

$$u(x) = \varphi_{S,T_o} u_1 = e^{-ik_L x} u_1. \quad (3.62)$$

⁵Bedeutet ins Deutsche frei übersetzt „perfekt angepasste Schicht“. In der Literatur wird allerdings fast ausschließlich der englische Begriff verwendet.

Über den Zusammenhang zwischen der Normalkraft $N(x)$ und der Dehnung $\varepsilon(x) = u'(x)$ aus Gl. (2.20) ergibt sich die Knotenkraft N_1 als

$$N_1 = -N(0) = -EAu'(0) = EAik_L u_1 \quad (3.63)$$

und die spektrale dynamische Steifigkeit des Throw-off-Elements lautet demnach

$$S_{S,T_o}(\omega) = EAik_L. \quad (3.64)$$

Throw-off-Element des Balkens nach Theorie II. Ordnung

Analog zum Throw-off-Stubelement werden auch in diesem Fall die nach links laufenden Wellen nicht berücksichtigt, sodass aus Gl. (3.33)

$$w(x) = a_1 e^{-ik_{\lambda_1} x} + a_2 e^{-k_{\lambda_2} x} = \mathbf{e}_{B,T_o}^{II}(x, \omega) \mathbf{a}_{B,T_o} \quad (3.65)$$

folgt, mit

$$\mathbf{e}_{B,T_o}^{II}(x, \omega) = [e^{-ik_{\lambda_1} x} \quad e^{-k_{\lambda_2} x}] \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_{B,T_o} = [a_1 \quad a_2]^T. \quad (3.66)$$

Die Knotenverschiebungen und Knotenverdrehungen \mathbf{d}_{B,T_o}^{II} des Throw-off-Balkenelements können mithilfe von Gl. (3.65) durch

$$\mathbf{d}_{B,T_o}^{II} = \begin{bmatrix} w(0) \\ -w'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{B,T_o}^{II}(0, \omega) \\ -(\mathbf{e}_{B,T_o}^{II})'(0, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{a}_{B,T_o} = \mathbf{H}_{B,T_o}^{II}(\omega) \mathbf{a}_{B,T_o} \quad (3.67)$$

ausgedrückt werden, wobei die Matrix \mathbf{H}_{B,T_o}^{II} durch

$$\mathbf{H}_{B,T_o}^{II}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ik_{\lambda_1} & k_{\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

gegeben ist. Das Verschiebungsfeld des spektralen Throw-off-Balkenelements kann nun in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen \mathbf{d}_{B,T_o}^{II} über

$$w(x) = \mathbf{N}_{B,T_o}^{II}(x, \omega) \mathbf{d}_{B,T_o}^{II} \quad (3.69)$$

mit den spektralen Formfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{B,T_o}^{II} &= \mathbf{e}_{B,T_o}^{II}(x, \omega) (\mathbf{H}_{B,T_o}^{II})^{-1}(\omega) = [\varphi_{B1,T_o}^{II} \quad \varphi_{B2,T_o}^{II}], \\ \varphi_{B1,T_o}^{II} &= (ik_{\lambda_1} e^{-k_{\lambda_2} x} - k_{\lambda_2} e^{-ik_{\lambda_1} x}) (ik_{\lambda_1} - k_{\lambda_2})^{-1}, \\ \varphi_{B2,T_o}^{II} &= (e^{-ik_{\lambda_1} x} - e^{-k_{\lambda_2} x}) (ik_{\lambda_1} - k_{\lambda_2})^{-1} \end{aligned} \quad (3.70)$$

ausgedrückt werden. Aus den Zusammenhängen zwischen der Verschiebung $w(x)$ und dem Biegemoment M mit $M(x) = -EIw''(x)$ sowie der Transversalkraft T mit $T(x) = -EIw'''(x) + Sw'(x)$ folgt für die Knotenschnittgrößen $M_1 = -M(0)$ und $T_1 = -T(0)$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = EI \underbrace{\begin{bmatrix} (\varphi_{B1,To}^{II})'''(0) - \frac{S}{EI} (\varphi_{B1,To}^{II})'(0) & (\varphi_{B2,To}^{II})'''(0) - \frac{S}{EI} (\varphi_{B2,To}^{II})'(0) \\ (\varphi_{B1,To}^{II})''(0) & (\varphi_{B2,To}^{II})''(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{B,To}^{II}(\omega)} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Die spektrale Throw-off-Balkenelementmatrix nach Theorie II. Ordnung ist folglich gegeben durch

$$\mathbf{S}_{B,To}^{II}(\omega) = EI \begin{bmatrix} -k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} (k_{\lambda_1} - ik_{\lambda_2}) & -ik_{\lambda_1} k_{\lambda_2} \\ -ik_{\lambda_1} k_{\lambda_2} & ik_{\lambda_1} + k_{\lambda_2} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

3.4.2 Perfectly Matched Layers (PMLs)

Die erste PML-Formulierung geht auf die Arbeit von BERENGER [11] zurück, wobei die PMLs zur Berücksichtigung von fiktiven Berandungen bei der Simulation von elektromagnetischen Wellen für die MAXWELL-Gleichungen hergeleitet wurden. Bei der PML-Formulierung von BERENGER handelt es sich um eine sogenannte *split-field* (dt.: Feldzerlegung) PML-Formulierung, bei der das physikalische Feld, in diesem Fall das elektromagnetische Feld, in zwei unphysikalische Felder innerhalb der PML-Domäne zerlegt wird. Später haben sich allerdings die einachsialen PMLs bzw. UPMLs (engl.: *uniaxial PMLs*) durchgesetzt, bei denen die PMLs auf Basis der jeweiligen physikalischen Wellengleichung und einem künstlichen anisotropen absorbierenden Material formuliert werden [126]. Die Arbeiten von CHEW und WEEDON [19], sowie TEIXEIRA und CHEW [142] zeigten, dass sowohl die split-field PMLs als auch die UPMLs über eine analytische Erweiterung der jeweiligen Wellengleichung in den komplexen Koordinatenraum hergeleitet werden können. Die Transformation der Wellengleichung in den komplexen Koordinatenraum kann mit Hilfe

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\lambda(x)} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.73)$$

erfolgen, wobei $\lambda(x)$ die komplexe Koordinaten-Streckungsfunktion (engl.: *coordinate-stretching function*) ist. Für die Wahl der Streckungsfunktion und der zugehörigen Parameter existieren verschiedene Ansätze, wobei die am weitesten verbreiteten Ansätze in der Arbeit von FONTARA et al. [37] gegenübergestellt sind. In dieser Arbeit wird die frequenzabhängige Streckungsfunktion

$$\lambda(x) = 1 + f(x) - i \frac{f(x)}{\alpha_0} \quad \text{mit } \alpha_0 = \frac{b \cdot \omega}{c_S} \quad \text{und } f(x) = f_0 \left(\frac{x}{L_p} \right)^m \quad (3.74)$$

für PML-Formulierungen im Frequenzbereich verwendet. Dabei ist c_S die Wellengeschwindigkeit, b die charakteristische Breite, ω die Kreisfrequenz, L_p die Dicke der jeweiligen PML-Schicht, f_0 ein PML-Parameter zur Kontrolle des Absorptionsgrades und m ein PML-Parameter zur Beeinflussung der Streckungsrate. Mithilfe von Gl. (3.74) ergibt sich die gestreckte Koordinate \hat{x} in der PML-Schicht als

$$\hat{x} = \lambda(x)x, \quad (3.75)$$

wobei die Streckungsfunktion $\lambda(x)$ aus Gl. (3.74) hauptsächlich durch die Funktion $f(x)$ beeinflusst wird. Zur Veranschaulichung ist in der Abb. 3.15 die Funktion $f(x)$ für verschiedene Polynomgrade m und in Abhängigkeit der Dicke L_p der PML-Schicht sowie des Parameters f_0 dargestellt. Basierend auf der Arbeit von FONTARA et al. [37] werden in dieser Arbeit die PML-Parameter als $f_0 = 10$ und $m = 1$ gewählt. Außerdem wird die charakteristische Breite b , die in der Arbeit von FONTARA der halben Fundamentbreite entspricht, vereinfachend zu $b = 1$ m gesetzt. Eine Vielzahl von Untersuchungen hat gezeigt, dass mit den PML-Parametern nach FONTARA et al. [37] eine effektive Reduzierung der Reflexionen an den fiktiven Rändern des Berechnungsgebietes bei Transmissionsberechnungen mit der SEM nach PATERA erzielt werden kann. Allerdings bewiesen KAUSEL und DE OLIVEIRA BARBOSA [64], dass die Streckungsfunktion eine reine mathematische Konstruktion ohne physikalischen Hintergrund ist und somit auch keine allgemeingültige Regel zur optimalen Wahl der PML-Parameter existiert.

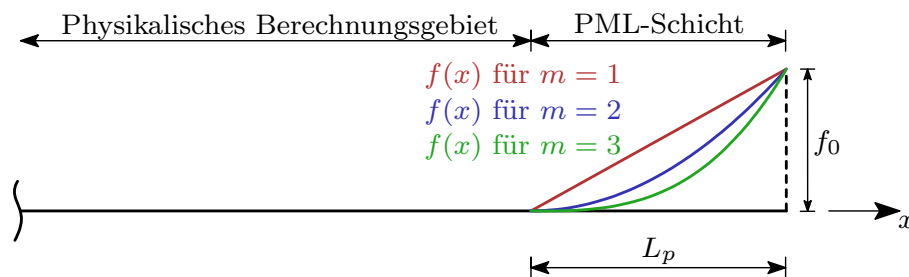


Abbildung 3.15: Funktionen $f(x)$ für verschiedene Polynomgrade.

Die Implementierung der PMLs in der SEM nach PATERA verläuft analog zur FEM, wobei die Formulierung der PML-Elementmatrizen direkt über eine komplexe Koordinatenstreckung oder alternativ über eine äquivalente Modifikation der Materialparameter erfolgen kann. Bei einer Berücksichtigung über die Modifikation der Materialparameter können die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_E^{\text{PML}}$ und die Elementmassenmatrix $\mathbf{M}_E^{\text{PML}}$ für den ESZ über

$$\mathbf{K}_E^{\text{PML}} = \int_{\Omega_E} \lambda_1 \lambda_2 \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}_{\text{ESZ}} \hat{\mathbf{B}} \det(\mathbf{J}) dA, \quad \mathbf{M}_E^{\text{PML}} = \rho \int_{\Omega_E} \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) dA \quad (3.76)$$

berechnet werden, wobei λ_1 die Streckungsfunktion für die globale x -Richtung und λ_2 die Streckungsfunktion für die globale y -Richtung ist. Bei dem Matrizen-Differentialoperator $\tilde{\nabla}$ zur Bestimmung der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} müssen die partiellen Ableitungen nach den physikalischen Koordinaten mit dem Kehrwert der jeweils zugehörigen Streckungsfunktion multipliziert werden. Dementsprechend folgt für den ESZ

$$\hat{\mathbf{B}} = \tilde{\nabla}_{\text{PML}} \mathbf{N}, \quad \tilde{\nabla}_{\text{PML}}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

wobei für die Unterscheidung zu der Ableitungsmatrix \mathbf{B} der physikalischen Elemente für die Ableitungsmatrix der PML-Elemente die Schreibweise $\hat{\mathbf{B}}$ verwendet wird. Die Streckungsfunktionen λ_1 und λ_2 , und damit auch die Ableitungsmatrix $\hat{\mathbf{B}}$, sind im globalen Koordinatensystem des Berechnungsgebiets definiert. Dadurch sind die Elementsteifigkeits- und Elementmassenmatrizen eines PML-Elements, im Gegensatz zu den Elementmatrizen eines physikalischen Elements im Berechnungsgebiet, abhängig von den absoluten Positionen der Elementknoten im globalen Koordinatensystem.

Das grundsätzliche Prinzip der PMLs wird im Folgenden für den 1D Fall demonstriert und zudem werden Besonderheiten im Zusammenhang mit phononischen Strukturen aufgezeigt. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die Dicke der PML-Schicht normalerweise deutlich geringer als die Breite des Berechnungsgebiets ist. Aus Gründen der Anschaulichkeit ist die Dicke der PML-Schicht aber nachfolgend dicker als die Breite des physikalischen Berechnungsgebiets. In der Abb. 3.16 ist dazu zunächst die Ausbreitung einer skalaren Welle der Form $e^{ik\hat{x}}$ mit $k = 2\pi$ dargestellt. Die Abb. 3.16a zeigt die gestreckte \hat{x} -Koordinate, wobei der Imaginärteil im ganzen abgebildeten Definitionsbereich gleich Null ist und der Realteil der realen Koordinate x entspricht. Folglich liegt in diesem Beispiel keine Koordinatenstreckung vor und die Welle breitet sich, wie in der Abb. 3.16b ersichtlich ist, ohne Dämpfung aus. Liegt am rechten Rand eine spannungsfreie Randbedingung

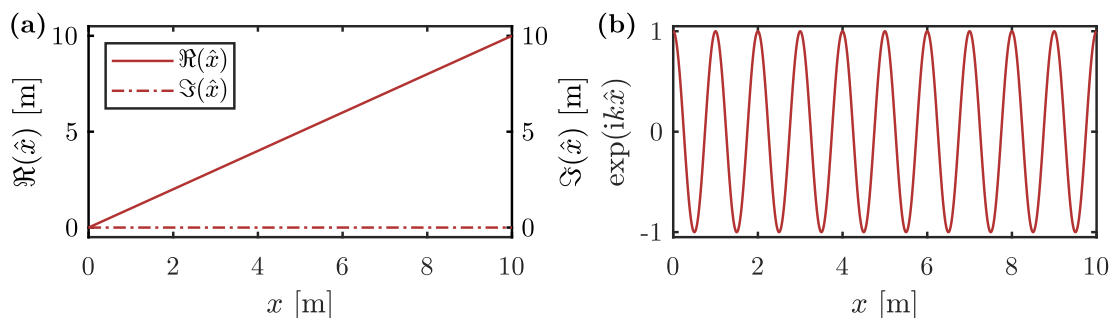


Abbildung 3.16: (a) Komplexe $x - \hat{x}$ -Ebene. (b) Ausbreitung einer skalaren Welle der Form $e^{ik\hat{x}}$ mit $k = 2\pi$ entlang der realen x -Achse.

vor, dann treten entsprechend Reflexionen an diesem Rand auf. Mithilfe von PMLs- bzw. einer Koordinatenstreckung können die Amplituden am freien Rand, wie in der Abb. 3.17 veranschaulicht, stark reduziert und damit der Einfluss von Reflexionen minimiert werden. Dazu wird der Imaginärteil der Streckungsfunktion ab $x > 4$, wie in der Abb. 3.17a dargestellt, linear gesteigert. Somit befindet sich links von $x = 4$ das physikalische Berechnungsgebiet und rechts von $x = 4$ die PML-Schicht. Außerhalb der PML-Schicht gilt $\hat{x} = x$. Aus dem zugehörigen Verlauf der Welle entlang der realen x -Achse in der Abb. 3.17b wird deutlich, dass die Welle innerhalb der PML-Schicht graduell gedämpft wird und am rechten Rand nur noch eine sehr geringe Amplitude aufweist. Eine nach links laufende reflektierte Welle würde wiederum weiter gedämpft, sodass die Amplitude der reflektierten Welle beim Eintritt ins physikalische Berechnungsgebiet noch geringer ausfällt.

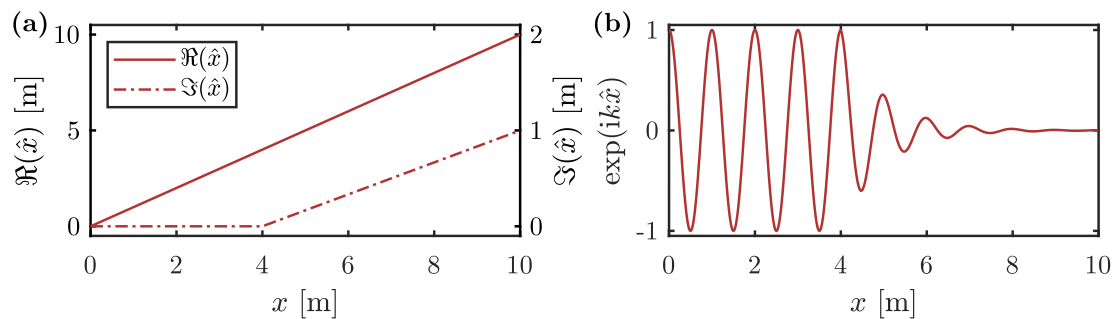


Abbildung 3.17: (a) Komplexe $x - \hat{x}$ -Ebene mit linear steigendem Imaginärteil ab $x > 4$. (b) Ausbreitung einer skalaren Welle der Form $e^{ik\hat{x}}$ mit $k = 2\pi$ entlang der realen x -Achse.

Phononische Strukturen weisen die Besonderheit auf, dass innerhalb der Bandlücken evaneszente Wellen mit einem komplexen oder rein imaginären Wellenvektor auftreten. Der imaginäre Wellenvektor wirkt sich, wie in der Abb. 3.18 veranschaulicht, erheblich auf das Wellenausbreitungsverhalten innerhalb der PML-Schicht aus. Während die Welle mit einer Wellenzahl $k = 0,02\pi i$ außerhalb der PML-Schicht langsam abklingt, tritt innerhalb

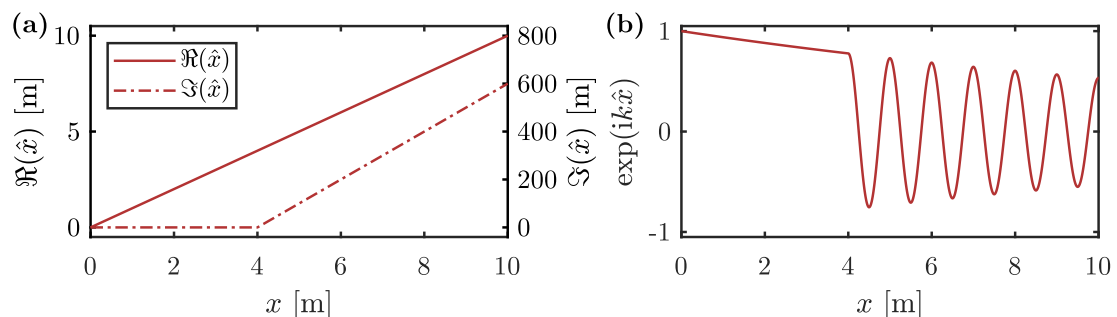


Abbildung 3.18: (a) Komplexe $x - \hat{x}$ -Ebene mit linear steigendem Imaginärteil ab $x > 4$. (b) Ausbreitung einer evaneszenten skalaren Welle der Form $e^{ik\hat{x}}$ mit $k = 0,02\pi i$ entlang der realen x -Achse.

der PML-Schicht ein stark oszillierendes Verhalten auf und die Welle klingt weiterhin nur langsam ab. Der Imaginärteil der Streckungsfunktion hat bei Wellen mit einem imaginären Wellenvektor keinen Einfluss auf das Abklingverhalten, stattdessen wird durch die Steigung $\partial\Im(x)/\partial\Re(x)$ die Frequenz der Oszillationen innerhalb der PML-Schicht beeinflusst. Dabei nimmt die Frequenz mit zunehmender Steigung proportional zu. Damit auch evaneszente Wellen innerhalb der PML-Schicht stärker gedämpft werden, ist eine zusätzliche Streckung des Realteils der jeweiligen Koordinate mittels der Streckungsfunktion erforderlich. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Streckungsfunktion nach Gl. (3.74), bei der über den mittleren Term auch der Realteil der Koordinate mit $f(x)$ gestreckt wird, verwendet. In der Abb. 3.19 ist veranschaulicht, wie sich die zusätzliche Streckung des Realteils auf die Ausbreitung der Welle mit $k = 0,02\pi i$ auswirkt. Dabei wird der Realteil, wie in Abb. 3.19a dargestellt, ab $x > 4$ mit dem Faktor 4 gestreckt. Im Vergleich zu der Abb. 3.18b wird aus der Abb. 3.19b deutlich, dass nun auch die evaneszente Welle innerhalb der PML-Schicht stärker gedämpft wird und am rechten Rand nur noch eine niedrige Amplitude aufweist.

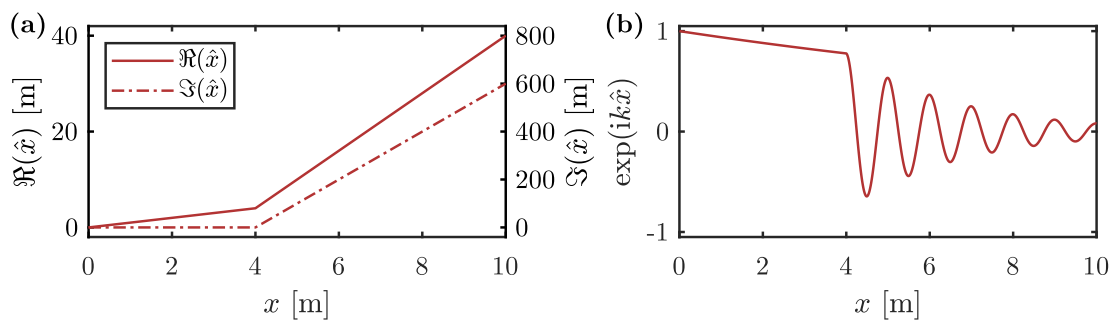


Abbildung 3.19: (a) Komplexe $x - \hat{x}$ -Ebene mit linear steigendem Imaginärteil ab $x > 4$ und zusätzlicher Streckung des Realteils. (b) Ausbreitung einer evaneszenten Welle der Form $e^{ik\hat{x}}$ mit $k = 0,02\pi i$ entlang der realen x -Achse.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass bei Metamaterialien mit einem negativen Brechungsindex die sogenannten „*backward-wave*-Lösungen“, also rückwärts laufende Wellen, bei denen Gruppen- und Phasengeschwindigkeiten entgegengesetzt sind, auftreten können. Bei diesen Materialien und Strukturen weist der Wellenvektor in bestimmten Frequenzbereichen ein negatives Vorzeichen auf. Das hat zur Folge, dass die Amplituden der Wellen innerhalb der PML-Schicht exponentiell zunehmen anstatt abzuklingen. Ist der betreffende Frequenzbereich bekannt, dann kann die PML-Formulierung für diesen Frequenzbereich angepasst werden. Allerdings versagt die PML-Formulierung vollständig, wenn bei einer Frequenz gleichzeitig vorwärts und rückwärts laufende Wellen auftreten [23]. Ein weiteres Problem ergibt sich, wenn die PML-Schicht mit einer periodischen Struktur, wie in der Abb. 3.20 veranschaulicht, überlappt. Da die PML-Formulierung auf einer analytischen Erweiterung der jeweiligen Wellengleichung in den komplexen Koordinatenraum basiert,

müssen auch die Materialparameter senkrecht zum Rand durch eine analytische Funktion beschrieben werden können. Diese Voraussetzung ist jedoch bei phononischen Strukturen nicht gegeben, sodass unter Umständen Reflexionen an den Grenzschichten auftreten können [112].

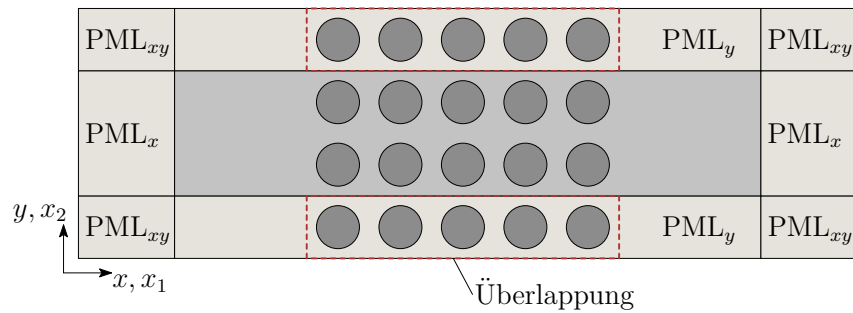


Abbildung 3.20: Überlappung von PMLs mit einer periodischen Struktur. Die Indizes x, y und xy geben jeweils die Richtungen der Koordinatenstreckung für die PMLs an.

4 Analyse von 2D schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen

In diesem Kapitel wird zunächst die Bestimmung der Dispersionskurven und der Wellen-
transmission von phononischen Gitterstrukturen mithilfe der SEM nach DOYLE erläutert.
Dabei werden insbesondere die Vor- und Nachteile im Vergleich zu einer FEM-Berechnung
aufgezeigt. Anschließend erfolgen umfangreiche Untersuchungen zur Beeinflussung des
Wellenausbreitungsverhaltens in phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.

4.1 Beschreibung der Problemstellung

Gitterstrukturen weisen im Vergleich zu herkömmlichen Strukturen ein vergleichsweise ge-
ringes Eigengewicht bei einer gleichzeitig hohen Tragfähigkeit auf und erfreuen sich insbe-
sondere im Leichtbau einer hohen Beliebtheit [143]. Die zunehmende Beliebtheit ist nicht
zuletzt auch neuen Fertigungstechniken zu verdanken, wie beispielsweise der additiven Fer-
tigung (3D Druck), wodurch 3D Gitterstrukturen, wie die in der Abb. 4.1a dargestellte 3D
Sandwich-Gitterstruktur, einfach gefertigt werden können. Während bereits umfangreiche
Literatur zu den statischen Eigenschaften von Gitterstrukturen existiert, ist über die dyna-
mischen Eigenschaften noch verhältnismäßig wenig bekannt [138]. Periodische Gitterstruk-
turen können analog zu phononischen Kristallen Bandlücken aufweisen und werden in
diesem Zusammenhang auch als phononische Gitterstrukturen bezeichnet. Die Wellenaus-
breitungseigenschaften von phononischen Gitterstrukturen wurden bereits in einigen Ar-
beiten untersucht und die Existenz von Bandlücken wurde auch experimentell nachgewie-
sen [92, 171]. Beispielsweise entwickelten MATLACK et al. [92] eine 3D phononische Gitter-

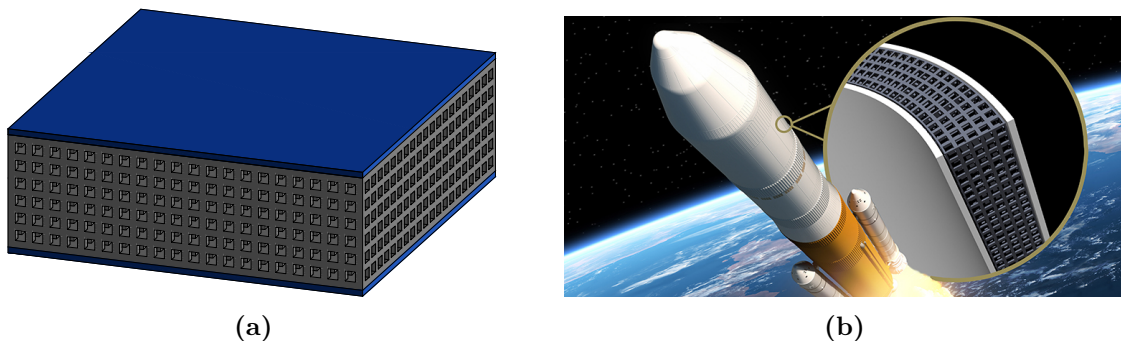


Abbildung 4.1: (a) 3D Sandwich-Gitterstruktur. (b) Schwingungsdämpfende Gitterstruktur in einer Rakete (Zukunftsvision), Grafik: 3Dsculptor/Shutterstock/JUNG-CHEW TSE, ETH Zürich.

struktur, die durch eine Kombination des BRAGG-Mechanismus und der lokalen Resonanz sehr breite Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich aufweist. Durch das gleichzeitig geringe Eigengewicht könnten derartige Strukturen in der Zukunft zur Schwingungsdämpfung in der Luft- und Raumfahrt, wie in der Abb. 4.1b veranschaulicht, oder ähnlichen Anwendungsgebieten bei denen ein geringes Eigengewicht ein wichtiges Kriterium ist, verwendet werden.

In den meisten Arbeiten zu phononischen Gitterstrukturen werden Strukturen mit einfachen Geometrien untersucht, wobei die Bandlücken insbesondere durch die Verwendung von unterschiedlichen Materialien oder zusätzlichen Resonatoren erzielt werden. Eine der ersten und bekanntesten Arbeiten stammt von MARTINSSON und MOVCHAN [89], die unter anderem ein quadratisches Gitter aus Balkenelementen mit der in der Abb. 4.2a dargestellten Einheitszelle untersuchten und zeigten, dass bei Verwendung von konstanten Material- und Querschnittseigenschaften keine Bandlücken auftreten. Wird hingegen für den linken und den oberen Balken ein Material mit einem Viertel der Dichte der übrigen Balken verwendet, dann ergeben sich mehrere komplette Bandlücken [89]. Bei anderen Gittertopologien können auch bei homogenen Material- und Querschnittseigenschaften komplette Bandlücken erzielt werden. In der Arbeit von PHANI et al. [138] wurden die dynamischen Eigenschaften einer hexagonalen Wabenstruktur, eines KAGOMÉ-Gitters, einer dreieckförmigen Wabenstruktur und eines quadratischen Gitters untersucht. Die Autoren zeigten, dass bei einem ausreichend großen Schlankheitsgrad in der hexagonalen und der dreieckförmigen Wabenstruktur komplette Bandlücken entstehen. Dabei ist der Schlankheitsgrad ein Maß für das Verhältnis zwischen der Dicke und der Länge der Zellwände. Das KAGOMÉ-Gitter und das quadratische Gitter wiesen hingegen unabhängig vom betrachteten Schlankheitsgrad keine kompletten Bandlücken auf.

Weitere mögliche Gittertopologien, bei denen auch bei homogenen Material- und Querschnittseigenschaften Bandlücken erzielt werden können, stellen die Zick-Zack-Gitterstrukturen und die sinusförmigen Gitterstrukturen dar. In der Abb. 4.2b ist beispielhaft

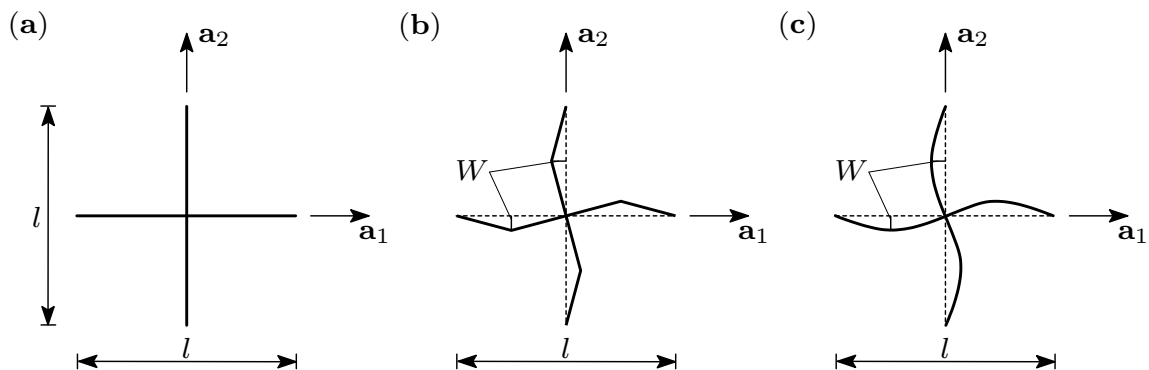


Abbildung 4.2: Einheitszellen von einer (a) periodischen quadratischen Gitterstruktur, (b) periodischen Zick-Zack-Gitterstruktur und (c) periodischen sinusförmigen Gitterstruktur.

die Einheitszelle einer Zick-Zack-Gitterstruktur und in der Abb. 4.2c die Einheitszelle einer sinusförmigen Gitterstruktur dargestellt. In den Arbeiten von SMITH et al. [136] und GASPAR et al. [39] wurden die statischen Eigenschaften, insbesondere das auxetische Verhalten, von Zick-Zack-Gitterstrukturen untersucht. Die Wellenausbreitungseigenschaften von Zick-Zack-Gitterstrukturen wurden erstmals in den Arbeiten von WANG et al. [158, 159] untersucht und die Existenz von kompletten Bandlücken wurde bewiesen. Dabei analysierten die Autoren in [158] die in der Abb. 4.3 dargestellten verschiedenen Zick-Zack-Gittergeometrien und zeigten, dass beim 2D antimetrischen Zick-Zack-Gitter mit der in der Abb. 4.3b dargestellten Einheitszelle die niedrigsten Bandlücken erzielt werden können. Das untersuchte 2D symmetrische Zick-Zack-Gitter mit der in der Abb. 4.3d dargestellten Einheitszelle weist hingegen im höheren Frequenzbereich eine breitere komplette Bandlücke auf. Die 1D Zick-Zack-Gitter mit den zugehörigen Einheitszellen in den Abbn. 4.3a und 4.3c weisen nur richtungsabhängige und im symmetrischen Fall eine sehr schmale komplette Bandlücke auf. Anhand des 2D antimetrischen Zick-Zack-Gitters untersuchten die Autoren beispielhaft auch die Einflüsse des geometrischen Parameters W , des Füllfaktors f , der Armlänge $l/2$ sowie der Knickabstände $2b$ auf die Entstehung von Bandlücken. Außerdem untersuchten die Autoren in [159] das Schwingungsverhalten senkrecht zur Gitterebene und zeigten, dass auch in diesem Fall breite Bandlücken erzielt werden können, wenn die Auslenkung W ebenfalls senkrecht zur Gitterebene angeordnet wird. Danach zeigten ZHAO und WANG [177], dass Zick-Zack-Gitter einen negativen Brechungsindex aufweisen können, wobei die Zick-Zack-Arme der untersuchten Struktur mittig an einen Kreisring angeschlossen sind. Schließlich lieferten YANG et al. [173] auch den experimentellen Nachweis von Bandlücken in Zick-Zack-Gitterstrukturen. Insgesamt ist über die Einflussfaktoren auf das Wellenausbreitungsverhalten in Zick-Zack-Gitterstrukturen noch sehr wenig bekannt. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel umfangreiche Parameterstudien zur Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in Zick-Zack-Gittern durchgeführt. Dabei werden neben den Einflüssen der geometrischen Parameter auch die Einflüsse der Steifigkeitsverhältnisse der Zick-Zack-Arme, der diskreten Massen, sowie der geometrischen Nichtlinearität untersucht. Außerdem wird mit

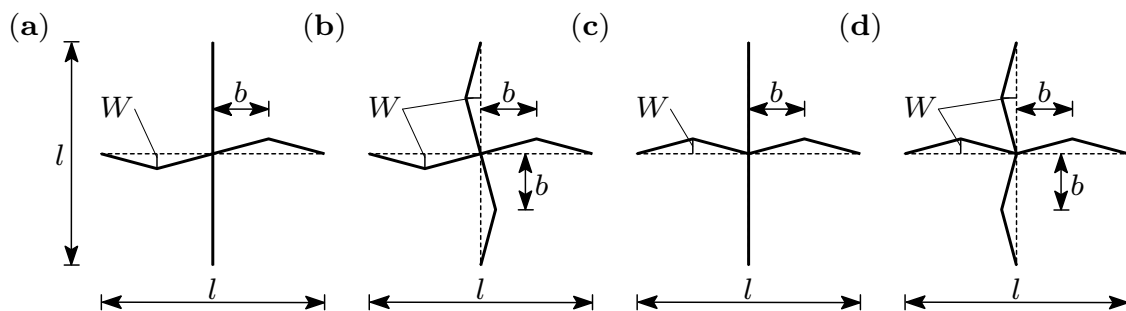


Abbildung 4.3: Die verschiedenen Zick-Zack-Einheitszellen aus [158]: (a) 1D antimetrisch, (b) 2D antimetrisch, (c) 1D symmetrisch und (d) 2D symmetrisch.

dem in dieser Arbeit entwickelten Programm auf Basis der SEM nach DOYLE ein effizientes Werkzeug zur Berechnung der Wellenausbreitungseigenschaften bereitgestellt. Die bisherigen Arbeiten verwendeten zur Berechnung der Wellenausbreitungseigenschaften der Zick-Zack-Gitterstrukturen das kommerzielle FEM-Programm COMSOL MUTLIPHYSICS mit 2D Elementen und einer entsprechend hohen Anzahl von Freiheitsgraden im Vergleich zu einer Modellierung mit 1D Balkenelementen. Vermutlich erfolgte die Modellierung mit 2D Elementen, da die periodischen BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen für 1D Balkenelemente zum Zeitpunkt der Anfertigung dieser Arbeit nicht in COMSOL MUTLIPHYSICS, und nach bestem Wissen des Autors auch nicht in anderen kommerziellen FEM-Programmen, implementiert sind.

Neben den Zick-Zack-Gitterstrukturen können auch bei sinusförmigen Gitterstrukturen komplette Bandlücken auftreten [103]. Bei letzteren weisen die Arme der Einheitszelle, wie in der Abb. 4.2c dargestellt, keinen diskreten Knick sondern eine kontinuierliche Krümmung auf. Allerdings ergeben sich bei gleichen Material- und Querschnittseigenschaften, sowie bei der gleichen Gitterkonstante l und gleichem geometrischen Parameter W in beiden Fällen vergleichbare Wellenausbreitungseigenschaften. In der Abb. 4.4 ist die Entstehung der Bandlücken in Abhängigkeit des Parameters W für eine sinusförmige Einheitszelle nach Abb. 4.2c und eine Zick-Zack-Einheitszelle nach 4.2b gegenübergestellt. Dabei beträgt die Gitterkonstante $l = 100$ mm und die Querschnittseigenschaften sind $A = 15$ mm² sowie $I_y = 10$ mm⁴. Die Materialparameter werden gewählt als $E = 30$ GPa und $\rho = 3000$ kg/m³. Aus der Abb. 4.4 wird deutlich, dass die Entstehung der ersten und zweiten Bandlücke in Abhängigkeit des Parameters W bei beiden Gittervarianten ähnlich erfolgt. Insbesondere bei der ersten Bandlücke gibt es keinen nennenswerten Unterschied zwischen den beiden Gittervarianten. Allerdings ergibt sich beim Zick-Zack-Gitter eine

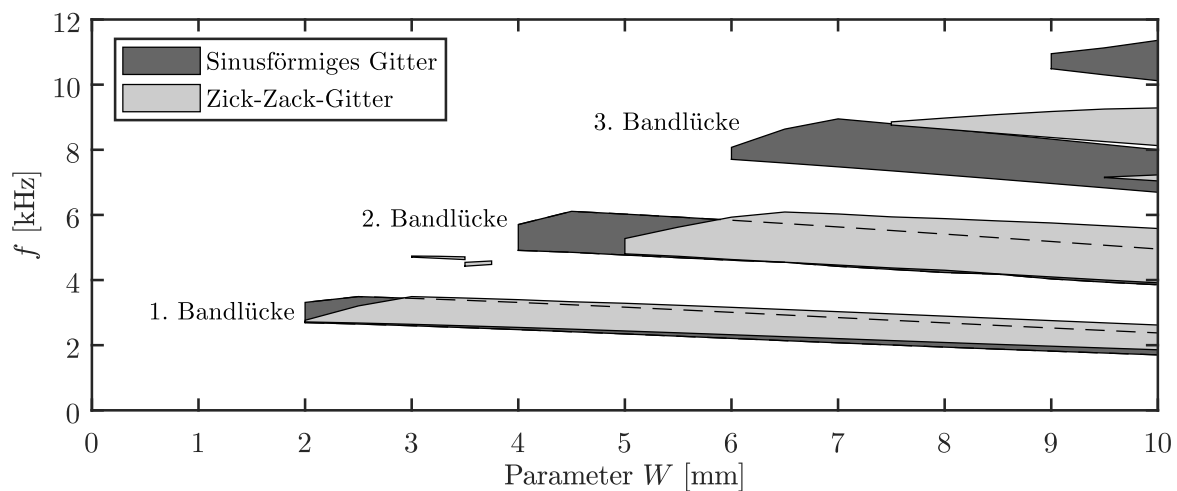


Abbildung 4.4: Entstehung von Bandlücken in Abhängigkeit des geometrischen Parameters W für sinusförmige und Zick-Zack-Gitter [103].

breitere zweite Bandlücke, die jedoch im Vergleich zum sinusförmigen Gitter erst bei einem höheren Wert von W entsteht. Ab der dritten Bandlücke zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Gittervarianten. Insgesamt ergibt sich im niedrigeren Frequenzbereich aufgrund der breiteren zweiten Bandlücke ein etwas vorteilhafteres Verhalten bei dem Zick-Zack-Gitter. Aus diesem Grund wird sich bei der Analyse der verschiedenen Einflussfaktoren auf die Entstehung von Bandlücken in diesem Kapitel nur auf die Zick-Zack-Gitterstrukturen konzentriert.

4.2 Bestimmung der Dispersionskurven

4.2.1 Einheitszelle und periodische Randbedingungen

Die Berechnung der Dispersionskurven erfolgt, wie im Abschnitt 2.2 beschrieben, anhand einer Einheitszelle mit periodischen BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen. In der Abb. 4.5a ist beispielhaft die Einheitszelle eines phononischen Zick-Zack-Gitters mit einer Diskretisierung in 8 spektrale Elemente und 9 Knoten dargestellt. Aufgrund der exakten Elementmatrizen bei der SEM nach DOYLE ist die Diskretisierung einer Gitterstruktur in mehrere Elemente nur bei geometrischen Unstetigkeiten, wie beispielsweise an den Knickstellen des Zick-Zack-Gitters, und bei Querschnitts- und Materialänderungen erforderlich. Für den Einbau der BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen in das SE-Gleichungssystem müssen Eingangs- und Ausgangsknoten definiert werden. Bei der Einheitszelle aus der Abb. 4.5a können die Knoten 1 und 6 als Eingangsknoten und die Knoten 5 und 9 als Ausgangsknoten festgelegt werden. Für die Eingangs- und Ausgangsknoten gelten dann die folgenden periodischen BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{u}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \lambda_x \\ \mathbf{u}_6 \lambda_y \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

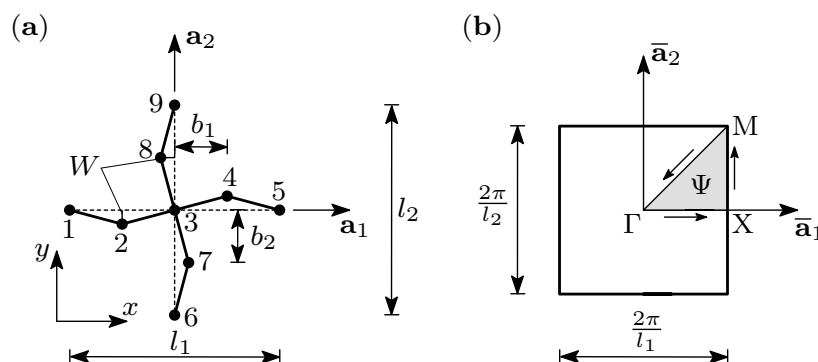


Abbildung 4.5: (a) Einheitszelle eines phononischen Zick-Zack-Gitters mit einer Diskretisierung in 8 Elemente und 9 Knoten. (b) Zugehörige erste irreduzible BRILLOUIN-Zone Ψ .

wobei \mathbf{u}_i die Vektoren der Knotenverschiebungen sind. Die Ausbreitungskonstanten $\lambda_x = \exp(ik_x l_1)$ und $\lambda_y = \exp(ik_y l_2)$ ergeben sich in Abhängigkeit der Wellenzahlen k_x in x -Richtung und k_y in y -Richtung. Die Freiheitsgrade der internen Knoten 2 – 4, 7 und 8 können mittels der GUYAN-Kondensation [44] aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Dies ist insbesondere bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven sinnvoll, da die Größe des Gleichungssystems einen exponentiellen Einfluss auf die Berechnungszeit hat. Allerdings hat die Knotenkondensation den Nachteil, dass aufgrund der fehlenden Informationen zu den internen Knotendeformationen nicht die vollständigen Eigenmoden ermittelt werden können. Für das kondensierte SE-Gleichungssystem können die Randbedingungen mittels

$$\tilde{\mathbf{S}}_{g,kond}(\omega, \lambda_x, \lambda_y) = \mathbf{\Lambda}_L^T \mathbf{S}_{g,kond}(\omega) \mathbf{\Lambda}_R \quad (4.2)$$

eingebaut werden, wobei $\mathbf{S}_{g,kond}(\omega)$ die kondensierte globale spektrale Systemsteifigkeitsmatrix ist und

$$\mathbf{\Lambda}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \lambda_x \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \lambda_y \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \lambda_x^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \lambda_y^{-1} \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Die Größen der Einheitsmatrix \mathbf{I} und der Nullmatrix $\mathbf{0}$ hängen dabei von der Anzahl der Knotenfreiheitsgraden ab und haben im vorliegenden Fall jeweils die Größe 3×3 .

Die Dispersionskurven der Einheitszelle können nun durch die Lösung des Eigenwertproblems

$$\det(\tilde{\mathbf{S}}_{g,kond}(\omega, \lambda_x, \lambda_y)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.4)$$

bestimmt werden. Dabei kann das Eigenwertproblem entweder nach der Eigenkreisfrequenz ω oder nach den Ausbreitungskonstanten λ_x und λ_y aufgelöst werden. Im ersten Fall bleibt die Eigenkreisfrequenz unbekannt und das Eigenwertproblem muss für gegebene Wellenzahlen k_x und k_y (und damit λ_x und λ_y) in der ersten BRILLOUIN-Zone, dargestellt in der Abb. 4.5b, gelöst werden. Dabei ist es ausreichend den Wellenvektor $\mathbf{k} = (k_x \ k_y)^T$ entlang der Kanten der ersten irreduziblen BRILLOUIN-Zone (IBZ) Ψ , die durch die hohen Symmetriepunkte Γ , X und M aufgespannt wird, zu variieren. Allerdings ergibt sich bei der SEM nach DOYLE dabei eine transzendente charakteristische Gleichung, die im Allgemeinen sehr aufwendig zu lösen ist. Im zweiten Fall wird das Eigenwertproblem nach den Ausbreitungskonstanten λ_x und λ_y für gegebene diskrete Kreisfrequenzen ω_n aufgelöst. Dadurch können die Wellenzahlen komplexe Werte annehmen, die wertvolle Informationen über das evaneszente Verhalten der BLOCH-Wellen liefern. In diesem Fall kann die IBZ verwendet werden, um eine Beziehung zwischen λ_x und λ_y vorzugeben. Dadurch ergibt sich in der Γ –X-Richtung sowie in der X–M-Richtung ein quadratisches und in der M– Γ -Richtung ein quartisches Eigenwertproblem.

4.2.2 Lösung des Eigenwertproblems

Die Vorgehensweisen zur Lösung der oben beschriebenen Eigenwertprobleme unterscheiden sich sehr deutlich und werden daher nachfolgend ausführlich erläutert. Außerdem werden die wesentlichen Vor- und Nachteile im Vergleich zu einer FEM-Berechnung aufgezeigt. Dabei basieren die nachfolgenden Untersuchungen auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Abmessungen $l = l_1 = l_2 = 100$ mm, einem konstanten quadratischen Querschnitt aus Aluminium mit den Seitenlängen $a = 2$ mm und einer maximalen Auslenkung der Zick-Zack-Arme von $W = 10$ mm. Außerdem beschränken sich die nachfolgenden Untersuchungen auf die Theorie I. Ordnung (Stabkraft $S = 0$). In der Tab. 4.1 sind die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften ausführlich aufgelistet.

Tabelle 4.1: Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften der Einheitszelle in der Abb. 4.5a.

$l_1 = l_2$	$b_1 = b_2$	W	A	I	E	ρ	S
[mm]	[mm]	[mm]	[mm ²]	[mm ⁴]	[GPa]	[kg/m ³]	[N]
100	25	10	4	1,33	70	2700	0

Lösung der transzendenten Eigenwertgleichung

Die zuvor beschriebene erste Möglichkeit zur Formulierung des Eigenwertproblems liefert die konventionellen Dispersionskurven $\omega(\mathbf{k})$. In diesem Fall sind die Kreisfrequenzen ω_i die zu ermittelnden Eigenwerte, wobei jedoch die spektrale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}_g(\omega)$ aus transzendenten Funktionen in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω besteht. Somit erhält man, bei vorgegebenen Ausbreitungskonstanten λ_x und λ_y , mit

$$\det \left(\tilde{\mathbf{S}}_g(\omega) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.5)$$

eine transzendente Eigenwertgleichung. Die vielen bekannten Algorithmen bzw. Verfahren zur Lösung von linearen oder auch quadratischen Eigenwertproblemen können in diesem Fall nicht verwendet werden. Es besteht aber die Möglichkeit, die Kreisfrequenz ω in kleinen Schritten zu variieren, für jeden Schritt die Determinante der spektralen Steifigkeitsmatrix zu berechnen, und dann iterativ nach den diskreten Kreisfrequenzen ω_i zu suchen, für die die Determinante gemäß Gl. (4.5) verschwindet [80]. Dabei können im Allgemeinen manche Eigenfrequenzen „übersehen“ werden, insbesondere dann, wenn zwei Eigenfrequenzen sehr nah beieinander liegen. Abhilfe bietet hier die Verwendung des WITTRICK-WILLIAMS-Algorithmus [165], mit dem sichergestellt werden kann, dass sämtliche Eigenfrequenzen in einem vorgegebenen Intervall bestimmt werden können.

In der Abb. 4.6a sind die aus der transzendenten Eigenwertgleichung ermittelten re-

ellen Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1 dargestellt. Allerdings ist der Aufwand zur Berechnung der reellen Dispersionskurven bei der SEM nach DOYLE aufgrund der zu lösenden transzendenten Eigenwertgleichung im Vergleich zur FEM erheblich höher. Bei der FEM muss lediglich eine lineare Eigenwertgleichung der Form $(\mathbf{K}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g) \mathbf{a} = \mathbf{0}$ gelöst werden, wobei \mathbf{K}_g die globale Systemsteifigkeitsmatrix, \mathbf{M}_g die globale Systemmassenmatrix und \mathbf{a} der zur jeweiligen Eigenfrequenz zugehörige Eigenvektor ist. Ein Effizienzvergleich zwischen der SEM nach DOYLE und der FEM für die Bestimmung der reellen Dispersionskurven kann durch die Auswertung der numerischen Fehler für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden und den zugehörigen Berechnungszeiten erfolgen. Der Fehler einer numerischen Näherungslösung f_n^{num} bezogen auf eine Referenzlösung f_n^{ref} kann im Allgemeinen mithilfe der relativen l_2 -Norm beschrieben werden, wobei der Fehler ε_2 für eine Anzahl von $n = 1, 2, \dots, N$ Lösungswerten durch

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^N (f_n^{num} - f_n^{ref})^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (f_n^{ref})^2}} \cdot 100 \quad (4.6)$$

bestimmt ist. In der Abb. 4.6b sind die maximalen ε_2 -Fehler der FEM-Berechnungen für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden dargestellt. Dabei ergibt sich der maximale ε_2 -Fehler aus dem Maximum der für jedes Band $i = 1..10$ der reellen Dispersions-

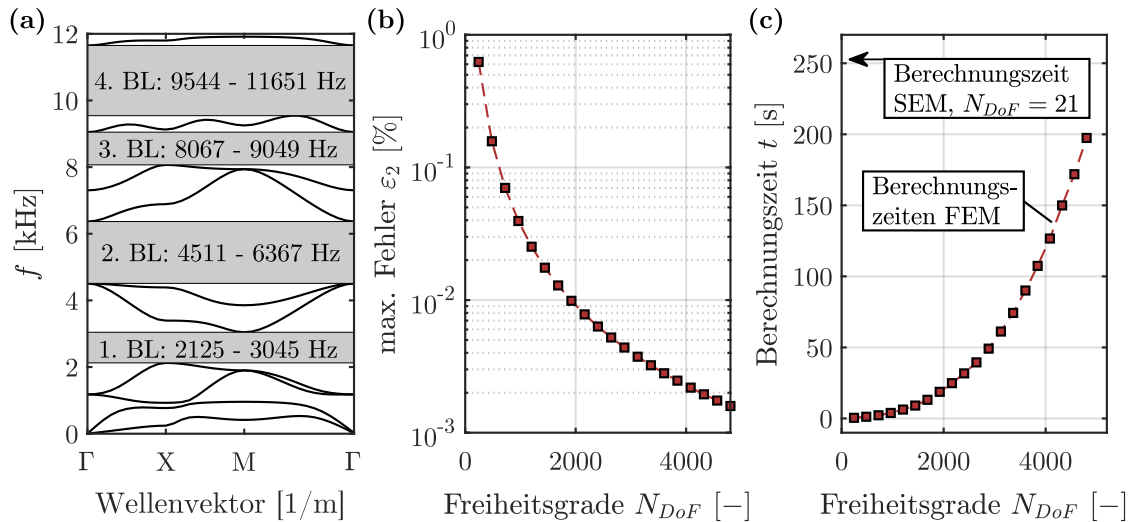


Abbildung 4.6: (a) Mittels der SEM berechnete reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1. (b) Maximale Fehler bei einer Berechnung der ersten 10 Bänder mittels FEM für verschiedene Diskretisierungen. (c) Berechnungszeiten der FEM für verschiedene Diskretisierungen, sowie Berechnungszeit der SEM.

kurven ermittelten Fehler $\varepsilon_{2,i}$. Als Referenzlösung zur Berechnung der $\varepsilon_{2,i}$ -Fehler dient, aufgrund der exakten dynamischen Steifigkeitsmatrix und damit verbundenen quasi exakten Lösung, eine SEM-Berechnung. Die SEM-Lösung kann lediglich durch die numerische Berechnung der Eigenwerte mit Fehlern behaftet sein. In diesem Fall erfolgt die Berechnung mithilfe der Funktion *fzero* in MATLAB, die eine Abbruchtoleranz zwischen zwei aufeinander folgenden Iterationsschritten von $2,2204e-16$ aufweist und somit eine sehr hohe Genauigkeit der berechneten Eigenwerte gewährleistet. Die Anzahl von Lösungswerten pro Band entspricht der untersuchten Anzahl von diskreten Wellenvektoren auf den Rändern der IBZ und beträgt in diesem Fall $N = 35$. Die Abb. 4.6b zeigt, dass der maximale Fehler der FEM-Berechnungen mit steigender Anzahl an Freiheitsgraden sehr schnell abnimmt und sich asymptotisch der SEM-Lösung nähert. Außerdem kann für den betrachteten Frequenzbereich selbst mit einer groben Diskretisierung und einer entsprechend geringen Anzahl von Freiheitsgraden eine hohe Genauigkeit mittels der FEM erreicht werden.

In der Abb. 4.6c sind die zugehörigen Berechnungszeiten zur Ermittlung der reellen Dispersionskurven aus der Abb. 4.6a für die FEM-Berechnungen mit unterschiedlichen Anzahlen von Freiheitsgraden, sowie die Berechnungszeit mittels SEM für $N_{DoF} = 21$ Freiheitsgrade dargestellt. Erwartungsgemäß sind die Berechnungszeiten bei der FEM, selbst bei einer sehr großen Anzahl von Freiheitsgraden, deutlich geringer als die Berechnungszeit der SEM von etwa 253 s. Die Berechnungen wurden dabei ohne die Kondensierung der Systemsteifigkeits- und Massenmatrix durchgeführt. Unter Verwendung der Kondensierung fallen die Berechnungszeiten der FEM noch geringer im Vergleich zur SEM aus. Zusammenfassend ist die SEM nach DOYLE für die Berechnung der reellen Dispersionskurven nur bedingt geeignet und weist erst in hohen Frequenzbereichen einen Vorteil gegenüber der FEM auf. Allerdings eignet sich die SEM aufgrund der sehr hohen Genauigkeit im Allgemeinen besonders gut als Referenzlösung zur Beurteilung der Genauigkeit von anderen numerischen Verfahren, wie beispielsweise der FEM oder den finiten Differenzenverfahren.

Lösung der quadratischen/quartischen Eigenwertgleichung

Die zweite Möglichkeit zur Formulierung des Eigenwertproblems liefert die komplexen Dispersionskurven $\mathbf{k}(\omega)$. In diesem Fall werden die diskreten Kreisfrequenzen ω_n vorgegeben und es wird nach den Ausbreitungskonstanten λ_x und λ_y gesucht. Dabei kann die erste IBZ verwendet werden, um eine Beziehung zwischen λ_x und λ_y zu erhalten. In der Γ -X-Richtung ist der Wellenvektor parallel zur k_x -Achse und die Ausbreitungskonstante in der y -Richtung beträgt $\lambda_y = 1$. Analog ist der Wellenvektor in der X-M-Richtung parallel zur k_y -Achse und die Ausbreitungskonstante in der x -Richtung beträgt $\lambda_x = \exp(i\pi l_1)$. Für die zuvor genannten Kanten der ersten IBZ reduziert sich das Eigenwertproblem nach einer Umformung sowohl bei der SEM nach DOYLE als auch bei der FEM jeweils auf eine

quadratische Eigenwertgleichung der Form

$$(\lambda^2 \mathbf{S}_3 + \lambda \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_3^T) \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Dabei können die Koeffizientenmatrizen \mathbf{S}_3 und \mathbf{S}_4 aus der kondensierten globalen dynamischen Steifigkeitsmatrix, $\mathbf{S}_g(\omega_n)$ bei der SEM nach DOYLE bzw. $\mathbf{K}_{g,dyn} = \mathbf{K}_g - \omega_n^2 \mathbf{M}_g$ bei der FEM, berechnet werden. Die Ermittlung der Koeffizientenmatrizen ist im Anhang D dargestellt und basiert im Wesentlichen auf den Ausführungen von VERES et al. [153]. Zur effizienten Lösung der quadratischen Eigenwertgleichung wird in dieser Arbeit der Lösungsalgorithmus von TISSEUR und MEERBERGEN [145] verwendet, der auf einer Linearisierung der jeweiligen quadratischen Eigenwertgleichung beruht.

