

# Erzeugung verschränkter Zustände im Zwei-Moden-Jaynes-Cummings-Modell

DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Naturwissenschaften

vorgelegt von  
Dipl.-Phys. Christoph Friedrich Wildfeuer  
aus Donauwörth

eingereicht beim Fachbereich 7  
der Universität Siegen  
Siegen 2003

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. D.H. Schiller  
Prof. Dr. H.D. Dahmen

Datum der Disputation: 29. Oktober 2003

Internetpublikation der Universitätsbibliothek Siegen:

**urn:nbn:de:hbz:467-505**

# ABSTRACT

The basic model in Quantum Optics describing the interaction of radiation with matter is the one-mode Jaynes-Cummings Model (JCM). In this thesis a compact solution is presented for a two-mode extension of the JCM, where the radiation is treated by two quantized field-modes of a resonator interacting with two quantized levels of an atom or molecule.

When radiation and matter are described quantum mechanically new unexpected non-classical effects occur. In particular, the phenomenon of entanglement can be investigated. Entanglement is at the heart of quantum mechanics and more recently became a basic building block of quantum cryptographic devices as well as for quantum computers. Therefore the algebraic formalism developed is applied to show how entanglement can be generated in the framework of the two-mode JCM.

First, three generation schemes are presented to entangle the two quantized field-modes of a resonator. It is shown that entanglement may be generated starting from an initial field and an atom in one defined state in a single step. It is also shown that entanglement may be built up in the case of an empty cavity and excited atoms whose final states are detected, as well as in the case when the final states of the initially excited atoms are not detected. To investigate the time evolution of the two field-modes, probability distributions are calculated analytically.

It is also shown that an atom and the two field-modes can form an entangled state. This phenomenon already known from the one-mode JCM is further investigated for the two-mode case. Finally, atomic observables like the inversion and polarization are calculated analytically and discussed in detail.



# INHALTSVERZEICHNIS

<b>Abstract</b> . . . . .	iii
<b>Einführung</b> . . . . .	xv
<b>1. Das Ein-Moden-Jaynes-Cummings-Modell</b> . . . . .	1
1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	1
1.2 Algebraische Lösung . . . . .	4
<b>2. Das Zwei-Moden-Jaynes-Cummings-Modell</b> . . . . .	7
2.1 Diagonalisierung des Zwei-Moden-JCMs . . . . .	8
2.2 Algebraische Lösung des Zwei-Moden-JCMs für $\Delta \neq 0$ . . . . .	11
2.3 Algebraische Lösung des Zwei-Moden-JCMs im Resonanzfall ( $\Delta = 0$ ) . . . . .	18
<b>3. Erzeugung verschränkter Feld-Zustände im Zwei-Moden-JCM</b> . . . . .	21
3.1 Verschränkung und Verschränkungsmaße . . . . .	22
3.2 Erzeugung verschränkter $N$ -Photonen-Zustände in einem Schritt . . . . .	27
3.2.1 Erwartungswert-Berechnung im Quasi-Moden-Bild . . . . .	29
3.2.2 Ergebnisse der Erzeugungswahrscheinlichkeiten für Spezialfälle . . . . .	31
3.2.3 Berechnung der „concurrence“ . . . . .	36
3.3 Bedingte Erzeugung verschränkter $N$ -Photonen-Zustände . . . . .	42
3.4 Nichtbedingte Erzeugung verschränkter $N$ -Photonen-Zustände . . . . .	44
3.5 Einfluss von Verstimmung auf die Verschränkung . . . . .	47
3.5.1 Erzeugung von Verschränkung in einem Schritt . . . . .	47
<b>4. Photonenzahl-Verteilungsfunktionen im Zwei-Moden-JCM</b> . . . . .	51
4.1 Eigenschaften der Besetzungszahlverteilungen . . . . .	51
4.1.1 Besetzungszahlverteilungen in der Schwingernotation . . . . .	52
4.1.2 Besetzungszahlverteilungen für spezielle Anfangszustände . . . . .	54
4.2 Einfluss von Verstimmung $\Delta \neq 0$ . . . . .	66