Für die dritte zu untersuchende Kante der ersten IBZ, also die M– Γ -Richtung, ergibt sich hingegen eine quartische Eigenwertgleichung der Form

$$(\lambda^4 \mathbf{S}_1 + \lambda^3 \mathbf{S}_2 + \lambda^2 \mathbf{S}_3 + \lambda \mathbf{S}_2^T + \mathbf{S}_1^T) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

wobei bei einer quadratischen Einheitszelle für die Ausbreitungskonstanten der Zusammenhang $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ gilt. Auch in diesem Fall können die Koeffizientenmatrizen \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 und \mathbf{S}_3 aus der kondensierten globalen dynamischen Steifigkeitsmatrix berechnet werden, wobei die Vorgehensweise ebenfalls im Anhang D beschrieben wird. Es sei jedoch angemerkt, dass die Koeffizientenmatrizen abhängig von der Beziehung zwischen λ_x und λ_y sind und sich somit für jede betrachtete Kante der ersten IBZ unterscheiden.

In der Abb. 4.7 sind die komplexen Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1 dargestellt. Die linke Seite der Abb. 4.7 zeigt die Realteile der Wellenvektoren, wobei die roten Punkte die rein reellen Wellenvektoren darstellen und die blauen Punkte die Realteile von komplexen Wellenvektoren repräsentieren. Diese komplexen Wellenvektoren können nicht durch das klassische $\omega(\mathbf{k})$ -Eigenwertproblem ermittelt werden. Zusätzliche komplexe Wellenvektoren, die bei den hohen Symmetriepunkten Γ , X und M als vertikale Linien erscheinen, werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht angegeben. Die rechte Seite von der Abb. 4.7 zeigt die Imaginärteile der Wellenvektoren. In diesem Fall repräsentieren die roten Punkte die rein imaginären Wellenvektoren und die blauen Punkte stellen die komplexen Wellenvektoren dar. Das Wellenausbreitungsverhalten innerhalb der Bandlücken hängt insbesondere von dem kleinsten imaginären Teil des Wellenvektors ab, da dieser die am langsamsten abklingende Welle charakterisiert. Folglich trägt diese Welle die Energie am weitesten [171]. In einem Frequenzbereich, in dem keine Bandlücken vorhanden sind, bildet der kleinste Imaginärteil, wie in der Abb. 4.7 dargestellt, eine gerade Linie entlang der y -Achse. Dies bedeutet, dass sich in diesem Frequenzbereich mindestens eine Welle durch die phononische Struktur ausbreiten kann ohne abzuklingen [101]. Nachfol-

gend wird in dieser Arbeit bei den komplexen Dispersionskurven auf eine farbliche Unterscheidung zwischen den reellen, imaginären und komplexen Wellenvektoren verzichtet. Außerdem werden beim Realteil der Wellenvektoren aus Gründen der Übersichtlichkeit und der geringen Bedeutung für die Untersuchungen in dieser Arbeit nur die rein reellen Wellenvektoren dargestellt.

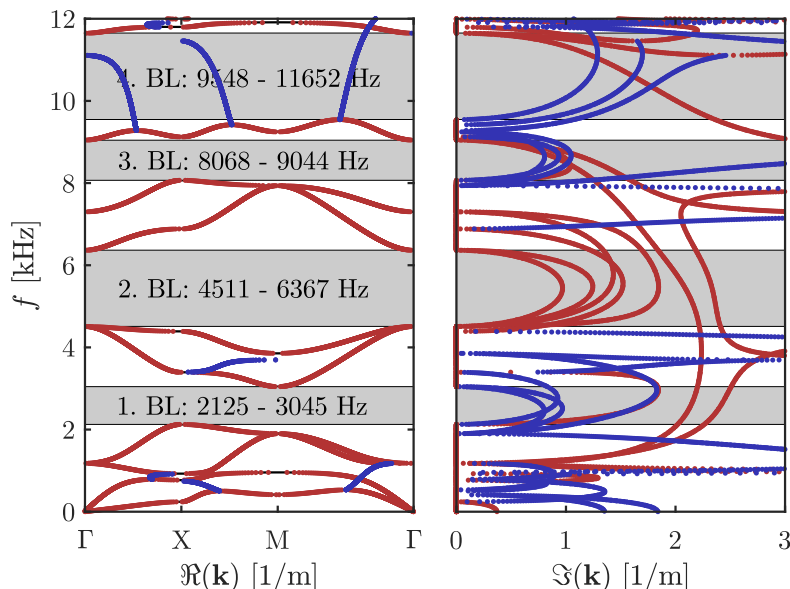


Abbildung 4.7: Mittels der SEM berechnete komplexe Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1. Links: Realteile der Wellenvektoren, wobei die roten Punkte die rein reellen Wellenvektoren darstellen und die blauen Punkte die Realteile von komplexen Wellenvektoren repräsentieren. Rechts: Imaginärteile der Wellenvektoren, wobei die roten Punkte die rein imaginären Wellenvektoren darstellen und die blauen Punkte die Imaginärteile von komplexen Wellenvektoren repräsentieren.

Ein Effizienzvergleich zwischen der SEM nach DOYLE und der FEM für die Bestimmung der komplexen Dispersionskurven kann auch in diesem Fall durch eine Auswertung der numerischen Fehler für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden und den zugehörigen Berechnungszeiten erfolgen. Im Gegensatz zur Bestimmung der reellen Dispersionskurven unterscheidet sich in diesem Fall die Vorgehensweise zur Berechnung der komplexen Dispersionskurven bei der FEM und der SEM nach DOYLE nur minimal. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der SEM für jede diskrete Kreisfrequenz ω_n eine erneute Berechnung der spektralen Elementmatrizen und eine anschließende Assemblierung zur globalen spektralen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}_g(\omega)$ erfolgen muss. Bei der FEM muss hingegen für jede diskrete Kreisfrequenz ω_n erneut die globale dynamische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{g,dyn} = \mathbf{K}_g - \omega_n^2 \mathbf{M}_g$ aufgestellt werden, wobei die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g und die Massennmatrix \mathbf{M}_g konstant sind und nur einmal berechnet werden müssen. Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Koeffizientenmatrizen sowie die zu lösenden Eigenwertgleichungen aus

den Gln. (4.7) und (4.8) sind bei der FEM und der SEM nach DOYLE identisch. In der Abb. 4.8 sind die ε_2 -Fehler von drei verschiedenen FEM-Berechnungen der komplexen Dispersionskurven aus der Abb. 4.7 mit unterschiedlichen Anzahlen von Freiheitsgraden in Abhängigkeit der Frequenz f dargestellt. Die Berechnung der komplexen Dispersionskurven erfolgt dabei mit 1200 diskreten Frequenzen mit einer Schrittweite von $\Delta f = 10$ Hz. Um eine ausreichend hohe Anzahl von Eigenwerten für die Auswertung des ε_2 -Fehlers zu gewährleisten, werden für jeden berechneten ε_2 -Fehler die ermittelten Eigenwerte von 10 diskreten Frequenzschritten herangezogen. Analog zu der Fehlerauswertung bei der Berechnung der reellen Dispersionskurven wird auch in diesem Fall eine SEM-Berechnung als Referenzlösung verwendet. Die Abb. 4.8 zeigt, dass die ε_2 -Fehler der FEM-Berechnungen mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden kontinuierlich abnehmen. Auch innerhalb der grau markierten Bandlücken, in denen nur komplexe und imaginäre Eigenwerte bzw. Wellenzahlen auftreten, nehmen die ε_2 -Fehler ab. Außerdem zeigt sich, dass die ε_2 -Fehler mit steigender Frequenz, unabhängig von der Anzahl von Freiheitsgraden, zunehmen. Allerdings treten, insbesondere bei einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden, auch im niedrigeren Frequenzbereich vereinzelt größere Fehler auf. Es sei ebenfalls angemerkt, dass vor Allem bei einer sehr hohen Anzahl von Freiheitsgraden vereinzelt Eigenwerte von den verwendeten Lösungsalgorithmen nicht gefunden werden können. Vermutlich liegt dies an der mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden zunehmend schlechteren Kondition des Gleichungssystems. Aufgrund der sehr geringen Anzahl von ein bis zwei fehlenden Eigenwerten ist zwar der Einfluss auf die Dispersionskurven sehr gering, aber der Einfluss auf den lokalen ε_2 -Fehler bei der jeweiligen Frequenz sowie den durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler kann sehr hoch sein.

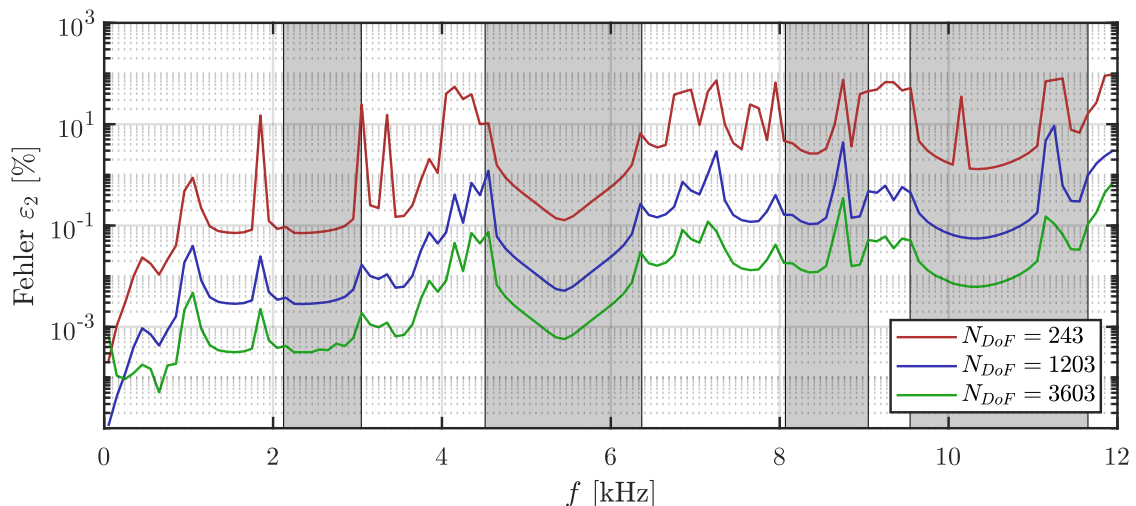


Abbildung 4.8: ε_2 -Fehler von drei verschiedenen FEM-Berechnungen der komplexen Dispersionskurven aus der Abb. 4.7 mit unterschiedlichen Anzahlen von Freiheitsgraden in Abhängigkeit der Frequenz f . Innerhalb der Bandlücken, die hellgrau markiert sind, existieren nur komplexe und imaginäre Eigenwerte.

In der Abb. 4.9a sind die durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler der FEM-Berechnungen für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden dargestellt. Der durchschnittliche $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler stellt dabei das arithmetische Mittel der über alle Frequenzen der Berechnungen ermittelten lokalen ε_2 -Fehler dar. Die blaue Linie in der Abb. 4.9a zeigt den durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler in Abhängigkeit der Anzahl von Freiheitsgraden mit Berücksichtigung der sehr großen lokalen Fehler infolge der fehlenden Eigenwerte, die als Ausreißer bezeichnet werden können. Es wird deutlich, dass der $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler in diesem Fall ab ungefähr 1200 Freiheitsgraden nur noch unwesentlich mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden abnimmt und offensichtlich der Einfluss der Ausreißer den durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler dominiert. Werden die Ausreißer hingegen bei der Fehlerauswertung nicht berücksichtigt, ergibt sich die rote Linie in der Abb. 4.9a für den durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler. In diesem Fall nimmt der Fehler kontinuierlich mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden ab und die FEM-Lösung nähert sich asymptotisch der SEM-Referenzlösung.

In der Abb.4.9b sind die zugehörigen Berechnungszeiten zur Ermittlung der komplexen Dispersionskurven für die FEM-Berechnungen mit unterschiedlichen Anzahlen von Freiheitsgraden, sowie die Berechnungszeit mittels der SEM für $N_{DoF} = 21$ Freiheitsgrade dargestellt. Erwartungsgemäß steigt die Berechnungszeit bei der FEM mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden exponentiell an und beträgt selbst bei einer vergleichsweise geringen Anzahl von Freiheitsgraden von $N_{DoF} = 483$ bereits $t = 53,7$ s. In diesem Fall beträgt der durchschnittliche $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler ohne Ausreißer noch $\bar{\varepsilon}_2 = 3,16$ %. Die Berechnung der komplexen Dispersionskurven mittels der SEM nach DOYLE dauert hingegen nur 4,4 s und gewährleistet gleichzeitig eine sehr hohe Genauigkeit. Des Weiteren können, zumindest bei den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen, stets alle Eigenwerte mit der SEM nach DOYLE ermittelt werden. Folglich weist die SEM nach DOYLE bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven erhebliche Vorteile im Vergleich zu einer ent-

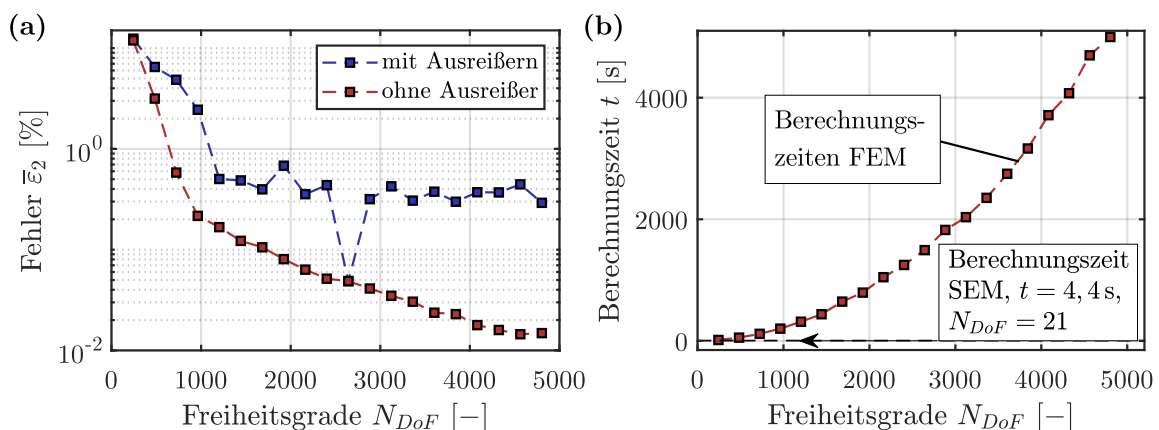


Abbildung 4.9: (a) Durchschnittlicher Fehler $\bar{\varepsilon}_2$ der FEM-Berechnungen der komplexen Dispersionskurven aus der Abb. 4.7 für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. (b) Berechnungszeiten der FEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden, sowie Berechnungszeit der SEM.

sprechenden FEM-Berechnung auf. Insbesondere ist die SEM nach DOYLE bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven äußerst effizient und vereint die Vorteile einer sehr kurzen Berechnungsdauer mit einer gleichzeitig sehr hohen Genauigkeit.

4.3 Bestimmung der Wellentransmission

Die Berechnung der Wellentransmission dient, wie bereits im Abschnitt 2.2 erläutert, ebenfalls der Beurteilung des Wellenausbreitungsverhaltens in einer periodischen Struktur und liefert ein Maß für das tatsächliche Dämpfungsvermögen. Für die Berechnung der Wellentransmission in phononischen Gitterstrukturen wird in dieser Arbeit das in der Abb. 4.10 dargestellte System verwendet. Dabei beträgt die Anzahl von Einheitszellen in der x -Richtung pro Zeile $N_{t,x}$ und die Anzahl von Einheitszellen in der y -Richtung pro Spalte $N_{t,y}$. Das System wird durch vorgegebene zeitharmonische Verschiebungen $\mathbf{u}_0 e^{i\omega t}$, mit $\mathbf{u}_0 = [u_0 \ v_0]^T$, am linken Rand des Systems mit der Kreisfrequenz ω angeregt. Dabei ist u_0 die vorgegebene Verschiebung in der x -Richtung und v_0 die vorgegebene Verschiebung in der y -Richtung. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass mit dem dargestellten System im Wesentlichen nur die Wellentransmission in der Γ -X-Richtung untersucht werden kann. Die Berechnung der Systemantwort erfolgt im Frequenzbereich, wobei für jede diskrete Frequenz ω_n das Gleichungssystem

$$\mathbf{S}_g(\omega_n) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.9)$$

gelöst werden muss. Der Lastvektor \mathbf{f} kann ermittelt werden, indem die aus den vorgege-

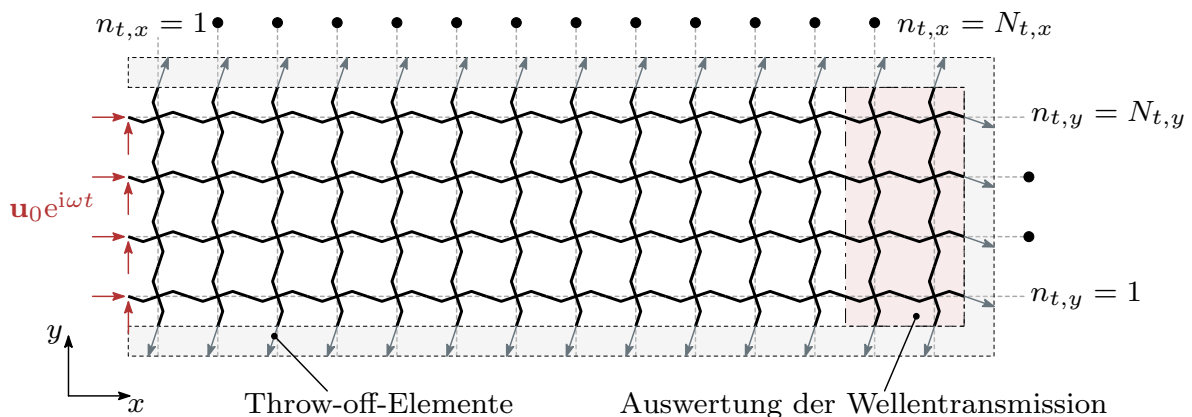


Abbildung 4.10: System für die Berechnung der Wellentransmission in der Γ -X-Richtung von phononischen Gitterstrukturen. Das System wird am linken Rand mit den vorgegebenen zeitharmonischen Verschiebungen $\mathbf{u}_0 e^{i\omega t}$ angeregt. Die Auswertung der Wellentransmission erfolgt in den letzten $N_{t,eval}$ Spalten auf der rechten Seite, wobei der Auswertungsbereich hier beispielhaft für $N_{t,eval} = 2$ rosa markiert ist. Am oberen, unteren und rechten Rand können Throw-off-Elemente, angedeutet durch die dunkelgrauen Pfeile, verwendet werden.

benen Verschiebungen resultierenden Kraftterme auf der linken Seite des Gleichungssystems auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht werden. Anschließend können die entsprechenden Zeilen und Spalten der vorgegebenen Verschiebungen aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Die genaue Vorgehensweise wird in vielen Standardwerken der FEM (z. B. [60, 162]) detailliert beschrieben und daher in dieser Arbeit nicht näher ausgeführt.

Die Auswertung der Wellentransmission erfolgt, wie ebenfalls in der Abb. 4.10 veranschaulicht, in den letzten $N_{t,eval}$ Spalten auf der rechten Seite des Systems. Dabei werden die Verschiebungen $\mathbf{u}_i(\omega_n) = [u_i \ v_i]^T$ für $i = 1 \dots N_{t,eval,k}$, wobei $N_{t,eval,k}$ die Anzahl von Knoten innerhalb der letzten $N_{t,eval}$ Spalten ist, für jede diskrete Kreisfrequenz ω_n ausgewertet und die Wellentransmission mittels

$$T(\omega_n) = 10 \log \left(\frac{1}{N_{t,eval,k}} \sum_{i=1}^{N_{t,eval,k}} \frac{|\mathbf{u}_i(\omega_n)|}{|\mathbf{u}_0|} \right) \quad (4.10)$$

berechnet. Um den Einfluss von Wellenreflexionen am oberen, unteren und rechten Rand zu minimieren, können, wie ebenfalls in der Abb. 4.10 durch die dunkelgrauen Pfeile angedeutet wird, an diesen Rändern Throw-off-Elemente verwendet werden. Für eine verkürzte Schreibweise werden die Throw-off-Elemente nachfolgend als TO-Elemente bezeichnet. Randknoten an denen TO-Elemente angefügt sind, werden bei der Berechnung der Wellentransmission nicht berücksichtigt, um unmittelbare Einflüsse der Knotenverschiebungen der TO-Elemente auf die Auswertung der Wellentransmission auszuschließen. Da die TO-Elemente eine Besonderheit der SEM nach DOYLE darstellen, wird der Einfluss der TO-Elemente auf die Berechnung der Wellentransmission im Folgenden näher untersucht.

Einfluss von Throw-off-Elementen auf die Transmissionsberechnung

In der Abb. 4.11 sind die komplexen Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1 sowie das zugehörige Transmissionsspektrum dargestellt. Analog zum Unterabschnitt 4.2.2 beschränken sich die nachfolgenden Untersuchungen auf die Theorie I. Ordnung (Stabkraft $S = 0$). Die Berechnung der Wellentransmission basiert auf dem System aus der Abb. 4.10 mit $N_{t,y} = 6$ Einheitszellen pro Spalte in der y -Richtung, $N_{t,x} = 14$ Einheitszellen pro Zeile in der x -Richtung und einer Breite des Auswertungsbereichs von $N_{t,eval} = 1$. Die vorgegebenen Verschiebungen am linken Rand des Systems betragen $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm. Die rote Linie im Transmissionsspektrum entspricht einer Berechnung ohne Verwendung von TO-Elementen und die blaue Linie entspricht einer Berechnung unter Verwendung von TO-Elementen. Es wird in beiden Fällen deutlich, dass die Wellentransmission innerhalb der drei Bandlücken auf -50 bis -80 dB stark abfällt und die Wellen in diesen Frequenz-

bereichen sehr stark gedämpft werden. In der zweiten Bandlücke, die den größten minimalen Imaginärteil der drei Bandlücken aufweist, ist die Wellentransmission entsprechend am geringsten und beträgt bei der Bandlückenmittenfrequenz $T(f_{BL2,Mf}) = -78,3$ dB. Beim Vergleich der ersten und der dritten Bandlücke zeigt sich, dass der einfache Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil des Wellenvektors und dem Rückgang der Wellentransmission, wie für den 1D Fall im Unterabschnitt 2.2.3 beobachtet wurde, nicht grundsätzlich auf den 2D Fall übertragen werden kann. Obwohl die kleinsten Imaginärteile bei der ersten und dritten Bandlücke fast übereinstimmen, weist die erste Bandlücke bei der Mittenfrequenz mit $T(f_{BL1,Mf}) = -51,4$ dB eine deutlich höhere Wellentransmission bei einer Berechnung mit TO-Elementen auf. Die Wellentransmission bei der Mittenfrequenz der dritten Bandlücke ist mit $T(f_{BL3,Mf}) = -65,7$ dB dagegen erheblich geringer. Die Ursachen für diese Differenzen können vielfältig sein, beispielsweise Einflüsse aus den Randbedingungen, aus der Geometrie des Systems, aus den unterschiedlichen BLOCH-Moden, aus dem Verhältnis der Wellenlängen der jeweiligen Frequenzen oder aus der Breite des Auswertebereichs.

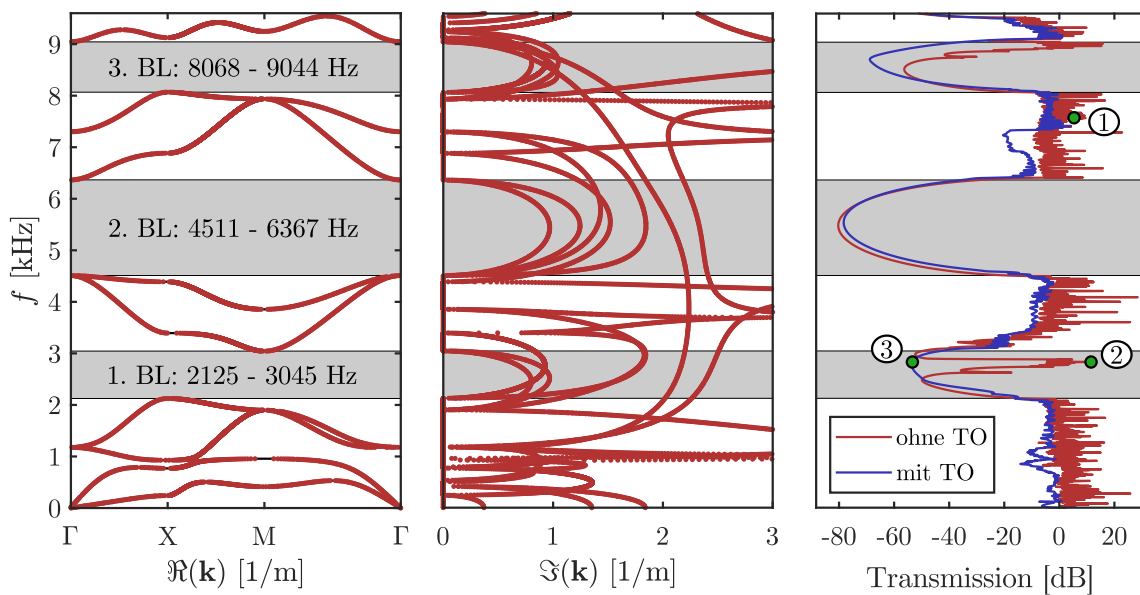


Abbildung 4.11: Komplexe Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1, sowie das zugehörige Transmissionsspektrum in der Γ -X-Richtung für $N_{t,x} = 14$ und $N_{t,y} = 6$. Die rote Linie im Transmissionsspektrum entspricht einer Berechnung ohne Verwendung von TO-Elementen und die blaue Linie entspricht einer Berechnung unter Verwendung von TO-Elementen.

Der Einfluss von TO-Elementen auf die Berechnung der Wellentransmission kann anhand von den Verschiebungsfeldern veranschaulicht werden. Im Transmissionsspektrum aus der Abb. 4.11 sind drei grüne Punkte markiert, wobei die Punkte ① und ② die Wellentransmissionen bei $f = 7575$ Hz sowie $f = 2830$ Hz für die Berechnung ohne Verwendung von

TO-Elementen kennzeichnen. Der Punkt ③ kennzeichnet ebenfalls die Wellentransmission bei $f = 2830$ Hz, allerdings für die Berechnung unter Verwendung von TO-Elementen. In der Abb. 4.12 ist das Verschiebungsfeld für den Punkt ①, der mit $f = 7575$ Hz außerhalb einer Bandlücke liegt, dargestellt. Es wird deutlich, dass sich die Wellen im System ausbreiten können ohne abzuklingen und eine hohe Wellentransmission auftritt.

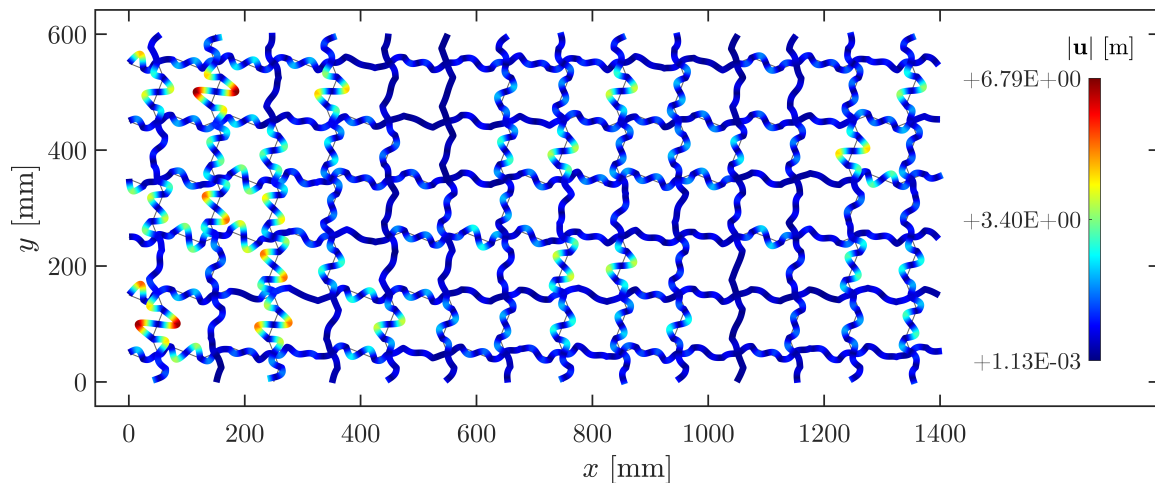


Abbildung 4.12: Verschiebungsfeld für den markierten Punkt ① aus der Transmissionsberechnung in der Abb. 4.11, bei $f = 7575$ Hz und ohne Verwendung von TO-Elementen.

Ein Vergleich der roten und blauen Linie in den Transmissionsspektren aus der Abb. 4.11 zeigt, dass der Einfluss von TO-Elementen auf die Wellentransmission für die meisten Frequenzen relativ groß ist. Da die TO-Elemente als Energieleiter aufgefasst werden können, die die Wellenenergie an den jeweiligen Rändern aus dem System leiten, fällt die Wellentransmission für fast alle Frequenzen erwartungsgemäß geringer aus im Vergleich zu der Berechnung ohne TO-Elemente. Dieser Einfluss kann verringert werden, indem die Abmessungen des Systems zur Berechnung der Wellentransmission erhöht werden. Insbesondere mit steigender Anzahl $N_{t,y}$ von Einheitszellen pro Spalte in der y -Richtung wird der Einfluss der TO-Elemente auf die Wellentransmission geringer. Lediglich in den Fällen, bei denen sich ohne die Verwendung von den TO-Elementen ein wesentlicher Teil der Wellen entlang der Ränder ausbreitet, ist der Unterschied der Wellentransmission im Vergleich zu der Berechnung mit TO-Elementen sehr groß. Die Ursache wird bei der Betrachtung der Verschiebungsfelder für die Punkte ② und ③ deutlich.

Der Punkt ② liegt bei $f = 2830$ Hz und somit innerhalb der ersten Bandlücke. Trotzdem weist die Berechnung ohne Verwendung von TO-Elementen eine außerordentlich hohe Wellentransmission bei dieser Frequenz auf. Aus dem zugehörigen Verschiebungsfeld, welches in der Abb. 4.13 dargestellt ist, wird deutlich, dass sich die Wellen nicht im System ausbreiten können. Allerdings erfolgt eine Ausbreitung der Wellen entlang der freien Ränder, welche als Oberflächenwellen (engl.: *surface* bzw. *edge waves*) bezeichnet

werden. Diese Oberflächenwellen können entstehen, da das System für die Berechnung der Wellentransmission, im Gegensatz zu einer Einheitszelle mit periodischen BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen, nicht unendlich ausgedehnt ist und somit auch innerhalb der Bandlücken Eigenfrequenzen aufweisen kann. Bei den zugehörigen Eigenmoden handelt es sich in der Regel um Randmoden (engl.: *surface* bzw. *edge modes*), also Eigenmoden bei denen eine Ausbreitung der Schwingungen lediglich an den Rändern des Systems

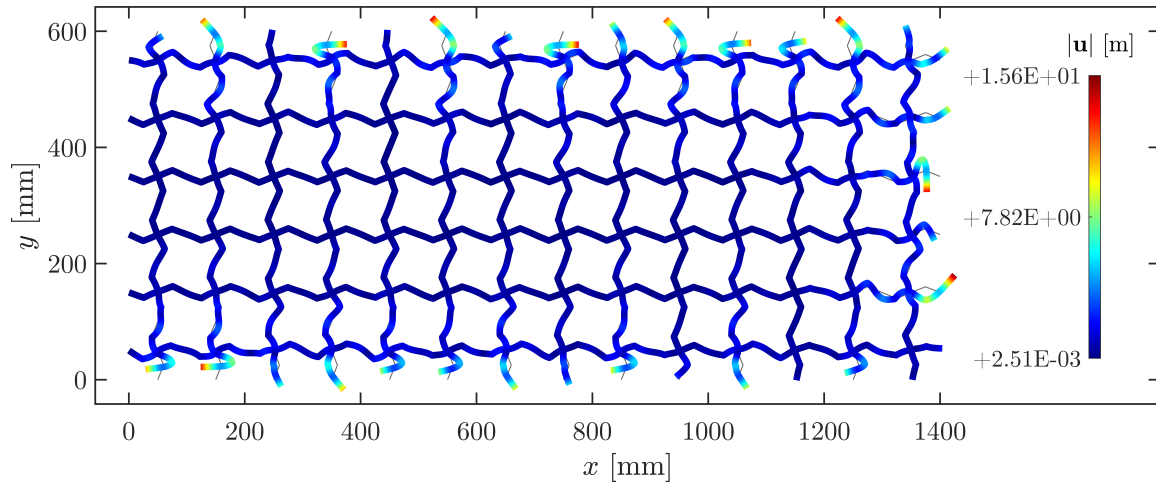


Abbildung 4.13: Verschiebungsfeld für den markierten Punkt ② aus der Transmissionsberechnung in der Abb. 4.11, bei $f = 2830$ Hz und ohne Verwendung von TO-Elementen.

erfolgt. Diese Oberflächenmoden sind durch die Einführung von fiktiven Rändern verursacht und kommen im betrachteten ursprünglichen System eigentlich gar nicht vor. Daraus resultieren auch am rechten Rand sehr hohe Wellenamplituden und in der Folge eine hohe Wellentransmission. Mithilfe der TO-Elemente kann eine Ausbreitung der Wellen entlang der freien Ränder unterbunden werden. In der Abb. 4.14 ist das Verschiebungsfeld für den

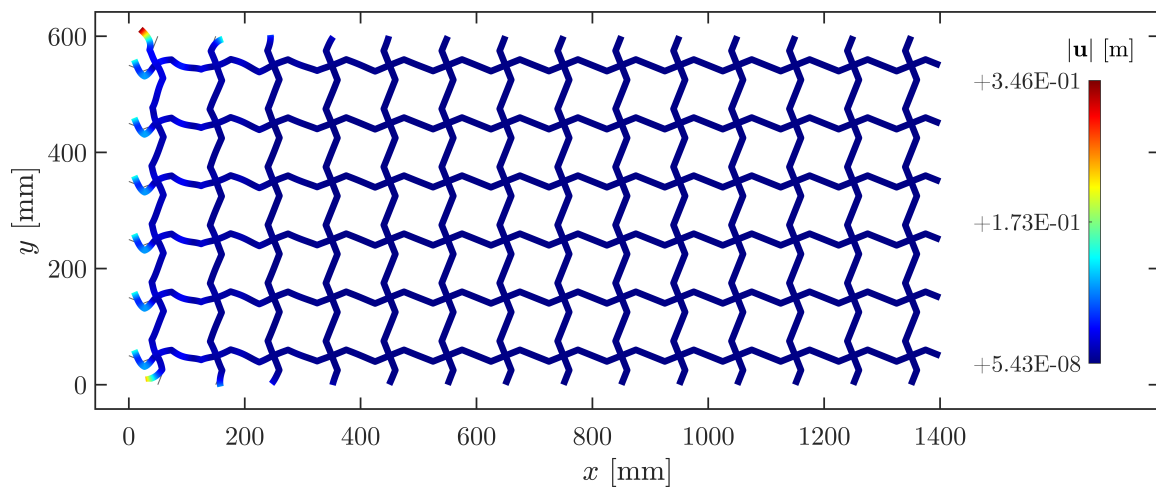


Abbildung 4.14: Verschiebungsfeld für den markierten Punkt ③ aus der Transmissionsberechnung in der Abb. 4.11, bei $f = 2830$ Hz und mit Verwendung von TO-Elementen.

Punkt ③, der einer Berechnung ebenfalls bei der Frequenz $f = 2830$ Hz aber mit TO-Elementen entspricht, dargestellt. Offensichtlich ist in diesem Fall die Ausbreitung der Wellen entlang der freien Ränder durch die TO-Elemente unterbunden und die Wellentransmission ist, wie in der Abb. 4.11 ersichtlich ist, entsprechend gering. Die TO-Elemente stellen somit eine gute Möglichkeit dar, den Einfluss von freien Rändern auf die Transmissionsberechnung zu minimieren. Dadurch wird die Entstehung von Oberflächenwellen vermieden, die in Wirklichkeit auch nicht existieren. Außerdem wird die Anzahl der Freiheitsgrade durch die Verwendung von TO-Elementen nicht erhöht und somit auch nicht die Berechnungsdauern negativ beeinflusst. Dieser Vorteil ist beispielsweise bei den in der Literatur häufig verwendeten PMLs nicht gegeben, durch die die Anzahl von Freiheitsgraden bei einer Transmissionsberechnung häufig erheblich steigt.

Effizienz der SEM nach DOYLE bei der Transmissionsberechnung

Nun werden für einen Effizienzvergleich zwischen der SEM nach DOYLE und der FEM bei der Berechnung der Wellentransmission der numerische Fehler für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden und die zugehörigen Berechnungszeiten ausgewertet. Dabei erfolgen die Berechnungen der Transmissionspektren jeweils anhand des Systems aus der Abb. 4.10 mit $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,x} = 14$. Zudem wird die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1 verwendet. In der Abb. 4.15 sind die ε_2 -Fehler von drei Transmissionsberechnungen mittels der FEM mit unterschiedlichen Anzahlen von Freiheitsgraden in Abhängigkeit der Frequenz f dargestellt. Die Berechnung der Wellentransmission erfolgt dabei mit 2400 diskreten Frequenzen mit einer Schrittweite von $\Delta f = 5$ Hz. Um eine ausreichend hohe Anzahl von Lösungswerten für die Auswertung des ε_2 -Fehlers zu gewährleisten, werden für jeden berechneten ε_2 -Fehler

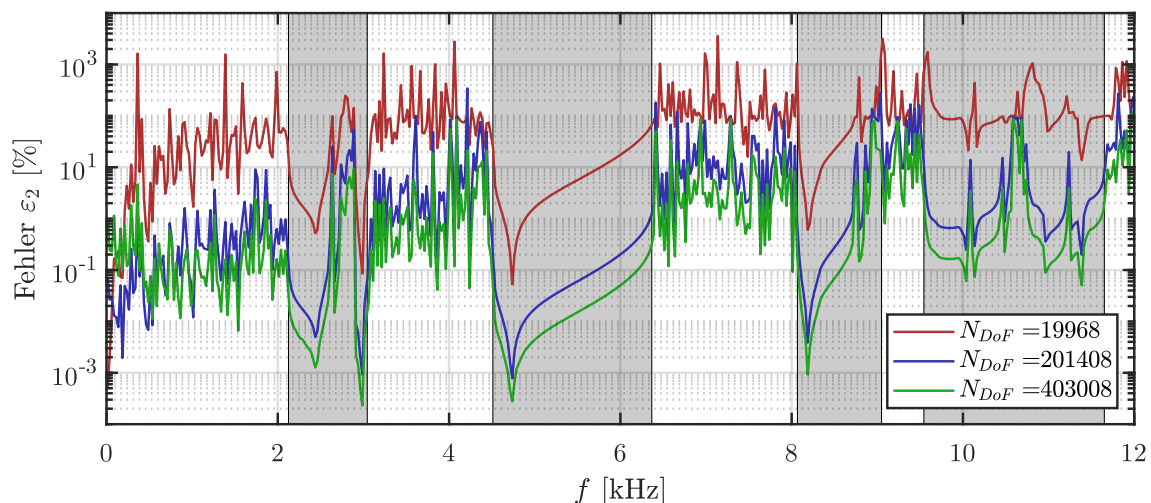


Abbildung 4.15: ε_2 -Fehler von drei Transmissionsberechnungen mittels der FEM für unterschiedliche Anzahlen von Freiheitsgraden in Abhängigkeit der Frequenz f . Die Bandlücken sind hellgrau markiert.

ler die ermittelten Wellentransmissionen von 10 diskreten Frequenzschritten herangezogen. Als Referenzlösung wird eine SEM-Berechnung ohne TO-Elemente verwendet, da bei der FEM keine TO-Elemente verwendet werden können und somit eine Vergleichbarkeit der Lösungen gewährleistet ist. Die Auswertung der Wellentransmission erfolgt sowohl bei der FEM als auch bei der SEM am rechten Rand anhand der gemittelten resultierenden Verschiebungen $|\mathbf{u}_i|$. Eine Auswertung der Wellentransmission in den letzten $N_{t,eval}$ Spalten auf der rechten Seite, wie in der Abb. 4.10 veranschaulicht, ist in diesem Fall nicht zweckmäßig, da sonst die Anzahl von Knoten für die Auswertung der Wellentransmission zwischen der FEM- und der SEM-Berechnung stark abweicht.

Die Abb. 4.15 zeigt, dass die ε_2 -Fehler der FEM-Berechnungen mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden kontinuierlich abnehmen. Dieses Verhalten ist ein Indikator für die Konvergenz der FEM-Berechnungen. Des Weiteren nimmt der ε_2 -Fehler, unabhängig von der Anzahl von Freiheitsgraden, mit steigender Frequenz zu. Innerhalb der Bandlücken, die in der Abb. 4.15 hellgrau markiert sind, sinkt der ε_2 -Fehler hingegen jeweils ab. Bei der Berechnung von Wellenausbreitungsproblemen verschlechtert sich die Kondition der dynamischen Steifigkeitsmatrix in der Nähe von Eigenfrequenzen des Systems und der numerische Fehler nimmt in der Regel deutlich zu. Der Rückgang des ε_2 -Fehler innerhalb der Bandlücken ist darauf zurückzuführen, dass das System innerhalb der Bandlücken nur die Randmoden und somit deutlich weniger Eigenfrequenzen aufweist. Auf die zuvor beschriebenen Randmoden sind die lokalen höheren ε_2 -Fehler innerhalb der Bandlücken zurückzuführen. Beispielsweise wird der Einfluss dieser Randmoden in der ersten Bandlücke auch im Transmissionsspektrum in der Abb. 4.11 sowie dem Verschiebungsfeld in der Abb. 4.13 deutlich.

In der Abb. 4.16a sind die durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler der Transmissionsberechnungen mittels der FEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden dargestellt. Der durch-

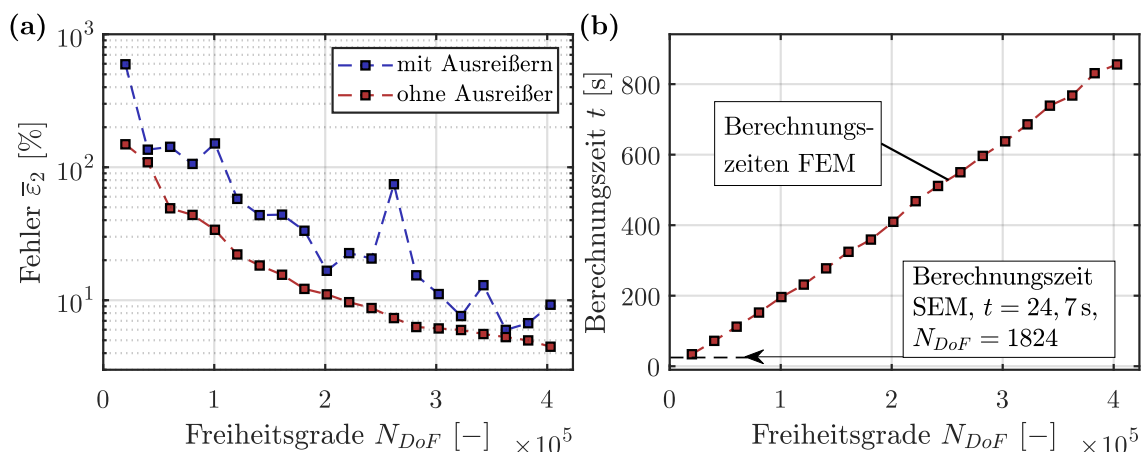


Abbildung 4.16: (a) Durchschnittlicher Fehler $\bar{\varepsilon}_2$ der Transmissionsberechnungen mittels der FEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. (b) Berechnungszeiten der FEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden, sowie Berechnungszeit der SEM.

schnittliche $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler stellt dabei das arithmetische Mittel der über alle Frequenzen der Berechnungen ermittelten lokalen ε_2 -Fehler dar. Die blaue Linie in der Abb. 4.16a zeigt den durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler in Abhängigkeit der Anzahl von Freiheitsgraden mit Berücksichtigung der sehr hohen lokalen Fehler infolge einer schlechten Kondition des Gleichungssystems bei einer Wellenausbreitung in der Nähe von Eigenfrequenzen. Dabei können die sehr hohen lokalen Fehler als Ausreißer bezeichnet werden. Werden die Ausreißer hingegen bei der Fehlerauswertung nicht berücksichtigt, ergibt sich die rote Linie in der Abb. 4.16a für den durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler. In diesem Fall nimmt der Fehler kontinuierlich mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden ab und die FEM-Lösung konvergiert asymptotisch zu der SEM-Referenzlösung. Allerdings ist der durchschnittliche Fehler selbst bei einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden vergleichsweise hoch und beträgt beispielsweise bei $N_{DoF} = 403008$ immer noch $\bar{\varepsilon}_2 = 4,47\%$.

In der Abb. 4.16b sind die zugehörigen Berechnungszeiten zur Ermittlung der Transmissionspektren bei der FEM mit unterschiedlichen Anzahlen von Freiheitsgraden, sowie die Berechnungszeit mittels der SEM für $N_{DoF} = 1824$ Freiheitsgrade dargestellt. Die Berechnungszeit bei der FEM nimmt in diesem Fall mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden fast linear zu und beträgt beispielsweise bei der Berechnung mit $N_{DoF} = 403008$ Freiheitsgraden $t = 855,9$ s. Die Berechnung des Transmissionsspektrums mittels der SEM nach DOYLE dauert hingegen nur $24,7$ s und gewährleistet gleichzeitig eine sehr hohe Genauigkeit. Im Vergleich zu einer FEM-Berechnung besitzt die SEM nach DOYLE bei der Berechnung der Wellentransmission somit erhebliche Vorteile, insbesondere eine sehr kurze Berechnungsdauer und gleichzeitig eine sehr hohe Genauigkeit.

Zusammenfassung der Vor- und Nachteile der SEM nach DOYLE

In der Tab. 4.2 sind die wesentlichen Vor- und Nachteile der SEM nach DOYLE im Vergleich zur FEM bei der Dispersions- und Transmissionsberechnung zusammengefasst.

Tabelle 4.2: Vor- und Nachteile der SEM nach DOYLE im Vergleich zur FEM bei der Dispersions- und Transmissionsberechnung.

	Dispersion				Transmission		
	reell		komplex		GE	RW	TO
	GE	RW	GE	RW			
SEM nach DOYLE	+	-	+	+	+	+	+
FEM	-	+	-	-	-	-	-
+ : Vorteilhaft, - : Nachteilhaft, GE: Genauigkeit, RW: Rechenaufwand TO: Verwendung von TO-Elementen möglich							

4.4 Beeinflussung der Wellenausbreitung in Zick-Zack-Gitterstrukturen

In diesem Abschnitt erfolgen umfangreiche Untersuchungen zur Beeinflussung der elastischen Wellenausbreitung in Zick-Zack-Gitterstrukturen. Zuerst wird die Beeinflussung durch die geometrischen Parameter analysiert, wobei zunächst die Auswirkungen aus einer Skalierung der geometrischen Dimensionen untersucht werden. Es wird aufgezeigt, dass über eine Skalierung der geometrischen Parameter die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zur Beeinflussung der elastischen Wellenausbreitung in Zick-Zack-Gitterstrukturen auf beliebige Frequenzbereiche übertragen werden können. Anschließend folgen die Analysen zur gezielten Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften durch die Steifigkeits- und Massenverhältnisse sowie die Einführung von diskreten Einzelmassen als lokale Resonatoren. Zuletzt werden die Auswirkungen der geometrischen Nichtlinearität auf die Entstehung von Bandlücken dargestellt und Möglichkeiten für eine aktive Steuerung der Bandlücken durch das Aufbringen von externen Kräften vorgestellt.

Die nachfolgenden Untersuchungen basieren auf der in der Abb. 4.17a dargestellten Einheitszelle mit den Gitterkonstanten l_1 in der x -Richtung und l_2 in der y -Richtung. Die Zick-Zack-Geometrie wird durch die Lage der Knicke mit b_1 und b_2 sowie der Auslenkung W beschrieben. Außerdem wird für die inneren Arme, wie in der Abb. 4.17b dargestellt, der quadratische Querschnitt Q1 mit den Kantenlängen a_1 , dem E-Modul E_1 und der Massendichte ρ_1 gewählt. Für die äußeren Arme wird hingegen der quadratische Querschnitt Q2 mit den Kantenlängen a_2 , dem E-Modul E_2 und der Massendichte ρ_2 verwendet. Die Untersuchungen beschränken sich zunächst auf den geometrisch linearen Fall ($S = 0$). Im Unterabschnitt 4.4.4 werden schließlich die Einflüsse der geometrischen Nichtlinearität ($S \neq 0$) auf das Wellenausbreitungsverhalten analysiert.

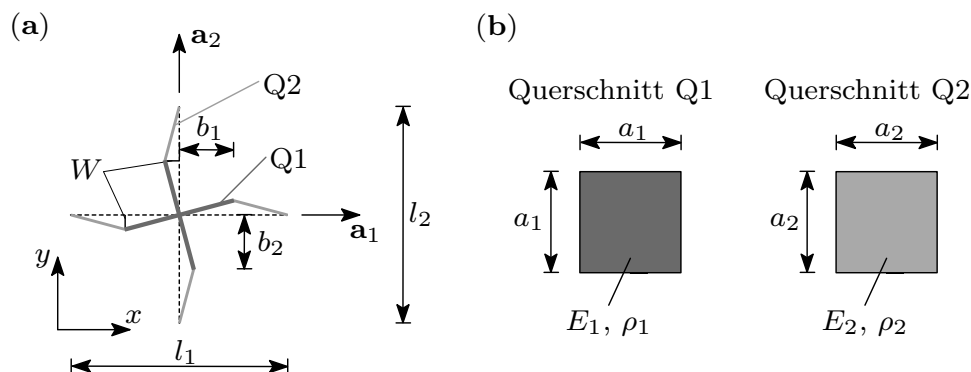


Abbildung 4.17: (a) Einheitszelle einer phononischen Zick-Zack-Gitterstruktur mit unterschiedlichen Querschnitten und Materialeigenschaften für die äußeren und inneren Arme. (b) Quadratische Querschnitte Q1 und Q2 mit den zugehörigen Abmessungen und Materialeigenschaften.

4.4.1 Beeinflussung durch die geometrischen Parameter

Für die Untersuchungen zur Beeinflussung der elastischen Wellenausbreitung durch eine Variation der geometrischen Parameter werden für die Einheitszelle aus der Abb. 4.17 die konstanten Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3 für alle Strukturelemente verwendet. Außerdem werden die geometrischen Parameter aus der Tab. 4.3 als Ausgangsparameter P_0 mit

$$P_0 \in [l_{1,0}, l_{2,0}, b_{1,0}, b_{2,0}, W_0, a_{1,0}, a_{2,0}, S_0] \quad (4.11)$$

für die nachfolgenden Untersuchungen verwendet. Da zunächst keine Änderungen der Steifigkeiten innerhalb der Einheitszelle berücksichtigt werden, besitzen alle Strukturelemente die gleichen quadratischen Abmessungen mit den Kantenlängen $a_{1,0} = a_{2,0}$. Außerdem beschränken sich die Untersuchungen zunächst auf den geometrisch linearen Fall ($S_0 = 0$).

Tabelle 4.3: Ausgangsparameter für die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften der Einheitszelle aus der Abb. 4.17.

$l_{1,0}$	$l_{2,0}$	$b_{1,0}$	$b_{2,0}$	W_0	$a_{1,0} = a_{2,0}$	$E_1 = E_2$	$\rho_1 = \rho_2$	S_0
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[MPa]	[kg/m ³]	[N]
100	100	25	25	10	2	70000	2700	0

Einflüsse einer Skalierung der geometrischen Dimensionen

Die Zusammenhänge zwischen einer Skalierung der geometrischen Parameter und einer damit verbundenen Änderung der Bandlückenrandfrequenzen sind von großer Bedeutung. Sind diese Zusammenhänge bekannt, können die Bandlückenrandfrequenzen und die Bandlückenbreiten einer Einheitszelle bei gegebenen Abmessungen optimiert werden und anschließend durch eine Skalierung der geometrischen Parameter auf nahezu beliebige Frequenzbereiche übertragen werden. Nachfolgend werden die Änderungen der geometrischen Parameter P durch den Skalierungsfaktor α_{geo} über $P = \alpha_{geo}P_0$ beschrieben. Dabei beschränken sich die Untersuchungen auf quadratische Einheitszellen mit der Gitterkonstante $l = l_1 = l_2$ bzw. $l_0 = l_{1,0} = l_{2,0}$. Beispielweise ergibt sich für $l = \alpha_{geo}l_0$ mit $\alpha_{geo} = 10$ eine skalierte Gitterkonstante von $l = 1000$ mm.

In der Abb. 4.18a ist der Einfluss des Skalierungsfaktors α_{geo} bei einer Skalierung der Gitterkonstante $l = \alpha_{geo}l_0$ und der Auslenkung $W = \alpha_{geo}W_0$ auf die Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken dargestellt. Die übrigen Geometrie-, Querschnitts-, und Materialeigenschaften sind konstant und entsprechen den Ausgangswerten aus der Tab. 4.3. Es wird deutlich, dass die Randfrequenzen für alle drei Bandlücken überproportional schnell mit steigendem Skalierungsfaktor abfallen und sich asymptotisch der Nullfrequenz nähern. Zudem nehmen die Bandlückenbreiten mit steigendem Skalierungsfaktor

ab. Während beispielsweise die Breite der ersten Bandlücke bei $\alpha_{geo} = 1$ noch $\Delta f_{B,1} = 919,4$ Hz beträgt, fällt die Breite für $\alpha_{geo} = 9$ auf $\Delta f_{B,1} = 11,4$ Hz ab. Aus der BRAGG-Gleichung (2.36) folgt, dass im Allgemeinen ein reziproker Zusammenhang zwischen der BRAGG-Frequenz und der Gitterkonstante besteht. Aus diesem Grund sind in der Abb. 4.18b die reziproken Bandlückenrandfrequenzen gegen den Skalierungsfaktor α_{geo} aufgetragen. Offensichtlich besteht bei einer gleichzeitigen Skalierung der Gitterkonstante l und der Auslenkung W kein reziproker Zusammenhang zwischen dem Skalierungsfaktor und den Bandlückenrandfrequenzen. Aus den exponentiellen Steigerungen der reziproken Bandlückenrandfrequenzen lässt sich schließen, dass die Bandlückenrandfrequenzen mit zunehmendem Skalierungsfaktor, und damit auch mit zunehmender Gitterkonstante l , schneller abfallen als es nach der BRAGG-Gleichung der Fall ist.

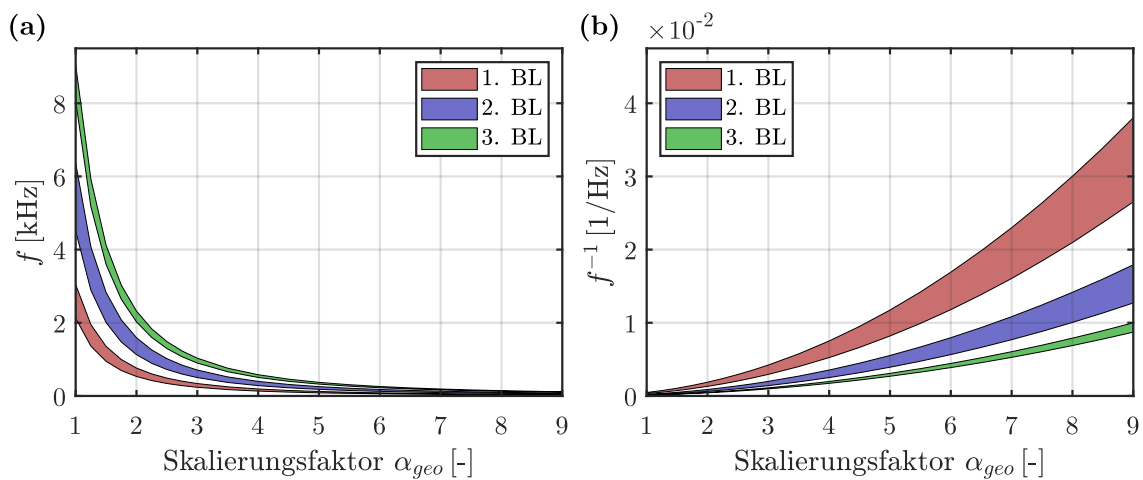


Abbildung 4.18: (a) Einfluss des Skalierungsfaktors α_{geo} auf die Bandlückenrandfrequenzen bei einer Skalierung von $l = \alpha_{geo}l_0$ und $W = \alpha_{geo}W_0$. (b) Einfluss des Skalierungsfaktors α_{geo} auf die reziproken Bandlückenrandfrequenzen.

In der Abb. 4.19a ist der Einfluss des Skalierungsfaktors α_{geo} bei einer Skalierung der Gitterkonstante $l = \alpha_{geo}l_0$, der Auslenkung $W = \alpha_{geo}W_0$ und der Querschnittsabmessung $a = \alpha_{geo}a_0$ auf die Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken dargestellt. Die übrigen Geometrie-, Querschnitts-, und Materialeigenschaften sind auch in diesem Fall konstant und entsprechen den Ausgangswerten aus der Tab. 4.3. Durch die zusätzliche Skalierung des Querschnitts mit $a = \alpha_{geo}a_0$ nehmen in diesem Fall auch die Steifigkeiten der Zick-Zack-Arme mit steigendem Skalierungsfaktor zu. Die Abb. 4.19a zeigt, dass die Bandlückenrandfrequenzen im Vergleich zu der Abb. 4.18a weniger schnell mit steigendem Skalierungsfaktor abfallen. Auch die Bandlückenbreiten nehmen im Vergleich zu der Abb. 4.18a mit steigendem Skalierungsfaktor weniger stark ab. Beispielsweise beträgt die Breite der ersten Bandlücke bei $\alpha_{geo} = 9$ noch $\Delta f_{B,1} = 102,2$ Hz. Die geringer ausgeprägte Abnahme der Bandlückenrandfrequenzen mit steigendem Skalierungsfaktor zeigt

sich auch bei dem in der Abb. 4.19b dargestellten Zusammenhang zwischen den reziproken Bandlückenrandfrequenzen und dem Skalierungsfaktors α_{geo} . In Übereinstimmung mit der BRAGG-Gleichung ergibt sich in diesem Fall ein linearer Zusammenhang zwischen den reziproken Bandlückenfrequenzen und dem Skalierungsfaktor α_{geo} .

Bei phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen können somit vorgegebene Anforderungen an die Frequenzbereiche der Bandlücken erfüllt werden, indem eine geeignete Einheitszelle durch eine Skalierung von bekannten Einheitszellen ermittelt wird. Der dazu erforderliche Skalierungsfaktor kann über die BRAGG-Gleichung abgeschätzt werden, wobei anschließend alle geometrischen Parameter sowie die Querschnittsabmessungen mit diesem Faktor skaliert werden müssen. Außerdem können die Ergebnisse der folgenden Parameterstudien, die anhand von ausgewählten geometrischen Parametern erfolgen, mithilfe der BRAGG-Gleichung durch eine geeignete Skalierung der geometrischen Parameter auf nahezu beliebige Frequenzbereiche übertragen werden.

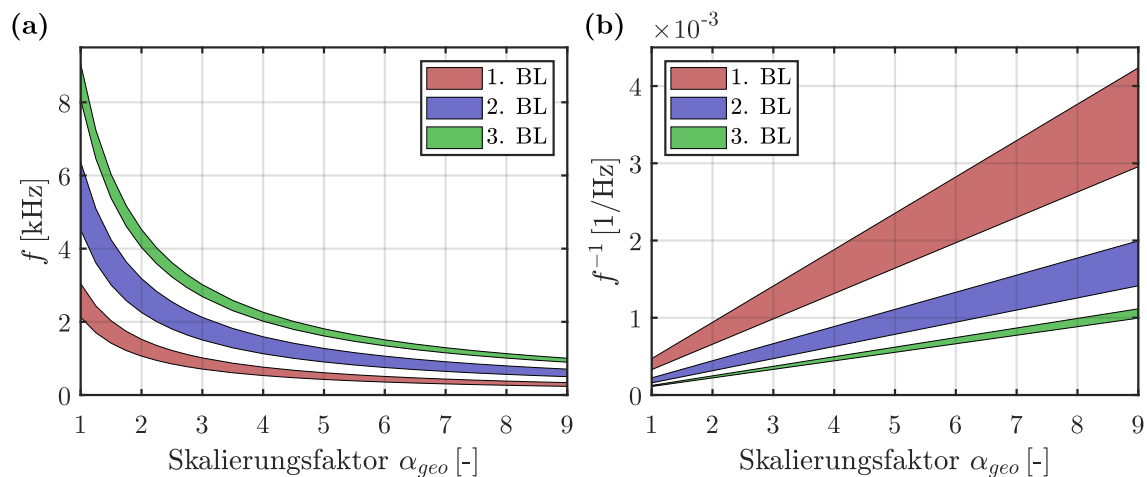


Abbildung 4.19: (a) Einfluss des Skalierungsfaktors α_{geo} auf die Bandlückenrandfrequenzen bei einer Skalierung von $l = \alpha_{geo}l_0$, $W = \alpha_{geo}W_0$ und $a = \alpha_{geo}a_0$. (b) Einfluss des Skalierungsfaktors α_{geo} auf die reziproken Bandlückenrandfrequenzen.

Abschließend sei angemerkt, dass eine Skalierung der geometrischen Parameter keinen nennenswerten Einfluss auf die Imaginärteile der Wellenvektoren bei einer Berechnung der komplexen Dispersionskurven hat. Beispielsweise variieren die kleinsten Imaginärteile bei der Mittenfrequenz der ersten Bandlücke für die unterschiedlichen Skalierungsfaktoren nur zwischen 0,16993 und 1,7030.

Einflüsse der Auslenkung W

Ein wesentlicher Parameter zur Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften in Zick-Zack-Gitterstrukturen ist die Auslenkung W der Zick-Zack-Arme [101–103]. In der Abb. 4.20 ist der Einfluss der Auslenkung W auf die Randfrequenzen der ersten vier

Bandlücken dargestellt, wobei W zwischen $W = 0$ mm und $W = 50$ mm variiert wird. Andere Werte von $W > 50$ mm sind bei der gewählten Einheitszelle nicht möglich, da die Auslenkung der Zick-Zack-Arme sonst die Abmessungen der Einheitszelle überschreiten würde. Es zeigt sich, dass die Gitterstruktur ohne eine Auslenkung der Zick-Zack-Arme, also mit $W = 0$ mm, keine Bandlücken aufweist. Ab einer Auslenkung von $W = 1,5$ mm öffnet sich die erste Bandlücke, die zunächst nur eine geringe Breite von $\Delta f_{BL1} = 131,9$ Hz besitzt. Bis zu einer Auslenkung von $W = 4,0$ mm nimmt die Breite der ersten Bandlücke mit steigender Auslenkung zu und weist bei $W = 4,0$ mm die maximale Breite von $\Delta f_{BL1} = 1003,7$ Hz auf. Ab $W = 4,0$ mm nimmt die Breite der Bandlücke mit steigender Auslenkung W wieder kontinuierlich ab. Auch die Bandlückenmittenfrequenzen fallen mit zunehmender Auslenkung ab. Die maximale Bandlückenmittenfrequenz $f_{BL1,Mf} = 3544,4$ Hz ergibt sich bei $W = 2,0$ mm und fällt bis $W = 50,0$ mm kontinuierlich auf $f_{BL1,Mf} = 526,0$ Hz ab. Bei der zweiten bis vierten Bandlücke sind ähnliche Zusammenhänge zwischen der Auslenkung W und der Entwicklung der Bandlücken zu beobachten. In allen Fällen nehmen die Bandlückenmittenfrequenzen mit steigender Auslenkung W kontinuierlich ab. Außerdem sind die Bandlückenbreiten jeweils zu Beginn sehr schmal und nehmen mit steigender Auslenkung zunächst schnell zu. Ab einem gewissen Wert der Auslenkung nehmen die Bandlückenbreiten, wie bereits für die erste Bandlücke erläutert, wieder ab. Im Gegensatz zur ersten, dritten und vierten Bandlücke tritt die maximale Bandlückenbreite bei der zweiten Bandlücke erst bei einer vergleichsweise hohen Auslenkung von $W = 14,0$ mm auf. Weiterhin ist auffällig, dass sich die vierte Bandlücke bei einer kleineren Auslenkung als die dritte Bandlücke öffnet und somit für $W = 6,0 - 8,0$ mm die dritte Bandlücke wird.

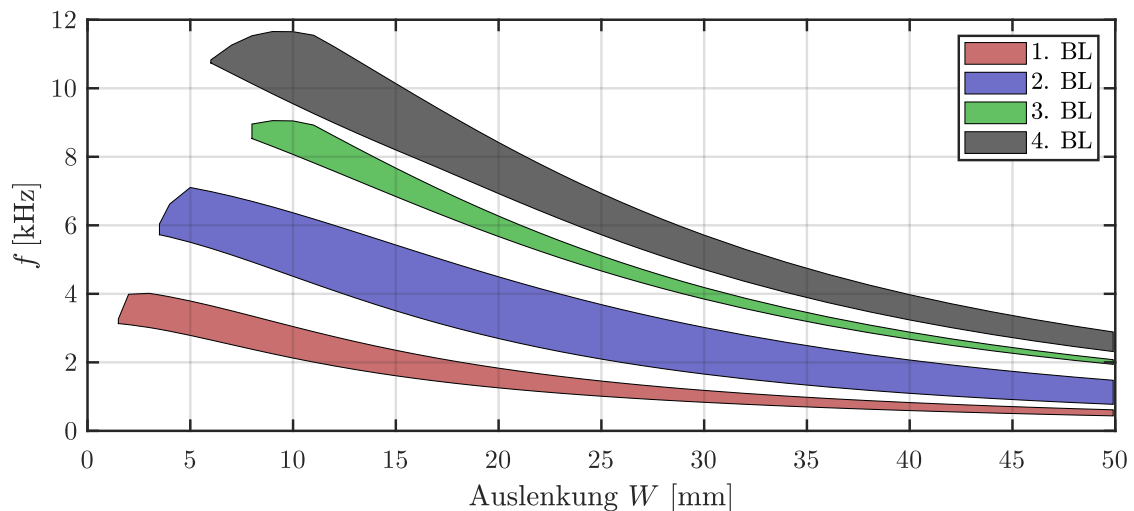


Abbildung 4.20: Einfluss der Auslenkung W auf die Bandlückenrandfrequenzen der ersten vier Bandlücken. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3.

Insgesamt zeigt sich, dass über eine Steuerung der Auslenkung W die Bandlücken einer Zick-Zack-Gitterstruktur über einen großen Frequenzbereich an vorgegebene Anforderungen angepasst werden können. Beispielsweise können über eine Variation der Auslenkung W die Bandlückenmittenfrequenz der vierten Bandlücke zwischen $f_{BL4,Mf} = 2600,6$ Hz und $f_{BL4,Mf} = 10847$ Hz variiert werden.

Eine Variation der Auslenkung W hat neben den Einflüssen auf die Bandlückenrandfrequenzen auch Einflüsse auf die imaginären Bänder der komplexen Dispersionskurven sowie die Transmissioneigenschaften der jeweiligen Zick-Zack-Gitterstruktur. In der Abb. 4.21a sind die kleinsten Imaginärteile der komplexen Dispersionskurven bei den Bandlückenmittenfrequenzen der ersten vier Bandlücken in Abhängigkeit der Auslenkung W dargestellt. Auffällig ist hierbei, dass analog zu den Bandlückenbreiten in der Abb. 4.20 auch die kleinsten Imaginärteile bei den Bandlückenmittenfrequenzen nach der Öffnung der jeweiligen Bandlücke mit steigender Auslenkung W sehr schnell anwachsen. Ab einem gewissen Wert der Auslenkung, beispielsweise bei der ersten Bandlücke bei $W = 4,0$ mm, nimmt die Steigung dann wieder ab, wobei dieser Effekt bei den vier Bandlücken sehr unterschiedlich ausgeprägt ist. Während bei der ersten und dritten Bandlücke die Imaginärteile sogar wieder abfallen und jeweils ein deutlicher Knick in den Verläufen zu erkennen ist, nimmt die Steigung bei der zweiten und vierten Bandlücke langsamer und stetig ab.

In der Abb. 4.21b sind die zugehörigen Wellentransmissionen bei den Bandlückenmittenfrequenzen aus einer Transmissionsberechnung mit $N_{t,x} = 14$ Einheitszellen in der x -Richtung, $N_{t,y} = 6$ Einheitszellen in der y -Richtung und einer Breite des Auswertungsbereichs von $N_{t,eval} = 4$ Einheitszellen in Abhängigkeit der Auslenkung W dargestellt. Es wird deutlich, dass die qualitativen Verläufe der kleinsten Imaginärteile der komplexen Dispersionskurven aus der Abb. 4.21a sehr gut mit den zugehörigen Wellentransmissionen

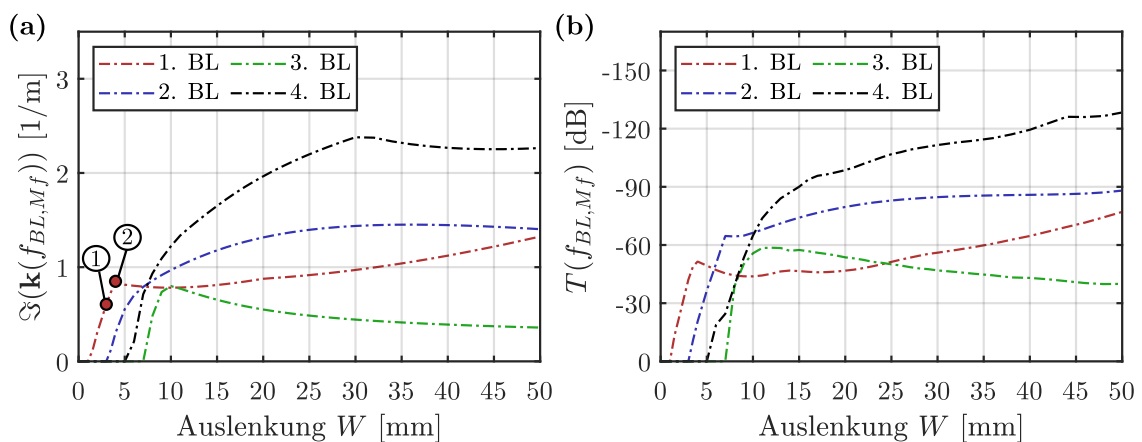


Abbildung 4.21: (a) Einfluss der Auslenkung W auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}(f_{BL,Mf}))$ des Wellenvektors \mathbf{k} bei den Bandlückenmittenfrequenzen $f_{BL,Mf}$. (b) Zugehörige Wellentransmissionen $T(f_{BL,Mf})$ aus einer Transmissionsberechnung mit $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$.

aus der Abb. 4.21b übereinstimmen. Beispielsweise zeigt sich im Allgemeinen, dass die Wellentransmission in den Bandlücken desto geringer ausfällt, je größer der kleinste Imaginärteil ist. Bei der ersten und der dritten Bandlücke wird allerdings deutlich, dass die Wellentransmissionen in der dritten Bandlücke bei einem vergleichbaren kleinsten Imaginärteil geringer ausfallen wie in der ersten Bandlücke. Dies liegt daran, dass jedes Band für eine bestimmte Frequenz auch eine bestimmte BLOCH-Mode und Wellenlänge besitzt und somit anhand des kleinsten Imaginärteils kein Vergleich des Abklingverhaltens der Wellen von unterschiedlichen Bändern und Frequenzen möglich ist. Mithilfe des kleinsten Imaginärteils kann folglich nur das Abklingverhalten für eine festgelegte BLOCH-Mode analysiert werden. Außerdem hängt die Transmissionsberechnung, wie in Abschnitt 4.3 erläutert, von vielen Faktoren ab, die sich je nach Frequenzbereich und Wellenlänge unterschiedlich auswirken können und ist daher häufig ungenau.

Besonders auffällig, wie bereits zuvor angemerkt, sind die ausgeprägten Knicke bzw. Unstetigkeiten in den Verläufen der kleinsten Imaginärteile der Wellenvektoren sowie der Wellentransmissionen bei der ersten und dritten Bandlücke. Die Ursachen für diese Unstetigkeiten liegen in der Änderung des maßgebenden imaginären Bandes innerhalb der Bandlücken. Zur Veranschaulichung sind in der Abb. 4.21a die kleinsten Imaginärteile bei der Bandlückenmittenfrequenz der ersten Bandlücke mit dem Punkt ① bei $W = 3$ mm bzw. mit dem Punkt ② bei $W = 4$ mm gekennzeichnet. In der Abb. 4.22 sind die zum Punkt ① zugehörigen komplexen Dispersionskurven sowie das Transmissionsspektrum für $W = 3$ mm dargestellt. Dabei ist das für den kleinsten Imaginärteil bei der Band-

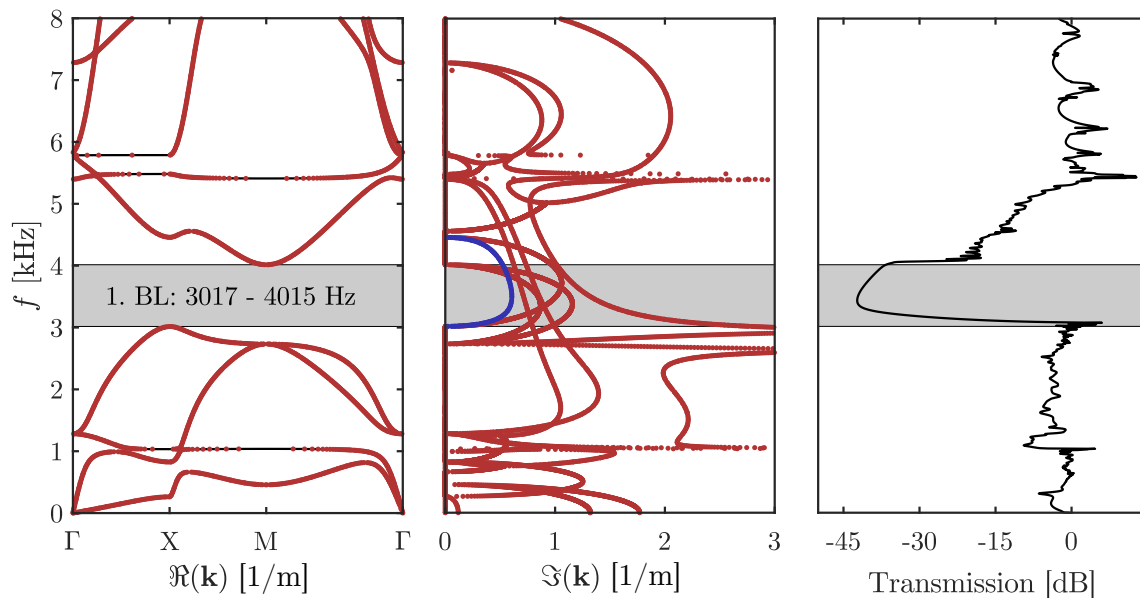


Abbildung 4.22: Komplexe Dispersionskurven für den Punkt ① aus der Abb. 4.21 mit $W = 3$ mm, sowie das zugehörige Transmissionsspektrum in der Γ -X-Richtung für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$. Das blaue Band bei den Imaginärteilen der komplexen Dispersionskurven ist maßgebend für den kleinsten Imaginärteil bei der Bandlückenmittenfrequenz.

lückenmittenfrequenz maßgebende imaginäre Band des Wellenvektors, welches in diesem Fall die reellen Bänder 4 und 5 an der Stelle X verbindet, in blau dargestellt. Mit zunehmender Auslenkung W verschieben sich die imaginären Bänder und ein anderes Band kann für den kleinsten Imaginärteil des Wellenvektors innerhalb der Bandlücken maßgebend werden. Beispielsweise wird in der ersten Bandlücke ab $W = 4$ mm das imaginäre Band, welches die reellen Bänder 4 und 5 im Punkt M verbindet, für den kleinsten Imaginärteil bei der Bandlückenmittenfrequenz maßgebend. Zur Veranschaulichung sind in der Abb. 4.23 die zum Punkt ② zugehörigen komplexen Dispersionskurven und das Transmissionspektrum für $W = 4$ mm dargestellt, wobei das maßgebende Band für den kleinsten Imaginärteil bei der Mittenfrequenz der ersten Bandlücke blau hervorgehoben ist. Bei einem Vergleich der maßgebenden Bänder aus den Abbn. 4.22 und 4.23 wird deutlich, dass die Bänder unterschiedliche Formen aufweisen. Während das maßgebende (blaue) Band in der Abb. 4.22 einen flachen Verlauf aufweist, läuft das maßgebende (blaue) Band in der Abb. 4.23 vergleichsweise spitz zu. Diese unterschiedlichen Formen zeigen sich auch bei den Transmissionspektren, so ist der Verlauf der Wellentransmission in der ersten Bandlücke in der Abb. 4.22 ebenfalls flach und der Verlauf der Wellentransmission in der Abb. 4.23 spitz.

Die Änderung des maßgebenden Bandes für den kleinsten Imaginärteil in den Bandlücken ist im Allgemeinen auch mit einer anderen Ausbreitungsrichtung der elastischen Wellen verbunden. Im vorliegenden Beispiel ist das maßgebende Band für $W = 3$ mm mit einer Ausbreitung der elastischen Wellen in der x - und y -Richtung (Stelle M) und das maßge-

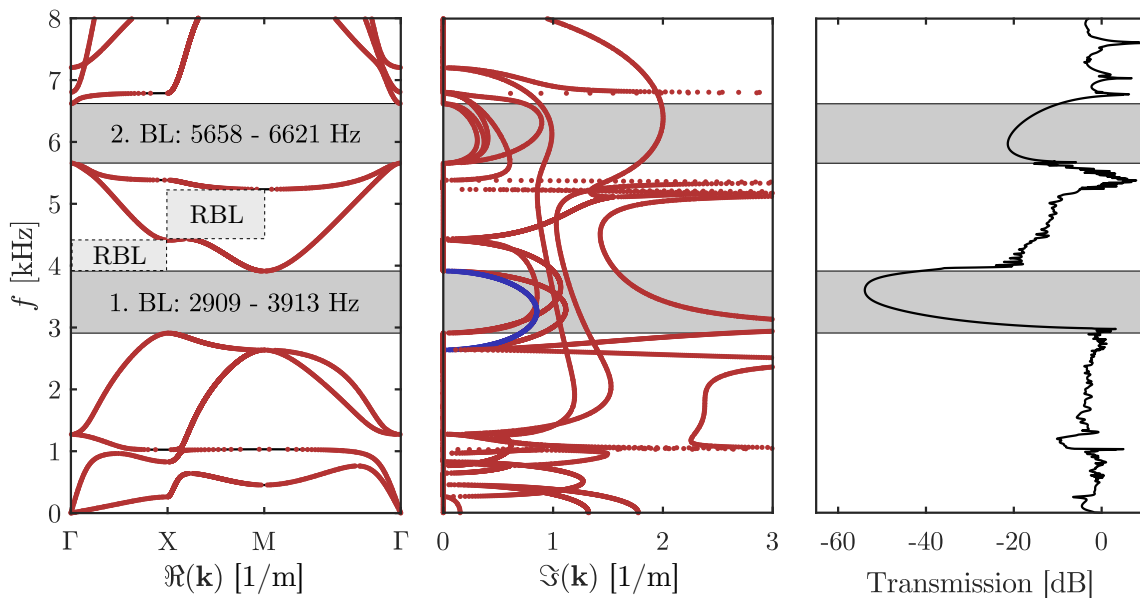


Abbildung 4.23: Komplexe Dispersionskurven für den Punkt ② aus der Abb. 4.21 mit $W = 4$ mm, sowie das zugehörige Transmissionspektrum in der Γ -X-Richtung für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$. Das blaue Band bei den Imaginärteilen der komplexen Dispersionskurven ist maßgebend für den kleinsten Imaginärteil bei der Bandlückenmittenfrequenz.

bende Band für $W = 4 \text{ mm}$ mit einer Ausbreitung der elastischen Wellen in der x -Richtung (Stelle X) assoziiert. Infolge dieser Änderungen können Diskrepanzen zwischen den Verläufen des kleinsten Imaginärteils des Wellenvektors und den Wellentransmissionen auftreten. Dies wird beispielsweise bei den Verläufen der vierten Bandlücke in den Abbn. 4.21a und 4.21b deutlich. Während der Verlauf des kleinsten Imaginärteils bei $W = 31 \text{ mm}$ einen Knick aufweist, ist ein derartiger Knick im Verlauf der Wellentransmission nicht zu beobachten. Diese Abweichungen sind durch das System zur Berechnung der Wellentransmission bedingt, mit dem nicht alle möglichen Ausbreitungsrichtungen aus der Dispersionsrelation berücksichtigt werden können.

Abschließend sei der Vollständigkeit halber angemerkt, dass die geringen Wellentransmissionen im Bereich von etwa $4000 - 5300 \text{ Hz}$ in den Abbn. 4.22 und 4.23 auf richtungsabhängige Bandlücken (RBL) zurückzuführen sind. In der Abb. 4.23 sind die richtungsabhängigen Bandlücken zur Veranschaulichung hellgrau markiert. Die RBLs entstehen insbesondere bei Systemen mit unterschiedlichen Gitterkonstanten in den x - und y -Richtungen und werden bei den folgenden Untersuchungen zu den Einflüssen aus dem Verhältnis der Gitterkonstanten näher betrachtet.

Einflüsse aus dem Verhältnis der Gitterkonstanten l_1 und l_2

Bei unterschiedlichen Gitterkonstanten l_1 in der x -Richtung und l_2 in der y -Richtung, wie in der Abb. 4.24a veranschaulicht, wird die Rotationssymmetrie der Einheitszelle gebrochen. Aus diesem Grund kann die erste IBZ nicht auf den dreieckförmigen irreduziblen Teil Ψ , wie in der Abb. 4.5b dargestellt, reduziert werden. Stattdessen müssen zusätzlich die Ränder Γ -Y und Y-M untersucht werden und es ergibt sich die in der Abb. 4.24b dargestellte erste IBZ. Analog zu den Rändern Γ -X und X-M muss auch für die Ränder Γ -Y und Y-M jeweils eine quadratische Eigenwertgleichung nach Gl. (4.7) zur Bestimmung der komplexen Dispersionskurven gelöst werden. Dabei gilt für die Ausbreitungskonstanten in der Γ -Y-Richtung $\lambda_x = 1$ und in der Y-M-Richtung $\lambda_y = \exp(i\pi)$. Die zugehörigen Koeffizientenmatrizen \mathbf{S}_3 und \mathbf{S}_4 können dem Anhang D entnommen werden.

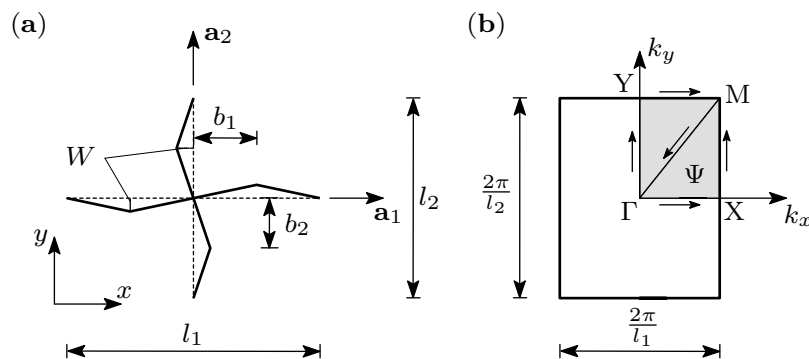


Abbildung 4.24: (a) Einheitszelle eines rechteckigen phononischen Zick-Zack-Gitters. (b) Zugehörige erste IBZ Ψ .

Die Untersuchungen zum Einfluss aus dem Verhältnis der Gitterkonstanten basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.24a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialdaten aus der Tab. 4.3, wobei die Gitterkonstante in der y -Richtung $l_2 = 100$ mm konstant ist und lediglich die Gitterkonstante l_1 variiert wird. In der Abb. 4.25 sind die Bandlückenrandfrequenzen aller Bandlücken, die innerhalb der ersten 10 Bänder auftreten, in Abhängigkeit von dem Verhältnis l_1/l_2 der Gitterkonstanten dargestellt. Dabei sind die Bandlücken, die den ersten vier Bandlücken bei $l_1/l_2 = 1$ entsprechen, hervorgehoben. Bei diesen vier Bandlücken zeigt sich, dass sich die Bandlücken mit abnehmendem Verhältnis $l_1/l_2 < 1$ in einen höheren Frequenzbereich verschieben. Hingegen nehmen die unteren Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken mit steigendem Verhältnis $l_1/l_2 > 1$ nur leicht ab und bleiben nahezu konstant. Lediglich bei der vierten Bandlücke sinkt die untere Bandlückenrandfrequenz für $l_1/l_2 > 1$ deutlich ab. Außerdem weisen die ersten drei Bandlücken bei $l_1/l_2 = 1$ die maximale Breite auf, wohingegen die maximale Breite der vierten Bandlücke bei $l_1/l_2 = 0,95$ auftritt. Mit zunehmendem bzw. abnehmendem Verhältnis l_1/l_2 nehmen die Bandlückenbreiten bei allen vier Bandlücken schnell ab und die Bandlücken schließen sich letztlich vollständig. Für $l_1/l_2 < 0,85$ sowie $l_1/l_2 > 1,15$ entstehen neue Bandlücken, die in der Abb. 4.25 hellgrau dargestellt sind, welche durch andere Bänder begrenzt und mit anderen Wellenausbreitungsrichtungen verbunden sind als die ersten vier Bandlücken bei $l_1/l_2 = 1$. Dabei sind die Bandlücken für $l_1/l_2 > 1,15$ sehr schmal und kompakt im niedrigeren Frequenzbereich, wohingegen die Bandlücken für $l_1/l_2 < 0,85$ breiter sind und weiter auseinander liegen. Allerdings zeigt sich, dass weder für $l_1/l_2 < 0,85$ noch für $l_1/l_2 > 1,15$ Bandlücken in einem nennenswert niedrigeren Frequenzbereich als der Frequenzbereich der ersten Bandlücke bei $l_1/l_2 = 1$ erzielt werden

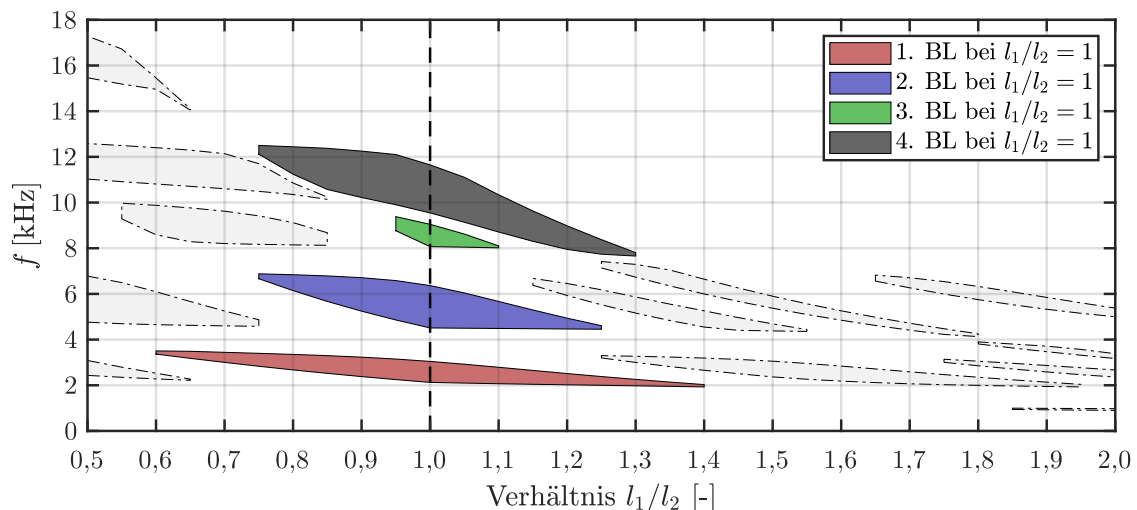


Abbildung 4.25: Einfluss aus dem Verhältnis der Gitterkonstanten l_1/l_2 auf die Bandlückenrandfrequenzen innerhalb der ersten 10 Bänder. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3.

können. Die einzige Ausnahme stellt die erste Bandlücke für $l_1/l_2 > 1,85$ dar, die eine niedrigste untere Bandlückenrandfrequenz von 900 Hz bei $l_1/l_2 = 2$ aufweist. Allerdings ist diese Bandlücke mit einer Breite von $\Delta f_{BL1} = 76$ Hz sehr schmal. Mit einer vergleichbaren quadratischen Einheitszelle mit $l_1 = l_2 = 200$ mm kann eine erste Bandlücke in einem Frequenzbereich von 698 – 948 Hz erzielt werden, die damit sowohl in einem niedrigeren Frequenzbereich liegt als auch mit $\Delta f_{BL1} = 250$ Hz deutlich breiter ist. Zusammenfassend können also durch die Verwendung unterschiedlicher Gitterkonstanten in den x - und y -Richtungen keine Verbesserungen hinsichtlich breiter kompletter Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden.

Außerdem zeigt sich, dass auch das Dämpfungsverhalten innerhalb der Bandlücken durch die Verwendung unterschiedlicher Gitterkonstanten nicht nennenswert verbessert werden kann. Dies wird in den Abbn. 4.26a und 4.26b deutlich, in denen die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors bei den Bandlückenmittenfrequenzen, die den ersten vier Bandlücken bei $l_1/l_2 = 1$ entsprechen, sowie die zugehörigen Wellentransmissionen in Abhängigkeit vom Verhältnis der Gitterkonstanten l_1/l_2 dargestellt sind.

Aus der Abb. 4.26a kann entnommen werden, dass die maximalen Imaginärteile bei der zweiten und dritten Bandlücke bei $l_1/l_2 = 1$ auftreten und die Imaginärteile für $l_1/l_2 > 1$ bzw. $l_1/l_2 < 1$ schnell abfallen. Bei der ersten und vierten Bandlücke treten die maximalen Imaginärteile hingegen bei $l_1/l_2 = 1,15$ bzw. $l_1/l_2 = 1,05$ auf, allerdings sind sie nur geringfügig größer gegenüber den Imaginärteilen bei $l_1/l_2 = 1$. Es zeigt sich zudem, dass die Verläufe der zugehörigen Wellentransmissionen bei den Bandlückenmittenfrequenzen aus der Abb. 4.26b qualitativ sehr gut mit den Verläufen der kleinsten Imaginärteile aus der Abb. 4.26a übereinstimmen. Eine deutliche Abweichung der qualitativen Verläufe ist nur bei der vierten Bandlücke für $l_1/l_2 < 1$ zu beobachten. Bei allen vier Bandlücken ist

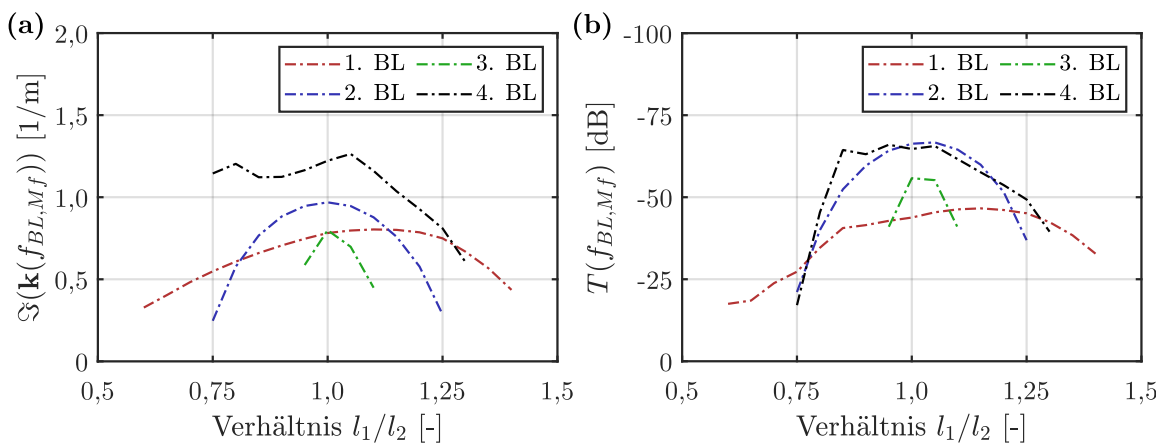


Abbildung 4.26: (a) Einfluss aus dem Verhältnis der Gitterkonstanten l_1/l_2 auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}(f_{BL,Mf}))$ des Wellenvektors \mathbf{k} bei den Bandlückenmittenfrequenzen $f_{BL,Mf}$. (b) Zugehörige Wellentransmissionen $T(f_{BL,Mf})$ aus einer Transmissionsberechnung mit $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$.

die Wellentransmission bei $l_1/l_2 = 1$ minimal oder zumindest nahe dem globalen Minimum.

Durch die Verwendung unterschiedlicher Gitterkonstanten in den x - und y -Richtungen können zwar keine Verbesserungen hinsichtlich breiter kompletter Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich oder ein verbessertes Dämpfungsverhalten erzielt werden, es können jedoch breite richtungsabhängige Bandlücken entstehen. Zur Veranschaulichung sind in der Abb. 4.27 die komplexen Dispersionskurven und das Transmissionsspektrum für $l_1/l_2 = 1,2$ dargestellt. Die richtungsabhängigen Bandlücken (RBL), die im betrachteten Frequenzbereich auftreten, sind in den reellen Dispersionskurven hellrot und hellgrau markiert. Dabei sind die RBLs in der Γ -X-Richtung mit einer Strichpunktlinie umrandet und farblich (hellrot) von den anderen RBLs abgegrenzt, da nur diese einen wesentlichen Einfluss auf die Transmissionsberechnung in der Γ -X-Richtung aufweisen. Im Gegensatz zu den kompletten Bandlücken ist der kleinste Imaginärteil der komplexen Dispersionskurven innerhalb der richtungsabhängigen Bandlücken gleich Null, da in mindestens einer Richtung eine elastische Wellenausbreitung ohne Dämpfung möglich ist. Im Transmissionsspektrum zeigt sich dennoch ein deutlicher Rückgang der Wellentransmission innerhalb der RBLs in der Γ -X-Richtung, wobei auch hier die Frequenzbereiche der RBLs in der Γ -X-Richtung hellrot markiert und mit einer Strichpunktlinie umrandet sind. Die kompletten Bandlücken sind hingegen dunkelgrau markiert und mit einer durchgezogenen Linie umrandet. Bei einem Vergleich der reellen Dispersionskurven und dem Transmissions-

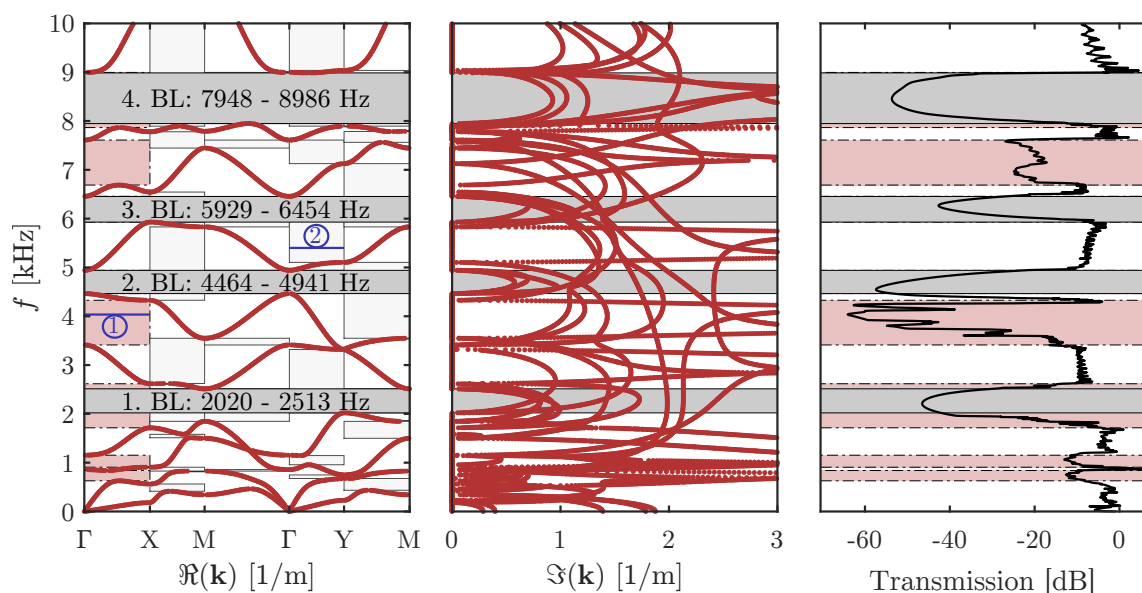


Abbildung 4.27: Komplexe Dispersionskurven für $l_1/l_2 = 1,2$ sowie das zugehörige Transmissionsspektrum in der Γ -X-Richtung für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$. Die richtungsabhängigen Bandlücken (RBLs) sind hellrot und hellgrau markiert. Die RBLs in der Γ -X-Richtung sind mit einer Strichpunktlinie umrandet und die zugehörigen Frequenzbereiche sind auch im Transmissionsspektrum hervorgehoben.

spektrum zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den RBLs in der Γ -X-Richtung und einem Rückgang der Wellentransmission in den zugehörigen Frequenzbereichen. Weiterhin zeigt sich bei den reellen Dispersionskurven, dass auch in den anderen Richtungen eine Vielzahl von RBLs auftreten, die allerdings mit dem System für die Transmissionsberechnung in der Abb. 4.10 nicht erfasst werden können. Dazu muss das System für die Transmissionsberechnung in der Abb. 4.10 leicht modifiziert werden. Beispielsweise könnte die Wellentransmission in der Γ -Y-Richtung ermittelt werden, indem das System bzw. die Einheitszelle bei der Berechnung der Wellentransmission um 90° gedreht wird. Die RBLs können neben einer gezielten richtungsabhängigen Schwingungs- und Vibrationsisolierung vielfältige Anwendungen, beispielsweise als Wellenleiter, haben. Zur Veranschaulichung ist in der Abb. 4.28 das Verschiebungsfeld im Frequenzbereich ohne Verwendung von TO-Elementen für $f = 4035$ Hz und $l_1/l_2 = 1,2$ dargestellt. Dabei wird das System am Knoten in der Mitte (roter Pfeil) durch vorgegebene Verschiebungen $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm angeregt. Die Frequenz von $f = 4035$ Hz liegt in einer RBL in der Γ -X-Richtung und ist in der Abb. 4.27 mit der Linie ① gekennzeichnet. Entsprechend können sich die Wellen, wie die Abb. 4.28 zeigt, nicht in der x -Richtung ausbreiten und ihre Ausbreitung erfolgt ausschließlich entlang der y -Richtung. Analog dazu können sich beispielsweise elastische Wellen mit einer Frequenz, die in einer RBL in der Γ -Y-Richtung liegt, nicht in der y -Richtung ausbreiten. Zum Beispiel liegt die Frequenz $f = 5400$ Hz in einer RBL in der Γ -Y-Richtung und ist in der Abb. 4.27 mit der Linie ② gekennzeichnet. In der Abb. 4.29 ist das zugehörige Verschiebungsfeld im Frequenzbereich dargestellt, wobei auch in diesem Fall die Anregung durch vorgegebene Verschiebungen $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm am Knoten in der Mitte des Systems (roter Pfeil) erfolgt. Aus der Abb. 4.29 wird deutlich,

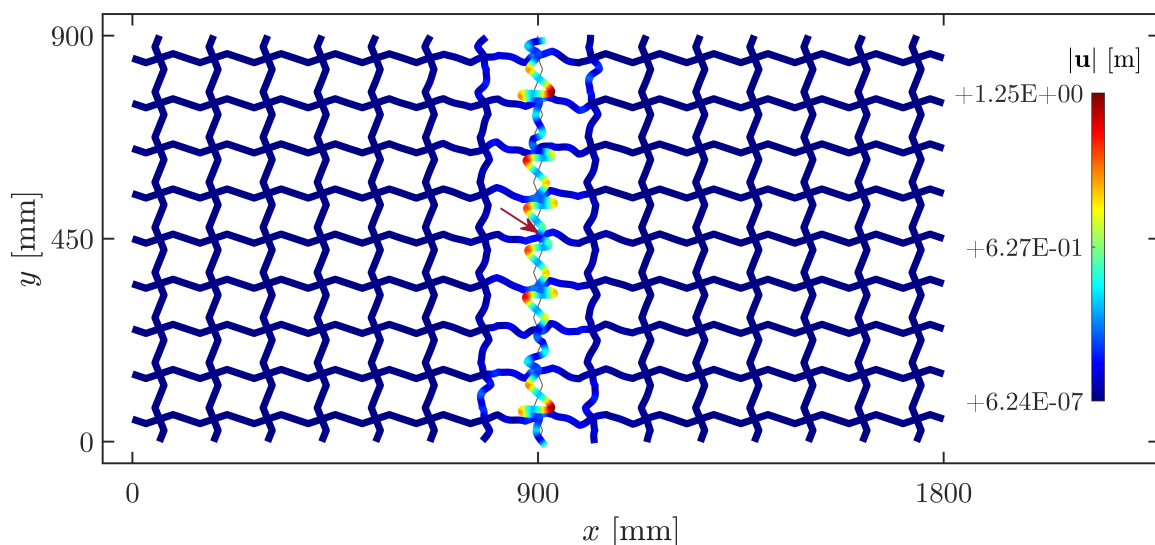


Abbildung 4.28: Verschiebungsfeld im Frequenzbereich ohne Verwendung von TO-Elementen für $f = 4035$ Hz und $l_1/l_2 = 1,2$ bei einer Anregung in der Mitte des Systems (roter Pfeil) durch vorgegebene Verschiebungen von $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm.

dass sich die Wellen aufgrund der RBL in der Γ -Y-Richtung nur entlang der x -Achse ausbreiten können. Aufgrund dieser Eigenschaften eignen sich RBLs beispielsweise als Wellenleiter bzw. Energieleiter, da eine Energiedämpfung infolge einer räumlichen Wellenausbreitung unterbunden oder minimiert werden kann.

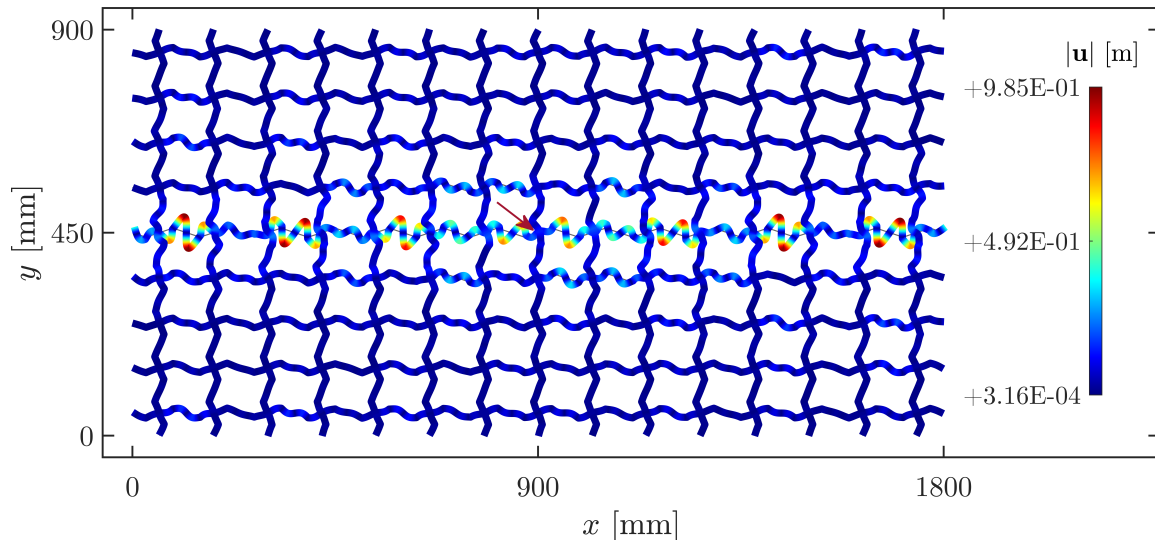


Abbildung 4.29: Verschiebungsfeld im Frequenzbereich ohne Verwendung von TO-Elementen für $f = 5400$ Hz und $l_1/l_2 = 1,2$ bei einer Anregung in der Mitte des Systems (roter Pfeil) durch vorgegebene Verschiebungen von $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm.

Einflüsse der Lagen b_1 und b_2 der Zick-Zack-Knicke

Die Wellenausbreitungseigenschaften in phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen können neben der Auslenkung W und den Gitterkonstanten (l_1 , l_2) auch durch die geometrischen Parameter (b_1 , b_2) beeinflusst werden. Dabei beschreibt b_1 , wie in der Abb. 4.24a veranschaulicht, die Lage der Zick-Zack-Knicke in der x -Richtung und b_2 die Lage der Zick-Zack-Knicke in der y -Richtung. Zunächst wird der rotationssymmetrische Sonderfall mit $b = b_1 = b_2$ untersucht, wobei die Ausgangsparameter für die Geometrie-, Querschnitts-, und Materialeigenschaften der Tab. 4.3 entnommen werden können. Entsprechend gilt für die Gitterkonstanten $l = l_1 = l_2$ und die Berechnung der Dispersionskurven kann anhand der dreieckförmigen ersten IBZ aus der Abb. 4.5b erfolgen.

In der Abb. 4.30 sind die Bandlückenrandfrequenzen für den Frequenzbereich von 0 bis 14 kHz in Abhängigkeit der Lage der Zick-Zack-Knicke dargestellt. Dabei wird die Lage der Knicke durch das Verhältnis $2b/l$ beschrieben, wobei $2b/l = 0,5$ einem Knick in der Mitte der Zick-Zack-Arme, $2b/l = 0$ einem Knick in der Mitte der Einheitszelle und $2b/l = 1$ einem Knick an den äußeren Enden der Arme entspricht. Die bisherigen Untersuchungen basieren auf mittig (also bei $2b/l = 0,5$) angeordneten Knicken, und aus diesem Grund ist diese Lage in der Abb. 4.30 mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Aus

der Abb. 4.30 wird deutlich, dass für $2b/l < 0,5$ keine Verbesserungen der Wellenausbreitungseigenschaften hinsichtlich breiter Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden können. Stattdessen nehmen die Breiten der ersten und zweiten Bandlücke bis $2b/l = 0,3$ bzw. $2b/l = 0,33$ kontinuierlich ab und die Bandlücken schließen sich letztlich vollständig. Weitere Bandlücken treten außerdem erst in einem höheren Frequenzbereich auf.

Für $2b/l > 0,5$ nimmt die Breite der ersten Bandlücke hingegen bis $2b/l = 0,82$ kontinuierlich zu und gleichzeitig verschiebt sich die untere Randfrequenz linear in einen niedrigeren Frequenzbereich. Ab $2b/l > 0,8$ nimmt die Breite der ersten Bandlücke wieder ab, allerdings fällt die untere Randfrequenz weiterhin linear ab, sodass eine möglichst niedrige untere Begrenzung der ersten Bandlücke für $2b/l \rightarrow 1,0$ erreicht wird. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass der Fall $2b/l = 1,0$ nicht untersucht werden kann, da sonst die abgeknickten Arme auf den Rändern der Einheitszelle liegen und numerische Probleme auftreten. Die untere Randfrequenz für $2b/l = 0,5$ beträgt $f_{BL,Uf} = 2125$ Hz und sinkt bis $2b/l = 0,98$ auf $f_{BL,Uf} = 1501$ Hz ab. Allerdings ist die Breite der ersten Bandlücke bei $2b/l = 0,98$ mit $\Delta f_{BL,1} = 1091$ Hz deutlich kleiner als die maximale Breite von $\Delta f_{BL,1} = 1798$ Hz bei $2b/l = 0,82$. Zudem ist der Abstand zwischen der ersten und der zweiten Bandlücke bei $2b/l = 0,82$ minimal, sodass für diese Lage der Zick-Zack-Knicke das optimale Verhalten hinsichtlich breiter und eng beieinander liegender Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden kann.

Einen besonders großen Einfluss hat die Lage der Zick-Zack-Knicke auf die dritte Bandlücke, die bei $2b/l = 0,6$ eine minimale Breite von $\Delta f_{BL,1} = 117$ Hz aufweist. Sowohl

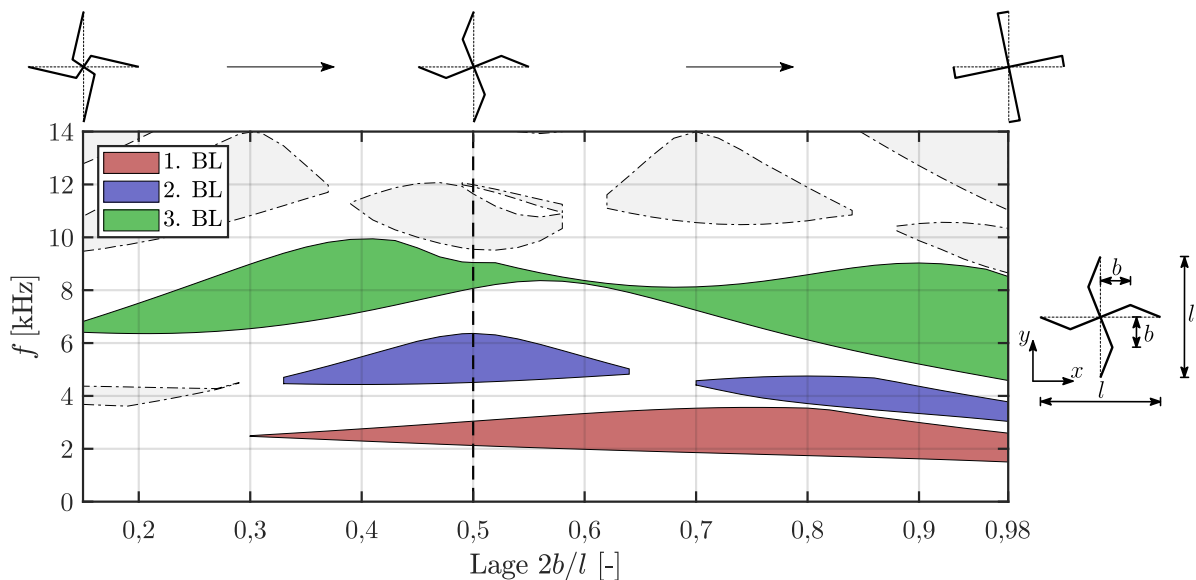


Abbildung 4.30: Einfluss der Lage der Zick-Zack-Knicke $b = b_1 = b_2$ auf die Bandlückenrandfrequenzen innerhalb der ersten 10 Bänder. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3.

für $2b/l > 0,6$ als auch für $2b/l < 0,6$ nimmt die Breite der dritten Bandlücke schnell zu. Allerdings ergibt sich für $2b/l > 0,6$ ein besseres Verhalten hinsichtlich einer breiten Bandlücke in einem möglichst niedrigen Frequenzbereich. Bei $2b/l = 0,98$ besitzt die dritte Bandlücke die maximale Breite von $\Delta f_{BL,1} = 4059$ Hz. Gleichzeitig sinkt die untere Bandlückenrandfrequenz für $2b/l > 0,6$ von $f_{BL,Uf} = 8247$ Hz auf $f_{BL,Uf} = 4583$ Hz ab. Des Weiteren treten auch eine vierte und fünfte Bandlücke im betrachteten Frequenzbereich ab $2b/l > 0,88$ auf. Zusammenfassend ergibt sich also für $2b/l \rightarrow 1,0$ das beste Wellenausbreitungsverhalten hinsichtlich vieler breiter Bandlücken in einem möglichst niedrigen Frequenzbereich.

In der Abb. 4.31a ist der Einfluss der Lage der Zick-Zack-Knicke auf die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors bei den Bandlückenmittenfrequenzen und in der Abb. 4.31b sind die zugehörigen Wellentransmissionen für die ersten drei Bandlücken dargestellt. Bei allen drei Bandlücken zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den qualitativen Verläufen der kleinsten Imaginärteile des komplexen Wellenvektors und der Wellentransmission. Somit bestätigt sich auch in diesem Fall, dass der Imaginärteil des komplexen Wellenvektors ein sehr guter Indikator für das Dämpfungsverhalten einer phononischen Struktur ist. Die erste Bandlücke weist bei $2b/l = 0,82$ neben der größten Breite auch den größten Imaginärteil und die geringste Wellentransmission auf. Bei der zweiten und dritten Bandlücke tritt der größte Imaginärteil bzw. die geringste Wellentransmission hingegen für $2b/l \rightarrow 1,0$ auf. Somit zeigt sich auch in der Abb. 4.31, dass die Lage der Zick-Zack-Knicke für eine möglichst breite erste Bandlücke mit gleichzeitig der geringsten Wellentransmission bei $2b/l = 0,82$ liegt. Für $2b/l \rightarrow 1,0$ ergibt sich bei der zweiten und dritten Bandlücke die geringste Wellentransmission und zudem die niedrigsten unteren Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken.