<b>5. Erzeugung von Verschränkung zwischen Atom und Moden</b> . . . . .	67
5.1 Verschränkung für kohärente Anfangszustände . . . . .	67
5.1.1 $\text{tr}(\rho_A^2)$ , Inversion und Polarisation . . . . .	69
5.1.2 Entropie $S(\rho_A)$ und $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Verschränkungsmaße . . . . .	76
5.1.3 Einfangende Feldzustände . . . . .	81
5.2 Einfluss von Verstimmung auf die Atom-Feld-Verschränkung . . . . .	83
5.2.1 $\text{tr}(\rho_A^2)$ mit Verstimmung $\Delta \neq 0$ . . . . .	83
5.2.2 Inversion mit Verstimmung . . . . .	85
5.2.3 Polarisation mit Verstimmung . . . . .	88
<b>6. Zeitentwicklung des Zwei-Niveau-Systems</b> . . . . .	91
6.1 Inversion . . . . .	91
6.2 Vergleich mit dem Ein-Moden-JCM . . . . .	96
6.3 Atomares Dipolmoment und Polarisation . . . . .	99
<b>7. Experimentelle Realisierung der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung</b>	105
<b>Zusammenfassung</b> . . . . .	111
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	113
<b>Danksagung</b> . . . . .	119

# ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1.1	Anordnung der Energieniveaus im Zwei-Niveau-System . . . . .	2
2.1	Feynman-Diagramm für den Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkungsoperator $H_{\text{int}}$ ; die linke Abbildung zeigt den Absorptionsprozess eines Photons bei gleichzeitigem Übergang des Atoms vom Grundzustand $ g\rangle$ in den angeregten Zustand $ e\rangle$ , der rechte Teil beschreibt den Emissionsprozess eines Photons bei gleichzeitiger Abregung des angeregten Niveaus. Die Kopplungen der Moden an die Atomniveaus werden durch die Kopplungskonstanten $g_i$ , $i = 1, 2$ beschrieben. . . . .	7
3.1	Parameterdarstellung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten $\langle \rho_{\Psi_1^+} \rangle$ (durchgezogen) und $\langle \rho_{\Psi_1^-} \rangle$ (gestrichelt) als Funktion der Zeit $\tau = gt$ , für unterschiedliche Anfangszustände, wobei $g_1 = g_2$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ gewählt wurde. . . . .	34
3.2	Die Abbildung zeigt die Zeitabhängigkeit von $\text{tr}(\rho_{\text{F}}^2)$ (gestrichelt) sowie den Erwartungswert $\langle \rho_{\Psi_1^+}^{(e)} \rangle$ für $g_1 = g_2$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (durchgezogen). . . . .	36
3.3	Parameterdarstellung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten $\langle \rho_{\Psi_1^+} \rangle$ (durchgezogen) und $\langle \rho_{\Psi_1^-} \rangle$ (gestrichelt) als Funktion der Zeit $\tau = gt$ , für unterschiedliche Anfangszustände, wobei $g_2 = 1/\sqrt{3}g_1$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ gewählt wurde. . . . .	38
3.4	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1, 0\rangle +  0, 1\rangle)$ als Funktion der relativen Phase $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ und $ \gamma_1 $ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ und Wechselwirkungszeit $\tau = \pi/2$ . . . . .	39
3.5	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1, 0\rangle +  0, 1\rangle)$ als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau$ und der relativen Phase $\varphi$ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ und Kopplungskonstante $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ . . . . .	39