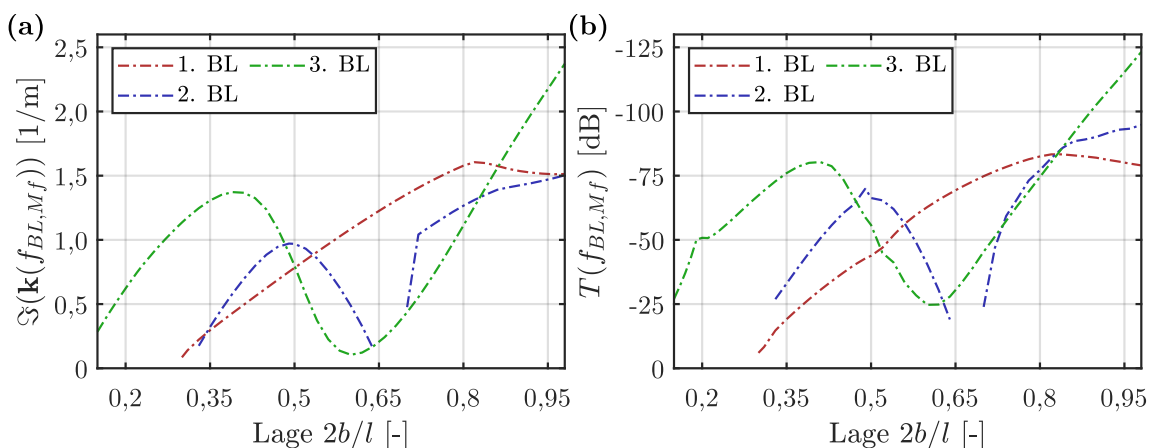


Abbildung 4.31: (a) Einfluss der Lage der Zick-Zack-Knicke $b = b_1 = b_2$ auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}(f_{BL,Mf}))$ des Wellenvektors \mathbf{k} bei den Bandlückenmittenfrequenzen $f_{BL,Mf}$. (b) Zugehörige Wellentransmissionen $T(f_{BL,Mf})$ für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$.

Durch unterschiedliche Lagen der Zick-Zack-Knicke, also $b_1 \neq b_2$, können keine nennenswerten Verbesserungen hinsichtlich breiter kompletter Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden. Aufgrund der gebrochenen Symmetrieeigenschaften der Einheitszelle können jedoch, wie bereits bei der Verwendung von unterschiedlichen Gitterkonstanten in den x - und y -Richtungen erläutert, breite RBLs entstehen. Die Untersuchungen in dieser Arbeit fokussieren sich jedoch auf die kompletten Bandlücken, daher wird auf eine ausführliche Analyse der Einflüsse aus den Lagen der Zick-Zack-Knicke für den Fall $b_1 \neq b_2$ verzichtet.

Zu den geometrischen Parametern gehören eigentlich auch die Querschnittsabmessungen a_1 und a_2 . Da sie aber über das Flächenträgheitsmoment I in die Steifigkeit und über die Querschnittsfläche A in die Masse des jeweiligen Querschnitts eingehen, werden ihre Einflüsse nicht hier, sondern im nachfolgenden Unterabschnitt 4.4.2 untersucht.

4.4.2 Beeinflussung durch die Steifigkeits- und Massenverhältnisse

Eine weitere Möglichkeit, die Wellenausbreitungseigenschaften von phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen zu beeinflussen ist, wie in der Abb. 4.17 veranschaulicht, die Verwendung von unterschiedlichen Steifigkeiten oder Massen für die inneren und äußeren Arme. Die Verwendung von unterschiedlichen Steifigkeiten und Massen kann beispielsweise zu verstärkten lokalen Resonanzeffekten, zu breiteren Bandlücken oder zu Bandlücken in einem niedrigeren Frequenzbereich führen [101].

Die Biegesteifigkeit EI eines Gitters kann auf drei unterschiedlichen Wegen kontrolliert bzw. variiert werden, nämlich,

- Änderung der Querschnittsabmessungen a_1 und a_2 und somit der Trägheitsmomente I_1 und I_2 bei festgehaltenem Materialparameter E ,
- Änderung des Materialparameters E bei festgehaltenen Querschnittsabmessungen a_1 und a_2 ,
- Gleichzeitige Änderungen der Querschnittsabmessungen (a_1, a_2) und des Materialparameters E .

Da die letzte Möglichkeit in der Praxis selten verwendet wird, werden nur die ersten beiden Möglichkeiten im Folgenden näher untersucht.

Einflüsse aus unterschiedlichen Querschnittsabmessungen a_1 und a_2

Zunächst werden unterschiedliche quadratische Querschnitte für die inneren Arme (Querschnitt Q1) mit den Kantenlängen a_1 und für die äußeren Arme (Querschnitt Q2) mit

den Kantenlängen a_2 , wie ebenfalls in der Abb. 4.17 dargestellt, untersucht. Die übrigen Geometrie- und Materialeigenschaften sind konstant und können der Tab. 4.3 entnommen werden. In der Abb. 4.32 sind die Einflüsse der Querschnittsabmessungen a_1 und a_2 auf die Randfrequenzen der ersten zwei Bandlücken dargestellt. Dabei sind zwei unterschiedliche Fälle für das Verhältnis der Querschnittsabmessungen untersucht. Im ersten Fall, für den die Bandlücken rot dargestellt sind, sind die Abmessungen der äußeren Arme konstant mit $a_2 = a_{konst.} = 2 \text{ mm}$ und lediglich die Abmessungen $a_i = a_1$ der inneren Arme werden variiert. Beim zweiten Fall, für den die Bandlücken blau dargestellt sind, sind hingegen die Abmessungen der inneren Arme konstant $a_1 = a_{konst.} = 2 \text{ mm}$ und die Abmessungen $a_i = a_2$ der äußeren Arme werden variiert. Während die Verläufe der Bandlückenrandfrequenzen für $a_i/a_{konst.} > 1$ in beiden Fällen sehr ähnlich sind, sind für $a_i/a_{konst.} < 1$ deutlichere Unterschiede erkennbar, wobei jedoch in beiden Fällen für $a_i/a_{konst.} < 1$ ein verbessertes Wellenausbreitungsverhalten hinsichtlich eines niedrigeren Frequenzbereichs der Bandlücken erzielt werden kann. Allerdings nimmt die Breite der ersten Bandlücke im zweiten Fall für $a_i/a_{konst.} < 0,7$ schnell ab und die Bandlücke schließt sich bei $a_i/a_{konst.} = 0,35$ vollständig. Hingegen nimmt die Breite im ersten Fall für $a_i/a_{konst.} < 0,7$ wieder kontinuierlich zu, was auf einen zusätzlichen Effekt aus lokaler Resonanz der steiferen äußeren Arme zurückzuführen ist. Dieser Effekt tritt aufgrund der großen Steifigkeitsunterschiede zwischen den inneren und äußeren Armen auf, wodurch die äußeren Arme nahezu wie starre Massen wirken, die elastisch an die inneren Arme angeschlossen sind.

Zur Veranschaulichung sind in der Abb. 4.33a die reellen Dispersionskurven für den ersten Fall und $a_i/a_{konst.} = 0,3$ dargestellt, wobei die erste Bandlücke am unteren Rand durch

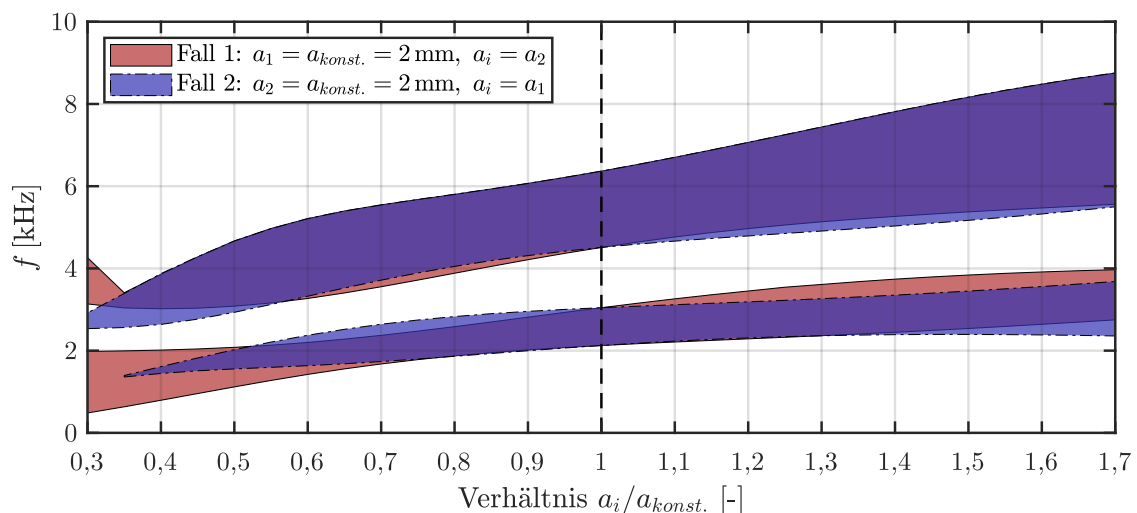


Abbildung 4.32: Einfluss der Querschnittsabmessungen a_1 und a_2 auf die Randfrequenzen der ersten zwei Bandlücken. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3.

das vierte Band an der Stelle X und am oberen Rand durch das fünfte Band an der Stelle M begrenzt ist. Die zugehörige vierte Eigenform an der Stelle X sowie die fünfte Eigenform an der Stelle M sind in der Abb. 4.33b dargestellt. Bei der vierten Eigenform an der Stelle X, die in der Abb. 4.33b unten angegeben ist, zeigt sich deutlich, dass die äußeren Arme lediglich Starrkörperbewegungen aufweisen und sich nicht verformen. In diesem Fall wirken die äußeren Arme wie starre Massen, die elastisch an die inneren Arme angeschlossen sind und praktisch als Resonatoren agieren. Hingegen treten bei der fünften Eigenform an der Stelle M, die in der Abb. 4.33b oben dargestellt ist, geringe Verkrümmungen in den äußeren Armen auf und das resonatorartige Verhalten ist weniger ausgeprägt. Das starrkörperähnliche und resonatorartige Verhalten der äußeren Arme nimmt dabei mit abnehmendem Verhältnis a_1/a_2 zu. Allerdings darf das Steifigkeitsverhältnis im Hinblick auf reale Strukturen aus anderen mechanischen Gründen nicht zu klein bzw. zu groß werden, da die dünneren Querschnitte sonst leicht versagen können. Bei der ersten Bandlücke zeigt sich, dass durch die Überlagerung der Effekte der BRAGG-Streuung und der lokalen Resonanz sehr breite Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden können. Derartige Bandlücken werden auch als hybride Bandlücken [28, 175] bezeichnet.

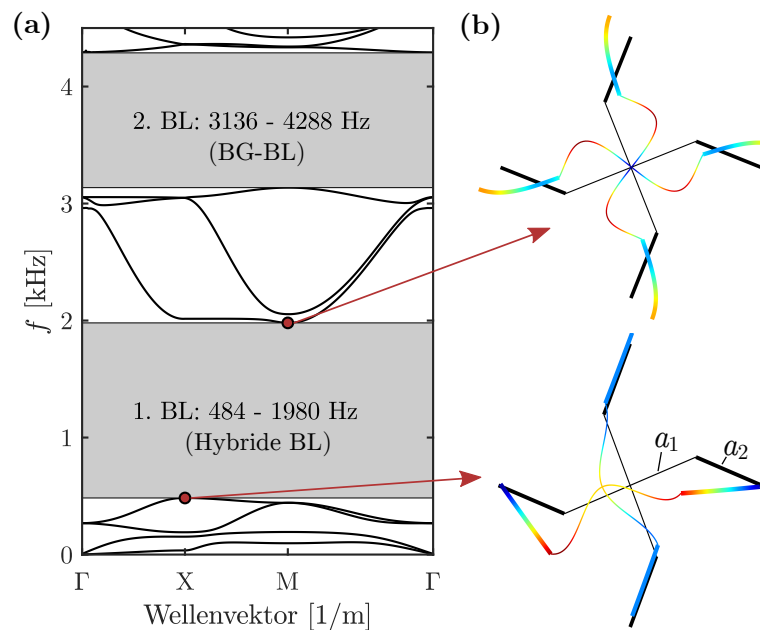


Abbildung 4.33: (a) Reelle Dispersionkurven für $a_1/a_2 = 0,3$ (Fall 1). (b) Begrenzende Eigenformen der ersten Bandlücke: unten vierte Eigenform an der Stelle X und oben fünfte Eigenform an der Stelle M.

Bei den Verläufen der zweiten Bandlücke in der Abb. 4.32 ist auffällig, dass die oberen Bandlückenrandfrequenzen in beiden Fällen für $a_i/a_{konst} = 0,35 - 1,7$ vollständig übereinstimmen. Die unteren Bandlückenrandfrequenzen weichen für $a_i/a_{konst} = 0,5 - 1,7$ auch nur geringfügig voneinander ab. Ein deutlicher Unterschied zwischen den zwei Fällen

ist für $a_i/a_{konst} < 0,5$ zu beobachten, wobei die Breite der Bandlücke im ersten Fall zunächst schneller abnimmt. Bei $a_i/a_{konst} = 0,35$ weist der Verlauf der zweiten Bandlücke im ersten Fall einen Knick auf und die Breite der Bandlücke nimmt für $a_i/a_{konst} < 0,35$ wieder zu. Die Ursache für diese Unstetigkeit liegt in der Verschiebung des Bandes, das die zweite und dritte Bandlücke für $a_i/a_{konst} > 0,35$ trennt, wodurch sich diese beiden Bandlücken für $a_i/a_{konst} < 0,35$ zu einer breiteren Bandlücke zusammenschließen. Im zweiten Fall tritt diese Erscheinung nicht auf und die Breite der Bandlücke nimmt stetig mit abnehmendem Verhältnis $a_i/a_{konst} < 0,35$ ab.

In der Abb. 4.34a sind die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors und in der Abb. 4.34b sind die zugehörigen Wellentransmissionen bei den Mittenfrequenzen der ersten beiden Bandlücken dargestellt. Dabei beschränken sich die Untersuchungen auf den ersten Fall, da bei diesem ein besseres Wellenausbreitungsverhalten hinsichtlich breiter Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden kann. Die sehr gute Übereinstimmung zwischen den qualitativen Verläufen der kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors und den zugehörigen Wellentransmissionen wird auch bei dieser Untersuchung deutlich. Für beide Bandlücken ist ein Zusammenhang zwischen den Bandlückenbreiten (s. Abb. 4.32) und den Verläufen der kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors bei den Bandlückenmittenfrequenzen erkennbar, wobei der Imaginärteil des Wellenvektors mit zunehmender Breite der Bandlücke steigt. Bei der ersten Bandlücke ist insbesondere die rasche Zunahme des Imaginärteils des Wellenvektors bzw. Abnahme der Wellentransmission für ein abnehmendes Verhältnis a_1/a_2 ab ungefähr $a_1/a_2 < 0,5$ auffällig. Die rasche Zunahme des kleinsten Imaginärteils des Wellenvektors ist vermutlich ebenfalls auf den zusätzlichen Effekt aus lokaler Resonanz zurückzuführen. Bei der zweiten Bandlücke tritt auch bei den Verläufen der kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors und der Wellentransmission ein Knick bei $a_1/a_2 = 0,35$ auf, der auf den zuvor beschriebenen Zusammenschluss von zwei Bandlücken

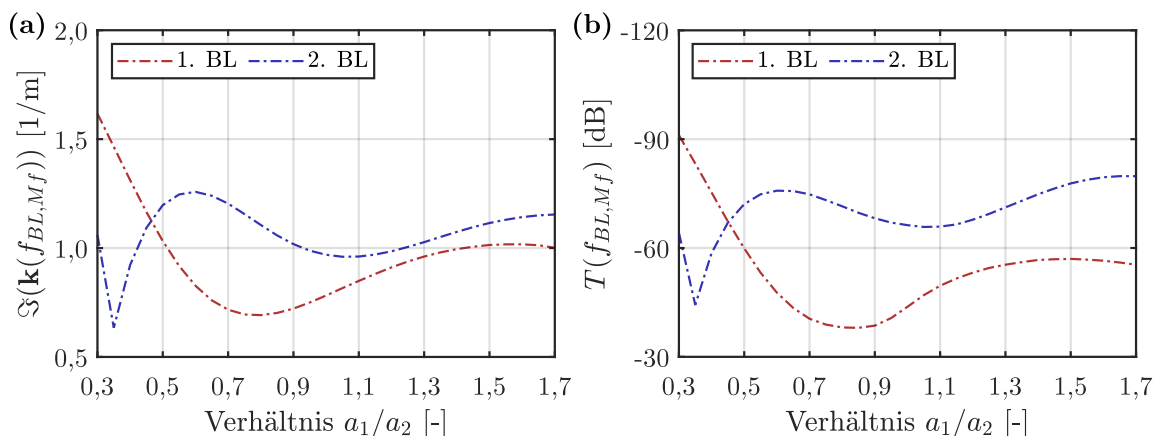


Abbildung 4.34: (a) Einfluss der relativen Querschnittsabmessungen a_1/a_2 (Fall 1) auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}(f_{BL,Mf}))$ des Wellenvektors \mathbf{k} bei den Bandlückenmittenfrequenzen $f_{BL,Mf}$. (b) Zugehörige Wellentransmissionen $T(f_{BL,Mf})$ für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$.

zurückzuführen ist. Zusammenfassend zeigt sich, dass durch ein geringes Verhältnis $a_1/a_2 < 0,5$ ein zusätzlicher Effekt durch die lokale Resonanz ausgenutzt werden kann, der letztlich zu einer breiteren ersten Bandlücke im niedrigen Frequenzbereich führt, die zudem ein sehr hohes Dämpfungsvermögen aufweist.

Einflüsse aus unterschiedlichen E-Moduln E_1 und E_2

Neben unterschiedlichen Querschnittsabmessungen können auch durch die Verwendung unterschiedlicher Materialien aber gleichbleibender Querschnittsabmessungen die Steifigkeitsverhältnisse zwischen den inneren und äußeren Armen der Zick-Zack-Gitterstrukturen beeinflusst werden. In der Abb. 4.35 ist der Einfluss der E-Moduln E_1 der inneren Arme sowie E_2 der äußeren Arme auf die Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken dargestellt. Dabei sind die Bandlückenrandfrequenzen in der Abb. 4.35a in Abhängigkeit von E_2 für einen konstanten E-Modul $E_1 = 405$ GPa und in der Abb. 4.35b in Abhängigkeit von E_2 für einen konstanten E-Modul $E_1 = 1$ GPa dargestellt. Der in der Abb. 4.35a dargestellte Fall entspricht einem sehr steifen „Kern“, bei dem der E-Modul der inneren Arme mit $E_1 = 405$ GPa dem E-Modul von Wolfram entspricht. Hingegen ist in der Abb. 4.35b der Grenzfall eines sehr weichen Kerns, bei dem der E-Modul der inneren Arme mit $E_1 = 1$ GPa dem E-Modul von weichem Polyamid entspricht, dargestellt. Die Geometrie- und Querschnittseigenschaften sowie die Massendichten sind konstant gehalten und können der Tab. 4.3 entnommen werden. In der Abb. 4.35a zeigt sich, dass durch die Verwendung von einem niedrigeren E-Modul E_2 für die äußeren Arme Bandlücken in einem niedrigeren Frequenzbereich erzielt werden können, wobei die ersten beiden Bandlücken jedoch nur entstehen, wenn E_2 nicht zu klein ist. Besonders ausgeprägt ist der Einfluss von E_2 auf die Randfrequenzen der dritten Bandlücke, die ab ungefähr

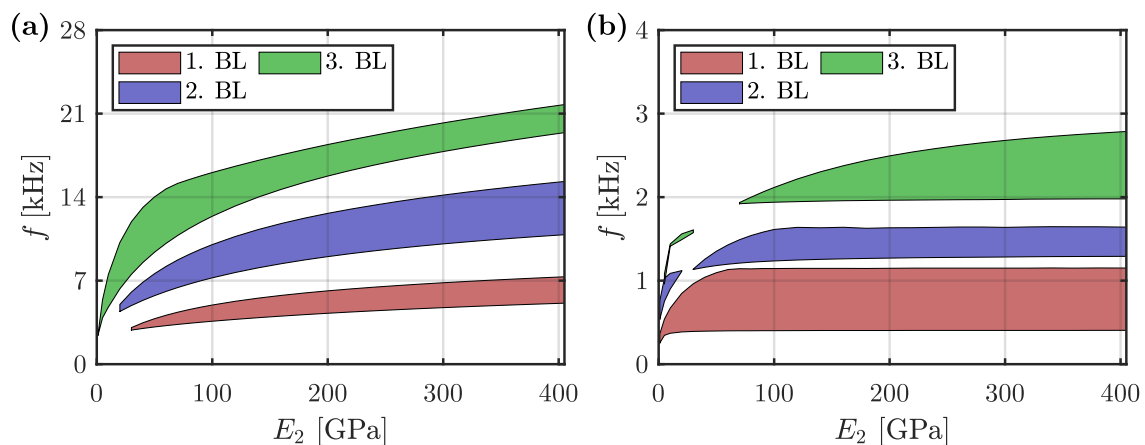


Abbildung 4.35: Einfluss der E-Moduln E_1 und E_2 auf die Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken. (a) $E_1 = konst. = 405$ GPa. (b) $E_1 = konst. = 1$ GPa. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie- und Querschnittseigenschaften sowie den Massendichten aus der Tab. 4.3.

$E_2 < 75$ GPa sehr schnell abfallen. Die abnehmenden Frequenzbereiche der Bandlücken bei sinkendem E-Modul können anhand der Eigenfrequenz eines Einmassenschwingers mit $\omega = \sqrt{c/m}$, wobei c die Federsteifigkeit und m die Masse ist, erklärt werden. Dabei zeigt sich, dass mit abnehmender Steifigkeit c bzw. in diesem Fall E_2 die Eigenfrequenzen mit der Potenz 0,5 abnehmen.

Für den Fall eines sehr weichen Kerns zeigt sich in der Abb. 4.35b ein deutlich anderes Verhalten der Bandlückenrandfrequenzen in Abhängigkeit des E-Moduls der äußeren Arme. Zwar sinken auch in diesem Fall für kleine E_2 die Bandlückenrandfrequenzen mit abnehmendem E_2 , aber für $E_2 > 75$ GPa ist der Frequenzbereich der ersten Bandlücke ungefähr konstant. Bei der zweiten Bandlücke zeigt sich bei $E_2 > 110$ GPa ein ähnliches Verhalten und die Bandlückenrandfrequenzen sind fast unabhängig von dem E-Modul der äußeren Arme. Lediglich bei der dritten Bandlücke zeigt sich eine durchgehende Abhängigkeit von E_2 , wobei jedoch auch in diesem Fall die untere Bandlückenrandfrequenz nahezu konstant ist und nur die obere Bandlückenrandfrequenz mit steigendem E_2 zunimmt. Dieses Verhalten ist, wie bereits bei den Einflüssen der unterschiedlichen Querschnittsabmessungen, auf lokale Resonanzeffekte zurückzuführen. Ab einem gewissen E_2 sind die äußeren Arme im Vergleich zu den inneren Armen so steif, dass sie fast als Starrkörper wirken, die über die inneren Arme elastisch miteinander verbunden sind. Dadurch hat eine weitere Erhöhung der Steifigkeit der äußeren Arme keinen weiteren Einfluss auf die Bandlückenrandfrequenzen. Die äußeren Arme agieren folglich wie lokale Resonatoren, wobei deren Resonanzfrequenz nur durch die Steifigkeit der inneren Arme und die Massendichten beider Arme beeinflusst wird. Da die Massendichten bei diesen Betrachtungen konstant gehalten sind, sind auch die Resonanzfrequenzen und die Bandlückenrandfrequenzen ab einer ausreichend großen Steifigkeit der äußeren Arme fast konstant.

Einflüsse aus unterschiedlichen Massendichten ρ_1 und ρ_2

Abgesehen von den Steifigkeitsverhältnissen zwischen den inneren und äußeren Armen der Zick-Zack-Gitterstrukturen können auch unterschiedliche Massen bzw. Massendichten einen Einfluss auf das Wellenausbreitungsverhalten haben. In der Abb. 4.36 ist der Einfluss der Massendichten ρ_1 und ρ_2 der inneren Arme und äußeren Arme auf die Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken dargestellt. Dabei sind die Bandlückenrandfrequenzen in der Abb. 4.36a in Abhängigkeit von ρ_2 für eine konstante Massendichte $\rho_1 = 19300 \text{ kg/m}^3$ und in der Abb. 4.36b in Abhängigkeit von ρ_2 für eine konstante Massendichte $\rho_1 = 400 \text{ kg/m}^3$ dargestellt. Der in der Abb. 4.36a dargestellte Fall entspricht einem sehr massigen Kern, bei dem die Massendichte der inneren Arme mit $\rho_1 = 19300 \text{ kg/m}^3$ der Massendichte von Wolfram entspricht. In der Abb. 4.36b ist hingegen der Fall eines sehr leichten Kerns, bei dem die Massendichte der inneren Arme mit $\rho_1 = 400 \text{ kg/m}^3$ der Massendichte von Holz oder einem aufgeschäumten Kunststoff entspricht, dargestellt. Die Geometrie- und

Querschnittseigenschaften sowie die E-Moduln sind konstant gehalten und können der Tab. 4.3 entnommen werden.

Für den in der Abb. 4.36a dargestellten Fall eines massigen Kerns zeigt sich, dass eine Variation der Massendichte ρ_2 nur einen geringen Einfluss auf die untere Randfrequenz der ersten Bandlücke hat. Beispielsweise sinkt die untere Bandlückenrandfrequenz von $f_{BL,1,Uf} = 998 \text{ Hz}$ bei $\rho_2 = 4800 \text{ kg/m}^3$ auf $f_{BL,1,Uf} = 795 \text{ Hz}$ bei $\rho_2 = 19300 \text{ kg/m}^3$ ab. Allerdings nimmt die Breite der Bandlücke überproportional ab, die $\Delta f_{BL,1} = 747 \text{ Hz}$ für $\rho_2 = 4800 \text{ kg/m}^3$ beträgt und für $\rho_2 = 19300 \text{ kg/m}^3$ auf $\Delta f_{BL,1} = 344 \text{ Hz}$ abfällt. Bei der zweiten und insbesondere der dritten Bandlücke ist der Einfluss der Massendichte ρ_2 auf die Bandlückenrandfrequenzen stärker ausgeprägt und die Bandlückenrandfrequenzen fallen mit steigender Massendichte ρ_2 schneller ab. Außerdem nimmt die Breite der zweiten Bandlücke, bzw. bei $\rho_2 > 5000 \text{ kg/m}^3$ auch die Breite der dritten Bandlücke, mit steigendem ρ_2 zu. In den meisten Anwendungsfällen ist jedoch hauptsächlich die erste Bandlücke von Interesse, wobei ein guter Kompromiss zwischen einer möglichst niedrigen unteren Bandlückenrandfrequenz und einer möglichst großen Bandlückenbreite durch eine Anpassung von ρ_2 erreicht werden kann.

In der Abb. 4.36b zeigt sich, dass der Einfluss der Massendichte ρ_2 bei einem leichten Kern mit $\rho_1 = 400 \text{ kg/m}^3$ auf die Bandlückenrandfrequenzen deutlich größer ist. So fallen die Frequenzbereiche aller drei Bandlücken für $\rho_2 = 19300 \text{ kg/m}^3$ im Vergleich zu $\rho_2 = 400 \text{ kg/m}^3$ um etwa $2/3$ ab. Allerdings ist die untere Randfrequenz der ersten Bandlücke selbst bei $\rho_2 = 19300 \text{ kg/m}^3$ mit $f_{BL,1,Uf} = 1181 \text{ Hz}$ deutlich höher als die niedrigste untere Randfrequenz der ersten Bandlücke $f_{BL,1,Uf} = 795 \text{ Hz}$ für den Fall eines massigen Kerns. Auch hinsichtlich der Bandlückenbreiten kann im Fall eines leichten Kerns keine Verbesserung erzielt werden, sodass offensichtlich ein massiger Kern vorteilhaft ist.

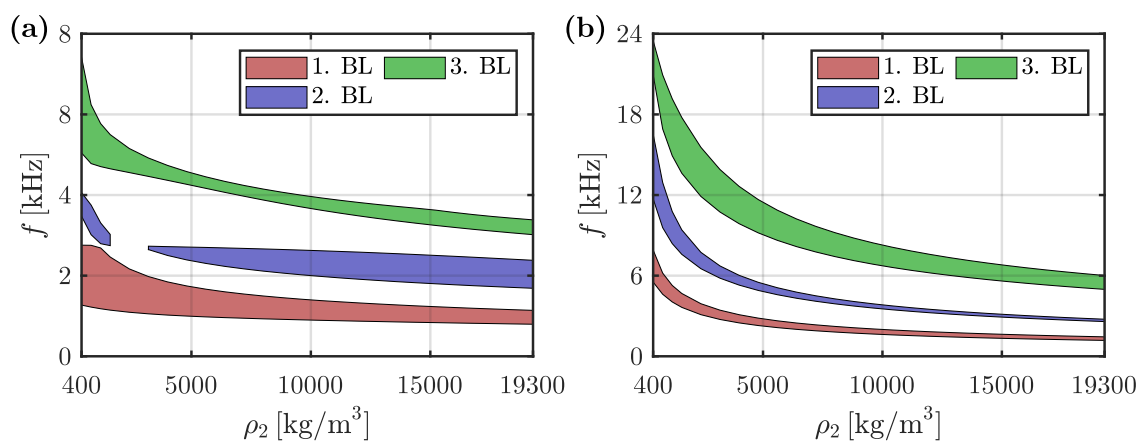


Abbildung 4.36: Einfluss der Massendichten ρ_1 und ρ_2 auf die Randfrequenzen der ersten drei Bandlücken. (a) $\rho_1 = \text{konst.} = 19300 \text{ kg/m}^3$. (b) $\rho_1 = \text{konst.} = 400 \text{ kg/m}^3$. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3.

4.4.3 Beeinflussung durch die diskreten Einzelmassen

Das Wellenausbreitungsverhalten einer bestehenden phononischen Zick-Zack-Gitterstruktur kann auch durch die Anordnung von zusätzlichen Einzelmassen an geeigneten Stellen der Gitterstruktur aktiv beeinflusst werden. DIAZ et al. [27] zeigten, dass durch das Anbringen von diskreten Einzelmassen die Dispersionskurven eines 1D periodischen Balkensystems optimiert werden können. Dabei können sowohl die Frequenzbereiche als auch die Breiten der Bandlücken beeinflusst werden. Auch bei 2D Balkengittersystemen, wie den sinusförmigen oder den Zick-Zack-Gittern, können die Bandstrukturen durch das Anbringen von zusätzlichen diskreten Einzelmassen optimiert werden. Für eine effektive und gezielte Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften einer vorhandenen phononischen Gitterstruktur durch diskrete Einzelmassen müssen zuerst die Dispersionskurven des Ausgangssystems berechnet werden. Anhand der Dispersionskurven können für eine bestimmte Bandlücke die Eigenformen bestimmt werden, die die Bandlücke nach unten bzw. nach oben begrenzen. Mithilfe dieser Eigenformen können anschließend die optimalen Positionen für die diskreten Einzelmassen ermittelt werden. Zur Veranschaulichung sind in der Abb. 4.37a die reellen Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3 dargestellt, wobei jedoch abweichend von der Tab. 4.3 die Auslenkung $W = 3 \text{ mm}$ beträgt.

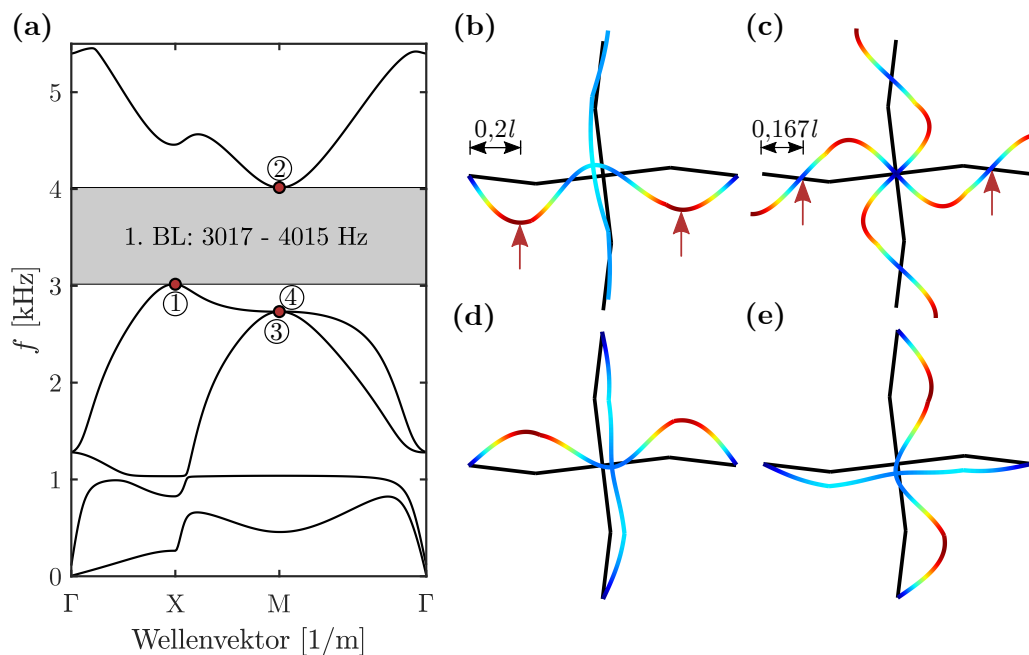


Abbildung 4.37: (a) Reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit $W = 3 \text{ mm}$ und den sonstigen Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle M, Band 5. (d) Zugehörige Eigenform zum Punkt ③: Stelle M, Band 3. (e) Zugehörige Eigenform zum Punkt ④: Stelle M, Band 4.

In der Abb. 4.37a zeigt sich, dass die erste Bandlücke am unteren Rand durch das vierte Band an der Stelle X, das in der Abb. 4.37a als Punkt ① markiert ist, und am oberen Rand durch das fünfte Band an der Stelle M, das als Punkt ② markiert ist, begrenzt wird. Die zugehörige Eigenform für den Punkt ① ist in der Abb. 4.37b und die zugehörige Eigenform für den Punkt ② ist in der Abb. 4.37c dargestellt. Um die Bandlücke in einen niedrigeren Frequenzbereich zu verschieben und gleichzeitig die Breite der Bandlücke zu vergrößern, muss die Eigenfrequenz der Eigenform aus der Abb. 4.37b abgesenkt werden, ohne gleichzeitig die Eigenfrequenz der Eigenform aus der Abb. 4.37c nennenswert herabzusetzen. Die Eigenfrequenz der Eigenform aus der Abb. 4.37b kann abgesenkt werden, indem an den Stellen, an denen die Eigenform sehr große Verschiebungen aufweist, diskrete Einzelmassen angebracht werden. Dadurch wird die mitschwingende Masse bzw. die Trägheit an diesen Stellen erhöht und somit die Eigenfrequenz verringert. Die maximalen Verschiebungen sind in der Abb. 4.37b durch rote Pfeile gekennzeichnet und befinden sich an den horizontalen Armen der Einheitszelle jeweils in einem Abstand von etwa $0,2l$ von den jeweiligen äußeren Rändern. Diese Stellen sind die besten Positionen für diskrete Einzelmassen um die Eigenfrequenz effektiv zu verringern. Allerdings sind diese Stellen nicht zwingend optimal um eine möglichst breite Bandlücke zu erzielen. Für eine möglichst breite Bandlücke darf die Eigenfrequenz des Bandes, das die Bandlücke am oberen Rand begrenzt, nicht nennenswert absinken. Dazu sollten die diskreten Einzelmassen an Positionen angebracht werden, an denen die zugehörige Eigenform, die die Bandlücke am oberen Rand begrenzt, möglichst geringe Verschiebungen aufweist. In diesem Fall hat die zugehörige Eigenform aus der Abb. 4.37c die geringsten Auslenkungen jeweils in einem Abstand von etwa $0,167l$ von den äußeren Rändern aller vier Arme der Einheitszelle. Somit liegen die optimalen Positionen für die diskreten Einzelmassen auf den horizontalen Armen bei einem Abstand zwischen $0,167l$ und $0,2l$ von den jeweiligen äußeren Rändern. Wird die Eigenfrequenz am Punkt ① allerdings zu weit verringert, dann wird die Bandlücke unter Umständen durch die Bänder 3 und 4 an der Stelle M, die in der Abb. 4.37a als Punkte ③ und ④ markiert sind, begrenzt. Bei Betrachtung der zugehörigen Eigenform für den Punkt ③ in der Abb. 4.37d zeigt sich, dass diese sehr ähnlich zur Eigenform aus der Abb. 4.37b ist und somit ihre Eigenfrequenz ebenfalls durch die diskreten Einzelmassen an den horizontalen Armen abgesenkt wird. Die zugehörige Eigenform für den Punkt ④ in der Abb. 4.37e ist identisch zur Eigenform am Punkt ③, allerdings um 90° gedreht, sodass die maximalen Verschiebungen dieser Eigenform an den vertikalen Armen auftreten. Um die Eigenfrequenz für den Punkt ④ abzusenken müssen folglich diskrete Einzelmassen an den vertikalen Armen der Einheitszelle angebracht werden. Aus diesem Grund werden nachfolgend an allen vier Armen in einem Abstand von $0,2l$ von den jeweiligen äußeren Rändern diskrete Einzelmassen angebracht. Dadurch ergibt sich zusätzlich der Vorteil, dass die Symmetrieeigenschaften der Einheitszelle beibehalten werden können und die

Berechnung der Dispersionskurven weiterhin mit der ersten IBZ aus der Abb. 4.5b erfolgen kann. Die Berücksichtigung von diskreten Einzelmassen erfolgt bei der SEM analog zur FEM, somit werden an den entsprechenden Positionen der zugehörigen Freiheitsgrade in der spektralen Steifigkeitsmatrix die Trägheitsterme $-\omega^2 m_{dM,i}$ hinzuaddiert.

In der Abb. 4.38a sind die reellen Dispersionskurven für die Einheitszelle dargestellt, bei der an allen vier Armen in einem Abstand von $0,2l$ von den jeweiligen äußeren Rändern diskrete Einzelmassen mit $m_{dM,i} = 0,5 \text{ g}$ angebracht sind. Dabei sei darauf hingewiesen, dass die vier Einzelmassen mit einer Gesamtmasse von $m_{dM} = 2 \text{ g}$ fast dem Gesamtgewicht der Einheitszelle ohne Einzelmassen mit $m_{ges} = 2,1756 \text{ g}$ entsprechen. Bei einer realen Struktur muss entsprechend sichergestellt werden, dass durch die zusätzlichen Massen nicht die statische Tragfähigkeit der Struktur gefährdet wird.

Ein Vergleich von der Abb. 4.38a und der Abb. 4.37a zeigt, dass durch das Anbringen der Einzelmassen sowohl die untere Randfrequenz der ersten Bandlücke von 3017 Hz auf 1778 Hz abgesenkt als auch gleichzeitig die Breite der ersten Bandlücke von $\Delta f_{BL} = 998 \text{ Hz}$ auf $\Delta f_{BL} = 1434 \text{ Hz}$ vergrößert werden kann. Durch das Anbringen der diskreten Einzelmassen kann folglich eine wesentliche Verbesserung der Wellenausbreitungseigenschaften der Einheitszelle hinsichtlich einer niederfrequenten und breiten Bandlücke er-

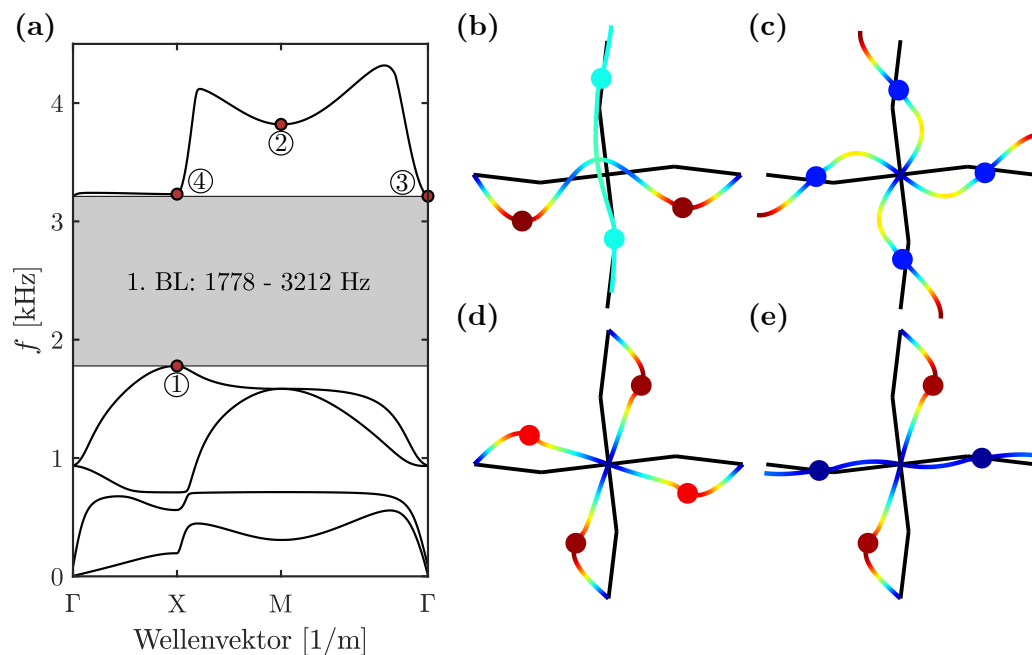


Abbildung 4.38: (a) Reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit $W = 3 \text{ mm}$ und diskreten Einzelmassen $m_{dM,i} = 0,5 \text{ g}$ in einem Abstand von $0,2l$ von den jeweiligen äußeren Rändern der Einheitszelle. Die sonstigen Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften können der Tab. 4.3 entnommen werden. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle M, Band 5. (d) Zugehörige Eigenform zum Punkt ③: Stelle Γ , Band 5. (e) Zugehörige Eigenform zum Punkt ④: Stelle X, Band 5.

zielt werden. Aus der Abb. 4.38a wird auch deutlich, dass die Bandlücke am unteren Rand weiterhin durch das vierte Band an der Stelle X begrenzt wird, die in der Abb. 4.38a als Punkt ① markiert ist, wobei die zugehörige Eigenfrequenz allerdings durch die diskreten Einzelmassen deutlich gesunken ist. Am oberen Rand wird die Bandlücke hingegen nicht mehr durch das fünfte Band an der Stelle M, markiert als Punkt ②, sondern durch das fünfte Band an der Stelle Γ begrenzt, das mit dem Punkt ③ gekennzeichnet ist. Die Eigenform für den Punkt ① ist in der Abb. 4.38b dargestellt, wobei sich die Eigenform im Vergleich zur Eigenform ohne diskrete Einzelmassen aus der Abb. 4.37b nur geringfügig geändert hat. Auch die Eigenform im Punkt ②, dargestellt in der der Abb. 4.38c, hat sich nur leicht geändert und erwartungsgemäß wird auch die zugehörige Eigenfrequenz nur vergleichsweise geringfügig von 4015 Hz auf 3820 Hz abgesenkt. Allerdings ist die fünfte Eigenfrequenz an der Stelle Γ , in der Abb. 4.38a als Punkt ③ markiert, sowie die fünfte Eigenfrequenz an der Stelle X, die als Punkt ④ gekennzeichnet ist, deutlich abgefallen. Die Eigenfrequenz im Punkt ③ ist dabei etwas niedriger und begrenzt somit die erste Bandlücke am oberen Rand. Aus der zugehörigen Eigenform in der Abb. 4.38d wird deutlich, dass die Ursache für den deutlichen Abfall der Eigenfrequenz darin liegt, dass auch diese Eigenform große Verschiebungen an den Positionen der diskreten Einzelmassen aufweist. Auch die Eigenform von Punkt ④, dargestellt in der Abb. 4.38e, weist an den vertikalen Armen große Verschiebungen an den Positionen der diskreten Einzelmassen auf, wodurch die zugehörige Eigenfrequenz im Vergleich zur Einheitszelle ohne diskrete Einzelmassen deutlich niedriger wird.

Neben den Positionen der Einzelmassen haben auch die Gewichte der diskreten Einzelmassen einen wesentlichen Einfluss auf das Wellenausbreitungsverhalten der phononischen Zick-Zack-Gitterstruktur. In der Abb. 4.39 sind daher die Randfrequenzen der ersten zwei Bandlücken in Abhängigkeit der Gewichte der diskreten Einzelmassen $m_{dM,i}$ dargestellt. Dabei werden die Massen zwischen $m_{dM,i} = 0 \text{ g}$ und $m_{dM,i} = 0,5 \text{ g}$ aus dem Beispiel der Abb. 4.38 variiert. Die Positionen der Einzelmassen sowie die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften entsprechen denen der Abb. 4.38. Es zeigt sich, dass sowohl die untere Randfrequenz der ersten als auch die der zweiten Bandlücke mit zunehmender Masse kontinuierlich absinken. Allerdings wird auch deutlich, dass die maximale Breite der Bandlücken nicht bei den größten Einzelmassen auftritt. Bei der ersten Bandlücke tritt die größte Breite beispielsweise bei $m_{dM,i} = 0,275 \text{ g}$ auf. Die Ursache wird durch die Betrachtung der Eigenform aus der Abb. 4.38b für den Punkt ① und der Eigenform aus der Abb. 4.38d für den Punkt ③ offensichtlich. Während bei der Eigenform im Punkt ① nur die diskreten Einzelmassen auf den horizontalen Armen einen wesentlichen Einfluss auf die Eigenfrequenz haben, weisen bei der Eigenform im Punkt ③ alle vier Einzelmassen eine große Verschiebung und damit einen großen Einfluss auf die Eigenfrequenz auf. Somit sinkt die Eigenfrequenz im Punkt ③ schneller als die Eigenfrequenz im Punkt ① mit

zunehmenden Gewichten der diskreten Einzelmassen. Da der Punkt ③ jedoch zunächst nicht die erste Bandlücke am oberen Rand begrenzt (vgl. Abb. 4.37), nimmt die Breite der ersten Bandlücke nur solange zu, bis die Gewichte der Einzelmassen so groß sind, dass der Punkt ③ die erste Bandlücke am oberen Rand begrenzt. Bei der ersten Bandlücke ist dies entsprechend ab $m_{dM,i} = 0,275$ g der Fall und für $m_{dM,i} > 0,275$ g sinkt dann die obere Randfrequenz der ersten Bandlücke etwas schneller ab als die untere Randfrequenz, wodurch die Breite der Bandlücke geringfügig abnimmt. Auch bei der zweiten Bandlücke zeigt sich ein ähnliches Verhalten, wobei die maximale Breite der Bandlücke bei $m_{dM,i} = 0,350$ g auftritt.

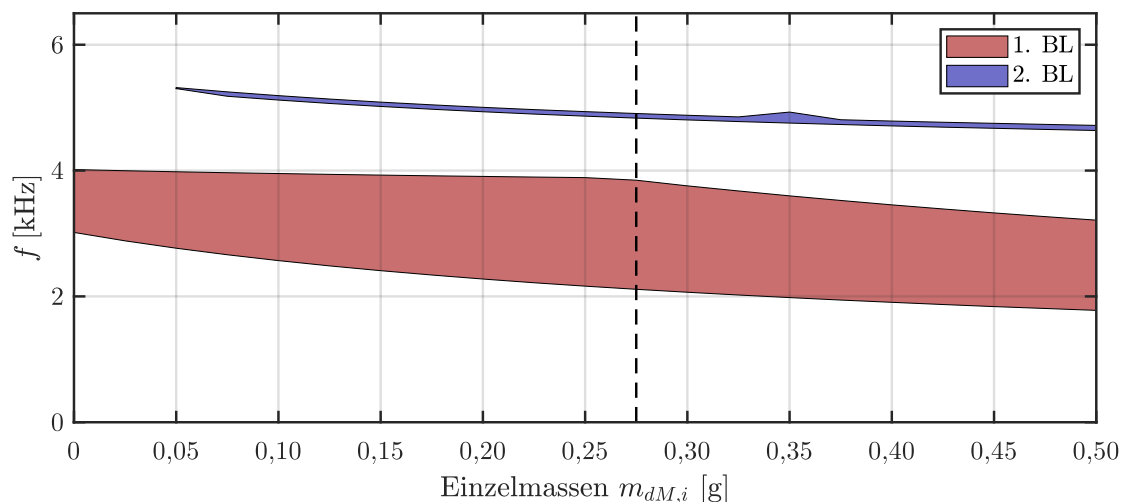


Abbildung 4.39: Einfluss der diskreten Einzelmassen $m_{dM,i}$ auf die Randfrequenzen der ersten zwei Bandlücken. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3, jedoch mit der Auslenkung $W = 3$ mm.

Abschließend sind in der Abb. 4.40a der Einfluss der diskreten Einzelmassen $m_{dM,i}$ auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}(f_{BL,Mf}))$ des Wellenvektors und in der Abb. 4.40b die zugehörigen Wellentransmissionen bei den Bandlückenmittenfrequenzen dargestellt. Auch in diesem Fall zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den qualitativen Verläufen der kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors und der zugehörigen Wellentransmissionen. Besonders auffällig ist hierbei, dass die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors bei der ersten Bandlücke mit zunehmenden Massen $m_{dM,i}$ abnehmen, während sie bei der zweiten Bandlücke zunehmen. Die Wellentransmissionen nehmen entsprechend bei der ersten Bandlücke mit steigenden Massen zu und bei der zweiten Bandlücke ab. Die Ursache für dieses gegensätzliche Verhalten der beiden Bandlücken in Abhängigkeit der diskreten Einzelmassen $m_{dM,i}$ ist vermutlich auf die zwei unterschiedlichen Typen der Bandlücken zurückzuführen, da die erste Bandlücke eine lokal-resonante bzw. hybride Bandlücke ist, während die zweite Bandlücke eine BRAGG-Bandlücke darstellt. Weiterhin kann für die

erste Bandlücke sowohl bei den kleinsten Imaginärteilen des Wellenvektors als auch bei den Wellentransmissionen eine leichte Änderung der Steigung bei $m_{dM,i} = 0,275$ g, also an der Stelle, an der sich der maßgebende Wellenvektor am oberen Rand der ersten Bandlücke ändert, beobachtet werden.

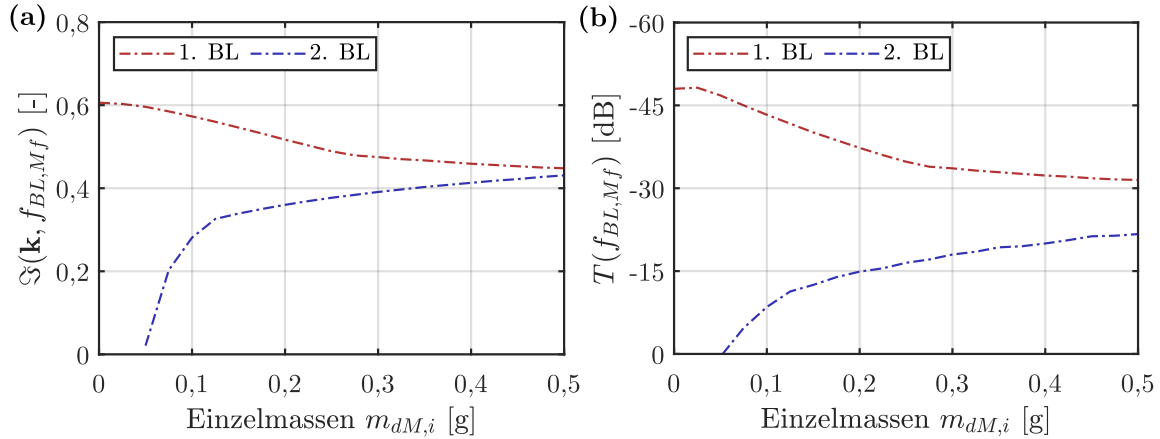


Abbildung 4.40: (a) Einfluss der diskreten Einzelmassen $m_{dM,i}$ auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}, f_{BL,Mf})$ des Wellenvektors \mathbf{k} bei den Bandlückenmittenfrequenzen $f_{BL,Mf}$. (b) Zugehörige Wellentransmissionen $T(f_{BL,Mf})$ für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$.

4.4.4 Beeinflussung durch die geometrische Nichtlinearität

Eine weitere Möglichkeit die Frequenzbereiche der Bandlücken von Zick-Zack-Gitterstrukturen aktiv zu beeinflussen stellt die Ausnutzung der Effekte aus der geometrischen Nichtlinearität dar [99,104]. Dabei wird die Gitterstruktur, wie in der Abb. 4.41 veranschaulicht, durch eine ein- oder zweiaxiale äußere Belastung beansprucht, wodurch die Frequenzbereiche der Bandlücken gezielt verringert oder erhöht werden können. Im Allgemeinen können unterschiedliche äußere Belastungen p_1 in vertikaler Richtung und p_2 in horizontaler Richtung, wie ebenfalls in der Abb. 4.41 veranschaulicht, verwendet werden. Nachfolgend wer-

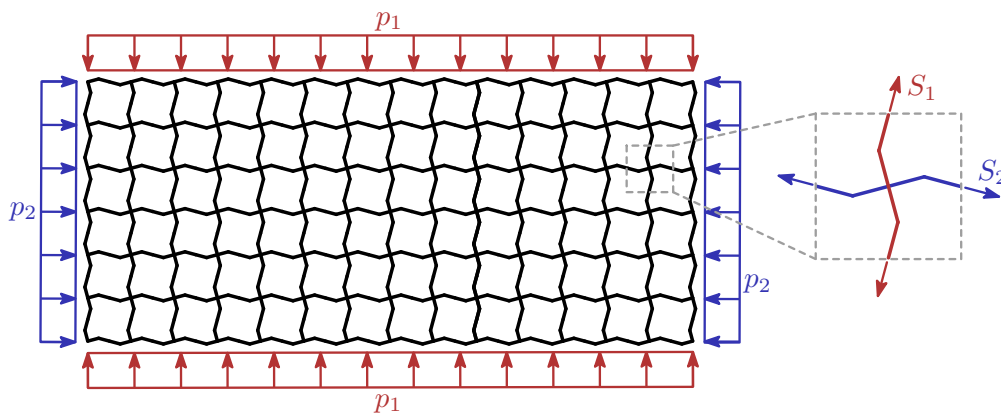


Abbildung 4.41: Beispiel für eine 2D Zick-Zack-Gitterstruktur unter einer zweiaxialen Belastung p_1 und p_2 .

den jedoch nur die Fälle einer zweiaxialen Druck- bzw. Zugbelastung mit $p_1 = p_2$, durch die alle Stabkräfte des Gitters die gleiche Stabkraft S aufweisen, sowie die Fälle einer einaxialen Druck- bzw. Zugbelastung mit $p_2 = 0$, betrachtet. Aufgrund der Zick-Zack-Geometrie sind die Stabkräfte von der Auslenkung W sowie den Gitterkonstanten abhängig und die Stabkräfte müssen in Abhängigkeit der jeweiligen äußeren Belastung durch eine statische Analyse ermittelt werden. Nachfolgend werden die Stabkräfte in den vertikalen Armen, wie in der Abb. 4.41 dargestellt, als S_1 und die Stabkräfte in den horizontalen Armen als S_2 bezeichnet. Beispielsweise hat die einaxiale Druckbelastung p_1 für die Einheitszelle aus der Abb. 4.17 mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.3 zur Folge, dass in den horizontalen Armen des Gitters Zugkräfte auftreten, wobei für ein ausreichend großes Gitter $S_2 \approx -0,2S_1$ gilt. Aufgrund der unterschiedlichen Stabkräfte in den horizontalen und vertikalen Armen des Gitters muss die rechteckige erste IBZ aus der Abb. 4.24b bei den Berechnungen der Dispersionskurven verwendet werden.

In der Abb. 4.42a ist der Einfluss der Stabdruck- (rot) bzw. der Stabzugkräfte (blau) S_1 auf die Randfrequenzen der ersten Bandlücke für den Fall einer zweiaxialen Belastung mit $S_2 = S_1$ dargestellt. Dabei werden die Stabdruckkräfte bis $|S_1| = 130$ N untersucht, die unterhalb der ersten lokalen Knicklast des Systems liegen, wodurch die Einflüsse der geometrischen Nichtlinearität vollständig reversibel bleiben. Vereinfachend werden auch die Stabzugkräfte nur bis $|S_1| = 130$ N untersucht, wenngleich bei Zugkräften kein Stabilitätsversagen auftreten kann. Es zeigt sich, dass die Bandlückenrandfrequenzen durch die zweiaxiale Druckbelastung nennenswert gesenkt werden können. Beispielsweise beträgt die untere Randfrequenz für $S_1 = 0$ N noch $f_{BL,1,Uf} = 2125$ Hz und kann mit der Stabdruckkraft $|S_1| = 130$ N um 11,2% auf $f_{BL,1,Uf} = 1887$ Hz gesenkt werden. Durch eine zweiaxiale Zugbelastung werden die Randfrequenzen der ersten Bandlücke hingegen

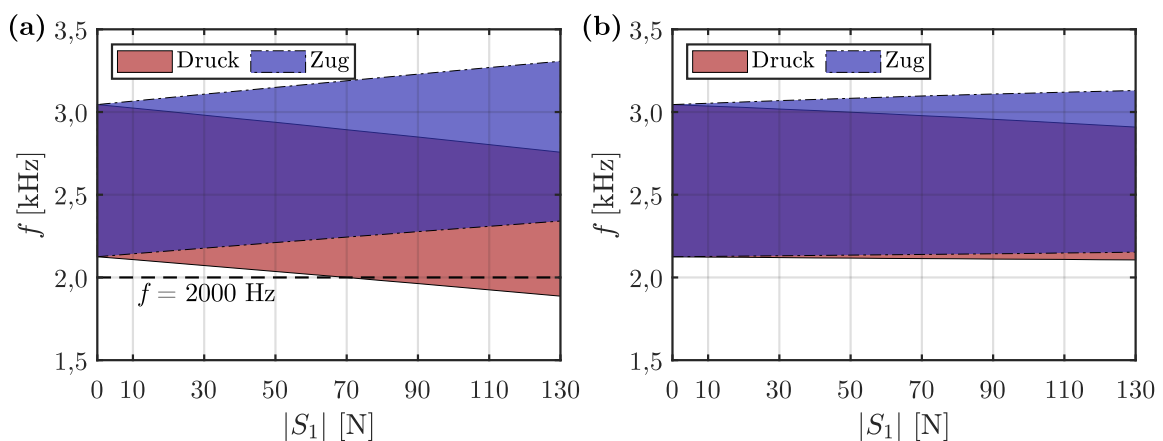


Abbildung 4.42: (a) Einfluss der Stabdruck- (rot) bzw. der Stabzugkräfte (blau) S_1 auf die Randfrequenzen der ersten Bandlücke für eine zweiaxiale Belastung mit $S_1 = S_2$. (b) Einfluss der Stabdruck- (rot) bzw. der Stabzugkräfte (blau) S_1 auf die Randfrequenzen der ersten Bandlücke für eine einaxiale Belastung mit $S_2 = -0,2S_1$.

deutlich angehoben und die untere Randfrequenz steigt mit der Stabzugkraft $|S_1| = 130$ N um 10,2% gegenüber dem unbelasteten System auf $f_{BL,1,Uf} = 2341$ Hz an. Außerdem nimmt die Breite der ersten Bandlücke leicht um 46 Hz zu.

Für den Fall einer einaxialen Belastung mit $S_2 = -0,2S_1$ zeigt sich in der Abb. 4.42b, dass die untere Randfrequenz nahezu unabhängig von der Belastung ist. Für die Stabdruckkraft $|S_1| = 130$ N fällt sie lediglich auf $f_{BL,1,Uf} = 2106$ Hz ab und für die Stabzugkraft $|S_1| = 130$ N steigt sie nur auf $f_{BL,1,Uf} = 2153$ Hz an. Allerdings fällt die obere Randfrequenz deutlicher von $f_{BL,1,Of} = 3045$ Hz bei $S_1 = 0$ N auf $f_{BL,1,Of} = 2909$ Hz bei der Stabdruckkraft $|S_1| = 130$ N ab. Hingegen nimmt die obere Randfrequenz bei der Stabzugkraft $|S_1| = 130$ N auf $f_{BL,1,Of} = 3130$ Hz zu. Hinsichtlich einer Bandlücke im niedrigen Frequenzbereich erweist sich somit eine zweiaxiale Druckbelastung am effektivsten, wohingegen eine möglichst breite erste Bandlücke durch eine einaxiale Zugbelastung erreicht werden kann. Allerdings ist der Einfluss der einaxialen Zugbelastung auf die Breite der ersten Bandlücke eher gering.

Zuletzt sei darauf hingewiesen, dass neben den dargestellten reinen Druck- bzw. Zugbelastungen auch weitere Kombinationen möglich sind. Beispielsweise kann eine Druckkraft in der vertikalen Richtung und eine Zugkraft in der horizontalen Richtung aufgebracht werden. Allerdings konnten in weiteren Untersuchungen weder Bandlücken in niedrigeren Frequenzbereichen noch breitere Bandlücken erzielt werden. Aus diesem Grund wird auf eine ausführliche Darstellung von weiteren Belastungskombinationen verzichtet.

Hinsichtlich der Wellenfilterung bestimmter Frequenzen eignet sich somit die zweiaxiale Druck- oder Zugbelastung am Besten, da sowohl die untere als auch die obere Randfrequenz der Bandlücke beeinflusst werden können. Allerdings eignet sich die zweiaxiale Druckbelastung im Vergleich zu der zweiaxialen Zugbelastung besser für die Filterung im

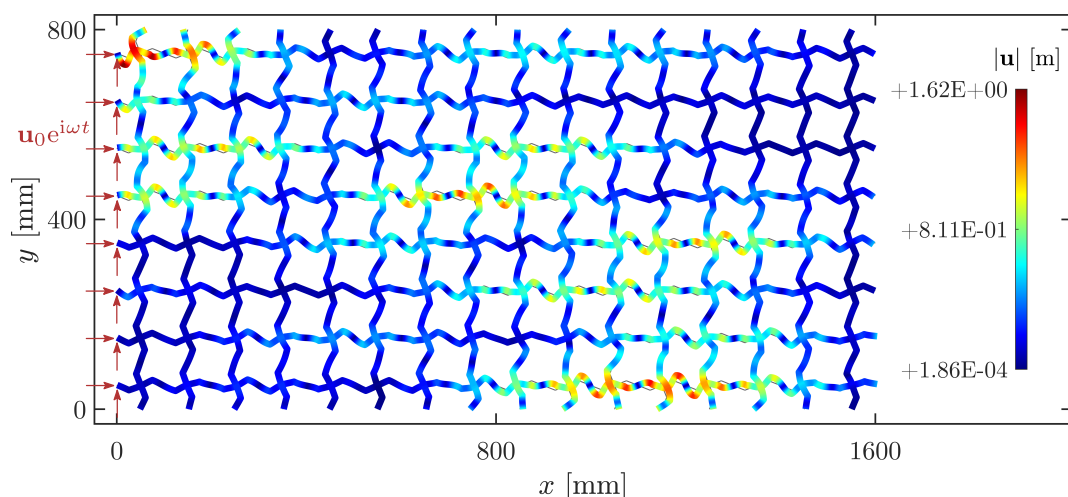


Abbildung 4.43: Verschiebungsfeld im Frequenzbereich ohne Verwendung von TO-Elementen für $f = 2000$ Hz und $|S| = 0$ N bei einer Anregung am linken Rand des Systems durch die vorgegebenen Verschiebungen von $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm.

niedrigen Frequenzbereich. Zur Veranschaulichung der Wellenfilterung einer bestimmten Frequenz ist in der Abb. 4.42a die Frequenz $f = 2000$ Hz durch eine gestrichelte Linie markiert. Diese Frequenz liegt bis zu der Stabdruckkraft $|S_1| = 67$ N außerhalb der Bandlücke und für die Stabdruckkräfte $|S_1| > 67$ N innerhalb der Bandlücke. In der Abb. 4.43 ist das Verschiebungsfeld im Frequenzbereich für die Frequenz $f = 2000$ Hz und $|S_1| = 0$ N dargestellt, wobei das System am linken Rand durch die vorgegebenen Verschiebungen $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm angeregt wird. Es ist dabei offensichtlich, dass sich die elastischen Wellen im ganzen System ausbreiten können ohne abzuklingen. Im Vergleich dazu können sich die elastischen Wellen in dem System mit der Stabdruckkraft $|S_1| = 130$ N, wie in der Abb. 4.44 dargestellt, nicht ausbreiten und die Wellen klingen sehr schnell ab. Das Beispiel zeigt, dass durch eine Steuerung der äußeren Belastung die Frequenzbereiche der Bandlücken aktiv beeinflusst werden können und damit ein *on-off*-Schalter für bestimmte Frequenzen realisiert werden kann. Dabei kann der Schalter entweder auf den unteren Rand oder den oberen Rand der Bandlücke abgestimmt werden. Bei einer Abstimmung auf den unteren Rand für eine Druckbelastung, wie im vorliegenden Beispiel, liegt der zu filternde Frequenzbereich im unbelasteten System außerhalb der Bandlücke und die Wellen können sich ausbreiten. Die Ausgangskonfiguration des Schalters ist somit *off*. Durch das Aufbringen der äußeren Druckbelastung liegt der zu filternde Frequenzbereich dann innerhalb der Bandlücke und die Wellen können sich nicht mehr ausbreiten. Die Konfiguration des Schalters wechselt also auf *on*. Bei einer Abstimmung auf den oberen Rand der Bandlücke liegt der zu filternde Frequenzbereich im unbelasteten System hingegen innerhalb der Bandlücke und die Wellen können sich nicht ausbreiten. In diesem Fall ist die Ausgangskonfiguration des Schalters *on*. Durch das Aufbringen der äußeren Druckbelastung sinkt die obere Randfrequenz der Bandlücke ab und die Wellen können

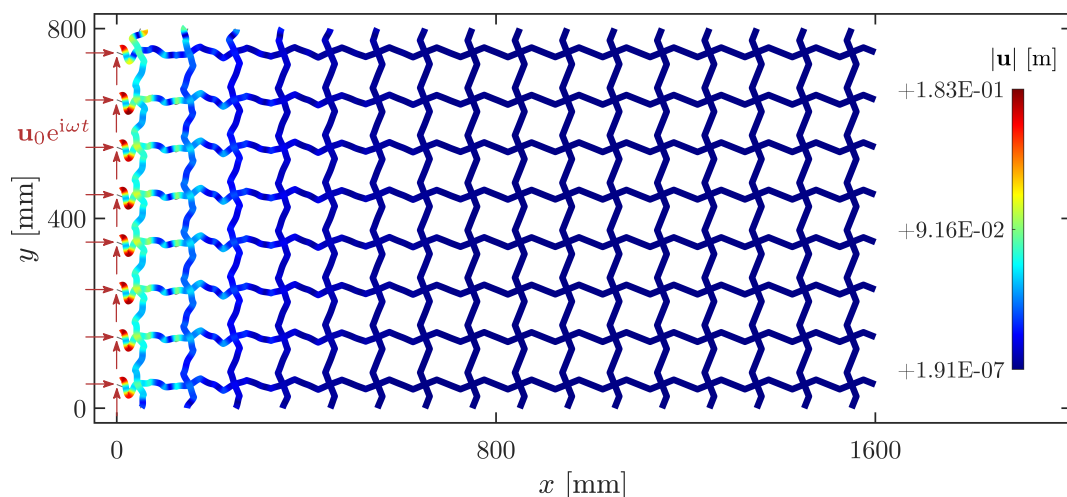


Abbildung 4.44: Verschiebungsfeld im Frequenzbereich ohne Verwendung von TO-Elementen für $f = 2000$ Hz und die Stabdruckkraft $|S| = 130$ N bei einer Anregung am linken Rand des Systems durch die vorgegebenen Verschiebungen von $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm.

sich in dem abgestimmten Frequenzbereich ausbreiten. Der Schalter wechselt in diesem Fall durch das Aufbringen der äußeren Druckbelastung auf *off*. Eine Abstimmung auf den unteren Rand der Bandlücke kann somit beispielsweise als *off-on*-Schalter und eine Abstimmung auf den oberen Rand der Bandlücke als *on-off*-Schalter bezeichnet werden. Bei einer zweiaxialen Zugbelastung liegt hingegen der umgekehrte Fall vor und bei einer Abstimmung auf den unteren Rand der Bandlücke ergibt sich ein *on-off*-Schalter bzw. bei einer Abstimmung auf den oberen Rand der Bandlücke ergibt sich ein *off-on*-Schalter. Da bei den einaxialen Belastungszuständen im Wesentlichen nur die obere Randfrequenz der Bandlücke beeinflusst werden kann, eignet sich dieser nur als ein *on-off*-Schalter bei einer Druckbelastung bzw. als ein *off-on*-Schalter bei einer Zugbelastung, wohingegen bei den zweiaxialen Belastungszuständen beide Schaltertypen realisiert werden können.

Abschließend sei angemerkt, dass die äußere Belastung keinen nennenswerten Einfluss auf die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors in den Bandlücken oder die Wellentransmissionen hat. Zwar nehmen die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors mit steigenden Stabdruckkräften ab und die Wellentransmissionen nehmen entsprechend zu, allerdings betragen die Änderungen nur maximal 5 % und sind praktisch vernachlässigbar. Auf eine ausführliche Darstellung der Einflüsse auf die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors und auf die Wellentransmissionen wird daher an dieser Stelle verzichtet.

4.4.5 Zusammenfassung der Erkenntnisse

In diesem Abschnitt werden sowohl passive als auch aktive Maßnahmen zur Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in 2D schlanken phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen untersucht. Als passive Maßnahmen können dabei die geometrischen und materiellen Parameter adäquat gewählt werden. Zur aktiven Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens können Einzelmassen als lokale Resonatoren oder äußere Belastungen unter der Ausnutzung geometrischer Nichtlinearität angebracht werden. In der Tab. 4.4 sind die wesentlichen Erkenntnisse aus den Parameterstudien zusammengefasst. Dabei sind in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters die Kriterien für eine niederfrequente sowie die Kriterien für eine breite erste Bandlücke angegeben. Es wird deutlich, dass sich die Kriterien für eine niederfrequente Bandlücke und die Kriterien für eine breite Bandlücke bei einigen Parametern widersprechen. Beispielsweise müssen die Gitterkonstante l oder die Auslenkung W für eine niederfrequente erste Bandlücke möglichst groß gewählt werden, wohingegen diese Parameter für eine breite Bandlücke klein sein müssen. Auch bei der Wahl der Materialparameter zeigt sich ein derartiges Problem. Zwar sollte in jedem Fall für die inneren Arme der E-Modul E_1 sehr klein und die Massendichte ρ_1 sehr groß gewählt werden, jedoch tritt bei der Wahl für den E-Modul E_2 und die Massendichte ρ_2 der äußeren Arme ein Konflikt auf. So muss für eine möglichst niederfrequente Bandlücke E_2 sehr klein bzw. ρ_2 sehr groß und für eine möglichst breite erste Bandlücke E_2 groß

bzw. ρ_2 klein gewählt werden. Hingegen zeigt sich beim Verhältnis der Gitterkonstanten l_1/l_2 , dass zwar für ein großes Verhältnis l_1/l_2 der Frequenzbereich der Bandlücke abgesenkt werden kann, aber der Einfluss so gering ist, dass das Verhältnis $l_1/l_2 = 1,0$ für eine niederfrequente und breite Bandlücke als optimal betrachtet werden kann. Als sehr effektiv erweist sich das Anbringen von diskreten Einzelmassen, wodurch sowohl der Frequenzbereich der Bandlücke erheblich verringert als auch gleichzeitig die Breite der Bandlücke vergrößert werden kann. Ein ähnlicher Effekt kann durch die Verwendung unterschiedlicher Querschnitte erzielt werden, wobei sich das Verhältnis der Abmessungen $a_2/a_1 \leq 0,3$ als optimal erweist. Auch die Lage b der Zick-Zack-Knicke hat einen großen Einfluss, wobei b für eine niederfrequente Bandlücke möglichst groß gewählt werden muss. Für eine möglichst breite Bandlücke sollte das Verhältnis $2b/l \approx 0,8$ betragen.

Tabelle 4.4: Kriterien für niederfrequente und breite Bandlücken.

Art	Parameter		Niederfrequente Bandlücken	Breite Bandlücken
Passiv	Geometrie	l	Möglichst groß	Möglichst klein
		W	Möglichst groß	Eher klein
		l_1/l_2	Groß, geringer Einfluss	$l_1/l_2 = 1,0$
		b	Möglichst groß	$2b/l \approx 0,8$
		a_1, a_2	$a_2/a_1 \leq 0,3$	$a_2/a_1 \leq 0,3$ oder $a_2/a_1 \geq 1,5$
	Material	E_1, E_2	E_1 und E_2 sehr klein	E_1 sehr klein, E_2 groß
		ρ_1, ρ_2	ρ_1 und ρ_2 sehr groß	ρ_1 sehr groß, ρ_2 klein
Aktiv	Einzelmassen (Resonatoren)	$m_{dm,i}$	Möglichst groß	Individuell für jedes System
	Äußere Last	S_1, S_2	S_1, S_2 möglichst große Druckkräfte	Einaxiale Zugbelastung

5 Analyse von 2D dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen

In diesem Kapitel werden 2D dickwandige bzw. gedrungene phononische Zick-Zack-Gitterstrukturen mit Perforationen in den Zick-Zack-Armen untersucht. Außerdem werden zusätzliche Varianten für lokale Resonatoren und die Möglichkeit einer Staffelung verschiedener Gitterstrukturen vorgestellt. Aufgrund der komplexeren Geometrien können die exakten spektralen Elementmatrizen der SEM nach DOYLE nicht mehr hergeleitet werden. Aus diesem Grund erfolgen die Untersuchungen in diesem Kapitel mithilfe der SEM nach PATERA und 2D ESZ-Elementen. Dabei werden auch die wesentlichen Vorteile der SEM nach PATERA im Vergleich zu konventionellen FEM-Berechnungen aufgezeigt.

5.1 Beschreibung der Problemstellung

Neben den im Kapitel 4 beschriebenen Möglichkeiten zur Beeinflussung des elastischen Wellenausbreitungsverhaltens in Zick-Zack-Gitterstrukturen können die Frequenzbereiche der Bandlücken auch durch Perforationen in den dickwandigen Zick-Zack-Armen, wie in der Abb. 5.1a beispielhaft veranschaulicht, beeinflusst werden [100]. ZHANG et al. [176] zeigten bereits, dass die Bandlücken einer Zick-Zack-Gitterstruktur durch kreisförmige Perforationen manipuliert werden können. Allerdings untersuchten die Autoren lediglich eine Einheitszelle mit jeweils einer kreisförmigen Perforation in den inneren Armen. Ausführliche Parameterstudien mit mehreren Perforationen und unterschiedlichen Formen sind nach Wissen des Autors bisher in der Literatur nicht bekannt. Weiterhin untersuchten

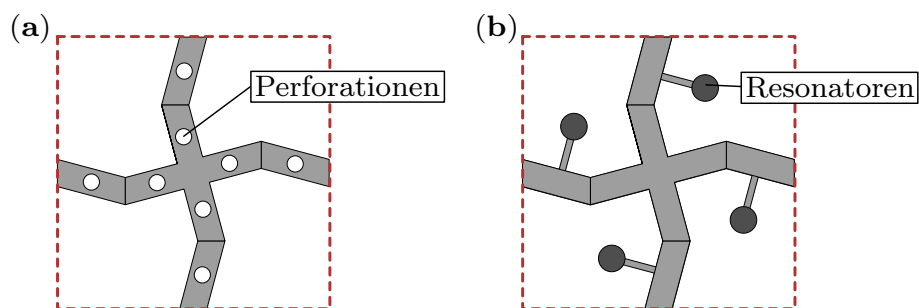


Abbildung 5.1: (a) Einheitszelle einer dickwandigen Zick-Zack-Gitterstruktur mit Perforationen. (b) Einheitszelle einer dickwandigen Zick-Zack-Gitterstruktur mit Resonatoren. Die Resonatoren sind hier beispielhaft als Kragarme mit einer geringen Biegesteifigkeit und einer großen Masse am freien Ende dargestellt.

ZHAO und WANG [177] eine Einheitszelle, bei der die Zick-Zack-Arme an einen Kreisring angeschlossen sind und zeigten, dass in bestimmten Frequenzbereichen negative Beugungsbilder erzeugt werden können. Das Phänomen der negativen Beugung wird in dieser Arbeit allerdings nicht näher betrachtet. In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich verschiedene Perforationen auf die Frequenzbereiche der Bandlücken sowie das Dämpfungsverhalten der dickwandigen Zick-Zack-Gitterstrukturen auswirken. Dabei werden insbesondere die Positionen sowie die Anzahl der Perforationen variiert und die Einflüsse auf das elastische Wellenausbreitungsverhalten analysiert. Außerdem werden, wie in der Abb. 5.1b veranschaulicht, verschiedene Möglichkeiten zur Ausnutzung des lokalen Resonanzeffekts durch zusätzliche Massen erörtert. Abschließend wird die Möglichkeit einer Staffelung von verschiedenen gitterartigen phononischen Strukturen mit unterschiedlichen Wellenausbreitungseigenschaften vorgestellt.

Aufgrund der komplexeren Geometrie kann die Analyse bei den dickwandigen Zick-Zack-Gitterstrukturen nicht mehr mithilfe von Balkenelementen der SEM nach DOYLE erfolgen. Stattdessen erfolgen die Untersuchungen in diesem Kapitel mithilfe der 2D spektralen Elemente im ESZ nach PATERA. Dabei werden auch die deutlichen Vorteile der SEM nach PATERA bei der Berechnung der Dispersionskurven und der Wellentransmissionen gezeigt.

5.2 Bestimmung der Dispersionskurven

5.2.1 Einheitszelle und periodische Randbedingungen

Die Bestimmung der Dispersionskurven erfolgt im 2D Fall unter Verwendung von ESZ-Elementen im Wesentlichen analog zu der im Abschnitt 4.2 beschriebenen Vorgehensweise. Allerdings weisen die Ränder der Einheitszelle, im Gegensatz zur Modellierung mit Balkenelementen, mehrere Knoten auf und es muss, wie in der Abb. 5.2a dargestellt, eine Partitionierung der Knotenfreiheitsgrade erfolgen. Dabei werden beispielsweise sämtliche Knotenfreiheitsgrade auf dem Rand Γ_1 mit \mathbf{u}_1 und auf dem Rand Γ_2 mit \mathbf{u}_2 , usw., zusammengefasst. Für die Berücksichtigung der BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen müssen die Eingangsränder Γ_1 und Γ_3 , die in der Abb. 5.2a rot gekennzeichnet sind, mit den Ausgangsrändern Γ_2 und Γ_4 , die in der Abb. 5.2a blau gekennzeichnet sind, verknüpft werden. Dazu ist es erforderlich, wie in der Abb. 5.2b beispielhaft für die Ränder Γ_1 und Γ_2 veranschaulicht, die einzelnen Knoten auf den Rändern miteinander zu verknüpfen. Im Allgemeinen können die Ränder unterschiedlich diskretisiert sein (nicht konforme Diskretisierung) und der Rand Γ_1 kann beispielsweise 5 und der Rand Γ_2 nur 3 Knoten aufweisen. In diesem Fall kann die Verträglichkeit der unterschiedlichen Diskretisierungen der Ränder über eine Transformation des Eingangsrands auf den Ausgangsrand mit Wichtungsfaktoren erfolgen [15]. Eine weitere verbreitete Möglichkeit stellt die ebenfalls in der Abb.

5.2b veranschaulichte konforme Diskretisierung der Ränder dar [108, 114], die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird. Bei der konformen Diskretisierung der Ränder wird zuerst der Eingangsrand diskretisiert und diese Diskretisierung wird anschließend auf den Ausgangsrand übertragen. Dadurch ergeben sich konforme Diskretisierungen der beiden Ränder und der Knoten 1 vom Rand Γ_1 kann beispielsweise direkt der periodischen Kopie $\bar{1}$ auf dem Rand Γ_2 zugeordnet werden. Im Anschluss an die konforme Diskretisierung der Ränder erfolgt die Vernetzung der Flächen mit quadrilateralen spektralen Elementen. Der Einbau der BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen in das SE-Gleichungssystem kann analog zum Abschnitt 4.2 mithilfe der Gln. (4.2) und (4.3) erfolgen. Dabei können auch in diesem Fall zuerst die inneren Freiheitsgrade der Einheitszelle durch die dynamische Kondensation aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Anstelle der globalen kondensierten spektralen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}_{g,kond}$ nach DOYLE muss in der Gl. (4.2) die globale kondensierte dynamische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{g,kond,dyn} = (\mathbf{K}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g)_{kond}$ eingesetzt werden.

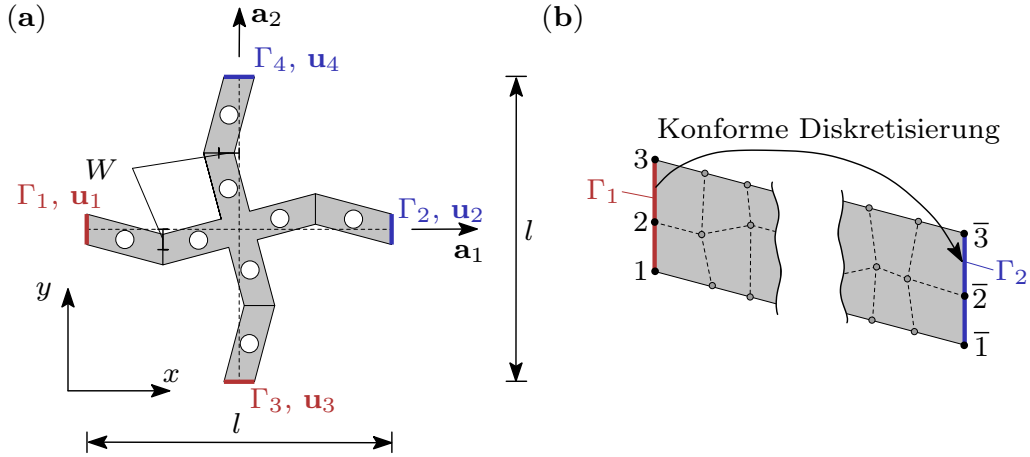


Abbildung 5.2: (a) Einheitszelle einer perforierten Zick-Zack-Gitterstruktur mit den Rändern Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 und den zugehörigen partitionierten Freiheitsgraden \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_4 . (b) Schematische Darstellung der konformen Diskretisierung. Die Diskretisierung vom Rand Γ_2 mit den Knoten $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ ist eine Kopie der Diskretisierung vom Rand Γ_1 mit den Knoten 1, 2, 3.

5.2.2 Lösung des Eigenwertproblems

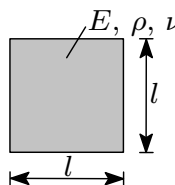
Bei der SEM nach PATERA ergibt sich für die Bestimmung der reellen Dispersionskurven eine lineare Eigenwertgleichung der Form $(\mathbf{K}_g(\lambda_x, \lambda_y) - \omega^2 \mathbf{M}_g(\lambda_x, \lambda_y)) \mathbf{a} = \mathbf{0}$, welche für eine diskrete Anzahl von Ausbreitungskonstanten λ_x und λ_y innerhalb der ersten IBZ gelöst werden muss. Für die Bestimmung der komplexen Dispersionskurven ergeben sich hingegen, analog zu den Gln. (4.7) und (4.8) bei der SEM nach DOYLE, quadratische Eigenwertgleichungen für die Ränder Γ -X und X-M der ersten IBZ sowie eine quartische Eigenwertgleichung für den Rand M- Γ . Die Koeffizientenmatrizen zur Formulierung die-

ser Eigenwertgleichungen können mithilfe des Anhangs D aus der globalen dynamischen Steifigkeitsmatrix bestimmt werden.

Nachfolgend werden die wesentlichen Vor- und Nachteile der SEM nach PATERA bei der Berechnung der Dispersionskurven im Vergleich zu der FEM aufgezeigt. Damit bei den Fehleranalysen die Einflüsse aus der Vernetzung, wie beispielsweise verzerrte Elemente mit spitzen Winkeln, minimiert werden können, erfolgen die Untersuchungen an einer einfachen homogenen quadratischen Einheitszelle aus Stahl mit den Kantenlänge $l = 100$ mm und der Dicke $t = 2$ mm. Durch die einfache Geometrie können sämtliche Berechnungen mit einem strukturierten Netz (mit ESZ-Elementen) durchgeführt werden und der Einfluss aus der Vernetzung wird somit minimiert. In der Tab. 5.1 sind die Geometrie- und Materialparameter zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Geometrie- und Materialeigenschaften der quadratischen Einheitszelle aus Stahl.

l	t	E	ρ	ν
[mm]	[mm]	[GPa]	[kg/m ³]	[–]
100	2	210	7850	0,3



Lösung der linearen Eigenwertgleichung

Die ε_2 -Fehler der numerischen Näherungslösungen für die reellen Dispersionskurven können mithilfe der Gl. (4.6) bestimmt werden. In der Abb. 5.3a sind die maximalen ε_2 -Fehler der FEM-Berechnungen mit der Ordnung $p = 2$ sowie der SEM-Berechnungen der Ordnungen $p = 4$ und $p = 6$ für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden dargestellt. Für die SEM-Berechnungen der Ordnung $p = 6$ sind die ε_2 -Fehler sowohl bei der Verwendung

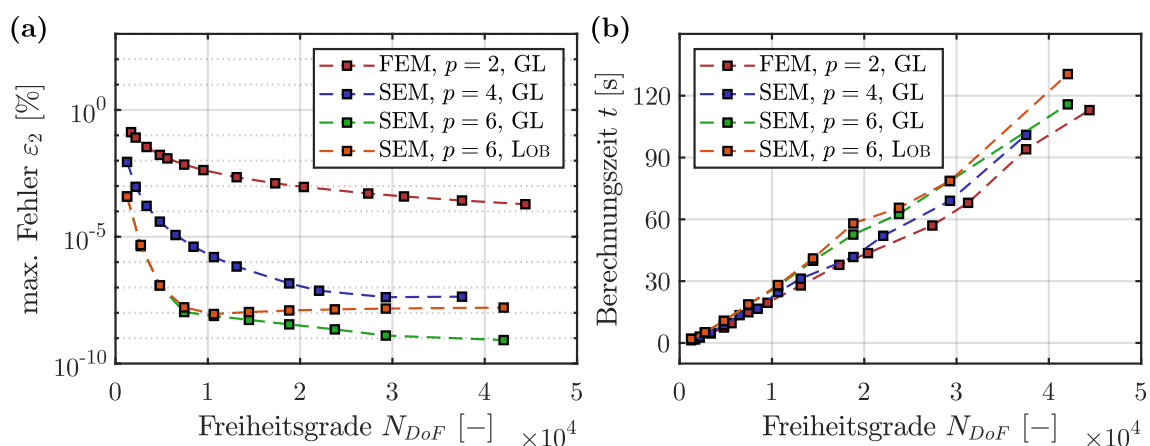


Abbildung 5.3: (a) Maximale Fehler ε_2 der FEM- und SEM-Berechnungen der ersten 40 Bänder der reellen Dispersionskurven für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. (b) Zugehörige Berechnungszeiten der FEM und SEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. Die Berechnungen basieren auf der in der Tab. 5.1 angegebenen Einheitszelle.

der numerischen Quadratur nach GAUSS-LEGENDRE (GL) als auch nach LOBATTO (LOB) angegeben. In den anderen dargestellten Fällen erfolgte die Ermittlung der Elementmatrizen ausschließlich mittels der GL-Quadratur. Die dargestellten maximalen ε_2 -Fehler ergeben sich aus dem Maximum der für jedes Band $i = 1 \dots 40$ der reellen Dispersionskurven ermittelten Fehler $\varepsilon_{2,i}$. Im Gegensatz zu den Untersuchungen aus dem Abschnitt 4.2 liegt jedoch keine exakte Referenzlösung für die Auswertung des Fehlers vor. Stattdessen wird als Referenzlösung eine SEM-Berechnung mit der Elementordnung $p = 8$, $N_{DoF} = 33282$ Freiheitsgraden und einer Ermittlung der Elementmatrizen mittels der GL-Quadratur verwendet. Die Anzahl von Lösungswerten pro Band entspricht der untersuchten Anzahl von diskreten Wellenvektoren auf den Rändern der ersten IBZ und beträgt in diesem Fall $N = 35$. Die Abb. 5.3a zeigt, dass der maximale Fehler bei allen Berechnungen, bei denen die Elementmatrizen mittels der GL-Quadratur bestimmt wurden, mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden kontinuierlich abnehmen. Dabei weisen die SEM-Berechnungen allerdings eine deutlich höhere Genauigkeit als die FEM-Berechnungen auf, wobei die Genauigkeit der SEM mit steigender Elementordnung p zunimmt. Weiterhin zeigt sich, dass der ε_2 -Fehler bei der Verwendung der LOB-Quadratur ab einer gewissen Anzahl von Freiheitsgraden nahezu konstant ist und bei weiter steigender Anzahl von Freiheitsgraden nicht mehr abnimmt. Dieses Verhalten begründet sich in dem intrinsischen Fehler, der durch die nicht exakte Integration der Elementmassenmatrix auftritt und ab einer bestimmten Anzahl von Freiheitsgraden den Gesamtfehler dominiert [121].

In der Abb. 5.3b sind die zugehörigen Berechnungszeiten zur Bestimmung der reellen Dispersionskurven dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die Berechnungszeiten in allen Fällen mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden ungefähr linear zunehmen. Außerdem wird deutlich, dass die Berechnungszeiten der SEM mit steigender Elementordnung bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden zunehmen. Allerdings ist der Einfluss der Elementordnung auf die Berechnungszeiten der SEM vergleichsweise gering und variiert beispielsweise für $N_{DoF} = 29282$ zwischen $t = 69$ s für $p = 4$ und $t = 79$ s für $p = 6$ und GL-Integration. Durch die Gegenüberstellung der ε_2 -Fehler aus der Abb. 5.3a und den zugehörigen Berechnungszeiten aus der Abb. 5.3b wird der Vorteil der SEM im Vergleich zur FEM deutlich. Durch die hohe Genauigkeit der SEM im Vergleich zur FEM sind zur Einhaltung einer bestimmten Fehlerschranke deutlich weniger Freiheitsgrade erforderlich, wodurch sich eine erheblich kürzere Berechnungszeit ergibt. Beispielsweise kann mittels der SEM mit $p = 6$ und $N_{DoF} = 1250$ bei einer Berechnungszeit von nur $t = 2$ s eine vergleichbare Genauigkeit erreicht werden wie bei einer Berechnung mittels der FEM mit $N_{DoF} = 37538$ und einer Berechnungszeit von $t = 94$ s. Dies entspricht einer Reduktion der Berechnungszeit bei einer vergleichbaren Genauigkeit der numerischen Näherungslösung von 97,9%. Allerdings ergibt sich, anders als bei den Berechnungen im Zeitbereich [121], kein Vorteil durch die Verwendung der LOB-Quadratur im Vergleich zur GL-Quadratur.

Lösung der quadratischen/quartischen Eigenwertgleichung

Analog zur SEM nach DOYLE ergeben sich zur Bestimmung der komplexen Dispersionskurven $\mathbf{k}(\omega)$ quadratische Eigenwertgleichungen für die Ränder $\Gamma-X$ und $X-M$ der ersten IBZ sowie eine quartische Eigenwertgleichung für den Rand $M-\Gamma$. Die Formulierungen und die Lösung der quadratischen und quartischen Eigenwertgleichungen erfolgen daher analog zum Unterabschnitt 4.2.2. In der Abb. 5.4a sind die ε_2 -Fehler bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven mittels der FEM mit der Ordnung $p = 2$ sowie der SEM der Ordnungen $p = 4$ und $p = 6$ für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden dargestellt. Auch in diesem Fall sind für die SEM-Berechnungen der Ordnung $p = 6$ die ε_2 -Fehler sowohl bei der Verwendung der GL-Quadratur als auch nach der LOB-Quadratur angegeben. Aufgrund des sehr hohen Aufwands zur Berechnung der komplexen Dispersionskurven basiert die Berechnung der ε_2 -Fehler nach Gl. (4.6) auf der Auswertung der Eigenwerte bei einer einzigen Frequenz von $f = 10000$ Hz. Als Referenzlösung dient auch in diesem Fall eine SEM-Berechnung mit der Elementordnung $p = 8$, $N_{DoF} = 33282$ Freiheitsgraden und einer Ermittlung der Elementmatrizen mittels der GL-Quadratur. In der Abb. 5.4a zeigt sich, analog zur Fehleranalyse bei der Berechnung der reellen Dispersionskurven in der Abb. 5.3a, dass die ε_2 -Fehler sowohl mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden als auch mit zunehmender Elementordnung abnehmen. Der ε_2 -Fehler bei der Verwendung der LOB-Quadratur ist auch bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven ab einer gewissen Anzahl von Freiheitsgraden fast konstant und nimmt bei weiter steigender Anzahl von Freiheitsgraden nicht mehr ab.

Bei den in der Abb. 5.4b dargestellten zugehörigen Berechnungszeiten zeigt sich, dass sie in allen vier Fällen mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden exponentiell zunehmen. Entgegen den Berechnungszeiten für die reellen Dispersionskurven zeigt sich in diesem

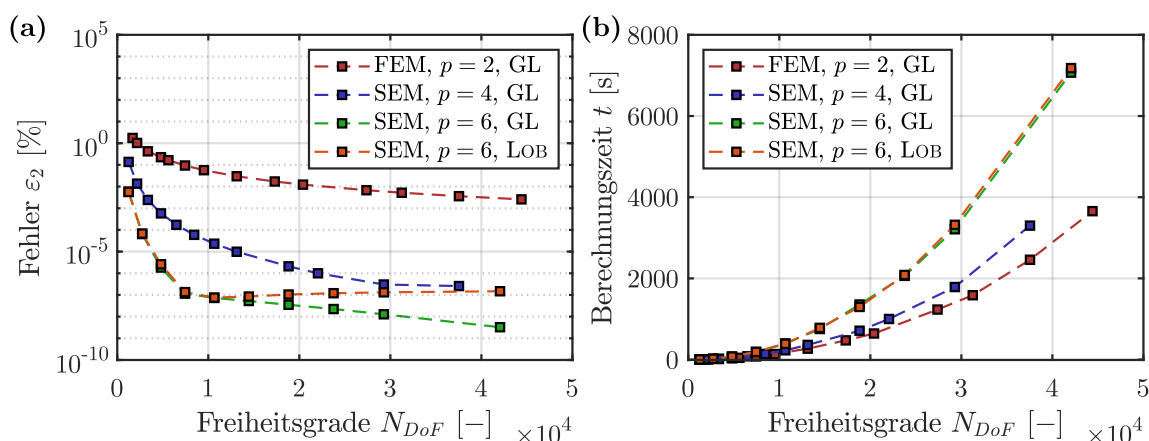


Abbildung 5.4: (a) Fehler ε_2 der FEM- und SEM-Berechnungen für die komplexen Dispersionskurven bei der Frequenz $f = 10000$ Hz für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. (b) Zugehörige Berechnungszeiten der FEM und SEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. Die Berechnungen basieren auf der in der Tab. 5.1 angegebenen Einheitszelle.

Fall bei der SEM auch ein erheblicher Einfluss der Elementordnung auf die Berechnungszeiten. Dabei nimmt die Berechnungszeit mit steigender Elementordnung ebenfalls exponentiell zu. Das Quadratur-Verfahren zur Ermittlung der Elementmatrizen hat hingegen keinen nennenswerten Einfluss auf die Berechnungszeiten. Trotz der größeren Berechnungszeiten bei der Verwendung von Elementen höherer Ordnung ergibt sich auch bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven ein wesentlicher Vorteil der SEM im Vergleich zur FEM. Beispielsweise kann mittels der SEM mit $p = 6$ und $N_{DoF} = 1250$ bei einer Berechnungszeit von nur $t = 3$ s eine vergleichbare Genauigkeit erreicht werden wie bei einer Berechnung mittels der FEM mit $N_{DoF} = 27378$ und einer Berechnungszeit von $t = 1232$ s. Dies entspricht einer Reduktion der Berechnungszeit bei einer vergleichbaren Genauigkeit der numerischen Näherungslösung von 99,8%. Wie bei der Berechnung der reellen Dispersionskurven kann auch bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven kein Vorteil durch die Verwendung der LOB-Quadratur im Vergleich zur GL-Quadratur festgestellt werden.

5.3 Bestimmung der Wellentransmission

Die Bestimmung der Wellentransmission erfolgt im Wesentlichen analog zu der im Abschnitt 4.3 beschriebenen Vorgehensweise, wobei jedoch für jede diskrete Frequenz ω_n das Gleichungssystem

$$(\mathbf{K}_g - \omega_n^2 \mathbf{M}_g) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (5.1)$$

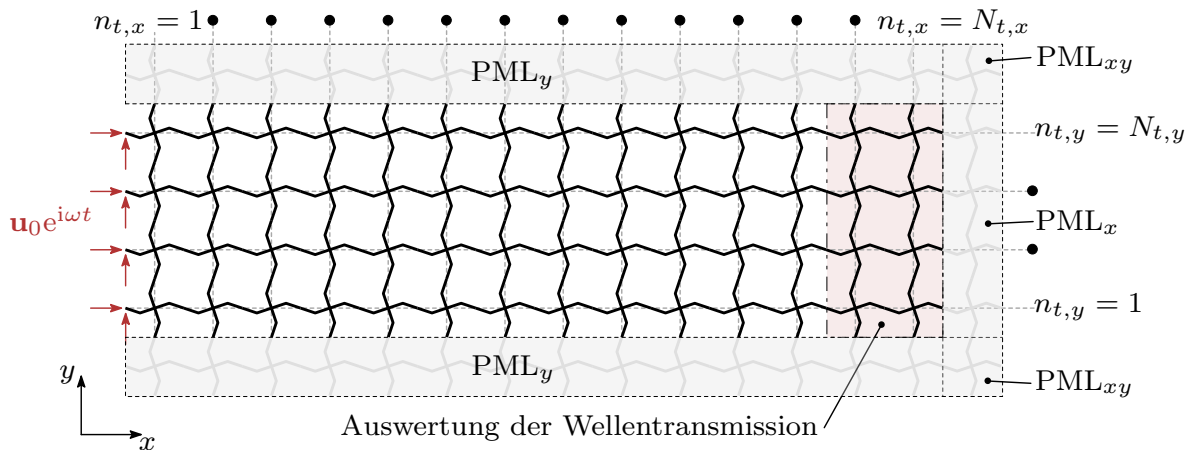


Abbildung 5.5: System für die Berechnung der Wellentransmission in der Γ -X-Richtung von phononischen Gitterstrukturen. Das System wird am linken Rand durch die vorgegebenen zeitharmonischen Verschiebungen $\mathbf{u}_0 e^{i\omega t}$ angeregt. Die Auswertung der Wellentransmission erfolgt in den letzten $N_{t,eval}$ Spalten auf der rechten Seite, wobei der Auswertungsbereich hier beispielhaft für $N_{t,eval} = 2$ rosa markiert ist. Am oberen, unteren und rechten Rand können PMLs, die hellgrau markiert sind, berücksichtigt werden. Die abgebildeten Indizes bei den PMLs geben die jeweilige Richtung der Koordinatenstreckung an.

gelöst werden muss. Dabei ist \mathbf{K}_g die globale Systemsteifigkeitsmatrix, \mathbf{M}_g die globale Systemmassenmatrix und \mathbf{f} der globale Lastvektor. Außerdem erfolgt die Berücksichtigung der endlichen fiktiven Berandungen, wie in der Abb. 5.5 dargestellt, durch Perfectly Matched Layers (PMLs). Am oberen sowie unteren Rand basieren die PMLs auf einer Koordinatenstreckung in der y -Richtung und am rechten Rand auf einer Streckung in der x -Richtung. In den oberen und unteren Ecken am rechten Rand muss hingegen eine Streckung in den x - und y -Richtungen erfolgen. Zur Veranschaulichung sind die jeweiligen PML-Schichten in der Abb. 5.5 als PML_y , PML_x und PML_{xy} gekennzeichnet, wobei der Index die Richtung(en) der Koordinatenstreckung angibt. Die Dicke der PML-Schichten wird durch $N_{PML} \in \mathbb{N}$ als Anzahl von Einheitszellen in Dickenrichtung angegeben und beträgt nachfolgend, wenn nicht anders angegeben, $N_{PML} = 1$. Die Auswertung der Wellentransmission erfolgt in den letzten $N_{t,eval}$ Spalten auf der rechten Seite des System mittels der Gl. (4.10), wobei der Auswertungsbereich in der Abb. 5.5 beispielhaft für $N_{t,eval} = 2$ rosa markiert ist.

Einfluss von PMLs auf die Transmissionsberechnung

In der Abb. 5.6 sind die komplexen Dispersionskurven und das Transmissionsspektrum für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1 dargestellt. Dabei wird die dünnwandige Einheitszelle aus der Abb. 4.5a verwendet, um einen Vergleich zu der Berechnung mittels den exakten spek-

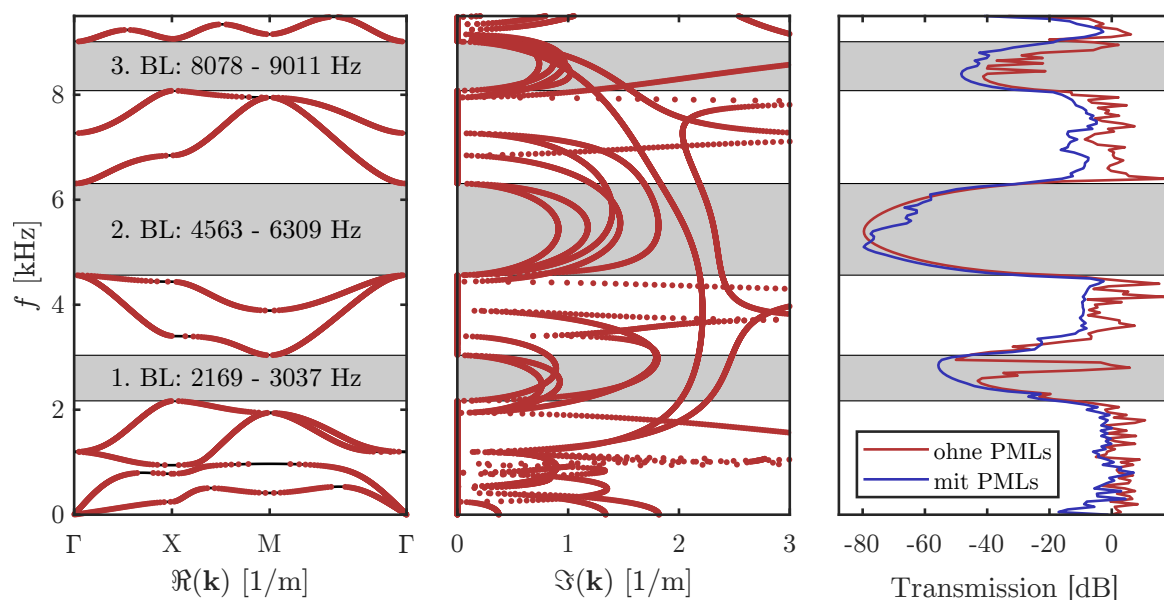


Abbildung 5.6: Komplexe Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 4.5a mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 4.1, sowie das zugehörige Transmissionsspektrum in der Γ - X -Richtung für $N_{t,x} = 14$ und $N_{t,y} = 6$. Die rote Linie im Transmissionsspektrum entspricht einer Berechnung ohne Verwendung von PMLs und die blaue Linie entspricht einer Berechnung unter Verwendung von PMLs.

tralen Balkenelementen nach DOYLE durchführen zu können. Bei den Frequenzbereichen der Bandlücken zeigen sich gewisse Abweichungen zu der Abb. 4.11, bei der die komplexen Dispersionskurven und das Transmissionsspektrum für dieselbe Einheitszelle mittels den exakten spektralen Balkenelementen nach DOYLE berechnet wurden. Diese Abweichungen nehmen bei einer feineren Diskretisierung oder steigenden Elementordnung ab, sodass sich die Ergebnisse der Berechnung mittels der 2D spektralen ESZ-Elemente schließlich der Berechnung mittels der exakten spektralen Balkenelemente annähern. Die Berechnung der Wellentransmission basiert auf dem System aus der Abb. 5.5 mit $N_{t,y} = 6$ Einheitszellen pro Spalte in der y -Richtung, $N_{t,x} = 14$ Einheitszellen pro Zeile in der x -Richtung und einer Breite des Auswertungsbereichs von $N_{t,eval} = 1$. Die vorgegebenen Verschiebungen am linken Rand des Systems betragen $\mathbf{u}_0 = [10 \ 10]^T$ cm. Die rote Linie im Transmissionsspektrum entspricht einer Berechnung ohne Verwendung von PMLs und die blaue Linie entspricht einer Berechnung unter Verwendung von PMLs. Es wird deutlich, dass durch die Verwendung der PMLs die Wellentransmissionsspitzen, die beispielsweise bei einer Berechnung ohne PMLs in der ersten und dritten Bandlücke auftreten, vollständig vermieden werden können. Diese Wellentransmissionsspitzen sind, wie im Abschnitt 4.3 erläutert, auf eine Ausbreitung der elastischen Wellen entlang der freien Ränder zurückzuführen. Durch die verwendete PMLs klingen neben den sich ausbreitenden Wellen auch die evaneszenten Wellen innerhalb der Bandlücken so schnell ab, dass an den freien Rändern keine nennenswerten Wellenamplituden auftreten.

Effizienz der SEM nach PATERA bei der Transmissionsberechnung

In der Abb. 5.7a sind die durchschnittlichen $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler der Transmissionsberechnungen mittels der SEM und FEM für verschiedene Elementordnungen und Anzahlen von Freiheitsgraden dargestellt. Damit der Einfluss aus der Vernetzung, wie bereits bei den Fehleranalysen bei der Bestimmung der Dispersionskurven, minimiert wird, basieren die Berechnungen der Wellentransmissionen ebenfalls auf der quadratischen Einheitszelle mit den Geometrie- und Materialeigenschaften aus der Tab. 5.1. Dadurch können auch in diesem Fall sämtliche Berechnungen mit einem strukturierten Netz durchgeführt werden. Das System für die Ermittlung der Wellentransmission besteht aus $N_{t,y} = 2$ Einheitszellen pro Spalte in der y -Richtung, $N_{t,x} = 8$ Einheitszellen pro Zeile in der x -Richtung und einer Breite des Auswertungsbereichs von $N_{t,eval} = 2$. Außerdem wird auf die Verwendung von PMLs verzichtet, da diese für die Fehleranalysen nicht maßgebend sind aber zu erheblich höheren Berechnungszeiten führen. Die Berechnung der Wellentransmission erfolgt für 500 diskrete Frequenzen mit einer Schrittweite von $\Delta f = 20$ Hz.

Der in der Abb. 5.7a dargestellte durchschnittliche $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler stellt das arithmetische Mittel der über alle Frequenzen ermittelten lokalen ε_2 -Fehler dar. Für die Auswertung der lokalen ε_2 -Fehler werden die ermittelten Wellentransmissionen von 10 diskreten Frequenzschritten

herangezogen. Als Referenzlösung dient eine SEM-Berechnung mit der Elementordnung $p = 8$, $N_{DoF} = 463202$ Freiheitsgraden und einer Ermittlung der Elementmatrizen mittels der GL-Quadratur. Aus der Abb. 5.7a wird deutlich, dass der $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler erwartungsgemäß sowohl mit steigender Elementordnung als auch steigender Anzahl von Freiheitsgraden abnimmt. Bei der FEM-Berechnung ist der Fehler jedoch selbst bei $N_{DoF} = 432914$ Freiheitsgraden mit $\bar{\varepsilon}_2 = 4,44\%$ immer noch sehr hoch. Dies liegt insbesondere daran, dass der numerische Fehler bei den Transmissionsberechnungen in der Nähe von Eigenfrequenzen des jeweiligen Systems bei der FEM aufgrund der inhärent schlechten Kondition des Gleichungssystems sehr hoch ist. Bei der SEM ist dieser Fehler aufgrund der besseren Kondition des Gleichungssystems im Allgemeinen deutlich niedriger [119, 121]. Beispielsweise beträgt der $\bar{\varepsilon}_2$ -Fehler bei einer Berechnung mittels der SEM mit $p = 6$, GL-Quadratur und lediglich $N_{DoF} = 42194$ Freiheitsgraden nur $\bar{\varepsilon}_2 = 1,77\%$.

In der Abb. 5.7b sind die zugehörigen Berechnungszeiten dargestellt, wobei die Berechnungszeiten unabhängig von der Elementordnung mit steigender Anzahl von Freiheitsgraden linear zunehmen. Außerdem wird deutlich, dass die Berechnungszeiten auch mit steigender Elementordnung zunehmen, was auf die zunehmende Bandbreite der Systemsteifigkeits- und Systemmassenmatrizen bei steigender Elementordnung zurückzuführen ist. Trotz der größeren Berechnungszeiten bei der Verwendung von höheren Elementordnungen ergibt sich ein wesentlicher Vorteil der SEM im Vergleich zur FEM bei der Berechnung der Wellentransmission. Beispielsweise kann mittels der SEM mit $p = 6$, GL-Quadratur und $N_{DoF} = 42194$ bei einer Berechnungszeit von nur $t = 434$ s ein kleiner Fehler von $\bar{\varepsilon}_2 = 1,77\%$ erreicht werden. Hingegen ergibt sich bei einer Berechnung mittels der FEM mit $N_{DoF} = 463202$ und einer Berechnungszeit von $t = 1197$ s ein deutlich größerer Fehler von $\bar{\varepsilon}_2 = 4,44\%$. Allerdings ergibt sich, wie auch bei der Berechnung der Dispersionskurven, durch die Verwendung der LOB-Quadratur im Vergleich zur GL-Quadratur kein

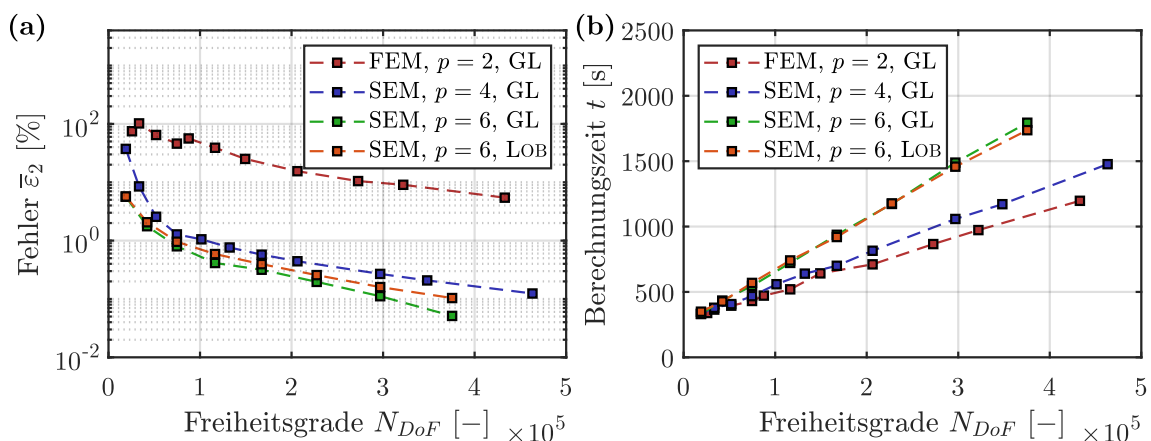


Abbildung 5.7: (a) Durchschnittlicher Fehler $\bar{\varepsilon}_2$ der Transmissionsberechnungen mittels der FEM und SEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden. (b) Berechnungszeiten der FEM und SEM für verschiedene Anzahlen von Freiheitsgraden.

Vorteil bei der Berechnung der Wellentransmission im Frequenzbereich. Neben den deutlich kürzeren Berechnungszeiten hat die SEM im Vergleich zur FEM bei einer vergleichbaren Genauigkeit der numerischen Näherungslösung den zusätzlichen Vorteil, dass aufgrund der erheblich niedrigeren Anzahl von Freiheitsgraden im Allgemeinen deutlich weniger Arbeitsspeicher benötigt wird. Für die oben genannte SEM-Berechnung mit $N_{DoF} = 42194$ ist beispielsweise nur 31,5 % des Arbeitsspeicherbedarfs gegenüber der FEM-Berechnung mit $N_{DoF} = 463202$ erforderlich.