3.6	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1,0\rangle -  0,1\rangle)$ als Funktion der relativen Phase $\varphi$ und $ \gamma_1 $ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ und Wechselwirkungszeit $\tau = \pi/2$ . . . . .	40
3.7	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1,0\rangle -  0,1\rangle)$ als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau$ und der relativen Phase $\varphi$ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ und Kopplungskonstante $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ . . . . .	40
3.8	Parameterdarstellung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten $\langle \rho_{\Psi_2^+} \rangle$ (durchgezogen) und $\langle \rho_{\Psi_2^-} \rangle$ (gestrichelt) als Funktion der Zeit $\tau = gt$ , für unterschiedliche Anfangszustände, wobei $g_1 = g_2$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ gewählt wurde. . . . .	40
3.9	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 2,0\rangle +  0,2\rangle)$ als Funktion der relativen Phase $\varphi$ und $ \gamma_1 $ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ und Wechselwirkungszeit $\tau = \pi/2$ . . . . .	41
3.10	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 2,0\rangle +  0,2\rangle)$ als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau$ und der relativen Phase $\varphi$ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ und Kopplungskonstante $ \gamma_1  = 1/\sqrt{2}$ . . . . .	41
3.11	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1,0\rangle +  0,1\rangle)$ als Funktion der relativen Phase $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ und $ \gamma_1 $ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ , Wechselwirkungszeit $\tau = \pi/2$ und Verstimmung $\Delta/2\pi = 10$ kHz. . . . .	49
3.12	Wie nebenstehend, jedoch mit Verstimmung $\Delta/2\pi = 100$ kHz. . . . .	49
3.13	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1,0\rangle +  0,1\rangle)$ als Funktion der Wechselwirkungszeit und relativen Phase $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ , Kopplungskonstante $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ und Verstimmung $\Delta/2\pi = 10$ kHz. . . . .	50
3.14	Wie nebenstehend, jedoch mit Verstimmung $\Delta/2\pi = 100$ kHz. . . . .	50
3.15	Erzeugungswahrscheinlichkeit für $ \Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 1,0\rangle +  0,1\rangle)$ als Funktion der Wechselwirkungszeit und relativen Phase $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Feste Parameter: Anfangszustand $ e; 0, 0\rangle$ , Kopplungskonstante $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ und Verstimmung $\Delta/2\pi = 250$ kHz. . . . .	50
3.16	Wie nebenstehend, jedoch mit Verstimmung $\Delta/2\pi = 500$ kHz. . . . .	50
4.1	Abbildung der Summenzahlverteilungen $P_+^{(e)}(n^+ = 1)$ (gestrichelt) und $P_+^{(e)}(n^+ = 2)$ (durchgezogen) für den Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion von $\tau$ , wobei $g_1 = g_2$ gewählt wurde. . . . .	61

4.2	Verteilungsfunktion für die Summenanzahl $P_+^{(e)}(n^+ = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	62
4.3	Verteilungsfunktion für die Summenanzahl $P_+^{(e)}(n^+ = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	62
4.4	Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl $P_-^{(e)}(n^- = 0)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	62
4.5	Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl $P_-^{(e)}(n^- = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	63
4.6	Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl $P_-^{(e)}(n^- = -1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	63
4.7	Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl $P_-^{(e)}(n^- = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	63
4.8	Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl $P_-^{(e)}(n^- = -2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	63
4.9	Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl $P_1^{(e)}(n_1 = 0)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	64
4.10	Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl $P_2^{(e)}(n_2 = 0)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	64
4.11	Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl $P_1^{(e)}(n_1 = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	65
4.12	Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl $P_2^{(e)}(n_2 = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	65

4.13	Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl $P_1^{(e)}(n_1 = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	65
4.14	Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl $P_2^{(e)}(n_2 = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	65
5.1	Oben: Spur $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Funktion der Zeit $\tau$ für den Anfangszustand $ g\rangle \eta, 0\rangle$ , $\bar{n} = 25$ sowie $g_1 = g_2$ . Mitte: Erwartungswert der Inversion $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$ . Unten: Erwartungswert für die atomare Polarisierung $\langle\sigma_y^{(g)}\rangle$ . . . . .	72
5.2	Beschreibung wie links stehend. Die Graphen sind allerdings für einen längeren Zeitbereich dargestellt. . . . .	72
5.3	Oben: Spur $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Funktion der Zeit $\tau$ für den Anfangszustand $ g\rangle \eta, 0\rangle$ , $\bar{n} = 25$ sowie $g_2 = 2g_1$ . Mitte: Erwartungswert der Inversion $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$ . Unten: Erwartungswert für die atomare Polarisierung $\langle\sigma_y^{(g)}\rangle$ . . . . .	74
5.4	Beschreibung wie links stehend. Die Graphen sind allerdings für einen längeren Zeitbereich dargestellt. . . . .	74
5.5	Oben: Spur $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Funktion der Zeit $\tau$ für den Anfangszustand $ g\rangle \eta, 0\rangle$ , $\bar{n} = 25$ sowie $g_1 = 2g_2$ . Mitte: Erwartungswert der Inversion $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$ . Unten: Erwartungswert für die atomare Polarisierung $\langle\sigma_y^{(g)}\rangle$ . . . . .	75
5.6	Beschreibung wie links stehend. Die Graphen sind allerdings für einen längeren Zeitbereich dargestellt. . . . .	75
5.7	Links: Spur $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Funktion der Zeit $\tau$ für ein Atom das sich zu Beginn der Wechselwirkung in $ g\rangle$ befindet und die beiden Moden in $ \eta, 0\rangle$ . Dabei wurde $\bar{n} = 25$ angenommen sowie $ \gamma_1  = 1$ (nur Mode 1 koppelt an das Atom). Rechts: Erwartungswert der Inversion $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$ für die gleichen Anfangsbedingungen wie oben. . . . .	76
5.8	Vergleich von $\text{tr}(\rho_A^2)$ und $S(\rho_A)$ als Funktion des Eigenwertes $\lambda$ . . . . .	78
5.9	Spur $\text{tr}(\rho^2)$ für eine beliebige dreidimensionale Dichtematrix $\rho$ als Funktion der Eigenwerte $\lambda_1$ und $\lambda_2$ . . . . .	79
5.10	Entropie $S(\rho)$ für eine beliebige dreidimensionale Dichtematrix $\rho$ als Funktion der Eigenwerte $\lambda_1$ und $\lambda_2$ . . . . .	79
5.11	Oben: Spur $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Funktion der Zeit $\tau$ für den Anfangszustand $ g\rangle \eta, 0\rangle$ , $\bar{n} = 25$ sowie $g_1 = g_2$ . Mitte: $\text{tr}(\rho_A^2)$ mit Verstimmung $\Delta/2\pi = 10$ kHz. Unten: $\text{tr}(\rho_A^2)$ mit Verstimmung $\Delta/2\pi = 100$ kHz. . . . .	86

- 5.12 Oben:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung und Parameter wie links stehend,  $\Delta/2\pi = 250$  kHz und verlängerter Zeitbereich. Mitte:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz. . . . . 86
- 5.13 Oben:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz. . . . . 87
- 5.14 Oben:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz,  $\bar{n} = 25$  sowie die Kopplungen  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz. . . . . 87
- 5.15 Oben:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz. . . . . 89
- 5.16 Oben:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz,  $\bar{n} = 25$  sowie die Kopplungen  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz. . . . . 89
- 5.17 Oben:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  zum Vergleich ohne Verstimmung. Mitte:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz. . . . . 90
- 5.18 Oben:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz,  $\bar{n} = 25$  sowie die Kopplungen  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz. . . . . 90
- 6.1 Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ . . . . . 94
- 6.2 Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ . . . . . 94
- 6.3 Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ . . . . . 95
- 6.4 Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ . . . . . 95