5.4 Beeinflussung der Wellenausbreitung durch Perforationen

Nachfolgend wird die Beeinflussung der Wellenausbreitung durch Perforationen in den dickwandigen Zick-Zack-Armen untersucht. Dabei wird sich auf rotationssymmetrische Einheitszellen beschränkt. Dementsprechend kann die Geometrie der Zick-Zack-Arme und der Perforationen, wie in der Abb. 5.8a veranschaulicht, anhand eines dickwandigen Zick-Zack-Armes beschrieben werden. In der Abb. 5.8b sind kreisförmige Perforationen mit dem Radius r_1 auf den inneren Armen und r_2 auf den äußeren Armen für die Lage des Zick-Zack-Knicks $b = 0,25l$ dargestellt. Die Abstände der zunächst äquidistant auf der Mittellinie des Querschnitts angeordneten Perforationen werden durch d_1 für die inneren Arme und d_2 für die äußeren Arme angegeben. Die Querschnittshöhen senkrecht zur Mittellinie betragen a_1 für die inneren und a_2 für die äußeren Arme, die sich jeweils aus den vorgegebenen Parametern b , W und h ergeben. Bei den Untersuchungen im Unterabschnitt 4.4.1 zum Einfluss der Lage b der Zick-Zack-Knicke zeigte sich, dass für $b = 0,4l$ die brei-

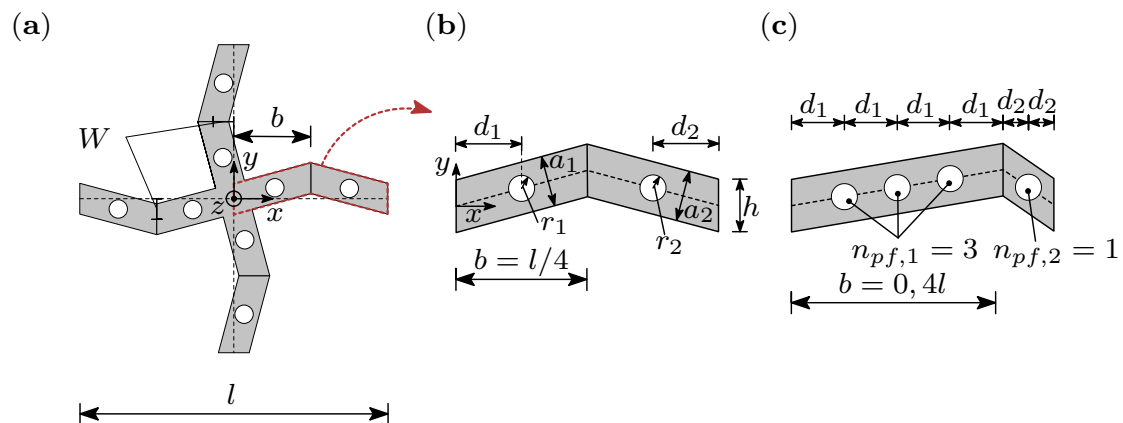


Abbildung 5.8: (a) Einheitszelle einer rotationssymmetrischen dickwandigen Zick-Zack-Gitterstruktur mit Perforationen. (b) Zick-Zack-Arm für $b = 0,25l$. Der Radius der Perforationen auf den inneren Armen beträgt r_1 und auf den äußeren Armen r_2 . (c) Zick-Zack-Arm für $b = 0,4l$. Der Abstand der Perforationen beträgt d_1 auf den inneren Armen und d_2 auf den äußeren Armen. Die Anzahl von Perforationen beträgt $n_{pf,1}$ auf den inneren und $n_{pf,2}$ auf den äußeren Armen.

teste erste Bandlücke entsteht. Die Lage der Zick-Zack-Knicke hat jedoch, wie in der Abb. 5.8c veranschaulicht, einen wesentlichen Einfluss auf die mögliche Anordnung der Perforationen. Aus diesem Grund wird ebenfalls der Einfluss von kreisförmigen Perforationen für die Lage der Zick-Zack-Knicke $b = 0, 4l$ untersucht. Dabei gibt $n_{pf,1}$ die Anzahl der Perforationen in den inneren Armen sowie $n_{pf,2}$ die Anzahl der Perforationen in den äußeren Armen an.

In den folgenden Untersuchungen werden für die Einheitszelle aus der Abb. 5.8 die geometrischen Parameter und Materialeigenschaften aus der Tab. 5.2 verwendet, wobei t die Querschnittsdicke in der z -Richtung ist. Zuerst wird der Sonderfall von äquidistant angeordneten kreisförmigen Perforationen untersucht, wobei sowohl der Einfluss der Radien als auch der Einfluss von unterschiedlichen Anzahlen von Perforationen in den inneren und äußeren Armen untersucht werden. Basierend auf den Erkenntnissen aus diesen Untersuchungen wird anschließend eine optimale Verteilung der Perforationen zur Erzielung breiter und niederfrequenter Bandlücken vorgestellt. Die Berechnungen erfolgen mit 2D spektralen ESZ-Elementen der Ordnung $p = 4$ unter Verwendung der GL-Quadratur.

Tabelle 5.2: Geometrie- und Materialeigenschaften der Einheitszelle aus der Abb. 5.8.

l [mm]	W [mm]	h [mm]	t [mm]	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	ν [-]
100	10	6	2	70	2700	0,34

5.4.1 Einflüsse der kreisförmigen Perforationen

Zunächst wird der Einfluss des Radius r der Perforationen auf die Dispersionskurven und Wellentransmissionen untersucht. Basierend auf dieser Untersuchung werden anschließend die verschiedenen Mechanismen, durch die die kreisförmigen Perforationen die Wellenausbreitungseigenschaften beeinflussen, identifiziert und erläutert.

Einfluss des Radius r der Perforationen

In der Abb. 5.9a sind die Bandlückenrandfrequenzen und in der Abb. 5.9b die zugehörigen Breiten Δf_{BL} der ersten zwei Bandlücken in Abhängigkeit des Radius r der kreisförmigen Perforationen dargestellt. Dabei ist jeweils eine Perforation mittig auf den inneren Armen ($n_{pf,1} = 1$, $d_1 = 1/8l$) und den äußeren Armen ($n_{pf,2} = 1$, $d_2 = 1/8l$) angeordnet. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 5.8 für $b = 0, 25l$ mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 5.2. Bei der ersten Bandlücke zeigt sich, dass die Perforationen bis zu einem Radius von etwa $r = 1,5$ mm keinen nennenswerten Einfluss haben. Ab $r > 1,5$ mm nehmen jedoch die Randfrequenzen der ersten Bandlücke schnell ab und die untere Randfrequenz fällt von $f_{BL1,Uf} = 6012$ Hz

bei $r = 1,5$ mm auf $f_{BL1,Uf} = 4886$ Hz bei $r = 2,4$ mm ab. Bei der zweiten Bandlücke ist der Einfluss der Perforationen noch ausgeprägter und die Bandlückenrandfrequenzen nehmen bereits für $r > 1,0$ mm schnell ab. Beispielsweise fällt die untere Randfrequenz von $f_{BL2,Uf} = 12257$ Hz bei $r = 1,0$ mm auf $f_{BL2,Uf} = 8841$ Hz bei $r = 2,4$ mm ab. Durch die mittig angeordneten Perforationen kann folglich die untere Randfrequenz bei der ersten Bandlücke um 18,7% und bei der zweiten Bandlücke um 27,9% verringert werden.

Allerdings nimmt die Breite der ersten Bandlücke, wie in der Abb. 5.9b deutlich wird, von $r = 1,5$ mm bis $r = 2,4$ mm um 402 Hz kontinuierlich ab. Bei der zweiten Bandlücke zeigt sich hingegen, dass die Breite der Bandlücke zwar bis $r = 2,0$ mm kontinuierlich abnimmt, aber für $r > 2,0$ mm exponentiell zunimmt. Bei $r = 2,4$ mm ist die zweite Bandlücke sogar etwa 40 Hz breiter als im Fall $r = 0$ mm.

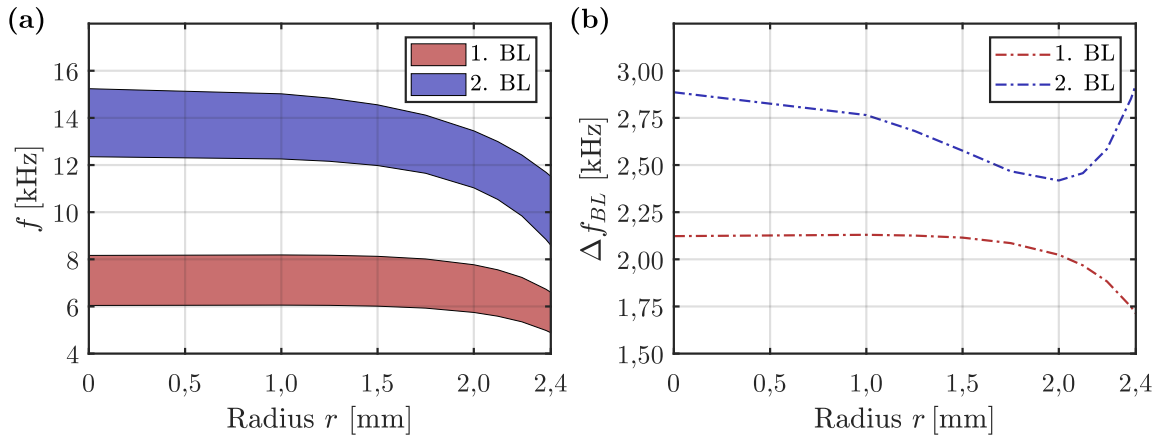


Abbildung 5.9: (a) Einfluss des Radius r der Perforationen auf die Randfrequenzen der ersten zwei Bandlücken. (b) Zugehörige Breiten Δf_{BL} der Bandlücken. Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 5.8 für $b = 0,25l$ mit den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 5.2. Es ist jeweils eine Perforation mittig auf den inneren Armen ($n_{pf,1} = 1$, $d_1 = 1/8l$) und den äußeren Armen ($n_{pf,2} = 1$, $d_2 = 1/8l$) angeordnet.

In der Abb. 5.10a sind die kleinsten Imaginärteile des Wellenvektors und in der Abb. 5.10b die zugehörigen Wellentransmissionen bei den Bandlückenmittenfrequenzen in Abhängigkeit des Radius r dargestellt. Bei der ersten Bandlücke zeigt sich, dass der kleinste Imaginärteil des Wellenvektors mit zunehmendem Radius r ansteigt, wobei die Steigung bis ungefähr $r = 1,5$ mm sehr klein ist und für $r > 1,5$ mm deutlich zunimmt. Die Wellentransmission nimmt bereits für $r > 0$ mm mit steigendem Radius r deutlich ab und fällt von $-37,6$ dB bei $r = 0$ mm auf $-43,0$ dB bei $r = 2,4$ mm ab. Bei der zweiten Bandlücke nimmt der kleinste Imaginärteil des Wellenvektors ebenfalls zunächst nur geringfügig mit steigendem Radius r zu und wächst dann ab $r = 1,75$ mm exponentiell an. Die Wellentransmission bei der zweiten Bandlücke fällt hingegen bereits ab $r = 1,25$ mm

deutlich und ab $r = 2,0$ mm rasant ab. Entsprechend ergibt sich ein erheblich besseres Dämpfungsverhalten in der zweiten Bandlücke, wobei die Wellentransmission von $-38,1$ dB bei $r = 0$ mm auf $-56,7$ dB bei $r = 2,4$ mm abfällt.

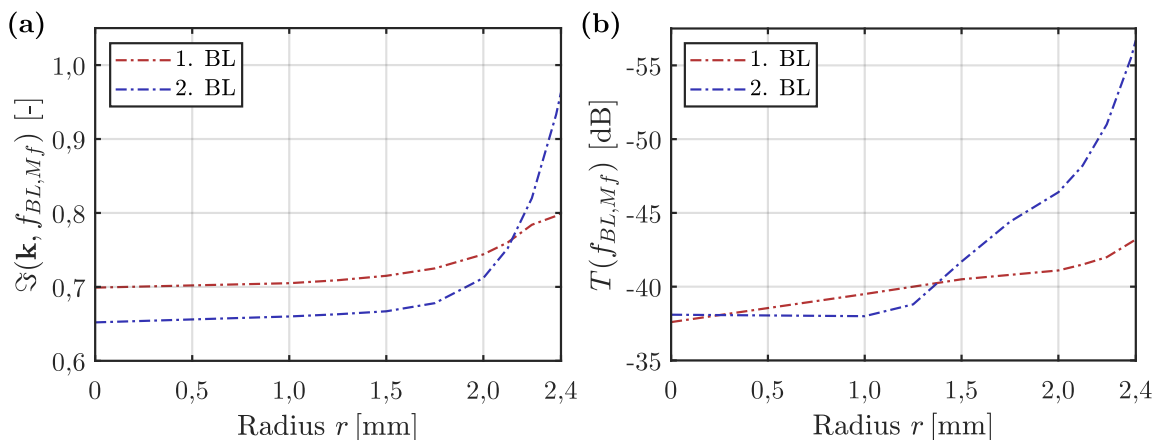


Abbildung 5.10: (a) Einfluss des Radius r der Perforationen auf die kleinsten Imaginärteile $\Im(\mathbf{k}(f_{BL,Mf}))$ des Wellenvektors \mathbf{k} bei den Bandlückenmittenfrequenzen $f_{BL,Mf}$. (b) Zugehörige Wellentransmissionen $T(f_{BL,Mf})$ für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$.

Mechanismen zur Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens durch Perforationen

Insbesondere der rasante Abfall der Wellentransmission sowie die zunehmende Breite der zweiten Bandlücke ab $r = 2,0$ mm bei einer gleichzeitigen Verschiebung der Bandlücke in einen niedrigeren Frequenzbereich sind sehr vielversprechend. Aus diesem Grund wird nachfolgend untersucht, durch welche Mechanismen die Perforationen die Wellenausbreitungseigenschaften der dickwandigen Zick-Zack-Gitterstrukturen beeinflussen. Im Anschluss wird durch die Ausnutzung dieser Mechanismen das Wellenausbreitungsverhalten der Zick-Zack-Gitterstrukturen, insbesondere hinsichtlich einer breiten und niederfrequenten ersten Bandlücke, optimiert. Um den Einfluss der Perforationen näher zu untersuchen sind in der Abb. 5.11a zunächst die reellen Dispersionskurven für die Einheitszelle ohne Perforationen ($r = 0$ mm) dargestellt. Die begrenzenden Stellen der ersten Bandlücke sind dabei durch den Punkt ① am unteren Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 5.11b, und den Punkt ② am oberen Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 5.11c, gekennzeichnet. Die zweite Bandlücke wird durch den Punkt ③ am unteren Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 5.11d, und den Punkt ④ am oberen Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 5.11e, begrenzt. Dabei sei angemerkt, dass die zweite Bandlücke am unteren Rand durch die Bänder 5 und 6 an der Stelle Γ begrenzt wird. In der Abb. 5.11d ist die Eigenform des sechsten Bandes dargestellt, allerdings entspricht die Eigenform des fünften Bandes an der Stelle Γ der um 90° rotierten sechsten Eigenform.

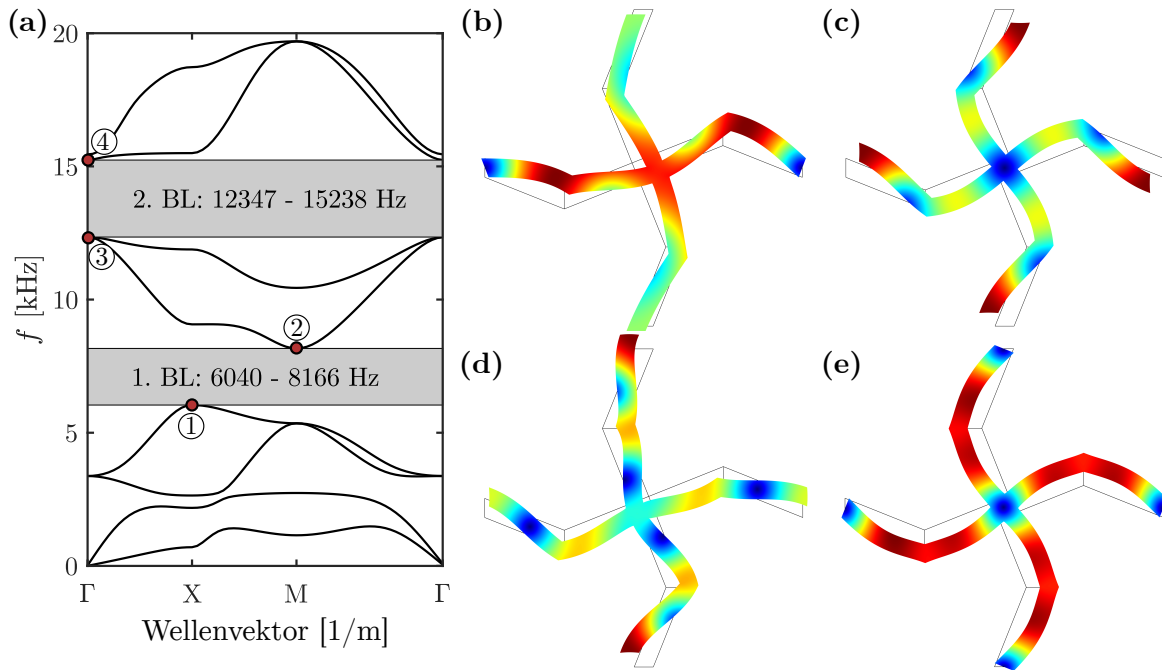


Abbildung 5.11: (a) Reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 5.8 mit $r = 0$ mm. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle M, Band 5. (d) Zugehörige Eigenform zum Punkt ③: Stelle Γ , Band 5/6. (e) Zugehörige Eigenform zum Punkt ④: Stelle Γ , Band 7. Die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.2 angegeben.

Die Abb. 5.12a zeigt die Dispersionskurven für den Fall, dass jeweils eine Perforation mittig auf den inneren Armen ($n_{pf,1} = 1$, $d_1 = 1/8l$) und den äußeren Armen ($n_{pf,2} = 1$, $d_2 = 1/8l$) mit $r = 2$ mm angeordnet ist. Bei einem Vergleich mit den Dispersionskurven aus der Abb. 5.11a wird deutlich, dass die Perforationen keinen nennenswerten Einfluss auf die qualitativen Verläufe der Dispersionskurven haben. Zwar ändern sich die Frequenzbereiche der Bandlücken, aber die Bandlücken werden weiterhin durch die gleichen Bänder, die auch hier durch die Punkte ①-④ gekennzeichnet sind, begrenzt. Die zugehörige Eigenform zum Punkt ①, die die erste Bandlücke am unteren Rand begrenzt, ist in der Abb. 5.12b und die zugehörige Eigenform zum Punkt ②, die die erste Bandlücke am oberen Rand begrenzt, ist in der Abb. 5.12b dargestellt. Bei diesen Eigenformen sind keine nennenswerten Unterschiede zu den entsprechenden Eigenformen aus den Abbn. 5.11b und 5.12c ohne Perforationen festzustellen. Im Gegensatz dazu weisen die Eigenform in der Abb. 5.12d vom Punkt ③ sowie die Eigenform in der Abb. 5.12e vom Punkt ④, die die zweite Bandlücke am unteren und oberen Rand begrenzen, deutliche Unterschiede zu den entsprechenden Eigenformen aus den Abbn. 5.11d und 5.12e auf. Insbesondere bei der Eigenform in der Abb. 5.12d ist auffällig, dass zwischen den Perforationen auf den horizontalen Armen sehr hohe Verschiebungen auftreten (s. eingekreiste Bereiche), die bei der Eigenform in der Abb. 5.11d ohne Perforationen nicht vorkommen. Diese lokal

auftretenden hohen Verschiebungen sind wahrscheinlich auf die BRAGG-Beugungseffekte zurückzuführen, die durch die reflektierten Wellen an den Rändern der Perforationen entstehen. Die Auswertung der Eigenformen für unterschiedliche Radien r zeigt, dass dieser Effekt mit zunehmendem Radius deutlich zunimmt. Auch bei der Eigenform in der Abb. 5.12e (s. eingekreiste Bereiche) treten im Vergleich zur Eigenform in der Abb. 5.11e größere Verschiebungen zwischen den Perforationen auf. Dieser Effekt tritt bei den Eigenformen aus den Abbn. 5.12b und 5.12c aufgrund der deutlich größeren Wellenlängen im Bereich der ersten Bandlücke, die im Bereich der zweifachen Gitterkonstante liegen (s. Gl. (2.34)), nicht auf. Dieser als Beugungsgrenze (engl.: *diffraction limit*) bekannte Effekt tritt beispielsweise auch bei der Schädigungsdetektierung mittels Ultraschall auf [16, 137], bei der die Wellenlänge der Ultraschallwelle ausreichend klein bzw. die Frequenz ausreichend groß sein muss, um die Materialschädigungen auf mikrostruktureller Ebene detektieren zu können.

Bei der Eigenform in der 5.12e ist ein weiterer Effekt, beispielsweise beim vergrößert dargestellten Bereich der Perforation im rechten äußeren Arm, zu beobachten, bei dem im Bereich um die Perforationen eine verstärkte Verformung infolge der geringen Steifigkeit in diesem Bereich auftritt. Dies hat zur Folge, dass der steifere Armteil zwischen zwei Per-

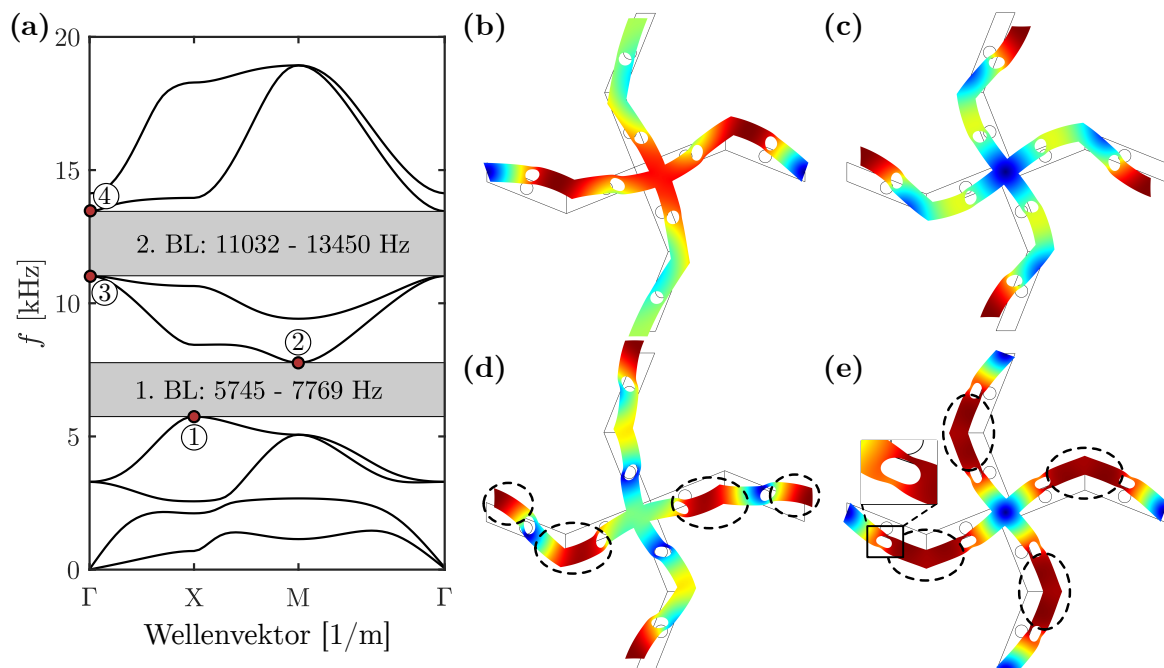


Abbildung 5.12: (a) Reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 5.8, wobei jeweils eine Perforation mittig auf den inneren Armen ($n_{pf,1} = 1$, $d_1 = 1/8l$) und den äußeren Armen ($n_{pf,2} = 1$, $d_2 = 1/8l$) mit $r = 2$ mm angeordnet ist. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle M, Band 5. (d) Zugehörige Eigenform zum Punkt ③: Stelle Γ , Band 5/6. (e) Zugehörige Eigenform zum Punkt ④: Stelle Γ , Band 7. Die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.2 angegeben.

forationen wie ein lokaler Resonator agiert. Der abnehmende Frequenzbereich der ersten Bandlücke bei zunehmendem Radius r ist in erster Linie auf die lokale Resonanz der Armteile zwischen zwei benachbarten Perforationen zurückzuführen. Je größer die Perforation, desto kleiner ist die Steifigkeit des lokal-resonanten Systems (Resonators) zwischen den zwei benachbarten Perforationen, desto niedriger ist die Resonanzfrequenz (Eigenfrequenz) des lokalen Resonators und damit auch der Frequenzbereich der ersten Bandlücke. Wenngleich dieser Mechanismus einen positiven Effekt auf die Wellenausbreitungseigenschaften der dickwandigen Zick-Zack-Gitterstruktur hat, so ist zu beachten, dass bei einem großen Verhältnis $2r/h$ die Tragfähigkeit einer Gitterstruktur unter Umständen nicht mehr gegeben ist und im Einzelfall sorgfältig überprüft werden muss.

Zusammengefasst basiert die Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften in dickwandigen Zick-Zack-Gitterstrukturen durch kreisförmige Perforationen hauptsächlich auf drei Mechanismen:

- BRAGG-Beugung bzw. -Streuung infolge von Wellenreflexionen an den Rändern der Perforationen.
- Lokale Resonanz im Bereich der Armteile zwischen zwei Perforationen bei einem großen Verhältnis $2r/h$.
- Überproportionale Reduktion der Steifigkeit ($\propto r^3$) im Vergleich zur Masse ($\propto r$) im Bereich der Perforationen.

Nachfolgend wird zuerst untersucht, wie durch die äquidistante Anordnung von mehreren kreisförmigen Perforationen die Einflüsse aus den BRAGG-Beugungseffekten sowie der lokalen Resonanz weiter optimiert werden können. Anschließend wird eine optimale Anordnung der Perforationen mit Hinblick auf eine effektive Reduktion des Frequenzbereichs der ersten Bandlücke durch die Ausnutzung beider Effekte vorgeschlagen.

5.4.2 Äquidistante Anordnung mehrerer kreisförmiger Perforationen

Im nächsten Schritt wird untersucht, wie sich eine äquidistante Anordnung mehrerer kreisförmiger Perforationen auf die Wellenausbreitungseigenschaften von dickwandigen Zick-Zack-Gitterstrukturen auswirkt. Dabei wird die Einheitszelle aus der Abb. 5.8 zuerst mit der Lage $b = 0, 25l$ und anschließend mit $b = 0, 40l$ der Zick-Zack-Knicke analysiert.

Einheitszelle mit der Lage $b = 0, 25l$ der Zick-Zack-Knicke

Für die nachfolgenden Untersuchungen ist der Radius der Perforationen konstant $r = 2\text{ mm}$, da bei diesem Radius einerseits nennenswerte Einflüsse auf die Wellenausbrei-

tungseigenschaften zu erwarten sind, aber andererseits die Steifigkeit für die meisten praktischen Anwendungen nicht zu gering wird. Außerdem werden bei der Anordnung der Perforationen drei verschiedene Fälle untersucht. Im Fall 1 ($n_{pf,i} = n_{pf,1} = n_{pf,2}$) sind auf den inneren und äußeren Armen die gleiche Anzahl von Perforationen angeordnet, im Fall 2 ($n_{pf,i} = n_{pf,1}$, $n_{pf,2} = 0$) sind hingegen nur auf den inneren Armen und im Fall 3 ($n_{pf,i} = n_{pf,2}$, $n_{pf,1} = 0$) nur auf den äußeren Armen Perforationen angeordnet. Zur Veranschaulichung sind die drei unterschiedlichen Fälle in der Abb. 5.13 für $n_{pf,i} = 2$ dargestellt.

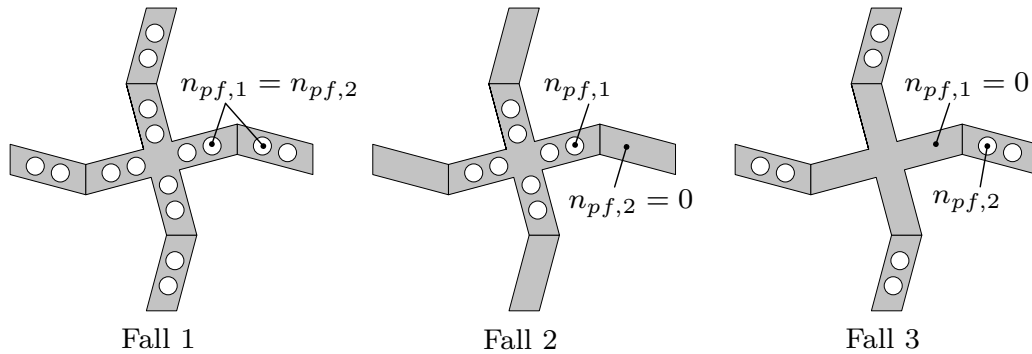


Abbildung 5.13: Unterschiedliche Anordnung der kreisförmigen Perforationen im Fall 1 mit $n_{pf,i} = n_{pf,1} = n_{pf,2}$, im Fall 2 mit $n_{pf,i} = n_{pf,1}$, $n_{pf,2} = 0$ und im Fall 3 mit $n_{pf,1} = 0$, $n_{pf,i} = n_{pf,2}$. Die drei Fälle sind dabei beispielhaft für $n_{pf,i} = 2$ dargestellt.

In der Abb. 5.14a sind die relativen Absenkungen der unteren Randfrequenz der ersten Bandlücke $\Delta f_{BL1,Uf,rel}$ bezogen auf die Einheitszelle ohne Perforationen für die drei Fälle und verschiedene Anzahlen der Perforationen dargestellt. Es zeigt sich, dass bis zu $n_{pf,i} = 3$ der Fall 1 zu der größten Absenkung der unteren Randfrequenz der ersten Bandlücke führt. Ab $n_{pf,i} = 4$ ergibt sich hingegen im Fall 2, also einer Anordnung der Perforationen ausschließlich auf den inneren Armen, eine deutlichere Absenkung der unteren Bandlückenrandfrequenz und beträgt beispielsweise 19,3% bei $n_{pf,i} = 5$. Besonders auffällig ist außerdem, dass für alle drei Fälle bei $n_{pf,i} = 4$ ein deutlicher Sprung in der Steigung auftritt und für $n_{pf,i} = 5$ eine überproportional große Absenkung der unteren Bandlückenrandfrequenz auftritt. Als Hauptursachen dafür sind einerseits die starke überproportionale Reduzierung der Steifigkeit zur Masse aufgrund des geringen Abstands der Perforationen von $d_1 = d_2 = 4,1\bar{6}$ mm und andererseits die lokale Resonanz der nicht perforierten Armteile zu nennen. Die zugehörigen Breiten der ersten Bandlücke in Abhängigkeit der Anzahl von Perforationen $n_{pf,i}$ sind für alle drei Fälle in der Abb. 5.14b dargestellt. Dabei zeigt sich, dass eine ausschließliche Anordnung der Perforationen auf den inneren Armen (Fall 2) durchweg die breitesten Bandlücken liefert. Die Breite der ersten Bandlücke kann im Fall 2 von $\Delta f_{BL1} = 2120$ Hz bei $n_{pf,i} = 0$ auf $\Delta f_{BL1} = 2648$ Hz bei $n_{pf,i} = 5$ vergrößert werden. Das Zusammenwirken der BRAGG-Beugung und der lo-

kalen Resonanz bei $n_{pf,i} = 5$ zeigt sich auch bei den Breiten der ersten Bandlücke, wobei dies jedoch nur im Fall 2 zu einer überproportionalen Zunahme der Bandlückenbreite führt. In den Fällen 1 und 3 führt dies hingegen zu einer überproportionalen Abnahme der Bandlückenbreite.

In der Abb. 5.14c sind die relativen Absenkungen der unteren Randfrequenz der zweiten Bandlücke für die drei untersuchten Fälle dargestellt. Es wird deutlich, dass bei der zweiten Bandlücke der Fall 1 zu der deutlichsten Reduktion der unteren Bandlückenrandfrequenz führt, wobei sie bis $n_{pf,i} = 4$ kontinuierlich und für $n_{pf,i} = 5$ überproportional abfällt. Die Breiten der zweiten Bandlücke fallen, wie aus der Abb. 5.14d deutlich wird, zunächst in allen drei Fällen mit steigender Anzahl von Perforationen ab und nehmen dann für $n_{pf,i} = 4$ bzw. $n_{pf,i} = 5$ wieder erheblich zu. Im Fall 1 ergibt sich mit $n_{pf,i} = 5$ sogar eine Zunahme der Bandlückenbreite gegenüber der Einheitszelle ohne Perforationen. Zusammenfassend ist für eine möglichst breite und niederfrequente erste Bandlücke der Fall 2, bei dem der Effekt der lokalen Resonanz dominiert, mit einer ausschließlichen Anordnung der Perforationen auf den inneren Armen zu bevorzugen. Für eine möglichst breite und niederfrequente zweite Bandlücke ist hingegen der Fall 1, bei dem der Effekt

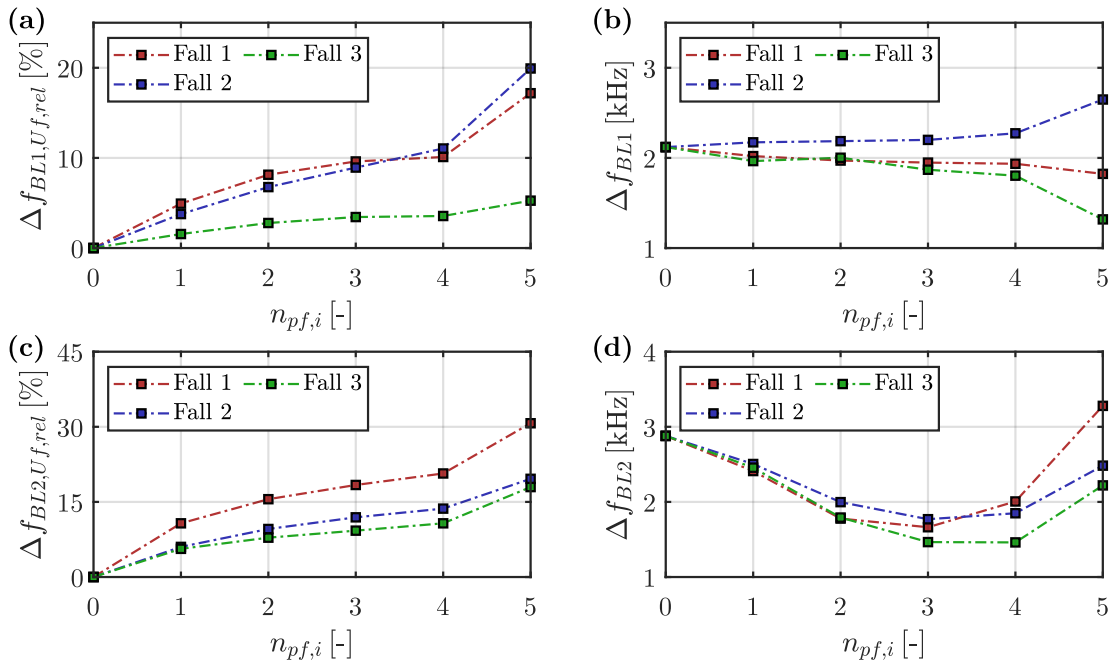


Abbildung 5.14: Einflüsse der Anzahlen von Perforationen $n_{pf,i}$ für den Fall 1 mit $n_{pf,i} = n_{pf,1} = n_{pf,2}$, den Fall 2 mit $n_{pf,i} = n_{pf,1}$, $n_{pf,2} = 0$ und den Fall 3 mit $n_{pf,i} = n_{pf,2}$, $n_{pf,1} = 0$ auf: (a) die relativen Absenkungen der unteren Randfrequenz der ersten Bandlücke $\Delta f_{BL1,Uf,rel}$ bezogen auf die Einheitszelle ohne Perforationen, (b) die Breiten der ersten Bandlücke Δf_{BL1} , (c) die relativen Absenkungen der unteren Randfrequenz der zweiten Bandlücke $\Delta f_{BL2,Uf,rel}$ bezogen auf die Einheitszelle ohne Perforationen und (d) die Breiten der zweiten Bandlücke Δf_{BL2} . Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 5.8 mit $b = 0,25l$, $r = 2$ mm, $d_1 = l/(4(n_{pf,1} + 1))$, $d_2 = l/(4(n_{pf,2} + 1))$ und den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 5.2.

der BRAGG-Beugung dominiert, mit einer gleichmäßigen Verteilung der Perforationen auf den inneren und den äußeren Armen vorteilhafter.

Einheitszelle mit der Lage $b = 0,40l$ der Zick-Zack-Knicke

Bei der Einheitszelle mit der Lage $b = 0,40l$ der Zick-Zack-Knicke ergeben sich bei einer vorgegebenen Höhe h an den Rändern der Einheitszelle, wie in der Abb. 5.8 veranschaulicht, unterschiedliche Querschnittshöhen a_1 und a_2 senkrecht zur Querschnittsmittellinie für die inneren und äußeren Arme. Aus diesem Grund werden nachfolgend auch unterschiedliche Radien $r_1 = 2\text{ mm}$ für die inneren Arme und $r_2 = r_1 \cdot a_2/a_1 = 1,458\text{ mm}$ für die äußeren Arme verwendet. In der Abb. 5.15a sind die relativen Absenkungen der unteren Randfrequenz der ersten Bandlücke $\Delta f_{BL1,Uf,rel}$ bezogen auf die Einheitszelle ohne Perforationen für verschiedene Anzahlen und Anordnungen der Perforationen dargestellt. Dabei werden auch hier die drei zuvor beschriebenen Fälle für die Anordnung der Perforationen untersucht. Aufgrund der kurzen Abmessungen der äußeren Arme können maximal 3 Perforationen auf den äußeren Armen berücksichtigt werden. Es wird deutlich, dass eine ausschließliche Anordnung der Perforationen auf den inneren Armen (Fall 2), wodurch bei der Einheitszelle mit $b = 0,25l$ die größte Reduktion der unteren Bandlückenfrequenz erzielt werden kann (vgl. Abb. 5.14a), in diesem Fall keinen nennenswerten Einfluss auf die erste Bandlücke hat. Die Fälle 1 und 3, mit einer gleichmäßigen Anordnung der Perforationen auf den inneren und äußeren Armen und einer ausschließlichen Anordnung auf den äußeren Armen, liefern nahezu die gleichen Reduktionen der unteren Bandlückenrandfrequenz. Allerdings kann maximal eine Reduktion von $\Delta f_{BL1,Uf,rel} = 8,3\%$ erzielt werden, was deutlich unter der erreichbaren Reduktion aus der Abb. 5.14a liegt. In der Abb. 5.15b zeigt sich, dass die Breiten der Bandlücken in den Fällen 1 und 3 mit zunehmender Anzahl von

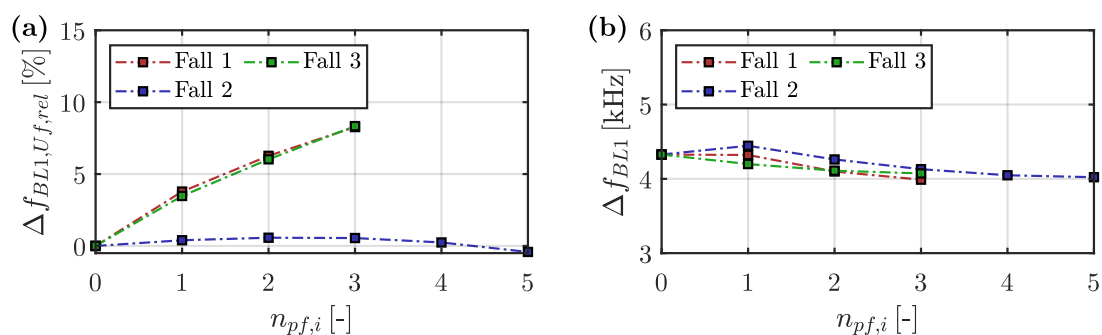


Abbildung 5.15: Einflüsse der Anzahlen von Perforationen $n_{pf,i}$ für den Fall 1 mit $n_{pf,i} = n_{pf,1} = n_{pf,2}$, den Fall 2 mit $n_{pf,i} = n_{pf,1}$, $n_{pf,2} = 0$ und den Fall 3 mit $n_{pf,i} = n_{pf,2}$, $n_{pf,1} = 0$ auf: (a) die relativen Absenkungen der unteren Randfrequenz der ersten Bandlücke $\Delta f_{BL1,Uf,rel}$ bezogen auf die Einheitszelle ohne Perforationen und (b) die Breiten der ersten Bandlücke Δf_{BL1} . Die Berechnungen basieren auf der Einheitszelle aus der Abb. 5.8 mit $b = 0,40l$, $r_1 = 2\text{ mm}$, $r_2 = 1,458\text{ mm}$, $d_1 = l/(4(n_{pf,1} + 1))$, $d_2 = l/(4(n_{pf,2} + 1))$ und den Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften aus der Tab. 5.2.

Perforationen abnimmt. Der Einfluss der Perforationen auf die zweite Bandlücke, der hier nicht ausführlich dargestellt wird, fällt sogar noch geringer aus. So kann die untere Randfrequenz der zweiten Bandlücke maximal um $\Delta f_{BL2,Uf,rel} = 3,0\%$ gesenkt werden. Dies liegt daran, dass die zweite Bandlücke bei der vorliegenden Einheitszelle nur durch ein Band von der ersten Bandlücke getrennt ist und ebenfalls in einem Frequenzbereich mit geringen Wellenlängen liegt. Dadurch kann auch die zweite Bandlücke nicht durch den zuvor beschriebenen Mechanismus der BRAGG-Beugungseffekte an den Rändern der Perforationen beeinflusst werden. Dieser Mechanismus führt allerdings bei der dritten Bandlücke zu einer deutlichen Reduktion der Bandlückenrandfrequenzen. Auf eine ausführliche Darstellung des Einflusses auf die zweite und dritte Bandlücke wird hier jedoch verzichtet.

Im Vergleich zur Einheitszelle mit $b = 0,25l$ (s. Abb. 5.14) kann die erste Bandlücke bei der Einheitszelle mit $b = 0,40l$ durch die Anordnung von äquidistant angeordneten Perforationen nur geringfügig beeinflusst werden. Dies liegt insbesondere daran, dass die Perforationen die erste Bandlücke nur durch die Änderung der Steifigkeit und Masse beeinflussen. Weiterführende Untersuchungen, die an dieser Stelle nicht detailliert dargestellt werden, haben gezeigt, dass der Einfluss insbesondere in Abhängigkeit der Eigenformen, die die Bandlücke am unteren und oberen Rand begrenzen, variiert. Da die Eigenformen, die die erste Bandlücke begrenzen, bei den beiden Einheitszellen sehr unterschiedlich sind, variiert auch der Einfluss der Perforationen auf die erste Bandlücke deutlich. Eine optimierte Anordnung von Perforationen zur Beeinflussung der ersten Bandlücke kann daher nur durch die Auswertung der begrenzenden Eigenformen erfolgen.

5.4.3 Optimierte Form und Anordnung der Perforationen

Die Optimierung der Anordnung von Perforationen in den dickwandigen Zick-Zack-Armen hinsichtlich einer niederfrequenten und breiten ersten Bandlücke basiert auf der Auswertung der Eigenformen, die die erste Bandlücke am oberen und unteren Rand begrenzen. Da diese Eigenformen stark abhängig von der jeweiligen Geometrie, wie beispielsweise der Gitterkonstante l , der Auslenkung W oder der Lage der Zick-Zack-Knicke b sind, müssen die optimalen Formen und Positionen von den Perforationen für jede Einheitszelle individuell bestimmt werden. Nachfolgend wird beispielhaft an der Einheitszelle aus der Abb. 5.8 mit $b = 0,25l$ die Vorgehensweise zur Ermittlung der optimalen Formen und Positionen von den Perforationen erläutert. Dazu sind in der Abb. 5.16a die reellen Dispersionskurven der Einheitszelle ohne Perforationen dargestellt. Die begrenzenden Stellen der ersten Bandlücke sind dabei durch den Punkt ① am unteren Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 5.16b und den Punkt ② am oberen Rand mit der zugehörigen Eigenform in Abb. 5.16c gekennzeichnet. Für die optimale Anordnung der Perforationen kann letztlich ähnlich zu der im Unterabschnitt 4.4.3 beschriebenen Vorgehensweise bei der Verwendung

von diskreten Einzelmassen vorgegangen werden. Wird beispielsweise eine Perforation an einer Stelle angeordnet, an der die Eigenform am unteren Rand der Bandlücke nur geringe Verschiebungen aufweist, dann hat die durch die Perforation reduzierte Masse keinen nennenswerten Einfluss auf die zugehörige Frequenz dieser Eigenform. Dies liegt daran, dass die Masse an dieser Stelle nicht mitschwingt und somit keinen Beitrag zur Trägheit des Systems leistet. Allerdings wird gleichzeitig auch die Steifigkeit an der Stelle der Perforation reduziert. Dadurch, dass zwar die Steifigkeit abnimmt aber die mitschwingende Masse für die jeweilige Eigenform ungefähr konstant bleibt, sinkt die zugehörige Frequenz der Eigenform ab. Eine möglichst breite Bandlücke kann damit erreicht werden, indem die Perforationen zudem möglichst an solchen Positionen angeordnet werden, an denen die Eigenform, die die Bandlücke am oberen Rand begrenzt, große Verschiebungen aufweist. Das hat zur Folge, dass die mitschwingende Masse für diese Eigenform nennenswert reduziert wird und die zugehörige Frequenz der Eigenform am oberen Rand der Bandlücke nicht so stark abfällt wie die zugehörige Frequenz der Eigenform am unteren Rand der Bandlücke.

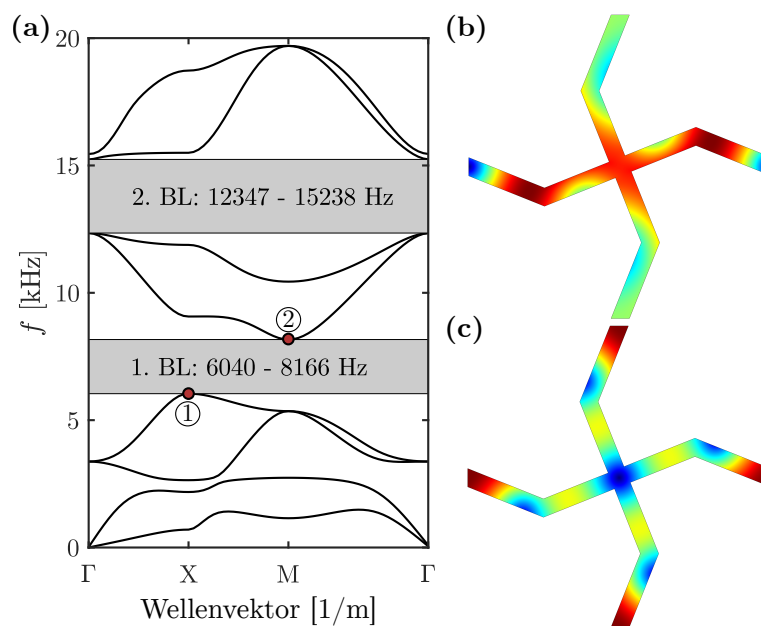


Abbildung 5.16: (a) Reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 5.8 ohne Perforationen. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle M, Band 5. Die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.2 angegeben.

In der Abb. 5.17a sind bei der zugehörigen Eigenform zum Punkt ①, die die Bandlücke am unteren Rand begrenzt, die möglichen Positionen und Formen für die Perforationen durch schwarze Linien gekennzeichnet. Dabei ist jeweils an den Rändern der Einheitszelle eine ausgerundete viereckige Perforation und auf den inneren Armen eine kreisbogenförmige

Perforation angeordnet. Die Positionen und die Geometrien der Perforationen werden anhand der Verschiebungen der horizontalen Arme der Einheitszelle festgelegt, da diese die größten Verschiebungsamplituden aufweisen und für die Wellenausbreitung am relevantesten sind. Damit die Rotationssymmetrie der Einheitszelle beibehalten wird, werden die Perforationen auch auf den vertikalen Armen der Einheitszelle angeordnet. Die Perforationen sind auch in der Abb. 5.17b bei der zugehörigen Eigenform zum Punkt ②, die die Bandlücke am oberen Rand begrenzt, gekennzeichnet. Dabei weist diese Eigenform insbesondere an den Rändern, an denen die viereckigen Perforationen angeordnet werden, sehr große Verschiebungen auf. Somit kann bei dieser Anordnung von Perforationen neben einer deutlichen Absenkung der unteren Bandlückenrandfrequenz auch eine nennenswerte Verbreiterung der Bandlücke erwartet werden. In der Abb. 5.17c sind die gewählten Abmessungen der Perforationen anhand des rechten Armes der Einheitszelle angegeben.

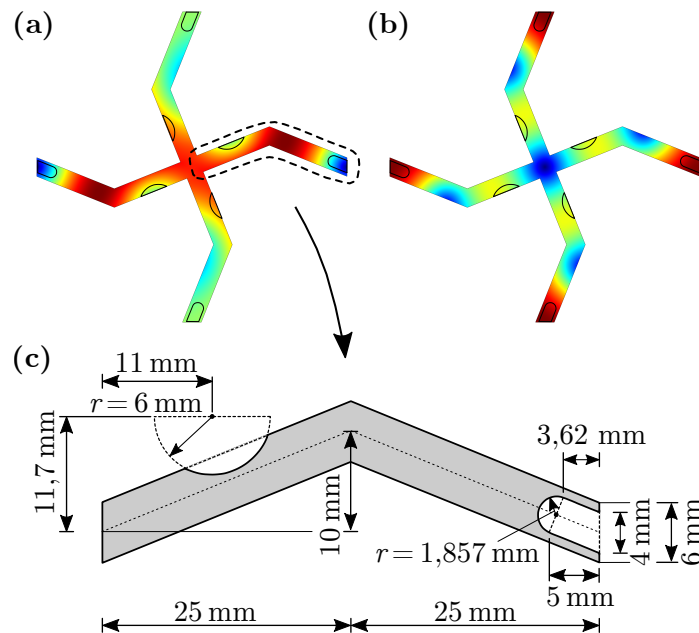


Abbildung 5.17: Markierung der gewählten Perforationen mit schwarzen Linien bei der (a) zugehörigen Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4, und der (b) zugehörigen Eigenform zum Punkt ①: Stelle M, Band 5. (c) Optimierte Anordnung der Perforationen.

In der Abb. 5.18a sind die reellen Dispersionskurven und das Transmissionsspektrum für die Einheitszelle mit den optimierten Perforationen dargestellt. Im Vergleich zu den Dispersionskurven aus der Abb. 5.16a für die Einheitszelle ohne Perforationen wird deutlich, dass die untere Randfrequenz der ersten Bandlücke um $\Delta f_{BL1,Uf} = 1660$ Hz bzw. $\Delta f_{BL1,Uf,rel} = 27,5\%$ erheblich abgesenkt werden kann. Die obere Bandlückenrandfrequenz sinkt hingegen nur geringfügig ab, sodass die Breite der Bandlücke ebenfalls erheblich von $\Delta f_{BL1} = 2126$ Hz auf $\Delta f_{BL1} = 3622$ Hz ansteigt, was einer Zunahme von 70,4% entspricht. Außerdem ergibt sich durch die Perforationen eine zusätzliche sehr

schmale zweite Bandlücke, die von der ersten Bandlücke nur durch das sehr flach verlaufende fünfte Band getrennt ist. Im Transmissionsspektrum zeigt sich das hervorragende Dämpfungsverhalten der Einheitszelle mit optimierten Perforationen, insbesondere in der ersten Bandlücke, bei der die Wellentransmission für die Bandlückenmittenfrequenz $T(f_{BL1,Mf}) = -85,6 \text{ dB}$ beträgt. Bei der Einheitszelle ohne Perforation ist die Wellentransmission mit $T(f_{BL1,Mf}) = -36,6 \text{ dB}$ deutlich größer.

In der Abb. 5.18b ist die zugehörige Eigenform zu dem in den Dispersionskurven markierten Punkt ①, die die erste Bandlücke am unteren Rand begrenzt, dargestellt. Im Vergleich zur Eigenform aus der Abb. 5.16b werden die Verschiebungen auf den inneren Armen reduziert und es treten lediglich auf den äußeren horizontalen Armen nennenswerte Verschiebungen auf. Auch bei der Eigenform aus der Abb. 5.18c für den Punkt ②, die die erste Bandlücke am oberen Rand begrenzt, zeigen sich im Vergleich zur Eigenform aus der Abb. 5.16c einige Änderungen. Beispielsweise sind die Verschiebungen in den Bereichen der kreisbogenförmigen Perforationen größer. Ein Vergleich der beiden begrenzenden Eigenformen zeigt, dass durch eine weitere Vergrößerung der Perforationen, insbesondere eine Verlängerung der ausgerundeten viereckigen Perforation auf den äußeren Armen der Einheitszelle, keine weitere Zunahme der Bandlückenbreite zu erwarten ist. Dies liegt daran, dass die Verschiebungen vor der Ausrundung bei der Eigenform aus der Abb. 5.18b größer sind als bei der Eigenform aus der Abb. 5.18c. Somit fällt durch eine Ausdehnung

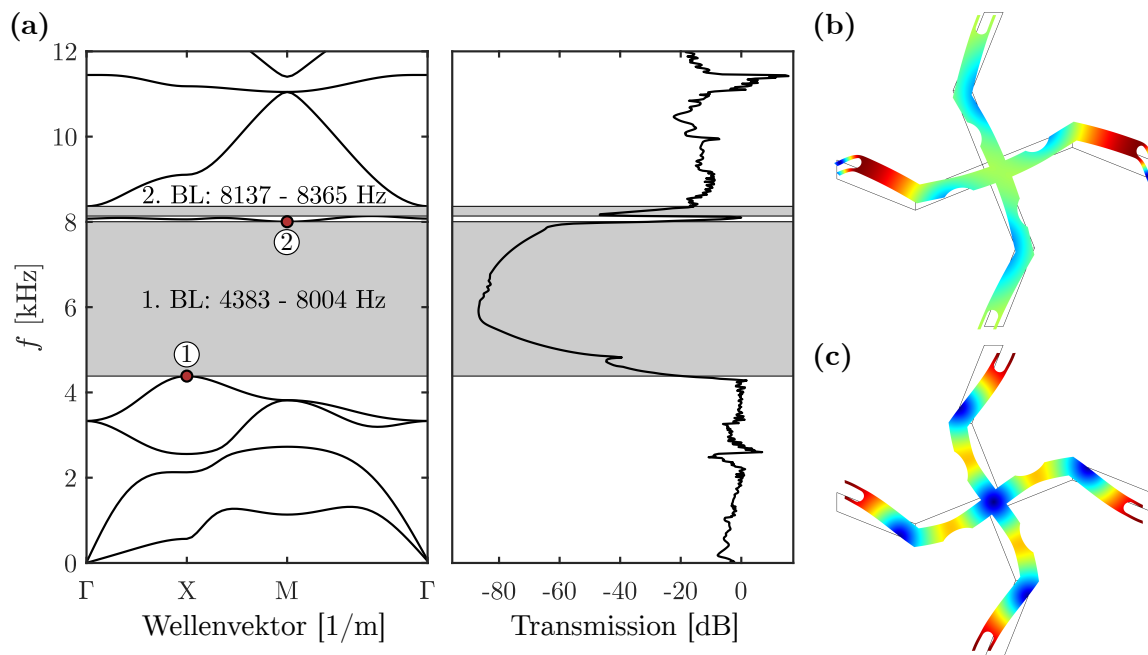


Abbildung 5.18: (a) Reelle Dispersionskurven und zugehöriges Transmissionsspektrum in der Γ -X-Richtung mit $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$ und $N_{t,eval} = 4$ für die Einheitszelle aus der Abb. 5.8 mit den optimierten Perforationen aus der Abb. 5.17c. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle X, Band 4. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle M, Band 5. Die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.2 angegeben.

der Perforationen in diesem Bereich die zugehörige Frequenz zur Eigenform, die die Bandlücke am oberen Rand begrenzt, schneller ab als die zugehörige Frequenz der Eigenform, die die Bandlücke am unteren Rand begrenzt. Folglich kann zwar durch eine Vergrößerung der Perforationen die untere Bandlückenfrequenz weiter gesenkt werden (da die Steifigkeit weiterhin überproportional zur Masse abnimmt) aber die Bandlückenbreite nimmt wieder ab. Allerdings ist bei den hier gewählten Perforationen die Tragfähigkeit einer Gitterstruktur zu überprüfen. Insbesondere an den Rändern der Einheitszelle ist die Steifigkeit erheblich reduziert. Außerdem treten in der Nähe der Perforationen Spannungskonzentrationen auf, die ebenfalls bei der Auslegung einer realen Struktur zu berücksichtigen sind. Insgesamt kann jedoch durch die optimierte Form und Anordnung von Perforationen das Wellenausbreitungsverhalten hinsichtlich einer breiten und niederfrequenten ersten Bandlücke mit einer herausragenden Dämpfungseigenschaft erzielt werden.