6.5	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	95
6.6	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ g; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	95
6.7	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 100, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	96
6.8	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ g; 100, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	96
6.9	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 500, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	97
6.10	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ g; 500, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ und der Kopplung $ \gamma_1 $ . . . . .	97
6.11	Erwartungswert der Inversion $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand $ e; 100, 0\rangle$ und fester Kopplungskonstante $ \gamma_1  = 1/\sqrt{2}$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit $\tau = gt$ . . . . .	97
6.12	Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand $ e\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}( 1, 0\rangle +  2, 0\rangle)$ als Funktion von $\tau$ und $ \gamma_1 $ . . . . .	104
6.13	Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand $ g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}( 1, 0\rangle +  2, 0\rangle)$ als Funktion von $\tau$ und $ \gamma_1 $ . . . . .	104
6.14	Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand $ e\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}( 10, 0\rangle +  11, 0\rangle)$ als Funktion von $\tau$ und $ \gamma_1 $ . . . . .	104
6.15	Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand $ g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}( 10, 0\rangle +  11, 0\rangle)$ als Funktion von $\tau$ und $ \gamma_1 $ . . . . .	104
7.1	Darstellung der experimentellen Realisierung der Zwei-Moden-Wechselwirkung zur Erzeugung von verschränkten Feldmoden. Dabei wechselwirkt ein Zwei-Niveau-System mit einer Resonatormode und gleichzeitig mit einer externen Mode. Dieser Aufbau wird durch den Zwei-Moden-JCM Hamiltonoperator beschrieben. . . . .	107

---

7.2	Vorschlag für die experimentelle Realisierung der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung zur Erzeugung von verschränkten räumlich getrennten Feldmoden. . . . .	108
-----	--	-----



# EINFÜHRUNG

Ein Zwei-Niveau-System in einem Strahlungsfeld, kann als quantenmechanisches Modell, das die Wechselwirkung von Strahlung mit Materie beschreibt, dienen. Es gibt bereits sehr frühe Arbeiten, in denen derartige Wechselwirkungen betrachtet werden. Als Erste seien die von Einstein [1] sowie von Weisskopf und Wigner [2] zu nennen. Sehr intensiv wurden solche Modelle im Rahmen der magnetischen Kernspinresonanz (NMR) untersucht, wobei die magnetische Dipolwechselwirkung zwischen einem Kernspin und einem magnetischen Radio-Frequenz-Feld betrachtet wird [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Ein ähnliches Modell wird in der Laserphysik und Quantenoptik verwendet, wobei hier die elektrische Dipolwechselwirkung zwischen den zwei Niveaus eines Atoms oder Moleküls und einem Strahlungsfeld eines Resonators (Mode) behandelt wird [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Die Beschränkung auf nur zwei Niveaus ist insbesondere dann sehr gut erfüllt, wenn die Mode genau auf einen Übergang in einem Atom abgestimmt ist. Im Folgenden werden die Begriffe „Zwei-Niveau-System“, „Atom“ und „Molekül“ gleichbedeutend verwendet.

Die Zwei-Niveau-Näherung hat den Vorteil, dass sich die Schrödingergleichung auch mit beliebig starker Kopplung und im Resonanzfall exakt in der umlaufenden Welle Näherung (Rotating Wave Approximation (RWA)) lösen lässt [6]. Die RWA-Näherung ist für alle praktisch relevanten Zwecke gültig, wie von Bloch und Siegert in [4] gezeigt wurde. In dieser Näherung wird eine kleine Abweichung in der Resonanzfrequenz vernachlässigt, wobei die Abweichung von der Kopplungsstärke abhängig ist.

Viele quantenoptische Phänomene werden im Rahmen der semiklassischen Näherung beschrieben, wobei nur das Atom quantenmechanisch, das Strahlungsfeld hingegen klassisch behandelt wird. Beginnend mit den Arbeiten von Jaynes [15] und Jaynes und Cummings [16] wurde die exakte Lösbarkeit des Modells verwendet, um insbesondere Effekte, die sich durch die Quantisierung sowohl des Atoms als auch des Strahlungsfeldes eines verlustfreien Resonators ergeben, zu untersuchen. In der Arbeit [16] wurde versucht damit das Verhalten von Amplituden- und Frequenzstabilität eines Molekularstrahl-Masers besser zu verstehen. Ebenso dient diese Arbeit dazu, den

Gültigkeitsbereich der semiklassischen Beschreibung zu untersuchen.