5.5 Beeinflussung der Wellenausbreitung durch die lokalen Resonatoren

Durch die Ausnutzung des Mechanismus der lokalen Resonanz können, wie bereits im Unterabschnitt 2.2.2 erläutert, lokal-resonante Bandlücken (LR-Bandlücken) in sehr niedrigen Frequenzbereichen deutlich unterhalb der BRAGG-Bandlücken (BG-Bandlücken) erzielt werden. Bei phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen können LR-Bandlücken beispielsweise durch das Anbringen von zusätzlichen Kragarmen mit großen Massen an den freien Enden, wie in der Abb. 5.19a veranschaulicht, realisiert werden. Bei einer geeigneten Wahl der Steifigkeiten der Kragarme sowie der Massen an den freien Enden können diese als Resonatoren wirken und die Wellenausbreitungseigenschaften der Gitterstruktur

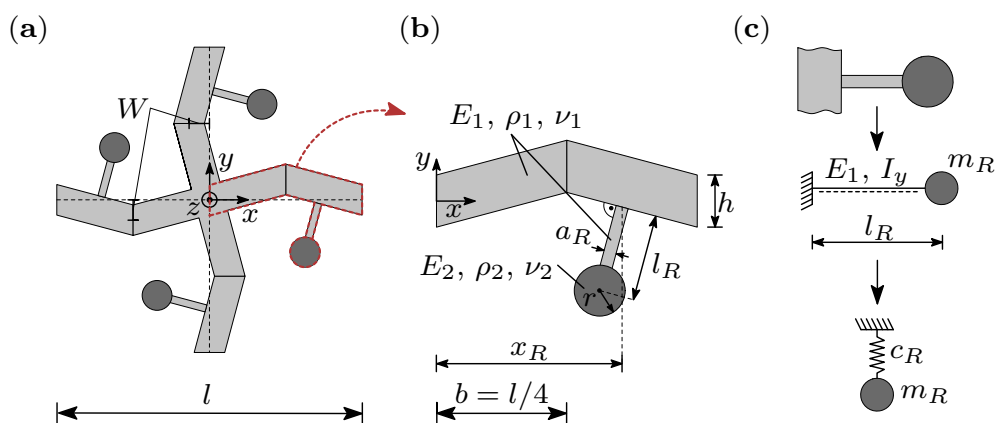


Abbildung 5.19: (a) Einheitszelle einer rotationssymmetrischen dickwandigen Zick-Zack-Gitterstruktur mit Resonatoren. (b) Abmessungen eines Zick-Zack-Arms und des Resonators. (c) Modellierung des Resonators als ein Kragträger mit einer Einzelmasse am freien Ende und Vereinfachung als ein Einmassenschwinger.

wesentlich beeinflussen. Nachfolgend wird für die in der Abb. 5.19a dargestellte rotationsymmetrische Anordnung der Resonatoren untersucht, wie eine gezielte Abstimmung der Resonatoren auf vorgegebene Anforderungen erfolgen kann. In der Abb. 5.19b sind anhand des rechten Arms der Einheitszelle die Lage x_R des Resonators und dessen Geometrie (Länge l_R , Querschnittshöhe a_R) veranschaulicht. Der Kragarm besteht wie die Zick-Zack-Gitterstruktur aus Aluminium, wobei die Materialeigenschaften E_1 , ρ_1 und ν_1 sowie die sonstigen Geometrieigenschaften der Zick-Zack-Gitterstruktur der Tab. 5.2 entnommen werden können. Die Masse am freien Ende des Kragarms wird durch eine kreisförmige Scheibe mit dem Radius r aus Wolfram mit $E_2 = 360$ GPa, $\rho_2 = 19320$ kg/m³ und $\nu_2 = 0,3$ realisiert.

Konstruktion der Resonatoren

Wenn die Steifigkeit eines Resonators deutlich geringer ist als die Steifigkeit des Zick-Zack-Arms, an den der Resonator angeschlossen ist, dann kann der Resonator, wie in der Abb. 5.19c veranschaulicht, näherungsweise als ein starr eingespannter Kragträger mit einer Einzelmasse am freien Ende modelliert werden. Für den Kragträger mit einem rechteckigen Querschnitt kann die Ersatzfedersteifigkeit c_R für Biegeschwingungen durch

$$c_R = \frac{3E_1 I_y}{l_R^3} = \frac{E_1 a_R^3 t}{4l_R^3} \quad (5.2)$$

bestimmt werden, wobei t die Querschnittsdicke nach Tab. 5.2 ist. Die mitschwingende Masse des Resonators ergibt sich durch die Masse der Kreisscheibe am freien Ende zuzüglich ungefähr einem Viertel der Gesamtmasse des Kragarms. Folglich beträgt die mitschwingende Masse ungefähr

$$m_R = \pi r^2 t \rho_2 + \frac{1}{4} (l_R - r) a_R t \rho_1. \quad (5.3)$$

Mithilfe der Ersatzfedersteifigkeit sowie der mitschwingenden Masse kann der Resonator näherungsweise als ein Einmassenschwinger vereinfacht und die Resonanzfrequenz (Eigenfrequenz) mittels

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{c_R}{m_R}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E_1 a_R^3}{l_R^3 (4\pi r^2 \rho_2 + (l_R - r) a_R \rho_1)}} \quad (5.4)$$

abgeschätzt werden. Bei der Gl. (5.4) handelt es sich um eine Abschätzung nach oben, da die Steifigkeit des Resonators durch die Annahme einer starren Einspannung überschätzt wird. Die tatsächliche Resonanzfrequenz wird daher stets unter der abgeschätzten Resonanzfrequenz liegen.

Einflüsse der Masse und der Steifigkeit der Resonatoren

Die Massen und Steifigkeiten der Resonatoren können durch verschiedene Parameter, wie beispielsweise die Materialeigenschaften oder die Längen und Querschnittsdicken der Kragarme beeinflusst werden. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird die Masse eines Resonators über den Radius r der kreisförmigen Scheibe am freien Ende des Kragarms und die Steifigkeit des Resonators über die Länge l_R des Kragarms variiert. In der Abb. 5.20a ist der Einfluss der Länge l_R bzw. der resultierenden Ersatzfedersteifigkeit c_R auf die Randfrequenzen der ersten LR-Bandlücke für die Einheitszelle aus der Abb. 5.19 mit $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $x_R = 30$ mm dargestellt. Die rot gestrichelte Linie gibt jeweils die abgeschätzte Resonanzfrequenz nach Gl. (5.4) an. Erwartungsgemäß nehmen die Bandlückenrandfrequenzen ungefähr $\propto \sqrt{c_R}$ mit der sinkenden Ersatzfedersteifigkeit ab. Es wird ebenfalls deutlich, dass sich die Qualität der Abschätzung der Resonanzfrequenz nach Gl. (5.4) mit zunehmender Länge l_R bzw. abnehmender Federsteifigkeit c_R kontinuierlich verbessert. Dies liegt insbesondere daran, dass das Steifigkeitsverhältnis zwischen dem Kragarm und dem Zick-Zack-Arm, an den der Kragarm angeschlossen ist, mit steigender Kragarmlänge zunimmt und somit die Annahme der ideal-starren Einspannung immer mehr zutreffend ist. In der Abb. 5.20b ist der Einfluss des Radius r der Kreisscheibe bzw. der Einfluss der Masse m_R auf die Randfrequenzen der ersten LR-Bandlücke dargestellt. Auch in diesem Fall nehmen die Randfrequenzen erwartungsgemäß ungefähr $\propto \sqrt{1/m_R}$ mit steigender Masse ab. Da die Kragarmlänge bei dieser Untersuchung konstant $l_R = 20$ mm beträgt ist die Qualität der Abschätzung der Resonanzfrequenz f_R auch für kleine Massen bereits sehr gut. Mit steigender Masse nimmt die Qualität der Abschätzung noch weiter zu und nähert sich der unteren Bandlückenrandfrequenz.

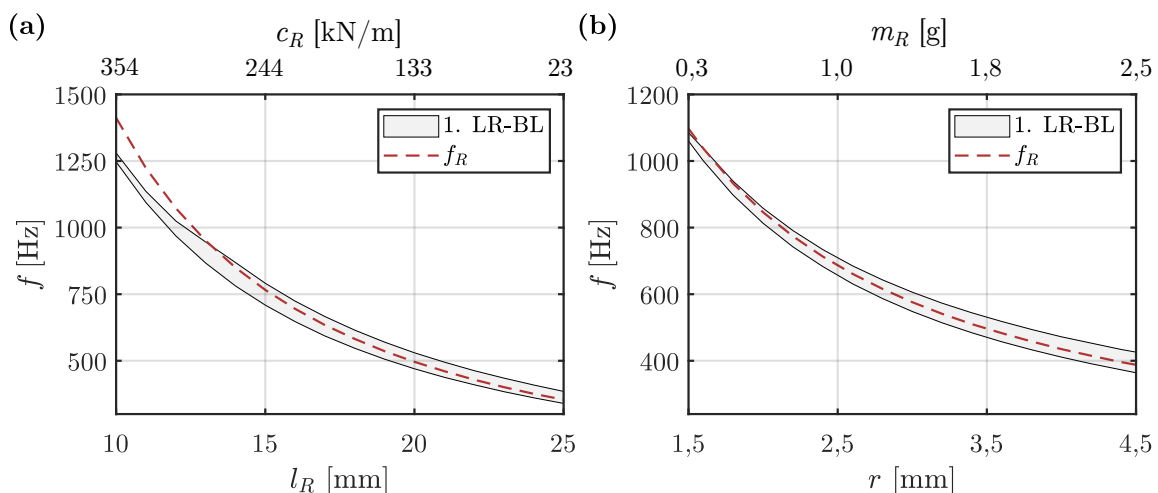


Abbildung 5.20: (a) Einfluss der Länge l_R bzw. der Ersatzfedersteifigkeit c_R auf die erste LR-Bandlücke für $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $x_R = 30$ mm (b) Einfluss des Radius r bzw. der Masse m_R auf die erste LR-Bandlücke für $a_R = 1,5$ mm, $l_R = 20$ mm und $x_R = 30$ mm. Die rot gestrichelten Linien geben jeweils die Resonanzfrequenz f_R nach Gl. (5.4) an.

Einflüsse der Lage der Resonatoren

In der Abb. 5.21a ist der Einfluss der Lage x_R der Resonatoren auf die Randfrequenzen der ersten LR-Bandlücke für die Einheitszelle aus der Abb. 5.19 mit $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $l_R = 15$ mm dargestellt. Dabei zeigt sich, dass die erste LR-Bandlücke nahezu unabhängig von der Lage der Resonatoren ist. Allerdings hat die Lage x_R , wie in der Abb. 5.21b dargestellt, einen erheblichen Einfluss auf die erste BG-Bandlücke. Dabei wird die erste BG-Bandlücke, wie bereits im Unterabschnitt 4.4.3 für die Verwendung von Einzelmassen erläutert, durch die Änderung der mitschwingenden Masse bei den begrenzenden Eigenformen am unteren und am oberen Rand der Bandlücke beeinflusst. Je nach Lage der Resonatoren wird die mitschwingende Masse für die Eigenformen unterschiedlich stark erhöht, wodurch die zugehörigen Eigenfrequenzen unterschiedlich stark absinken. Dadurch kann die Breite der ersten BG-Bandlücke entweder deutlich zunehmen (z. B. für $x_R = 30$ mm) oder abnehmen (z. B. für $x_R = 40$ mm), sodass sich die Bandlücke sogar vollständig schließen kann. Dementsprechend können die Lagen der Resonatoren auf die Eigenformen der für den jeweiligen praktischen Anwendungsfall relevanten BG-Bandlücken abgestimmt werden.

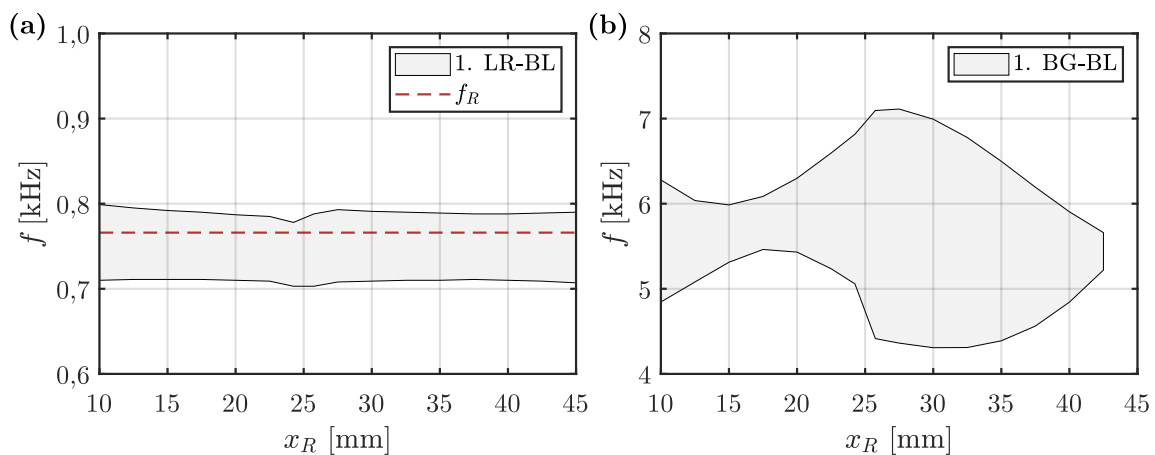


Abbildung 5.21: (a) Einfluss der Lage x_R auf die erste LR-Bandlücke. Die rot gestrichelte Linie gibt die Resonanzfrequenz f_R nach Gl. (5.4) an. (b) Einfluss der Lage x_R auf die erste BG-Bandlücke. Die Berechnungen basieren auf $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $l_R = 15$ mm.

Einflüsse der Resonatoren auf die Dispersionskurven und das Transmissionspektrum

In der Abb. 5.22a sind die reellen Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 5.19 mit $l_R = 15$ mm, $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $x_R = 30$ mm dargestellt, wobei der abgebildete Frequenzbereich für ein besseres Verständnis auf den Bereich der LR-Bandlücke beschränkt ist. Für diese Parameter der Resonatoren ergibt sich nach Gl. (5.4) eine abgeschätzte Resonanzfrequenz von $f_R = 766$ Hz. Es zeigt sich, dass tatsächlich bei

706 – 788 Hz eine LR-Bandlücke entsteht und die abgeschätzte Resonanzfrequenz innerhalb dieser Bandlücke liegt. Außerdem liegt die LR-Bandlücke deutlich unterhalb der ersten BG-Bandlücke, die bei 4301 – 6988 Hz liegt und deshalb in der Abb. 5.22a nicht dargestellt ist. Es zeigt sich, dass die LR-Bandlücke am unteren Rand durch zwei nahezu horizontal verlaufende Bänder begrenzt wird und eine sehr schmale weitere LR-Bandlücke zwischen dem zweiten und dritten Band auftritt. Diese sehr schmale LR-Bandlücke ist in der Abb. 5.22a in hellgrau hervorgehoben und ist am unteren Rand durch das zweite Band an der Stelle M begrenzt, welches in der Abb. 5.22a mit dem Punkt ① markiert ist. Am oberen Rand wird die schmale Bandlücke durch das mit dem Punkt ② markierte dritte Band an der Stelle X begrenzt. Die zugehörige Eigenform zum Punkt ① ist in der Abb. 5.22b und zum Punkt ② in der Abb. 5.22c dargestellt. Bei beiden Eigenformen schwingen fast nur die Resonatoren, wobei die Schwingungsamplituden bei der zugehörigen Eigenform zum Punkt ① bei allen Resonatoren ungefähr gleich groß sind. Hingegen sind bei der zugehörigen Eigenform zum Punkt ② nur die Schwingungsamplituden der Resonatoren auf den horizontalen Armen gleich groß und die Schwingungsamplituden der Resonatoren auf den vertikalen Armen sind unterschiedlich groß. Weitere Untersuchungen, die hier nicht ausführlich dargestellt werden, zeigen, dass diese sehr schmale LR-Bandlücke ab-

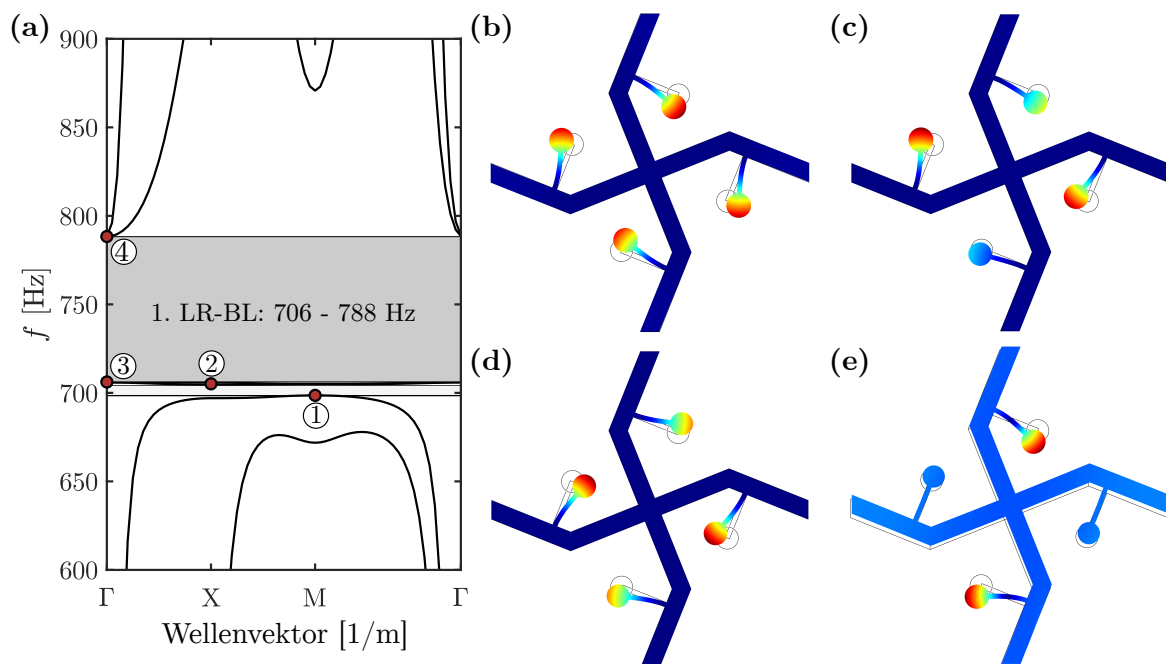


Abbildung 5.22: (a) Vergrößert dargestellte reelle Dispersionskurven im Bereich der LR-Bandlücke für die Einheitszelle mit Resonatoren aus der Abb. 5.19 für $l_R = 15$ mm, $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $x_R = 30$ mm. Die Resonanzfrequenz nach Gl. (5.3) beträgt $f_R = 766$ Hz. (b) Zugehörige Eigenform zum Punkt ①: Stelle M, Band 2. (c) Zugehörige Eigenform zum Punkt ②: Stelle X, Band 3. (d) Zugehörige Eigenform zum Punkt ③: Stelle Γ , Band 4. (e) Zugehörige Eigenform zum Punkt ④: Stelle Γ , Band 5. Die Geometrie-, Querschnitts- und Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.2 angegeben.

hängig von der Lage x_R der Resonatoren ist und beispielsweise für $x_R = 45$ mm vollständig verschwindet. Eine Auswertung der Eigenformen für $x_R = 45$ mm zeigt, dass sich die Bandlücke im Punkt M schließt, da entgegen der Eigenform aus der Abb. 5.22b entweder nur die Resonatoren auf den horizontalen oder auf den vertikalen Armen schwingen und sich die zugehörigen Bänder 2 und 3 im Punkt M berühren. Auf eine ausführliche Darstellung der Dispersionskurven und der Eigenformen für $x_R = 45$ mm wird an dieser Stelle jedoch verzichtet.

Da die sehr schmale Bandlücke in der Abb. 5.22a nur eine Breite von 5 Hz aufweist und nur bei bestimmten Lagen x_R der Resonatoren auftritt, hat diese Bandlücke keine praktische Relevanz und kann vernachlässigt werden. Die breitere Bandlücke wird daher nachfolgend als erste LR-Bandlücke bezeichnet und ist am unteren Rand durch das vierte Band an der Stelle Γ begrenzt, welches in der Abb. 5.22a mit dem Punkt ③ markiert ist. Am oberen Rand wird die Bandlücke durch das mit dem Punkt ④ markierte fünfte Band an der Stelle Γ begrenzt. Die zugehörige Eigenform zum Punkt ③ ist in der Abb. 5.22d und zum Punkt ④ in der Abb. 5.22e dargestellt. Bei der Eigenform aus der Abb. 5.22d schwingen lediglich die Resonatoren, wobei die Resonatoren auf den horizontalen Armen größere Verschiebungen als die Resonatoren auf den vertikalen Armen aufweisen. Diese Eigenform besteht also lediglich aus den Eigenformen der Resonatoren, woraus folgt, dass die tatsächliche Resonanzfrequenz zu dieser Eigenform 706 Hz betragen muss. Dafür sprechen auch die nahezu horizontal verlaufenden Bänder am unteren Rand der Bandlücke, da der Effekt der lokalen Resonanz quasi unabhängig von der Wellenausbreitungsrichtung ist. Bei der Eigenform aus der Abb. 5.22e zeigen sich hingegen auch kleine Biegeverformungen der Zick-Zack-Arme der Gitterstruktur.

Im Vergleich zu den BG-Bandlücken weisen die LR-Bandlücken auch einige Unterschiede in den komplexen Dispersionskurven und Transmissionsspektren auf. Zur Veranschaulichung sind in der Abb. 5.23 die komplexen Dispersionskurven für die Einheitszelle mit Resonatoren aus der Abb. 5.19 für $l_R = 15$ mm, $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $x_R = 30$ mm, sowie das zugehörige Transmissionsspektrum in der Γ -X-Richtung für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$, $N_{t,eval} = 4$ und $N_{PML} = 1$, dargestellt. Innerhalb von den BG-Bandlücken sind die Verläufe der Imaginärteile des Wellenvektors sowie der Wellentransmission meistens parabelförmig und der größte Imaginärteil des Wellenvektors bzw. die kleinste Wellentransmission, tritt ungefähr in der Mitte der Bandlücke auf. Hingegen verlaufen die Imaginärteile des Wellenvektors sowie die Wellentransmission innerhalb von LR-Bandlücken, wie in der Abb. 5.23 deutlich wird, meistens spitz in Richtung der Resonanzfrequenz zu. Dementsprechend ist das Dämpfungsvermögen der Struktur bei der Resonanzfrequenz, die sich wie im vorliegenden Fall meistens am unteren Rand der LR-Bandlücke befindet, sehr hoch und nimmt dann allerdings mit zunehmendem Abstand von der Resonanzfrequenz schnell ab. Beispielsweise beträgt die Wellentransmission am oberen Rand der Bandlücke in Abb.

5.23 noch ungefähr -11 dB und ist damit erheblich höher als die Wellentransmission am unteren Rand der Bandlücke mit ungefähr -45 dB. Somit können durch die Verwendung von Resonatoren zwar LR-Bandlücken in nahezu beliebig niedrigen Frequenzbereichen erzielt werden, aber gleichzeitig weisen die LR-Bandlücken den Nachteil einer geringen Breite und eines teilweise geringen Dämpfungsvermögens auf. Eine Möglichkeit, die Breite einer LR-Bandlücke oder BG-Bandlücke im Transmissionsspektrum zu vergrößern, stellt die Staffelung von unterschiedlichen Zick-Zack-Gitterstrukturen mit überlappenden Bandlücken dar, welche im nachfolgenden Abschnitt dargestellt und beschrieben wird.

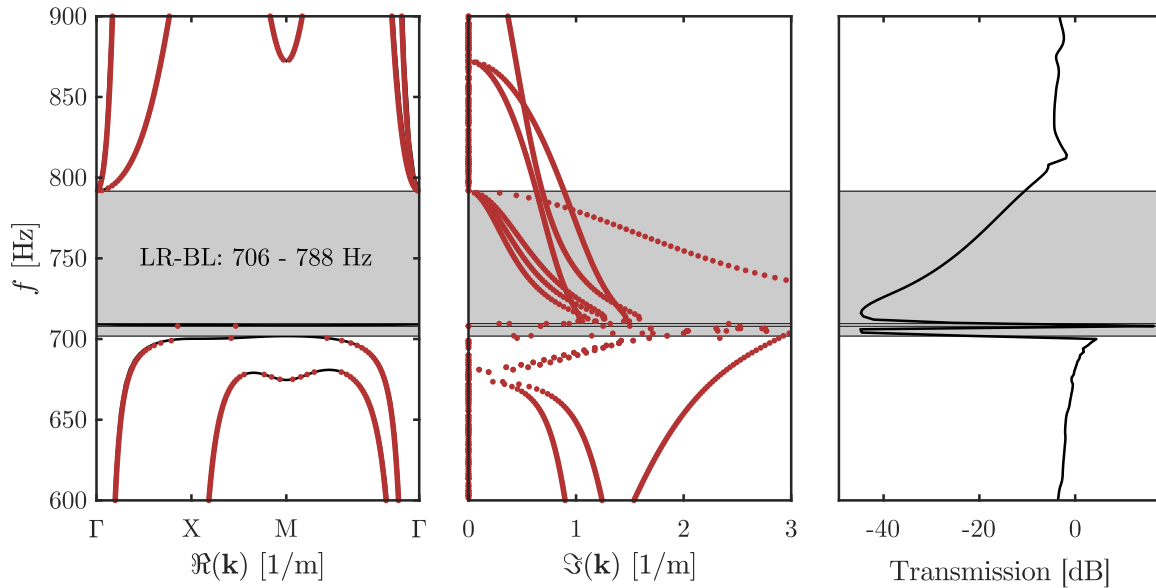


Abbildung 5.23: Komplexe Dispersionskurven für die Einheitszelle mit Resonatoren aus der Abb. 5.19 für $l_R = 15$ mm, $a_R = 1,5$ mm, $r = 3,5$ mm und $x_R = 30$ mm, sowie zugehöriges Transmissionsspektrum in Γ -X-Richtung für $N_{t,x} = 14$, $N_{t,y} = 6$, $N_{t,eval} = 4$ und $N_{PML} = 1$.

5.6 Beeinflussung der Wellenausbreitung durch die Staffelung verschiedener Zick-Zack-Gitterstrukturen

In diesem Abschnitt wird die Möglichkeit einer, wie in der Abb. 5.24 veranschaulicht, gestaffelten dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstruktur, bestehend aus unterschiedlichen Einheitszellen zur Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften, erläutert. Im Beispiel aus der Abb. 5.24 bestehen die Schichten der linken Hälfte aus der Einheitszelle 1 und die Schichten der rechten Hälfte aus der Einheitszelle 2. Durch diese Staffelung unterschiedlicher phononischer Zick-Zack-Gitterstrukturen mit überlappenden BG- oder LR-Bandlücken können deutlich breitere Bandlücken im Transmissionsspektrum erzielt werden. Aufgrund der normalerweise geringen Breiten der LR-Bandlücken

nung auf der Abb. 5.11 mit $N_{t,x} = 28$, $N_{t,y} = 4$, $N_{t,eval} = 2$ und $N_{PML} = 1$. Die Schichten in der linken Hälfte bestehen aus der Einheitszelle 1 und die Schichten in der rechten Hälfte bestehen aus der Einheitszelle 2. Es wird dabei sehr deutlich, dass die gestaffelte Anordnung von unterschiedlichen Einheitszellen zu einer wesentlich breiteren LR-Bandlücke im Transmissionsspektrum führt. Beispielsweise kann durch die gestaffelte Anordnung eine maximale Wellentransmission von $T = -25$ dB über eine Breite von etwa 130 Hz erreicht werden. Hingegen beträgt die Breite bei der Verwendung von nur einer Einheitszelle nur etwa 70 Hz, über die eine maximale Wellentransmission von 25 dB erzielt werden kann.

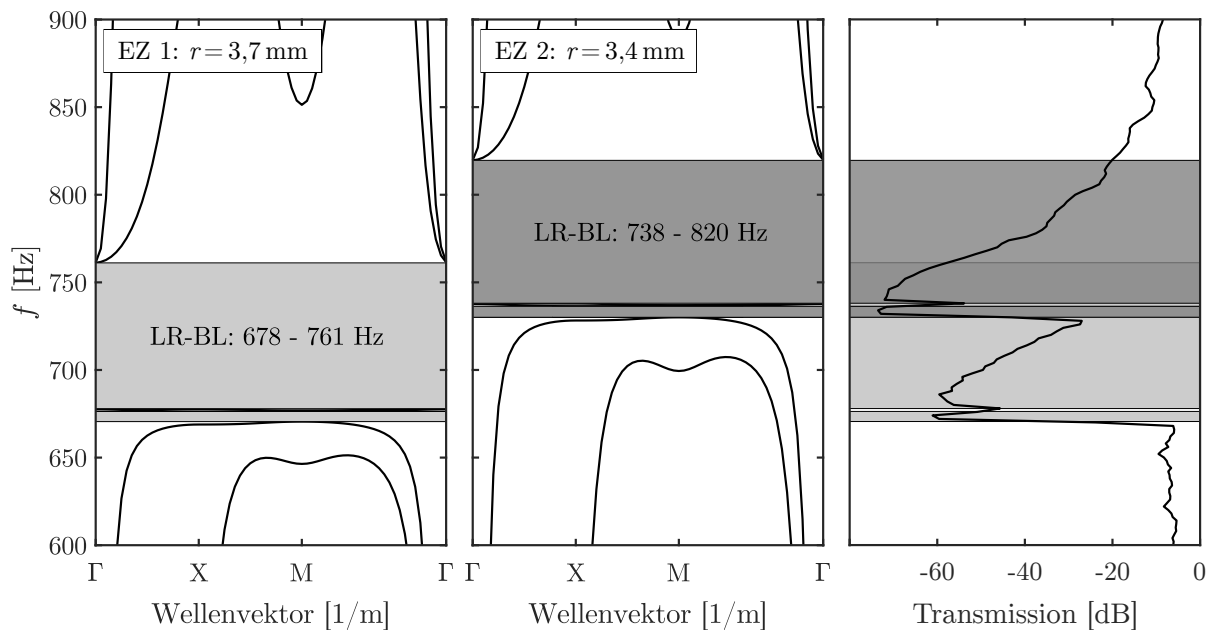


Abbildung 5.25: Reelle Dispersionskurven für die Einheitszelle aus der Abb. 5.19 für $l_R = 15$ mm, $a_R = 1,5$ mm und $x_R = 30$ mm mit $r = 3,7$ mm (links, Einheitszelle 1) sowie $r = 3,4$ mm (mitte, Einheitszelle 2). Rechts ist das zugehörige Transmissionsspektrum in der Γ -X-Richtung für die gestaffelte Struktur mit $N_{t,x} = 28$, $N_{t,y} = 4$, $N_{t,eval} = 2$ und $N_{PML} = 1$ dargestellt. Dabei bestehen die Schichten in der linken Hälfte aus der Einheitszelle 1 und die Schichten in der rechten Hälfte aus der Einheitszelle 2.

5.7 Zusammenfassung der Erkenntnisse

In diesem Abschnitt werden sowohl passive als auch aktive Maßnahmen zur Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens in 2D dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen untersucht. Als passive Maßnahmen können dabei die Perforationen in den dickwandigen Zick-Zack-Armen angeordnet oder Zick-Zack-Gitterstrukturen mit unterschiedlichen Wellenausbreitungseigenschaften gestaffelt werden. Zur aktiven Beeinflussung des Wellenausbreitungsverhaltens können lokale Resonatoren angebracht werden, wodurch insbesondere Bandlücken in sehr niedrigen Frequenzbereichen erzielt werden können. In

der Tab. 4.4 sind die wesentlichen Erkenntnisse aus den Parameterstudien zusammengefasst. Dabei sind in Abhängigkeit des jeweiligen Parameters die Kriterien für eine niederfrequente sowie die Kriterien für eine breite erste Bandlücke angegeben. Die Kriterien bei den Perforationen beziehen sich auf eine äquidistante Anordnung von den kreisförmigen Perforationen, wobei zwischen den Lagen $b = 0,25l$ und $b = 0,40l$ der Zick-Zack-Knicke unterschieden wird. Durch eine individuelle Optimierung der Formen und Anordnungen der Perforationen für eine bestimmte Einheitszelle können allerdings wesentlich breitere Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich erzielt werden.

Tabelle 5.3: Kriterien für niederfrequente und breite Bandlücken.

Art	Parameter		Niederfrequente Bandlücken	Breite Bandlücken
Passiv	Perforationen	r	Möglichst groß	Möglichst klein
		$n_{pf,1}$	Möglichst groß für $b = 0,25l$ $n_{pf,1} = 0$ für $b = 0,40l$	Möglichst groß für $b = 0,25l$ $n_{pf,1} = 1$ für $b = 0,40l$
		$n_{pf,2}$	$n_{pf,2} = 0$ für $b = 0,25l$ Möglichst groß für $b = 0,40l$	$n_{pf,2} = 0$ für $b = 0,25l$ $n_{pf,2} = 0$ für $b = 0,40l$
	Staffelung	/	Staffelung von LR-BL	Staffelung von BG-BL
Aktiv	Lokale Resonatoren	c_R	Möglichst klein	Eher klein, geringer Einfluss
		m_R	Möglichst groß	Groß, geringer Einfluss

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die elastischen Wellenausbreitungseigenschaften von verschiedenen phononischen Strukturen mithilfe von effizienten SE-Methoden untersucht. Die phononischen Materialien und Strukturen bestehen aus einer periodischen Anordnung von unterschiedlichen Materialien oder Geometrien und weisen bestimmte Frequenzbereiche auf, die üblicherweise als Bandlücken oder Stop-Bänder bezeichnet werden, in denen sich akustische oder elastische Wellen nicht ausbreiten können. Die Untersuchungen in dieser Arbeit konzentrieren sich auf die sogenannten phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen, die sich durch ein geringes Eigengewicht, eine hohe mechanische Tragfähigkeit und außergewöhnliche Wellenausbreitungseigenschaften auszeichnen. Insbesondere wird untersucht, wie die Wellenausbreitungseigenschaften der phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen passiv und aktiv beeinflusst und auf vorgegebene Anforderungen abgestimmt werden können. Dabei werden sowohl schlanke (dünnwandige) als auch gedrungene (dickwandige) phononische Zick-Zack-Gitterstrukturen behandelt.

Für die Analyse von schlanken balkenartigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen wird in dieser Arbeit die SEM nach DOYLE verwendet. Durch umfangreiche Effizienzanalysen werden die erheblichen Vorteile der SEM nach DOYLE bei der Berechnung der komplexen Dispersionskurven und der Wellentransmission im Vergleich zur konventionellen FEM aufgezeigt. Es folgen detaillierte Untersuchungen zur Beeinflussung der Wellenausbreitung in schlanken Zick-Zack-Gitterstrukturen durch eine Variation der geometrischen Parameter, der Steifigkeits- und Massenverhältnisse und der Verwendung von diskreten Massen. Dabei wird auch gezeigt, dass die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse durch eine Skalierung der Einheitszelle auf nahezu beliebige Frequenzbereiche übertragen werden können. Insbesondere durch eine Variation der Auslenkung W der Zick-Zack-Arme und der Lage b der Zick-Zack-Knicke sowie durch die Einführung von Einzelmassen können die Frequenzbereiche der Bandlücken bei gleichbleibender Gitterkonstante wesentlich beeinflusst und niederfrequente Bandlücken erzielt werden. Bei den Untersuchungen wird jedoch auch deutlich, dass sich die Kriterien für eine möglichst niederfrequente erste Bandlücke und die Kriterien für eine möglichst breite erste Bandlücke häufig widersprechen können. Neben den passiven und aktiven Maßnahmen zur Beeinflussung der Wellenausbreitung wird unter der Berücksichtigung der Effekte der geometrischen Nichtlinearität auch eine

weitere Möglichkeit zur aktiven und adaptiven Beeinflussung der Bandlücken vorgestellt. Dabei können durch das gesteuerte Aufbringen oder Entfernen von externen Lasten die Bandlückenrandfrequenzen erhöht oder verringert werden. Dies kann durch die *on-off*- oder *off-on*-Schalter realisiert werden, wobei sich hierbei insbesondere die zweiaxialen Druck- oder Zugbelastungen als vorteilhaft erweisen. Entgegen den einaxialen Belastungen können mithilfe der zweiaxialen Belastungen sowohl die untere als auch die obere Randfrequenz der ersten Bandlücke wesentlich beeinflusst werden.

Weiterhin werden in dieser Arbeit dickwandige phononische Zick-Zack-Gitterstrukturen mithilfe der SEM nach PATERA untersucht. Auch in diesem Fall werden zunächst durch umfangreiche Effizienzanalysen die erheblichen Vorteile der SEM nach PATERA bei der Berechnung der reellen und komplexen Dispersionskurven sowie der Wellentransmission im Vergleich zur konventionellen FEM demonstriert. Anschließend wird insbesondere analysiert, wie die Wellenausbreitungseigenschaften durch Perforationen in den Zick-Zack-Armen beeinflusst werden können. Zu diesem Zweck werden zunächst die verschiedenen Mechanismen, durch die die Perforationen die Wellenausbreitungseigenschaften beeinflussen, identifiziert. Dabei zeigt sich, dass die erste Bandlücke (LR-Bandlücke) insbesondere durch die Änderung der Steifigkeiten und Massen infolge der Perforationen beeinflusst wird. Durch die Auswertung der Dispersionskurven sowie der zugehörigen Eigenformen, die die erste Bandlücke am unteren und oberen Rand begrenzen, können die optimalen Positionen und Formen der Perforationen ermittelt werden. Dadurch können schließlich sowohl die Breite der ersten Bandlücke erheblich vergrößert als auch die untere Bandlückenrandfrequenz deutlich verringert werden. Die Bandlücken höherer Ordnung werden hingegen durch BRAGG-Beugungseffekte an den Rändern der Perforationen beeinflusst. Es folgen Untersuchungen zum Einfluss von Resonatoren, die aus einem Kragarm mit einer geringen Steifigkeit und einer großen Masse am freien Ende bestehen. Durch das Anbringen dieser Resonatoren an die Zick-Zack-Arme können sehr niederfrequente Bandlücken erzielt werden. Die Eigenfrequenz der Resonatoren kann dabei durch ein Ersatzmodell eines Kragträgers abgeschätzt werden. Durch die Anpassung der Biegesteifigkeit und der Masse am freien Ende sowie der Anordnung bzw. Lage der Resonatoren können somit lokal-resonante Bandlücken in nahezu beliebigen Frequenzbereichen erzielt werden. Abschließend wird die Möglichkeit einer Staffelung von verschiedenen dickwandigen Zick-Zack-Gitterstrukturen mit dem Zweck einer möglichst breitbandigen Wellen- bzw. Schwingungsisolierung vorgestellt. Dazu werden die Dispersionskurven von zwei unterschiedlichen Einheitszellen so aufeinander abgestimmt, dass sich die ersten Bandlücken teilweise überschneiden. Durch eine gestaffelte Anordnung der beiden unterschiedlichen Einheitszellen ergibt sich somit im Transmissionsspektrum eine sehr breite Bandlücke, die sich aus den Bandlücken der beiden Einheitszellen zusammensetzt.

Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen und untersuchten phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen und die entsprechenden Beeinflussungsmaßnahmen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 6.1: Zusammenfassung der Möglichkeiten um die Wellenausbreitungseigenschaften von Zick-Zack-Gitterstrukturen zu beeinflussen.

Art	Zick-Zack-Strukturen	Parameter
Passiv	Schlank (dünnwandig)	Geometrie, Material Knicke Steifigkeits- und Massenverhältnisse
	Gedrungen (dickwandig)	Knicke Perforationen Staffelung
Aktiv	Schlank (dünnwandig)	Einzelmassen als lokale Resonatoren Äußere Druck- bzw. Zugbelastung (geometr. Nichtlinearität)
	Gedrungen (dickwandig)	Lokale Resonatoren

6.2 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene vielversprechende Maßnahmen zur passiven und aktiven Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften von dünn- und dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen vorgestellt. In der Zukunft soll untersucht werden, wie die verschiedenen Maßnahmen kombiniert, weiterentwickelt und ergänzt werden können, um weitere Verbesserungen hinsichtlich breiter Bandlücken im niedrigen Frequenzbereich zu erzielen. Unter Anderem sollen in der Zukunft die folgenden Möglichkeiten untersucht werden:

- Kombination von Perforationen und Resonatoren bei dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.
- Kombination von diskreten Einzelmassen und einer äußeren Belastung bei dünnwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.
- Gradierte Staffelung von phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen mit kontinuierlicher Änderung der Wellenausbreitungseigenschaften.
- Gradierte Anordnung von unterschiedlichen Perforationen bei dickwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen.
- Aktive Beeinflussung der Wellenausbreitungseigenschaften in dünnwandigen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen durch die Ausnutzung der Piezoelektrizität.

Außerdem soll eine experimentelle Validierung der vorgeschlagenen phononischen Zick-Zack-Gitterstrukturen und der entsprechenden Beeinflussungsmaßnahmen durchgeführt werden.

Auch die in dieser Arbeit verwendeten SE-Methoden nach DOYLE und nach PATERA haben sich als sehr effizient für die numerische Simulation elastischer Wellenausbreitungsprobleme in 2D Zick-Zack-Gitterstrukturen erwiesen. Für einige phonische Materialien und Strukturen ist jedoch eine 3D Berechnung erforderlich. Eine Erweiterung des numerischen Werkzeugs auf Basis der SEM nach PATERA auf Schalenelemente wurde bereits realisiert und weist ebenfalls erhebliche Vorteile im Vergleich zur konventionellen FEM auf. Neben den deutlichen Vorteilen bei der Berechnung der Dispersionskurven und der Wellentransmission ergibt sich durch die Verwendung höherer Elementordnungen bei verschiebungsbasierten REISSNER-MINDLIN-Schalenelementen der Vorteil, dass der Einfluss von Querschub-Locking reduziert wird [70]. Auch eine Erweiterung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten numerischen Werkzeuge auf 3D Balkenelemente oder 3D Volumenelemente der Elastodynamik ist möglich, würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit übersteigen.

Als verbesserungswürdig hat sich der in dieser Arbeit verwendete Netzgenerator GMSH für die SEM nach PATERA erwiesen. Der deutliche Vorteil der SEM nach PATERA im Vergleich zur konventionellen FEM konnte aufgrund von einer Netzverfeinerung, insbesondere im Umfeld der kreisförmigen Perforationen, nicht vollständig ausgenutzt werden. Dies liegt insbesondere daran, dass in dieser Arbeit ausschließlich geradlinig berandete quadrilaterale Elemente verwendet wurden. Eine erhebliche Verbesserung könnte durch die Verwendung von optimierten Netzgeneratoren für krummlinig berandete quadrilaterale spektrale Elemente höherer Ordnung erzielt werden. Die Entwicklung derartiger Netzgeneratoren ist allerdings noch Gegenstand aktuellerer Forschung (z.B. [87, 125]).

Anhang

A Fourier-Transformation

Eine beliebige aperiodische Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, wobei L^1 der LEBESQUE-Raum der 1-fach integrierbaren Funktionen ist, kann mithilfe der FOURIER-Transformation

$$\bar{f}(p) = (\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ipx} dx \quad (\text{A.1})$$

in ein kontinuierliches Spektrum zerlegt werden. Dabei ist \bar{f} die FOURIER-Transformierte von f und p ist der sogenannte Transformationsparameter. Für die Anwendung im Rahmen dieser Arbeit kann somit eine zeitabhängige Funktion $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ mittels

$$\bar{f}(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.2})$$

vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert werden.

Beispielsweise folgt durch die Anwendung der FOURIER-Transformation auf die hyperbolische partielle Differentialgleichung bzw. longitudinale Wellengleichung

$$EAu''(x, t) - \rho A\ddot{u}(x, t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

für Stabschwingungen im Zeitbereich die elliptische gewöhnliche Differentialgleichung bzw. zeitharmonische longitudinale Wellengleichung

$$EAu''(x) + \omega^2 \rho Au(x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

für Stabschwingungen im Frequenzbereich.

B Spektrale Formfunktionen des Euler-Bernoulli-Balkens nach Theorie II. Ordnung

Die spektralen Formfunktionen $\mathbf{N}_B^{II} = [\varphi_{B1}^{II} \varphi_{B2}^{II} \varphi_{B3}^{II} \varphi_{B4}^{II}]$ des EULER-BERNOULLI-Balkens nach Theorie II. Ordnung können mithilfe von Gl. (3.38) berechnet werden, wobei sich k_{λ_1} und k_{λ_2} für eine Druckkraft aus der Gl. (3.26) und für eine Zugkraft aus der Gl. (3.27) ergeben. Die ersten beiden Formfunktionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_{B1}^{II} = \frac{1}{\alpha} & \left[\frac{1}{2} k_{\lambda_2}^4 \cos(k_{\lambda_1} x) - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^4 \cosh(k_{\lambda_2} (2l - x)) \right. \\
& - 2 \cosh(k_{\lambda_2} l) (k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1} (l + x)) + 3k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1} (l - x))) \\
& - 2 \cos(k_{\lambda_1} l) (k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} (l + x)) + 3k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} (l - x))) \\
& - \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^4 \cos(k_{\lambda_1} (2l - x)) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^4 \cosh(k_{\lambda_2} x) + \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1} (2l - x)) \\
& + \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} (2l - x)) - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} x) \\
& - \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^4 \cosh(2k_{\lambda_2} l) \cos(k_{\lambda_1} x) + \frac{9}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1} x) \\
& + \frac{9}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} x) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^4 \cosh(k_{\lambda_2} (2l - x)) \cos(2k_{\lambda_1} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^4 \cos(k_{\lambda_1} (2l - x)) \cosh(2k_{\lambda_2} l) - k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sin(k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} (l - x)) \\
& + 3k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} (l - x)) - 3k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sin(k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} (l - x)) \\
& + k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} (l - x)) + \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} x) \\
& + \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2} l) \cos(k_{\lambda_1} x) - \frac{1}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sin(k_{\lambda_1} (2l - x)) \sinh(2k_{\lambda_2} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} (2l - x)) \sin(2k_{\lambda_1} l) - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sin(k_{\lambda_1} (2l - x)) \sinh(2k_{\lambda_2} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} (2l - x)) \sin(2k_{\lambda_1} l) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1} (2l - x)) \cosh(2k_{\lambda_2} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} (2l - x)) \cos(2k_{\lambda_1} l) - k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sin(k_{\lambda_1} (l + x)) \sinh(k_{\lambda_2} l) \\
& - k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} (l + x)) \sin(k_{\lambda_1} l) + k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sin(k_{\lambda_1} (l + x)) \sinh(k_{\lambda_2} l) \\
& + k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} (l + x)) \sin(k_{\lambda_1} l) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sin(2k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} x) \\
& + \frac{3}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^3 \sinh(2k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} x) - \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sin(2k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} x) \\
& \left. - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2} \sinh(2k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} x) \right], \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{B2}^{II} = \frac{1}{\alpha} & \left[2 \cosh(k_{\lambda_2} l) (k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1} (l+x)) - 3k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1} (l-x))) \right. \\
& - \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} (2l-x)) - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 \sin(k_{\lambda_1} x) - \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} x) \\
& - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 \sin(k_{\lambda_1} (2l-x)) + 2 \cos(k_{\lambda_1} l) (k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} (l+x)) \\
& - 3k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} (l-x))) - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 \cosh(k_{\lambda_2} (2l-x)) \sin(2k_{\lambda_1} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 \sin(k_{\lambda_1} (2l-x)) \cosh(2k_{\lambda_2} l) - \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^3 \cos(k_{\lambda_1} (2l-x)) \sinh(2k_{\lambda_2} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} (2l-x)) \cos(2k_{\lambda_1} l) - k_{\lambda_1}^3 \cosh(k_{\lambda_2} (l+x)) \sin(k_{\lambda_1} l) \\
& - k_{\lambda_2}^3 \cos(k_{\lambda_1} (l+x)) \sinh(k_{\lambda_2} l) - \frac{9}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1} x) - \frac{9}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} x) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 \cosh(2k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} x) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^3 \cosh(k_{\lambda_2} x) \sin(2k_{\lambda_1} l) \\
& + \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^3 \cos(2k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} x) + \frac{1}{2} k_{\lambda_2}^3 \cos(k_{\lambda_1} x) \sinh(2k_{\lambda_2} l) \\
& + k_{\lambda_1}^3 \sin(k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} (l-x)) + k_{\lambda_2}^3 \sinh(k_{\lambda_2} l) \cos(k_{\lambda_1} (l-x)) \\
& + \frac{3}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1} (2l-x)) + \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} (2l-x)) \\
& + 3k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} (l-x)) + 3k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} l) \cos(k_{\lambda_1} (l-x)) \\
& - \frac{1}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} (2l-x)) \sin(2k_{\lambda_1} l) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1} (2l-x)) \cosh(2k_{\lambda_2} l) \\
& - \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \cos(k_{\lambda_1} (2l-x)) \sinh(2k_{\lambda_2} l) + \frac{1}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2} (2l-x)) \cos(2k_{\lambda_1} l) \\
& + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} (l+x)) \sin(k_{\lambda_1} l) + k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \cos(k_{\lambda_1} (l+x)) \sinh(k_{\lambda_2} l) \\
& - \frac{3}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} x) - \frac{3}{2} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} x) \sin(2k_{\lambda_1} l) \\
& \left. - \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \cos(2k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} x) - \frac{3}{2} k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \cos(k_{\lambda_1} x) \sinh(2k_{\lambda_2} l) \right], \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\alpha = & k_{\lambda_1}^4 - k_{\lambda_2}^4 \cosh(k_{\lambda_2} l)^2 - k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1} l) - k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1} l) - k_{\lambda_1}^4 \cosh(k_{\lambda_2} l)^2 \\
& + k_{\lambda_2}^4 + 6k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 + 2k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1} l) + k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} l)^2 \\
& + k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} l)^2 + 6k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2} l)^2 \\
& - 16k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} l) + 2k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1} l) \cosh(k_{\lambda_2} l)^2. \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Die dritte Formfunktion lautet

$$\begin{aligned}
 \varphi_{B3}^{II} = \frac{1}{\beta} & \left[k_{\lambda_1}^2 e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_2} x} \mathbf{i} - k_{\lambda_1}^2 e^{k_{\lambda_2} l} e^{-k_{\lambda_2} x} \mathbf{i} + k_{\lambda_2}^2 e^{k_{\lambda_1} l} e^{-k_{\lambda_1} x} \mathbf{i} - k_{\lambda_2}^2 e^{k_{\lambda_1} l} e^{k_{\lambda_1} x} \mathbf{i} \right. \\
 & - k_{\lambda_1}^2 e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l 2i} + k_{\lambda_1}^2 e^{k_{\lambda_2} l} e^{-k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l 2i} + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_2} x} \\
 & + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{-k_{\lambda_2} x} - k_{\lambda_2}^2 e^{2k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} e^{-k_{\lambda_1} x} \mathbf{i} + k_{\lambda_2}^2 e^{2k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} e^{k_{\lambda_1} x} \mathbf{i} \\
 & - 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} x} - 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_1} l} e^{-k_{\lambda_1} x} \\
 & + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_1} l} e^{k_{\lambda_1} x} + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l 2i} + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{-k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l 2i} \\
 & - 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{2k_{\lambda_2} l} e^{-k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l} - 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l 2i} e^{-k_{\lambda_1} x} \\
 & \left. + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{2k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} e^{-k_{\lambda_1} x} + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{2k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} e^{k_{\lambda_1} x} \right], \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \beta = k_{\lambda_1}^2 (e^{2k_{\lambda_2} l} \mathbf{i} - \mathbf{i}) - k_{\lambda_2}^2 (e^{2k_{\lambda_2} l} \mathbf{i} - \mathbf{i}) + e^{k_{\lambda_1} l 2i} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2} \mathbf{i})^2 \mathbf{i} \\
 + e^{2l(k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})} (-k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})^2 \mathbf{i} + 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} (e^{2k_{\lambda_2} l} + 1) - 8k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{l(k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})}. \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

Die vierte Formfunktion ergibt sich schließlich zu

$$\begin{aligned}
 \varphi_{B4}^{II} = \frac{1}{\gamma} & \left[-k_{\lambda_2} (e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} x} \mathbf{i} 2\mathbf{i} - e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l 2i} e^{-k_{\lambda_1} x} \mathbf{i} 2\mathbf{i}) \right. \\
 & + 4e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} \cosh(k_{\lambda_2} l) \sin(k_{\lambda_1} x) - 4e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} \cosh(k_{\lambda_2} x) \sin(k_{\lambda_1} l) \\
 & - k_{\lambda_1} (2e^{k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l} - 2e^{2k_{\lambda_2} l} e^{-k_{\lambda_2} x} e^{k_{\lambda_1} l} - 4e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} \cos(k_{\lambda_1} l) \sinh(k_{\lambda_2} x) \\
 & \left. + 4e^{k_{\lambda_2} l} e^{k_{\lambda_1} l} \cos(k_{\lambda_1} x) \sinh(k_{\lambda_2} l) \right), \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \gamma = e^{2k_{\lambda_2} l} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2} \mathbf{i})^2 \mathbf{i} - k_{\lambda_1}^2 (e^{2l(k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})} \mathbf{i} + \mathbf{i}) \\
 + k_{\lambda_2}^2 (e^{2l(k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})} \mathbf{i} + \mathbf{i}) + e^{k_{\lambda_1} l 2i} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2} \mathbf{i})^2 \mathbf{i} - 8k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{l(k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})} \\
 + 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} (e^{2l(k_{\lambda_2} + k_{\lambda_1} \mathbf{i})} + 1). \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

C Spektrale Elementmatrix des Euler-Bernoulli-Balkens nach Theorie II. Ordnung

Die spektrale Elementmatrix des EULER-BERNOULLI-Balkens nach Theorie II. Ordnung \mathbf{S}_B^{II} in der Gl. (3.39) kann mithilfe der spektralen Formfunktionen aus dem Anhang B berechnet werden. Dabei ist die Stabkraft S bei einer Druckkraft negativ und bei einer Zugkraft positiv einzusetzen. Außerdem ergeben sich k_{λ_1} und k_{λ_2} für eine Druckkraft aus der Gl. (3.26) und für eine Zugkraft aus der Gl. (3.27). Die Einträge der Matrix

$$\mathbf{S}_B^{II} = \begin{bmatrix} s_{B11}^{II} & s_{B12}^{II} & s_{B13}^{II} & s_{B14}^{II} \\ s_{B21}^{II} & s_{B22}^{II} & s_{B23}^{II} & s_{B24}^{II} \\ s_{B31}^{II} & s_{B32}^{II} & s_{B33}^{II} & s_{B34}^{II} \\ s_{B41}^{II} & s_{B42}^{II} & s_{B43}^{II} & s_{B44}^{II} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

ergeben sich zu

$$\begin{aligned} s_{B11}^{II} = & -\frac{EI}{\Delta_{11}} k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} (k_{\lambda_1}^2 + k_{\lambda_2}^2) \left(3k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \sin(2k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_1}^3 \sinh(2k_{\lambda_2}l) \right. \\ & - k_{\lambda_2}^3 \sin(2k_{\lambda_1}l) + 3k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \sinh(2k_{\lambda_2}l) + k_{\lambda_1}^3 \cos(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) \\ & + k_{\lambda_2}^3 \cosh(2k_{\lambda_2}l) \sin(2k_{\lambda_1}l) - 8k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) \\ & - 8k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \cosh(k_{\lambda_2}l) \sin(k_{\lambda_1}l) + k_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) \\ & \left. + k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2} \cosh(2k_{\lambda_2}l) \sin(2k_{\lambda_1}l) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} s_{B12}^{II} = & \frac{1}{\Delta_{12}} \left[EIk_{\lambda_1}^6 - EIk_{\lambda_2}^6 + Sk_{\lambda_1}^4 + Sk_{\lambda_2}^4 - EIk_{\lambda_1}^6 \cos(2k_{\lambda_1}l) + EIk_{\lambda_2}^6 \cos(2k_{\lambda_1}l) \right. \\ & - EIk_{\lambda_1}^6 \cosh(2k_{\lambda_2}l) + EIk_{\lambda_2}^6 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - Sk_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) - Sk_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \\ & - Sk_{\lambda_1}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - Sk_{\lambda_2}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - 9EIk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^4 + 9EIk_{\lambda_1}^4 k_{\lambda_2}^2 + 18Sk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \\ & - \cos(k_{\lambda_1}l) \cosh(k_{\lambda_2}l) (16EIk_{\lambda_1}^4 k_{\lambda_2}^2 - 16EIk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^4 + 32Sk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2) \\ & + EIk_{\lambda_1}^6 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) - EIk_{\lambda_2}^6 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\ & + Sk_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) + Sk_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\ & - 3EIk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) + 3EIk_{\lambda_1}^4 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) - 3EIk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\ & + 3EIk_{\lambda_1}^4 k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2}l) + 6Sk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) + 6Sk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\ & - 4EIk_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^5 \sin(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) - 4EIk_{\lambda_1}^5 k_{\lambda_2} \sin(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) \\ & + EIk_{\lambda_1} k_{\lambda_2}^5 \sin(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) + EIk_{\lambda_1}^5 k_{\lambda_2} \sin(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) \\ & - EIk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) + EIk_{\lambda_1}^4 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\ & + 2Sk_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) - 8EIk_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2}^3 \sin(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) \\ & \left. + 2EIk_{\lambda_1}^3 k_{\lambda_2}^3 \sin(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

sowie

$$s_{B13}^{II} = \frac{1}{\Delta_{13}} \left[4EIk_{\lambda_1}k_{\lambda_2}e^{l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} (k_{\lambda_1} \sin(k_{\lambda_1}l) + k_{\lambda_2} \sinh(k_{\lambda_2}l)) (k_{\lambda_1}^2 + k_{\lambda_2}^2) \right], \quad (C.4)$$

$$s_{B14}^{II} = \frac{EI}{\Delta_{14}} \left[k_{\lambda_1}k_{\lambda_2} (\cos(k_{\lambda_1}l) - \cosh(k_{\lambda_2}l)) (k_{\lambda_1}^2 + k_{\lambda_2}^2) \left(2k_{\lambda_1}k_{\lambda_2} \right. \right. \\ \left. \left. + k_{\lambda_1}^2 \sin(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_2}^2 \sin(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) \right. \right. \\ \left. \left. - 2k_{\lambda_1}k_{\lambda_2} \cos(k_{\lambda_1}l) \cosh(k_{\lambda_2}l) \right) \right], \quad (C.5)$$

$$s_{B22}^{II} = \frac{EI}{\Delta_{22}} (k_{\lambda_1}^2 + k_{\lambda_2}^2) \left(k_{\lambda_1}^3 \sin(2k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_2}^3 \sinh(2k_{\lambda_2}l) \right. \\ \left. - 3k_{\lambda_1}k_{\lambda_2}^2 \sin(2k_{\lambda_1}l) + 3k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2} \sinh(2k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_1}^3 \cosh(2k_{\lambda_2}l) \sin(2k_{\lambda_1}l) \right. \\ \left. + k_{\lambda_2}^3 \cos(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) + 8k_{\lambda_1}k_{\lambda_2}^2 \cosh(k_{\lambda_2}l) \sin(k_{\lambda_1}l) \right. \\ \left. - 8k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2} \cos(k_{\lambda_1}l) \sinh(k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_1}k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2}l) \sin(2k_{\lambda_1}l) \right. \\ \left. + k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2} \cos(2k_{\lambda_1}l) \sinh(2k_{\lambda_2}l) \right), \quad (C.6)$$

$$s_{B24}^{II} = \frac{1}{\Delta_{24}} \left[4EIE^{l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} (k_{\lambda_2} \sin(k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_1} \sinh(k_{\lambda_2}l)) (k_{\lambda_1}^2 + k_{\lambda_2}^2) \right]. \quad (C.7)$$