Die Beschreibung eines Zwei-Niveau-Systems, das mit einer quantisierten Mode in Dipol- und RWA-Näherung wechselwirkt, ist seitdem als Jaynes-Cummings-Modell (JCM) bekannt geworden. Darüber hinaus sind eine Reihe von Erweiterungen des JCMs untersucht worden (siehe dazu die Übersichtsartikel [17, 18]). Insbesondere der Fortschritt auf experimentellem Gebiet hat viele Arbeiten zum JCM angeregt. Die Realisierung eines Ein-Atom-Masers bei dem einzelne Atome mit einer Resonatormode wie im JCM wechselwirken, ist in den Experimenten von Haroche [19, 20] und Walther [21, 22] gelungen. Seitdem wurden die experimentellen Methoden weiter verfeinert.

Heute hat insbesondere neben diesen Grundlagenexperimenten im Zusammenhang mit dem neuen Gebiet der Quanten-Informationstechnologie, der Bereich Resonator-Quantenelektrodynamik (Resonator-QED) einen weiteren Aufschwung erlebt. Dabei wird intensiv die Realisierung von verschränkten Zuständen verfolgt, die einen Grundbaustein für den Bereich Quanteninformation und Quantencomputer darstellen. Verschränkte Zustände werden bereits erfolgreich in der Quantenkryptographie verwendet [23, 24, 25]. Die Realisierung von einzelnen logischen Bausteinen eines Quantencomputers ist ebenfalls gelungen [26, 27, 28, 29]. Neben der technisch möglichen Anwendbarkeit von verschränkten Zuständen in der Quantenkryptographie und in Quantencomputern sind diese insbesondere unter dem Gesichtspunkt des weiteren Verständnisses der Quantenmechanik von fundamentaler Bedeutung. Insbesondere wurden durch das Studium von Verschränkung in theoretischen und experimentellen Modellen oftmals überholte Vorstellungen aus den Anfängen der Quantenmechanik abgelegt. Als Beispiel sei die Arbeit von Scully und Walther über einen quantenoptischen Test der Komplementarität zu nennen [30]. Dabei stellte sich heraus, dass das Verschwinden von Interferenzen im Young'schen Doppelspaltexperiment nicht notwendig durch eine zufällige große Phasenverschiebung, die eine Messung des Weges den Strahlen, die von den einzelnen Spalten ausgehen, aufprägt, erklärt werden muss. Vielmehr lassen sich Experimente im Rahmen der Resonator-QED aufbauen, bei denen z.B. Atomstrahlen zur Interferenz gebracht werden und ein *Welcher-Weg*-Detektor keine zufällige Phasenverschiebung verursacht und trotzdem die Interferenzmuster verschwinden. Die Dekohärenz erfolgt, weil der Detektor und das beobachtete System miteinander einen verschränkten Zustand bilden, d.h. starke Quantenkorrelationen eingehen und dabei die Kohärenz der zwei Strahlen verloren geht. Dies zeigt, dass die frühere Betrachtungsweise unvollständig war und im Rahmen von modernen Resonatorexperimenten vervollständigt wurde. Vielmehr scheint sich abzuzeichnen, dass im Licht moderner Ex-

perimente Verschränkung die fundamentalste Eigenschaft eines quantenmechanischen Systems ist.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit wird deshalb auf die Erzeugung und Charakterisierung von verschränkten Zuständen im Rahmen einer Zwei-Moden-Erweiterung des JCMs gelegt. Das Modell beschreibt sowohl die nichtresonante, als auch die resonante Wechselwirkung zweier quantisierter Moden mit einem Zwei-Niveau-Atom in Dipol- und RWA-Näherung. Dazu wird für das Zwei-Moden-JCM eine algebraische Lösungsmethode entwickelt, die es erlaubt die Zeitentwicklung sowie Erwartungswerte für die Erzeugung verschränkter Zustände, in analytisch exakter Form angeben zu können. Dadurch wird ein tieferer Einblick in die Funktionsweise des Modells ermöglicht.