Dabei sind Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} , Δ_{22} und Δ_{24} gegeben durch

$$\Delta_{11} = k_{\lambda_1}^4 - k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_1}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_2}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \\ + k_{\lambda_2}^4 + 18k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 + k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) + k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\ + 6k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) + 6k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - 32k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1}l) \cosh(k_{\lambda_2}l) \\ + 2k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l), \quad (C.8)$$

$$\Delta_{12} = 2k_{\lambda_1}^4 - 2k_{\lambda_2}^4 \cosh^2(k_{\lambda_2}l) - 2k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) - 2k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) - 2k_{\lambda_1}^4 \cosh^2(k_{\lambda_2}l) \\ + 2k_{\lambda_2}^4 + 12k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 + 4k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) + 2k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh^2(k_{\lambda_2}l) \\ + 2k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh^2(k_{\lambda_2}l) + 12k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cosh^2(k_{\lambda_2}l) \\ - 32k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1}l) \cosh(k_{\lambda_2}l) + 4k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh^2(k_{\lambda_2}l), \quad (C.9)$$

$$\Delta_{13} = e^{2k_{\lambda_2}l} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2}i)^2 i - k_{\lambda_1}^2 (e^{2l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 1) i + k_{\lambda_2}^2 (e^{2l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 1) i \\ + e^{k_{\lambda_1}l2i} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2}i)^2 i - 8k_{\lambda_1}k_{\lambda_2}e^{l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 2k_{\lambda_1}k_{\lambda_2} (e^{2l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 1), \quad (C.10)$$

$$\Delta_{14} = k_{\lambda_1}^4 \cos^2(k_{\lambda_1}l) \cosh^2(k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_1}^4 \cos^2(k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_1}^4 \cosh^2(k_{\lambda_2}l) \\ + k_{\lambda_1}^4 + 2k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos^2(k_{\lambda_1}l) \cosh^2(k_{\lambda_2}l) + 2k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos^2(k_{\lambda_1}l) \\ - 8k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1}l) \cosh(k_{\lambda_2}l) + 2k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \cosh^2(k_{\lambda_2}l) + 2k_{\lambda_1}^2k_{\lambda_2}^2 \\ + k_{\lambda_2}^4 \cos^2(k_{\lambda_1}l) \cosh^2(k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_2}^4 \cos^2(k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_2}^4 \cosh^2(k_{\lambda_2}l) + k_{\lambda_2}^4, \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{22} = & k_{\lambda_1}^4 - k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) - k_{\lambda_1}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_2}^4 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \\
& + k_{\lambda_2}^4 + 18k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 + k_{\lambda_1}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) + k_{\lambda_2}^4 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l) \\
& + 6k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) + 6k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cosh(2k_{\lambda_2}l) - 32k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(k_{\lambda_1}l) \cosh(k_{\lambda_2}l) \\
& + 2k_{\lambda_1}^2 k_{\lambda_2}^2 \cos(2k_{\lambda_1}l) \cosh(2k_{\lambda_2}l), \tag{C.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{24} = & e^{2k_{\lambda_2}l} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2}i)^2 i - k_{\lambda_1}^2 (e^{2l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 1) i + k_{\lambda_2}^2 (e^{2l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 1) i \\
& + e^{k_{\lambda_1}l 2i} (k_{\lambda_1} - k_{\lambda_2}i)^2 i - 8k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} e^{l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 2k_{\lambda_1} k_{\lambda_2} (e^{2l(k_{\lambda_2}+k_{\lambda_1}i)} + 1). \tag{C.13}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt die Symmetrieeigenschaft $s_{B,ij}^{II} = s_{B,ji}^{II}$ sowie

$$\begin{aligned}
s_{B33}^{II} = s_{B11}^{II}, & \quad s_{B44}^{II} = s_{B22}^{II}, \\
s_{B34}^{II} = -s_{B12}^{II}, & \quad s_{B14}^{II} = -s_{B23}^{II}. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

D Koeffizientenmatrizen zur Berechnung der komplexen Dispersionskurven

Für die Bestimmung der komplexen Dispersionskurven einer rechteckigen Einheitszelle muss in der Γ –X-Richtung, in der X–M-Richtung, in der Γ –Y-Richtung und in der Y–M-Richtung eine quadratische Eigenwertgleichung der Form

$$(\lambda^2 \mathbf{K}_3 + \lambda \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_3^T) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.1})$$

sowie in der M– Γ -Richtung eine quartische Eigenwertgleichung der Form

$$(\lambda^4 \mathbf{K}_1 + \lambda^3 \mathbf{K}_2 + \lambda^2 \mathbf{K}_3 + \lambda \mathbf{K}_2^T + \mathbf{K}_1^T) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{D.2})$$

gelöst werden. Die Koeffizientenmatrizen \mathbf{K}_i müssen aus den Untermatrizen der globalen dynamischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{g,dyn}$ bei der SEM nach PATERA bzw. der globalen spektralen Steifigkeitsmatrix \mathbf{S}_g bei der SEM nach DOYLE berechnet werden. Dabei basieren die folgenden Indizierungen auf der in der Abb. D.1a dargestellten Partitionierung der Freiheitsgrade in $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_9$, wobei die inneren Freiheitsgrade \mathbf{u}_9 mittels dynamischer GUYAN-Kondensation [44] aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Beispielsweise umfasst die Untermatrix \mathbf{k}_{57} die Nebeneinträge in der dynamischen Steifigkeitsmatrix, die zugehörig sind zu den Freiheitsgraden \mathbf{u}_5 und \mathbf{u}_7 . Des Weiteren wird mit $\mathbf{0}_{\mathbf{k}_{ij}}$ eine Nullmatrix mit der Größe der Matrix \mathbf{k}_{ij} bezeichnet. Die Koeffizientenmatrizen für die

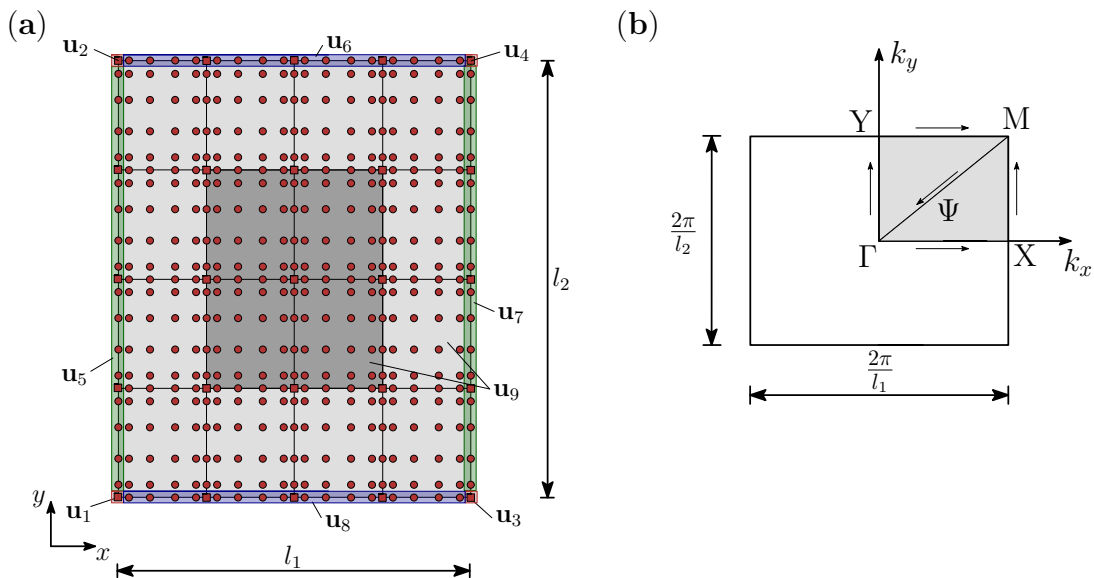


Abbildung D.1: (a) Diskretisierte Einheitszelle mit den partitionierten Freiheitsgraden $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_9$, nach [153]. (b) Erste BRILLOUIN-Zone und ihr irreduzibler Teil Ψ für eine rechteckige Einheitszelle.

in der Abb. D.1b dargestellte erste irreduzible BRILLOUIN-Zone (IBZ) einer rechteckigen Einheitszelle sind im Folgenden angegeben. In der Γ -X-Richtung ergeben sich die Koeffizientenmatrizen zu

$$\mathbf{K}_3^{\Gamma X} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{13} + \mathbf{k}_{14} + \mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{24} & \mathbf{k}_{17} + \mathbf{k}_{27} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{18}} \\ \mathbf{k}_{35}^T + \mathbf{k}_{45}^T & \mathbf{k}_{57} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{58}} \\ \mathbf{k}_{36}^T + \mathbf{k}_{38}^T + \mathbf{k}_{46}^T + \mathbf{k}_{48}^T & \mathbf{k}_{78} + \mathbf{k}_{67}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{88}} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{K}_4^{\Gamma X} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\alpha,1} & \mathbf{k}_{15} + \mathbf{k}_{25} + \mathbf{k}_{37} + \mathbf{k}_{47} & \mathbf{k}_{16} + \mathbf{k}_{18} + \mathbf{k}_{26} + \mathbf{k}_{28} \\ \mathbf{k}_{15}^T + \mathbf{k}_{25}^T + \mathbf{k}_{37}^T + \mathbf{k}_{47}^T & \mathbf{k}_{55} + \mathbf{k}_{77} & \mathbf{k}_{56} + \mathbf{k}_{58} \\ \mathbf{k}_{16}^T + \mathbf{k}_{18}^T + \mathbf{k}_{26}^T + \mathbf{k}_{28}^T & \mathbf{k}_{56}^T + \mathbf{k}_{58}^T & \mathbf{k}_{66} + \mathbf{k}_{68} + \mathbf{k}_{88} + \mathbf{k}_{68}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

mit

$$\mathbf{k}_{\alpha,1} = \mathbf{k}_{11} + \mathbf{k}_{12} + \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{33} + \mathbf{k}_{34} + \mathbf{k}_{44} + \mathbf{k}_{12}^T + \mathbf{k}_{34}^T. \quad (\text{D.5})$$

Die Lösung der quadratischen Eigenwertgleichung in der Γ -X-Richtung liefert die Ausbreitungskonstante λ_x in Abhängigkeit von ω und die Ausbreitungskonstante in der y -Richtung ist konstant $\lambda_y = 1$. Für die X-M-Richtung folgt für die Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{K}_3^{XM} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{34} - \mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{14} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{15}} & \mathbf{k}_{16} - \mathbf{k}_{36} \\ \mathbf{k}_{25}^T - \mathbf{k}_{27}^T - \mathbf{k}_{45}^T + \mathbf{k}_{47}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{57}} & \mathbf{k}_{56} - \mathbf{k}_{67}^T \\ \mathbf{k}_{28}^T - \mathbf{k}_{48}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{58}^T} & \mathbf{k}_{68}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{K}_4^{XM} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\alpha,2} & \mathbf{k}_{15} - \mathbf{k}_{17} - \mathbf{k}_{35} + \mathbf{k}_{37} & \mathbf{k}_{18} + \mathbf{k}_{26} - \mathbf{k}_{46} - \mathbf{k}_{38} \\ \mathbf{k}_{15}^T - \mathbf{k}_{17}^T - \mathbf{k}_{35}^T + \mathbf{k}_{37}^T & \mathbf{k}_{55} - \mathbf{k}_{57} + \mathbf{k}_{77} - \mathbf{k}_{57}^T & \mathbf{k}_{58} - \mathbf{k}_{78} \\ \mathbf{k}_{18}^T + \mathbf{k}_{26}^T - \mathbf{k}_{46}^T - \mathbf{k}_{38}^T & \mathbf{k}_{58}^T - \mathbf{k}_{78}^T & \mathbf{k}_{66} + \mathbf{k}_{88} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

mit

$$\mathbf{k}_{\alpha,2} = \mathbf{k}_{11} - \mathbf{k}_{13} + \mathbf{k}_{22} - \mathbf{k}_{24} + \mathbf{k}_{33} + \mathbf{k}_{44} - \mathbf{k}_{13}^T - \mathbf{k}_{24}^T. \quad (\text{D.8})$$

Die Lösung der quadratischen Eigenwertgleichung in der X-M-Richtung liefert die Ausbreitungskonstante λ_y in Abhängigkeit von ω und die Ausbreitungskonstante in der x -Richtung ist konstant $\lambda_x = \exp(i\pi)$.

Für die quartische Eigenwertgleichung in der Γ -M-Richtung sind die Koeffizientenmatrizen abhängig vom Verhältnis λ_x/λ_y , wobei hier $\lambda_x/\lambda_y = 1$ gilt. Die Koeffizientenmatrizen in der M- Γ -Richtung lauten für diesen Fall

$$\mathbf{K}_1^{M\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{14} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{15}} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{18}} \\ \mathbf{k}_{45}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{55}} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{58}} \\ \mathbf{k}_{48}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{58}^T} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{88}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2^{M\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{34} + \mathbf{k}_{12}^T + (\mathbf{k}_{13} + \mathbf{k}_{24}) & \mathbf{k}_{17} & \mathbf{k}_{16} \\ \mathbf{k}_{25}^T + \mathbf{k}_{47}^T + \mathbf{k}_{35}^T & \mathbf{k}_{57} & \mathbf{k}_{56} \\ \mathbf{k}_{28}^T + (\mathbf{k}_{46}^T + \mathbf{k}_{38}^T) & \mathbf{k}_{78}^T & \mathbf{k}_{68}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

sowie

$$\mathbf{K}_3^{\text{MF}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} + \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{33} + \mathbf{k}_{44} + \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{15} + \mathbf{k}_{27} + \mathbf{k}_{37} & \mathbf{k}_{18} + \mathbf{k}_{26} + \mathbf{k}_{36} \\ \mathbf{k}_{15}^T + \mathbf{k}_{27}^T + \mathbf{k}_{37}^T & \mathbf{k}_{55} + \mathbf{k}_{77} & \mathbf{k}_{58} + \mathbf{k}_{67}^T \\ \mathbf{k}_{18}^T + \mathbf{k}_{26}^T + \mathbf{k}_{36}^T & \mathbf{k}_{67} + \mathbf{k}_{58}^T & \mathbf{k}_{66} + \mathbf{k}_{88} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

Die Lösung der quartischen Eigenwertgleichung in der X–M-Richtung liefert bei einer quadratischen Einheitszelle die Ausbreitungskonstante $\lambda = \lambda_y = \lambda_x$ in Abhängigkeit von ω . Für eine quadratische Einheitszelle ist es ausreichend die Kanten in den Γ –X-, X–M- und M– Γ -Richtungen zu untersuchen. Bei einer rechteckigen Einheitszelle müssen hingegen zusätzlich die Dispersionsrelationen für die Kanten in den Γ –Y- und Y–M-Richtungen bestimmt werden. Die Koeffizientenmatrizen in der Γ –Y-Richtung ergeben sich zu

$$\mathbf{K}_3^{\text{FY}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{34} + \mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{12} + \mathbf{k}_{14} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{15}} & \mathbf{k}_{16} + \mathbf{k}_{36} \\ \mathbf{k}_{25}^T + \mathbf{k}_{27}^T + \mathbf{k}_{45}^T + \mathbf{k}_{47}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{57}} & \mathbf{k}_{56} + \mathbf{k}_{67}^T \\ \mathbf{k}_{28}^T + \mathbf{k}_{48}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{58}^T} & \mathbf{k}_{68}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{K}_4^{\text{FY}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\alpha,3} & \mathbf{k}_{15} + \mathbf{k}_{17} + \mathbf{k}_{35} + \mathbf{k}_{37} & \mathbf{k}_{18} + \mathbf{k}_{26} + \mathbf{k}_{46} + \mathbf{k}_{38} \\ \mathbf{k}_{15}^T + \mathbf{k}_{17}^T + \mathbf{k}_{35}^T + \mathbf{k}_{37}^T & \mathbf{k}_{55} + \mathbf{k}_{57} + \mathbf{k}_{77} + \mathbf{k}_{57}^T & \mathbf{k}_{58} + \mathbf{k}_{78} \\ \mathbf{k}_{18}^T + \mathbf{k}_{26}^T + \mathbf{k}_{46}^T + \mathbf{k}_{38}^T & \mathbf{k}_{58}^T + \mathbf{k}_{78}^T & \mathbf{k}_{66} + \mathbf{k}_{88} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.12})$$

mit

$$\mathbf{k}_{\alpha,3} = \mathbf{k}_{11} + \mathbf{k}_{13} + \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{24} + \mathbf{k}_{33} + \mathbf{k}_{44} + \mathbf{k}_{13}^T + \mathbf{k}_{24}^T. \quad (\text{D.13})$$

Für die Y–M-Richtung lauten die Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{K}_3^{\text{YM}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{14} - \mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{24} & \mathbf{k}_{17} - \mathbf{k}_{27} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{18}} \\ \mathbf{k}_{35}^T - \mathbf{k}_{45}^T & \mathbf{k}_{57} & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{58}} \\ -\mathbf{k}_{36}^T + \mathbf{k}_{38}^T + \mathbf{k}_{46}^T - \mathbf{k}_{48}^T & \mathbf{k}_{78} - \mathbf{k}_{67}^T & \mathbf{0}_{\mathbf{k}_{88}} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

$$\mathbf{K}_4^{\text{YM}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\alpha,4} & \mathbf{k}_{15} - \mathbf{k}_{25} + \mathbf{k}_{37} - \mathbf{k}_{47} & \mathbf{k}_{18} - \mathbf{k}_{16} + \mathbf{k}_{26} - \mathbf{k}_{28} \\ \mathbf{k}_{15}^T - \mathbf{k}_{25}^T + \mathbf{k}_{37}^T - \mathbf{k}_{47}^T & \mathbf{k}_{55} + \mathbf{k}_{77} & -\mathbf{k}_{56} + \mathbf{k}_{58} \\ \mathbf{k}_{18}^T - \mathbf{k}_{16}^T + \mathbf{k}_{26}^T - \mathbf{k}_{28}^T & -\mathbf{k}_{56}^T + \mathbf{k}_{58}^T & \mathbf{k}_{66} - \mathbf{k}_{68} + \mathbf{k}_{88} - \mathbf{k}_{68}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

mit

$$\mathbf{k}_{\alpha,4} = \mathbf{k}_{11} - \mathbf{k}_{12} + \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{33} - \mathbf{k}_{34} + \mathbf{k}_{44} - \mathbf{k}_{12}^T - \mathbf{k}_{34}^T. \quad (\text{D.16})$$

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass bei den Einheitszellen, bei denen sich die periodischen BLOCH-FLOQUET-Randbedingungen in den x - und y -Richtungen nicht schneiden, die partitionierten Freiheitsgrade $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_4$ nicht existieren und die entsprechenden Zeilen und Spalten in den Koeffizientenmatrizen entfallen. Dies ist beispielsweise bei den Einheitszellen der Zick-Zack-Gitterstrukturen der Fall.

Literaturverzeichnis

- [1] AINSWORTH, M. : Discrete dispersion relation for *hp*-version finite element approximation at high wave number. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 42 (2004), Nr. 2, S. 553–575.
- [2] AINSWORTH, M. ; WAJID, H. A.: Dispersive and dissipative behavior of the spectral element method. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 47 (2009), Nr. 5, S. 3910–3937.
- [3] ALTENBACH, H. : *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 4. Edition. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2018.
- [4] ANKAY, B. : *Numerische und experimentelle Untersuchungen zur zerstörungsfreien Charakterisierung von Hochleistungsbetonen mittels linearer und nichtlinearer Ultraschallwellen*, Universität Siegen, Dissertation, 2020.
- [5] ASH, B. J. ; WORSFOLD, S. R. ; VUKUSIC, P. ; NASH, G. R.: A highly attenuating and frequency tailorable annular hole phononic crystal for surface acoustic waves. In: *Nature Communications* 8 (2017), Nr. 174, S. 1–7.
- [6] ASHCROFT, N. W. ; MERMIN, N. D.: *Solid State Physics*. San Diego : Hartcourt College Publishers, 1976.
- [7] BABUŠKA, I. M. ; SAUTER, S. A.: Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wavenumber? In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34 (1997), Nr. 6, S. 2392–2423.
- [8] BANERJEE, J. R. ; FISHER, S. A.: Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for axially loaded beam elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33 (1992), Nr. 4, S. 739–751.
- [9] BATHE, K.-J. : *Finite Element Procedures*. 2. Edition. Watertown, Massachusetts : Klaus-Jürgen Bathe (Selbstverlag), 2014.

- [10] BECKER, W. ; GROSS, D. : *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. 1. Edition. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2002.
- [11] BERENGER, J.-P. : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *Journal of Computational Physics* 114 (1994), Nr. 2, S. 185–200.
- [12] BLOCH, F. : Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. In: *Zeitschrift der Physik* 52 (1928), S. 555–600.
- [13] BRAGG, W. H. ; BRAGG, W. L.: The reflection of X-rays by crystals. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 88 (1913), Nr. 605, S. 428–438.
- [14] BRILLOUIN, L. : *Wave Propagation in Periodic Structures*. London : McGraw-Hill Book Company, 1946.
- [15] BUCHMAYR, M. : *Development of Fully Implicit Block Coupled Solvers for Incompressible Turbulent Flows*, TU Graz, Dissertation, 2014.
- [16] CAI, Y. ; SONG, H. ; NI, P. ; LIU, X. ; LI, X. : Subwavelength ultrasonic imaging using a deep convolutional neural network trained on structural noise. In: *Ultrasonics* 117 (2021), Nr. 106552, S. 1–11.
- [17] CANUTO, C. ; HUSSAINI, Y. M. ; QUARTERONI, A. ; ZANG, T. A.: *Spectral Methods – Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2007.
- [18] CAPRON, M. D. ; WILLIAMS, F. W.: Exact dynamic stiffnesses for an axially loaded uniform Timoshenko member embedded in an elastic medium. In: *Journal of Sound and Vibration* 124 (1988), Nr. 3, S. 453–466.
- [19] CHEW, W. C. ; WEEDON, H. : A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates. In: *Microwave and Optical Technology Letters* 7 (1994), Nr. 13, S. 599–604.
- [20] COX, S. J. ; DOBSON, D. : Maximizing band gaps in two-dimensional photonic crystals. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 59 (1999), Nr. 6, S. 2108–2120.

- [21] CREMER, L. ; LEILICH, H. O.: Zur Theorie der Biegekettenteiler. In: *Archiv der elektrischen Übertragung* 7 (1953), S. 261–270.
- [22] CROËNNE, C. ; LEE, E. J. S. ; HU, H. ; PAGE, J. H.: Band gaps in phononic crystals: Generation mechanisms and interaction effects. In: *AIP Advances* 1 (2011), Nr. 4, 041401, S. 1–13.
- [23] CUMMER, S. A.: Perfectly matched layer behavior in negative refractive index materials. In: *IEEE Antennas and Wireless Propagation* 3 (2004), Nr. 1, S. 172–175.
- [24] DEY, S. : Evaluation of p-FEM approximations for mid-frequency elasto-acoustics. In: *Journal of Computational Acoustics* 11 (2003), Nr. 2, S. 195–225.
- [25] DEY, S. ; DATTA, D. K. ; SHIRRON, J. J. ; SHEPHARD, M. S.: p-Version FEM for structural acoustics with a posteriori error estimation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 17–18, S. 1946–1957.
- [26] DEYMIER, P. A. (Hrsg.): *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2013.
- [27] DIAZ, A. R. ; HADDOW, A. G. ; MA, L. : Design of band-gap grid structures. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 29 (2005), Nr. 6, S. 418–431.
- [28] DONG, Y. ; YE, X. ; CHEN, G. ; NAN, M. : The multi-bandgap of local effect phononic crystal. In: *AIP Advances* 13 (2023), Nr. 015106, S. 1–6.
- [29] DOYLE, J. F.: *Wave Propagation in Structures – Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. 2. Edition. New York : Springer Science+Business Media, 1997.
- [30] ECONOMOU, E. N. ; SIGALAS, M. : Stop bands for elastic waves in periodic composite materials. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 95 (1994), Nr. 4, S. 1734–1740.
- [31] ESPINOSA, F. R. d. ; JIMÉNEZ, E. ; TORRES, M. : Ultrasonic band gap in a periodic two-dimensional composite. In: *Physical Review Letters* 80 (1998), Nr. 6, S. 1208–1211.

- [32] EVGRAFOV, A. ; RUPP, C. J. ; DUNN, M. L. ; MAUTE, K. : Optimal synthesis of tunable elastic wave-guides. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2008), Nr. 2, S. 292–301.
- [33] FANG, N. ; XI, D. ; XU, J. ; AMBATI, M. ; SRITURAVANICH, W. ; SUN, C. ; ZHANG, X. : Ultrasonic metamaterials with negative modulus. In: *Nature Materials* 5 (2006), Nr. 6, S. 452–456.
- [34] FANG, X. ; CHUANG, K.-C. ; YUAN, Z.-W. ; HUANG, Z.-L. : Experimental and theoretical investigation of lowering the band gaps of phononic crystal beams through fluid-solid coupling. In: *Crystals* 7 (2017), Nr. 366, S. 1–15.
- [35] FANTUZZI, N. ; TORNABENE, F. ; VIOLA, E. ; FERREIRA, A. J. M.: A strong formulation finite element method (SFEM) based on RBF and GDQ techniques for the static and dynamic analyses of laminated plates of arbitrary shape. In: *Meccanica* 49 (2014), Nr. 10, S. 2503–2542.
- [36] FLOQUET, G. : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 2e série, 12 (1883), S. 47–88.
- [37] FONTARA, I.-K. ; SCHEPERS, W. ; SAVIDIS, S. ; RACKWITZ, F. : Finite element implementation of efficient absorbing layers for time harmonic elastodynamics of unbounded domains. In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 114 (2018), S. 625–638.
- [38] GASCH, R. ; KNOTHE, K. ; LIEBICH, R. : *Strukturdynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. 2. Edition. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
- [39] GASPAR, N. ; REN, X. J. ; SMITH, C. W. ; GRIMA, J. N. ; EVANS, K. E.: Novel honeycombs with auxetic behaviour. In: *Acta Materialia* 53 (2005), Nr. 8, S. 2439–2445.
- [40] GEUZAINÉ, C. ; REMACLE, J.-F. : Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), Nr. 11, S. 1309–1331.
- [41] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P. : *Technische Mechanik 4 – Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 8. Auflage. Berlin

- Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.
- [42] GUARÍN-ZAPATA, N. ; GOMEZ, J. : Evaluation of the spectral finite element method with the theory of phononic crystals. In: *Journal of Computational Acoustics* 23 (2015), Nr. 2, 1550004, S. 1–17.
- [43] GUDDATI, M. N. ; YUE, B. : Modified integration rules for reducing dispersion error in finite element methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 3–5, S. 275–287.
- [44] GUYAN, R. J.: Reduction of stiffness and mass matrices. In: *AIAA Journal* 3 (1965), Nr. 2, S. 380–380.
- [45] HAM, S. ; BATHE, K.-J. : A finite element method enriched for wave propagation problems. In: *Computer and Structures* 94–95 (2012), S. 1–12.
- [46] HECKL, M. : Wave propagation on beam-plate systems. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 33 (1961), Nr. 5, S. 640–651.
- [47] HECKL, M. : Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 36 (1964), Nr. 7, S. 1335–1343.
- [48] HEILAND, D. ; BEYER, K. : Baudynamische Anforderungen an Labors und Produktionsflächen der Nanotechnik. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 103 (2008), Nr. 7, S. 455–463.
- [49] HERRMANN, N. : *Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*. 2. Auflage. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2007.
- [50] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear Solid Mechancis: A Continuum Approach for Engineering*. 1. Edition. Chichester : John Wiley & Sons, 2000.
- [51] HOU, Z. ; WU, F. ; LIU, Y. : Phononic crystals containing piezoelectric material. In: *Solid State Communications* 130 (2004), Nr. 11, S. 745–749.

- [52] HUANG, H. H. ; SUN, C. T.: Locally resonant acoustic metamaterials with 2D anisotropic effective mass density. In: *Philosophical Magazine* 91 (2011), Nr. 6, S. 981–996.
- [53] HUANG, H. H. ; SUN, C. T. ; HUANG, G. L.: On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. In: *International Journal of Engineering Science* 47 (2009), Nr. 4, S. 610–617.
- [54] HUANG, Z.-G. ; WU, T.-T. : Temperature effect on the bandgaps of surface and bulk acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 52 (2005), Nr. 3, S. 365–370.
- [55] HUSSEIN, M. I. ; LEAMY, M. J. ; RUZZENE, M. : Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. In: *Applied Mechanics Reviews* 66 (2014), Nr. 4, 040802, S. 1–38.
- [56] IHLENBURG, F. ; BABUŠKA, I. : Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part II: The $h - p$ version of the FEM. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34 (1997), Nr. 1, S. 315–358.
- [57] JAMES, R. ; WOODLEY, C. M. ; DYER, C. M. ; HUMPHREY, V. F.: Sonic bands, bandgaps, and defect states in layered structures - Theory and experiment. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 97 (1995), Nr. 4, S. 2041–2047.
- [58] JIM, K. L. ; LEUNG, C. W. ; LAU, S. T. ; CHOY, S. H. ; CHAN, H. L. W.: Thermal tuning of phononic bandstructure in ferroelectric ceramic/epoxy phononic crystal. In: *Applied Physics Letters* 94 (2009), Nr. 19, 193501, S. 1–3.
- [59] JOHN, S. : Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. In: *Physical Review Letters* 58 (1987), Nr. 23, S. 2486–2489.
- [60] JUNG, M. ; LANGER, U. : *Methode der finiten Elemente für Ingenieure – Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und Computersimulation*. 2. Auflage. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2013.
- [61] KAFESAKI, M. ; ECONOMOU, E. N.: Multiple-scattering theory for three-dimensional periodic acoustic composites. In: *Physical Review B* 60 (1999), Nr. 17, S. 11993–12001.

- [62] KAINA, N. ; FINK, M. ; LEROSEY, G. : Composite media mixing Bragg and local resonances for highly attenuating and broad bandgaps. In: *Scientific Reports* 3 (2013), Nr. 3240, S. 1–7.
- [63] KALTENBACHER, M. ; HAUCK, A. ; R., L. : Hierarchische Finite-Elemente für die numerische Berechnung von akustischen Feldproblemen. Stuttgart, Deutschland : Proceedings of the DAGA 2007, März 2007.
- [64] KAUSEL, E. ; OLIVEIRA BARBOSA, J. M.: PMLs: A direct approach. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 90 (2012), Nr. 3, S. 343–352.
- [65] KHELIF, A. (Hrsg.) ; ADIBI, A. (Hrsg.): *Phononic Crystals – Fundamentals and Applications*. New York : Springer-Verlag, 2016.
- [66] KITTEL, C. : *Introduction to Solid State Physics*. 8. Auflage. New York : John Wiley & Sons, 2004.
- [67] KOMATITSCH, D. ; LIU, Q. ; TROMP, J. ; SÜSS, P. ; STIDHAM, C. ; SHAW, J. H.: Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. In: *Bulletin of The Seismological Society of America* 94 (2004), Nr. 1, S. 187–206.
- [68] KOMATITSCH, D. ; TROMP, J. : Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. In: *Geophysical Journal International* 139 (1999), Nr. 3, S. 806–822.
- [69] KOMATITSCH, D. ; TSUBOI, S. ; TROMP, J. : The spectral-element method in seismology. In: *Geophysical Monograph Series* 157 (2005), S. 205–227.
- [70] KOSCHNICK, F. : *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*, Technische Universität München, Dissertation, 2004.
- [71] KUSHWAHA, M. S.: Stop-bands for periodic metallic rods: Sculptures that can filter the noise. In: *Applied Physics Letters* 70 (1997), Nr. 24, S. 3218–3220.
- [72] KUSHWAHA, M. S. ; HALEVI, P. : Giant acoustic stop bands in two-dimensional periodic arrays of liquid cylinders. In: *Applied Physics Letters* 69 (1996), Nr. 31, S.

31–33.

- [73] KUSHWAHA, M. S. ; HALEVI, P. ; DOBRZYNSKI, L. ; DJAFARI-ROUHANI, B. : Acoustic band structure of periodic elastic composites. In: *Physical Review Letters* 71 (1993), Nr. 13, S. 2022–2025.
- [74] KUSHWAHA, M. S. ; HALEVI, P. ; MARTÍNEZ, G. ; DOBRZYNSKI, L. ; DJAFARI-ROUHANI, B. : Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. In: *Physical Review B* 49 (1994), Nr. 4, S. 2313–2322.
- [75] LAUDE, V. : *Phononic Crystals – Artificial Crystals for Sonic, Acoustic and Elastic Waves*. Berlin Boston : Walter De Gruyter GmbH, 2015.
- [76] LAUDE, V. ; ACHAOU, Y. ; BENCHABANE, S. ; KHELIF, A. : Evanescent Bloch waves and the complex band structure of phononic crystals. In: *Physical Review B* 80 (2009), Nr. 9, 092301, S. 1–4.
- [77] LAUDE, V. ; WILM, M. ; BENCHABANE, S. ; KHELIF, A. : Full band gap for surface acoustic waves in a piezoelectric phononic crystal. In: *Physical Review E* 71 (2005), Nr. 3, 036607, S. 1–7.
- [78] LEE, R. ; CANGELLARIS, C. : A study of discretization error in the finite element approximation of wave solutions. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 40 (1992), Nr. 5, S. 542–549.
- [79] LEE, S. H. ; PARK, C. M. ; SEO, Y. M. ; WANG, Z. G. ; KIM, C. K. : Acoustic metamaterial with negative modulus. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 21 (2009), Nr. 17, 175704, S. 1–4.
- [80] LEE, U. : *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. 1. Edition. Singapur : John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009.
- [81] LI, F.-L. ; WANG, Y.-S. ; ZHANG, C. ; YU, G.-L. : Bandgap calculations of two-dimensional solid–fluid phononic crystals with the boundary element method. In: *Wave Motion* 50 (2013), Nr. 3, S. 525–541.
- [82] LI, F.-L. ; WANG, Y.-S. ; ZHANG, C. ; YU, G.-L. : Boundary element method for bandgap calculations of two-dimensional solid phononic crystals. In: *Engineering*

- Analysis with Boundary Elements* 37 (2013), Nr. 2, S. 225–235.
- [83] LIEU, A. ; GABARD, G. ; BÉRIOT, H. : A comparison of high-order polynomial and wave-based methods for Helmholtz problems. In: *Journal of Computational Physics* 321 (2016), S. 105–125.
- [84] LIU, J. ; GUO, H. ; WANG, T. : A review of acoustic metamaterials and phononic crystals. In: *Crystals* 10 (2020), Nr. 305, S. 1–26.
- [85] LIU, Z. ; ZHANG, X. ; MAO, Y. ; ZHU, Y. Y. ; YANG, Z. ; CHAN, C. T. ; SHENG, P. : Locally resonant sonic materials. In: *Science* 289 (2000), Nr. 5485, S. 1734–1736.
- [86] LORD RAYLEIGH, J. W. S.: On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 24 (1887), Nr. 147, S. 145–159.
- [87] MARCON, J. ; KOPRIVA, D. A. ; SHERWIN, S. J. ; PEIRÓ, J. : A high resolution PDE approach to quadrilateral mesh generation. In: *Journal of Computational Physics* 399 (2019), Nr. 108918, S. 1–31.
- [88] MARFURT, K. J.: Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equation. In: *Geophysics* 49 (1984), Nr. 5, S. 533–549.
- [89] MARTINSSON, P. G. ; MOVCHAN, A. B.: Vibrations of lattice structures and phononic band gaps. In: *Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 56 (2002), Nr. 1, S. 45–64.
- [90] MARTÍNEZ-SALA, R. ; SANCHO, J. ; SÁNCHEZ, J. V. ; GÓMEZ, V. ; LLINARES, J. : Sound attenuation by sculpture. In: *Nature* 378 (1995), S. 241–241.
- [91] MASSA, W. : *Kristallstrukturbestimmung*. 8. Auflage. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2015.
- [92] MATLACK, K. H. ; BAUHOFFER, A. ; KRÖDEL, S. ; PALERMO, A. ; DARAIO, C. : Composite 3D-printed metastructures for lowfrequency and broadband vibration absorption. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 113 (2016), Nr. 30, S. 8386–8390.

- [93] MEAD, D. J.: Vibration response and wave propagation in periodic structures. In: *Journal of Engineering for Industry* 93 (1971), Nr. 3, S. 783–792.
- [94] MEAD, D. J.: Wave propagation and natural modes in periodic systems: I. Mono-coupled systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 40 (1975), Nr. 1, S. 1–18.
- [95] MEAD, D. J.: Wave propagation and natural modes in periodic systems: II. Multi-coupled systems, with and without damping. In: *Journal of Sound and Vibration* 40 (1975), Nr. 1, S. 19–39.
- [96] MEAD, D. J.: A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; Applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 104 (1986), Nr. 1, S. 9–27.
- [97] MEAD, D. J. ; MALLIK, A. K.: An approximate method of predicting the response of periodically supported beams subjected to random convected loading. In: *Journal of Sound and Vibration* 47 (1976), Nr. 4, S. 457–471.
- [98] MEAD, D. J. ; PUJARA, K. K.: Space-harmonic analysis of periodically supported beams: Response to convected random loading. In: *Journal of Sound and Vibration* 14 (1971), Nr. 4, S. 525–541.
- [99] MELLMANN, M. ; ANKAY, B. ; PERRAS, E. ; ZHANG, C. : Influences of the geometrical nonlinearity on the complex band structures of periodic lattice frame structures. Oslo, Norwegen : Proceedings of the 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, DOI: 10.23967/eccomas.2022.148, Juni 2022, S. 1117–1123.
- [100] MELLMANN, M. ; PERRAS, E. ; ANKAY, B. ; ZHANG, C. : Analysis of phononic lattice structures with perforated zig-zag-members by the SEM. Singapur, Singapur : Proceedings of the 28th International Congress on Sound and Vibration, ISBN: 978-981-18-5070-7, Paper 182, Juli 2022.
- [101] MELLMANN, M. ; PERRAS, E. ; ZHANG, C. : Computation of the elastic wave band structures and transmission in pre-deformed periodic frame structures by SEM. Lyon, Frankreich : Proceedings of Forum Acusticum 2020, DOI: 10.48465/fa.2020.0358, Februar 2021, S. 1117–1123.

- [102] MELLMANN, M. ; ZHANG, C. : Calculation of wave propagation characteristics in pre-deformed periodic lattice frame structures via spectral element method. Aachen, Deutschland : Proceedings of the 23rd International Congress on Acoustics, DOI: 10.18154/RWTH-CONV-239627, September 2019, S. 3205–3212.
- [103] MELLMANN, M. ; ZHANG, C. : Tuning of vibration and wave propagation characteristics in pre-deformed periodic lattice frame structures. Wien, Österreich : Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 19, DOI: 10.1002/pamm.201900291, Februar 2019.
- [104] MELLMANN, M. ; ZHANG, C. : Influence of the geometric nonlinearity on the wave propagation properties of periodic lattice frame structures. Kassel, Deutschland : Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 20, DOI: 10.1002/pamm.202000087, Januar 2021.
- [105] MESCHÉDE, D. (Hrsg.): *Gerthsen Physik*. 25. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2015.
- [106] MINIACI, M. ; PAL, R. K. ; MORVAN, B. ; RUZZENE, M. : Experimental observation of topologically protected helical edge modes in patterned elastic plates. In: *Physical Review X* 8 (2015), Nr. 031074., S. 1–9.
- [107] MOUSAVI, S. H. ; KHANIKAEV, A. B. ; WANG, Z. : Topologically protected elastic waves in phononic metamaterials. In: *Nature Communications* 6 (2015), Nr. 8682, S. 1–7.
- [108] NGUYEN, V.-D. ; BÉCHET, E. ; GEUZAINÉ, C. ; NOELS, L. : Imposing periodic boundary condition on arbitrary meshes by polynomial interpolation. In: *Computational Materials Science* 55 (2011), S. 390–406.
- [109] OÑATE, E. : *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2: Beams, Plates and Shells*. 1. Edition. Barcelona : Springer Netherlands & CIMNE, 2013.
- [110] ORRIS, R. M. ; PETYT, M. : A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 33 (1974), Nr. 2, S. 223–236.

- [111] OSEEV, A. ; LUCKLUM, R. ; ZUBTSOV, M. ; SCHMIDT, M.-P. ; MUKHIN, N. V. ; HIRSCH, S. : SAW-based phononic crystal microfluidic sensor — microscale realization of velocimetry approaches for integrated analytical platform applications. In: *Sensors* 17 (2017), Nr. 2187, S. 1–12.
- [112] OSKOOI, A. F. ; ZHANG, L. ; AVNIEL, Y. ; JOHNSON, S. G.: The failure of perfectly matched layers, and towards their redemption by adiabatic absorbers. In: *Optics Express* 16 (2008), Nr. 15, S. 11376–11392.
- [113] OTTOSEN, N. S. ; PETERSSON, H. : *Introduction to the Finite Element Method*. Hemel Hempstead : Prentice Hall International, 1992.
- [114] OUCHETTO, O. ; ESSAKHI, B. ; JAI-ANDALOUSSI, S. ; ZAAMOUN, S. : Handling periodic boundary conditions on arbitrary mesh. In: *IET Microwaves, Antennas & Propagation* 12 (2018), Nr. 8, S. 1266–1272.
- [115] PALACZ, M. : Spectral methods for modelling of wave propagation in structures in terms of damage detection – A review. In: *Applied Sciences* 8 (2018), Nr. 7, S. 1124–1149.
- [116] PATERA, A. T.: A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. In: *Journal of Computational Physics* 54 (1984), Nr. 3, S. 468–488.
- [117] PENNEC, Y. ; VASSEUR, J. O. ; DJAFARI-ROUHANI, B. ; DOBRZYŃSKI, L. ; DEYMIER, P. A.: Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications. In: *Surface Science Reports* 65 (2010), Nr. 8, S. 229–291.
- [118] PEREIRA, F. N. ; DOS SANTOS, J. M. C.: Phononic crystal investigation using a fluid-structure circular cylindrical shell spectral element. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 148 (2021), Nr. 1550004, S. 1–18.
- [119] PERRAS, E. : *Entwicklung und Anwendung eines virtuellen Mehrzwecklabors zur Untersuchung und Optimierung multifunktionaler Wandstrukturen*, Universität Siegen, Dissertation, 2020.
- [120] PERRAS, E. ; MELLMANN, M. ; ZHANG, C. : Analysis of the sound insulation performance of periodic wall structures by a virtual acoustic laboratory. In: *Building*

- Acoustics* 30 (2023), Nr. 1, S. 25–52.
- [121] POZRIKIDIS, C. : *Introduction to Finite and Spectral Element Methods using MATLAB*. 2. Edition. Boca Raton : CRC Press, 2014.
- [122] PSAROBAS, I. E. ; STEFANOY, N. ; MODINOS, A. : Scattering of elastic waves by periodic arrays of spherical bodies. In: *Physical Review B* 62 (2000), Nr. 1, S. 278–291.
- [123] REDDY, J. N.: *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. Auflage. New York : McGraw-Hill Education, 2006.
- [124] ROBILLARD, J.-F. ; BOU MATAR, O. ; VASSEUR, J. O. ; DEYMIER, P. A. ; STIPINGER, M. ; HLADKY-HENNION, A.-C. ; PENNEC, Y. ; DJAFARI-ROUHANI, B. : Tunable magnetoelastic phonic crystals. In: *Applied Physics Letters* 95 (2009), Nr. 124104, S. 1–3.
- [125] RUIZ-GIRONÉS, E. ; SARRATE, J. ; ROCA, X. : Generation of curved high-order meshes with optimal quality and geometric accuracy. In: *Procedia Engineering* 163 (2016), S. 315–327.
- [126] SACKS, Z. S. ; KINGSLAND, D. M. ; LEE, R. ; LEE, J.-F. : A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 43 (1995), Nr. 12, S. 1460–1463.
- [127] SCHMIDT, M.-P. ; OSEEV, A. ; LUCKLUM, R. ; ZUBTISOV, M. ; ; HIRSCH, S. : SAW based phononic crystal sensor, technological challenges and solutions. In: *Microsystem Technologies* 22 (2016), Nr. 7, S. 1593–1599.
- [128] SERIANI, G. : A parallel spectral element method for acoustic wave modeling. In: *Journal of Computational Acoustics* 5 (1997), Nr. 1, S. 53–69.
- [129] SERIANI, G. ; PRIOLO, E. : Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 16 (1994), Nr. 3–4, S. 337–348.
- [130] SHI, L. ; LIU, N. ; ZHOU, J. ; WANG, J. ; LIU, Q. H.: Spectral element method for band-structure calculations of 3D phononic crystals. In: *Journal of Physics D:*

- Applied Physics* 49 (2016), Nr. 455102, S. 1–12.
- [131] SIGALAS, M. ; ECONOMOU, E. N.: Elastic and acoustic wave band structure. In: *Journal of Sound and Vibration* 158 (1992), Nr. 2, S. 377–382.
- [132] SIGALAS, M. ; ECONOMOU, E. N.: Band structure of elastic waves in two dimensional systems. In: *Solid State Communications* 86 (1993), Nr. 3, S. 141–143.
- [133] SIGALAS, M. M.: Elastic wave band gaps and defect states in two-dimensional composites. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 101 (1996), Nr. 3, S. 1256–1261.
- [134] SIGALAS, M. M. ; GARCÍA, N. : Theoretical study of three dimensional elastic band gaps with the finite-difference time-domain method. In: *Journal of Applied Physics* 87 (2000), Nr. 6, S. 3122–3125.
- [135] SILVA, P. B.: *Dynamic Analysis of Periodic Structures via Wave-Based Numerical Approaches and Substructuring Techniques*, Universidade Estadual de Campinas (Brasilien), Dissertation, 2015.
- [136] SMITH, C. W. ; GRIMA, J. N. ; EVANS, K. E.: A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams: Missing rib foam model. In: *Acta Materialia* 48 (2000), Nr. 17, S. 4349–4356.
- [137] SONG, H. ; YANG, Y. : Super-resolution visualization of subwavelength defects via deep learning-enhanced ultrasonic beamforming: A proof-of-principle study. In: *NDT and E International* 116 (2020), Nr. 102344, S. 1–12.
- [138] SRIKANTHA PHANI, A. ; WOODHOUSE, J. ; FLECK, N. A.: Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 119 (2006), Nr. 4, S. 1995–2005.
- [139] STILL, T. ; CHENG, W. ; RETSCH, M. ; SAINIDOU, R. ; WANG, J. ; JONAS, U. ; STEFANOPOULOS, N. ; FYTAS, G. : Simultaneous occurrence of structure-directed and particle-resonance-induced phononic gaps in colloidal films. In: *Physical Review Letters* 100 (2008), Nr. 194301, S. 1–4.

- [140] SÁNCHEZ-PÉREZ, J. V. ; CABALLERO, D. ; MÁRTINEZ-SALA, R. ; RUBIO, C. ; SÁNCHEZ-DEHESA, J. ; MESEGUER, F. ; LLINARES, J. ; GÁLVEZ, F. : Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders. In: *Physical Review Letters* 80 (1998), Nr. 24, S. 5325–5328.
- [141] TANAKA, Y. ; TOMOYASU, Y. ; TAMURA, S.-i. : Band structure of acoustic waves in phononic lattices: Two-dimensional composites with large acoustic mismatch. In: *Physical Review B* 62 (2000), Nr. 11, S. 7387–7392.
- [142] TEIXEIRA, F. L. ; CHEW, W. C.: General closed-form PML constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media. In: *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 8 (1995), Nr. 6, S. 223–225.
- [143] TEUFELHART, S. : *Belastungsoptimiertes Design von Gitterstrukturen für die additive Fertigung nach dem bionischen Prinzip der kraftflussgerechten Gestaltung*, Technische Universität München, Dissertation, 2016.
- [144] THOMAS, E. L.: Bubbly but quiet. In: *Nature* 462 (2009), Nr. 7276, S. 990–991.
- [145] TISSEUR, F. ; MEERBERGEN, K. : The quadratic eigenvalue problem. In: *SIAM Review* 43 (2001), Nr. 2, S. 235–286.
- [146] TORNABENE, F. ; FANTUZZI, N. ; BACCIOCCHI, M. : The strong formulation finite element method: Stability and accuracy. In: *Frattura Ed Integrità Strutturale* 8 (2014), Nr. 29, S. 251–265.
- [147] TORNABENE, F. ; FANTUZZI, N. ; UBERTINI, F. ; VIOLA, E. : Strong formulation finite element method based on differential quadrature: A survey. In: *Applied Mechanics Reviews* 67 (2015), Nr. 020801, S. 1–55.
- [148] TORRENT, D. ; SÁNCHEZ-DEHESA, J. : Multiple scattering formulation of two-dimensional acoustic and electromagnetic metamaterials. In: *New Journal of Physics* 13 (2011), Nr. 093018, S. 1–25.
- [149] TREFETHEN, L. N.: *Spectral Methods in MATLAB*. 1. Edition. Philadelphia : SIAM, 2000.

- [150] UNGAR, E. E.: Steady-state responses of one-dimensional periodic flexural systems. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 39 (1964), Nr. 5A, S. 887–894.
- [151] VASSEUR, J. O. ; DEYMIER, P. A. ; CHENNI, B. ; DJAFARI-ROUHANI, B. ; DOBRZYNSKI, L. ; PREVOST, D. : Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals. In: *Physical Review Letters* 86 (2001), Nr. 14, S. 3012–3015.
- [152] VASSEUR, J. O. ; DJAFARI-ROUHANI, B. ; DOBRZYNSKI, L. ; KUSHWAHA, M. S. ; HALEVI, P. : Complete acoustic band gaps in periodic fibre reinforced composite materials: the carbon/epoxy composite and some metallic systems. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 6 (1994), Nr. 42, S. 8759–8770.
- [153] VERES, I. A. ; BERER, T. ; MATSUDA, O. : Complex band structures of two dimensional phononic crystals: Analysis by the finite element method. In: *Journal of Applied Physics* 114 (2013), Nr. 083519, S. 1–11.
- [154] VILA, J. ; PAL, R. K. ; RUZZENE, M. : Observation of topological valley modes in an elastic hexagonal lattice. In: *Physical Review B* 96 (2017), Nr. 134307, S. 1–11.
- [155] WANG, X.-H. ; CHEN, K.-Q. ; GU, B.-Y. : Localized mixed acoustic modes in superlattices with structural defects. In: *Journal of Applied Physics* 92 (2002), Nr. 9, S. 5113–5118.
- [156] WANG, Y. ; PERRAS, E. ; GOLUB, M. V. ; I., F. S. ; ZHANG, C. ; CHEN, W. : Manipulation of the guided wave propagation in multilayered phononic plates by introducing interface delaminations. In: *European Journal of Mechanics / A Solids* 88 (2021), Nr. 104266, S. 1–15.
- [157] WANG, Y.-F. ; WANG, T.-T. ; LIANG, J.-W. ; WANG, Y.-S. ; LAUDE, V. : Channeled spectrum in the transmission of phononic crystal waveguides. In: *Journal of Sound and Vibration* 437 (2018), Nr. 22, S. 410–421.
- [158] WANG, Y.-F. ; WANG, Y.-S. ; ZHANG, C. : Bandgaps and directional propagation of elastic waves in 2D square zigzag lattice structures. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 47 (2014), Nr. 485102, S. 1–14.

- [159] WANG, Y.-F. ; WANG, Y.-S. ; ZHANG, C. : Bandgaps and directional properties of two-dimensional square beam-like zigzag lattices. In: *AIP Advances* 4 (2014), Nr. 124403, S. 1–12.
- [160] WANG, Y.-Z. ; LI, F.-M. ; KISHIMOTO, K. ; WANG, Y.-S. ; HUANG, W.-H. : Elastic wave band gaps in magnetoelastic phononic crystals. In: *Wave Motion* 46 (2009), Nr. 1, S. 47–56.
- [161] WEN, S. ; XIONG, Y. ; HAO, S. ; LI, F.-M. ; ZHANG, C. : Enhanced band-gap properties of an acoustic metamaterial beam with periodically variable cross-sections. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 166 (2020), Nr. 105229, S. 1–31.
- [162] WERKLE, H. : *Finite Elemente in der Baustatik – Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke*. 3. Auflage. Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2008.
- [163] WILLBERG, C. ; DUCZEK, S. ; VIVAR PEREZ, J. M. ; SCHMICKER, D. ; GABBERT, U. : Comparison of different higher order finite element schemes for the simulation of Lamb waves. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241–244 (2012), S. 246–261.
- [164] WIRASAET, D. ; TANAKA, S. ; KUBATKO, E. J. ; WESTERINK, J. J. ; DAWSON, C. : A performance comparison of nodal discontinuous Galerkin methods on triangles and quadrilaterals. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 64 (2010), Nr. 10–12, S. 1336–1362.
- [165] WITTRICK, W. H. ; WILLIAMS, F. W. : A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 24 (1970), Nr. 3, S. 263–284.
- [166] WU, Z.-J. ; LI, F.-M. : Spectral element method and its application in analysing the vibration band gap properties of two-dimensional square lattices. In: *Journal of Sound and Vibration* 22 (2014), Nr. 3, S. 710–721.
- [167] WU, Z.-J. ; LI, F.-M. ; WANG, Y.-Z. : Study on vibration characteristics in periodic plate structures using the spectral element method. In: *Acta Mechanica* 224 (2013), Nr. 5, S. 1089–1101.

- [168] WU, Z.-J. ; LI, F.-M. ; ZHANG, C. : Vibration properties of piezoelectric square lattice structures. In: *Mechanics Research Communications* 62 (2014), S. 123–131.
- [169] WU, Z.-J. ; LI, F.-M. ; ZHANG, C. : Vibration band-gap properties of three-dimensional Kagome lattices using the spectral element method. In: *Journal of Sound and Vibration* 341 (2015), S. 162–173.
- [170] WU, Z.-J. ; LI, F.-M. ; ZHANG, C. : Band-gap analysis of a novel lattice with a hierarchical periodicity using the spectral element method. In: *Journal of Sound and Vibration* 421 (2018), S. 246–260.
- [171] XIAO, Y. ; WEN, J. ; WANG, G. ; WEN, X. : Theoretical and experimental study of locally resonant and Bragg band gaps in flexural beams carrying periodic arrays of beam-like resonators. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 135 (2013), Nr. 041006, S. 1–17.
- [172] YABLONOVITCH, E. : Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. In: *Physical Review Letters* 58 (1987), Nr. 20, S. 2059–2062.
- [173] YANG, C.-L. ; ZHAO, S.-D. ; WANG, Y.-S. : Experimental evidence of large complete bandgaps in zig-zag lattice structures. In: *Ultrasonics* 74 (2017), S. 99–105.
- [174] ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Springer-Taschenbuch der Mathematik: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew, Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler – Herausgegeben von E. Zeidler*. 3. Auflage. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013.
- [175] ZHANG, Z. ; HAN, X. K.: A new hybrid phononic crystal in low frequencies. In: *Physics Letters A* 380 (2016), Nr. 45., S. 3766–3772.
- [176] ZHANG, Z. ; JI, G. M. ; HAN, X. K.: Optimization design of a novel zigzag lattice phononic crystal with holes. In: *International Journal of Modern Physics B* 33 (2019), Nr. 1950124, S. 1–14.
- [177] ZHAO, S.-D. ; WANG, Y.-S. : Negative refraction of acoustic waves in a two-dimensional square zigzag lattice structure. Peking, China : Proceedings of the 2014 Symposium on Piezoelectricity, Oktober/November 2014, S. 182–185.

- [178] ZHENG, H. : *Radial Basis Function Collocation Methods for Band Structure Computation of Phononic Crystals*, Universität Siegen, Dissertation, 2016.