Das algebraische Lösungsverfahren stützt sich dabei auf folgende Annahme. Falls die zwei Moden Frequenz-entartet sind, lässt sich die zusätzliche Symmetrie nutzen, um durch eine  $SU(2)$ -Rotation das Modell in ein Quasi-Moden-Bild überzuführen. Im Quasi-Moden-Bild handelt es sich dann um ein effektives Ein-Moden-Modell das sich exakt lösen lässt. Zur vollständigen Lösung muss eine Transformation zwischen Eigenzuständen zu den ursprünglichen Moden-Operatoren und Eigenzuständen zu den Quasi-Moden-Operatoren gefunden werden. Diese Transformation kann mit Hilfe des Schwinger'schen Oszillatormodells sowie unter Verwendung von Wigner'schen D-Funktionen angegeben werden. Dabei werden die zwei Moden durch eine geeignete Redefinition der Besetzungszahloperatoren als Drehimpulse aufgefasst. Die Transformation zwischen Drehimpulseigenzuständen ist dann durch die Wigner'schen D-Funktionen der  $SU(2)$ -Drehgruppe gegeben, deren Argumente mit den Modellparametern identifiziert werden können.

Der erarbeitete Formalismus wird angewendet, um sowohl Verschränkung zwischen den beiden Moden als auch zwischen Atom und Moden zu erzeugen. Des Weiteren werden die Photonenzahl-Verteilungen sowie verschiedene Atomobservablen untersucht. Zur Charakterisierung der Verschränkung werden gängige Verschränkungsmaße explizit berechnet. Die Arbeit schließt mit einer Betrachtung der experimentellen Realisierbarkeit der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung in Resonator-QED-Experimenten.



# 1. DAS EIN-MODEN-JAYNES-CUMMINGS-MODELL

In diesem Kapitel wird eine Einführung zum Ein-Moden-JCM gegeben. Dies wird dann zum Zwei-Moden-JCM im nächsten Kapitel erweitert, das auch das Hauptthema der vorliegenden Arbeit ist. Die Berechnung von Zeitentwicklungen und Erwartungswerten wird ausschließlich im Rahmen des Zwei-Moden-JCMs erfolgen. Für einige Fragestellungen wird jedoch aus diesen Ergebnissen der Ein-Moden-Fall zum Vergleich abgeleitet. Es gibt einige gute Übersichtsartikel, die das JCM und verschiedene Erweiterungen untersuchen. Dazu sei auf [17] und [18] verwiesen.

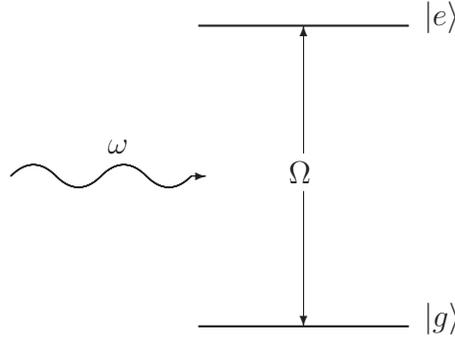
Das Ein-Moden-JCM und dessen Erweiterungen sind die Grundlage der theoretischen Beschreibungen von Resonator-QED Effekten. In dem hier zur Verfügung stehenden Rahmen wird der Hamiltonoperator des Ein-Moden-JCMs ohne Ableitung angegeben. Für eine Ableitung aus der Lagrangedichte der QED siehe die Diplomarbeit des Autors [31].

## 1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Der Hamiltonoperator für die Wechselwirkung eines Atoms mit den Niveaus  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  mit einer Mode des elektromagnetischen Feldes, der die Operatoren  $a^\dagger$  und  $a$  zugeordnet sind, in Dipol- und RWA-Näherung, ergibt sich im Schrödingerbild zu

$$H = \hbar\Omega\frac{\sigma_z}{2} + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar[\sigma^+ g a + \sigma^- g^* a^\dagger] \quad . \quad (1.1)$$

Dabei ist  $\Omega$  die Übergangsfrequenz des Atoms und  $\omega$  die Moden-Frequenz. Das Zwei-Niveau-System ist in Abb. 1.1 dargestellt. Die Kopplung  $g$  des Atoms an die Mode wird für die Betrachtungen in diesem Kapitel reell angenommen. Die Operatoren für die Mode erfüllen die Kommutatorbeziehung  $[a, a^\dagger] = 1$  und sind definiert durch ihre Wirkung auf die Fockzustände  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$  und  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ . In Analogie



**Abb. 1.1:** Anordnung der Energieniveaus im Zwei-Niveau-System mit Photonenfrequenz  $\omega$  und atomarer Übergangsfrequenz  $\Omega$ .

zu einem Spin- $\frac{1}{2}$  System können zur Beschreibung des Atoms die Pauli-Spinoperatoren

$$\sigma_z := |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad , \quad \sigma^+ := |e\rangle\langle g| \quad , \quad \sigma^- := |g\rangle\langle e| \quad , \quad (1.2)$$

die hier in der Atombasis  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  definiert wurden, angesetzt werden. Diese Operatoren erfüllen die Antikommutatorbeziehung  $\{\sigma^+, \sigma^-\} = \mathbf{1}$ , was gleichbedeutend mit  $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbf{1}$  ist. Das bedeutet, dass das Zwei-Niveau-System in diesem Raum abgeschlossen ist.

Der Hamiltonoperator in Gl. (1.1) lässt sich in einen nichtwechselwirkenden und einen wechselwirkenden Anteil wie nachstehend zerlegen:

$$H_0 = \hbar\omega\frac{\sigma_z}{2} + \hbar\omega a^\dagger a \quad , \quad (1.3)$$

$$H_{\text{int}} = \hbar\Delta\frac{\sigma_z}{2} + \hbar g [\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger] \quad . \quad (1.4)$$

Es gilt  $[H_0, H_{\text{int}}] = 0$ . Die Frequenzdifferenz  $\Delta = \Omega - \omega$  wird üblicherweise als Verstimmung bezeichnet und beschreibt die Abweichung vom Resonanzfall zwischen Atom und Feld.

Der Zustandsraum für das gekoppelte System aus Atom und Strahlungsfeld kann als direktes Produkt von Atom- und Feldzuständen aufgefasst werden. Die freien Zustände werden mit  $|a\rangle|n\rangle = |a; n\rangle$ , ( $a = e, g$ ), ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) bezeichnet. Die Produktzustände sind Eigenzustände zum Hamiltonoperator des freien Systems:

$$H_0 |e; n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) |e; n\rangle \quad , \quad (1.5)$$

$$H_0 |g; n\rangle = \hbar\omega\left(n - \frac{1}{2}\right) |g; n\rangle \quad . \quad (1.6)$$

$H_{\text{int}}$  wird zweckmäßig in der Basis  $\{|a; n\rangle\}$  diagonalisiert. Die Matrixelemente von  $H_{\text{int}}$  sind dabei durch  $\langle a; n | H_{\text{int}} | a'; n' \rangle$  gegeben. Aus diesen Elementen wird die folgende Matrix aufgebaut,

$$\begin{array}{l} \text{g0} \\ \text{e0} \\ \text{g1} \\ \text{e1} \\ \text{g2} \\ \text{e2} \\ \text{g3} \\ \text{e3} \\ \text{g4} \\ \vdots \end{array} \left( \begin{array}{cccccccc} -\frac{\hbar\Delta}{2} & & & & & & & \\ & \frac{\hbar\Delta}{2} & \hbar g & & & & & \\ & \hbar g & -\frac{\hbar\Delta}{2} & & & & & \\ & & & \frac{\hbar\Delta}{2} & \hbar g\sqrt{2} & & & \\ & & & \hbar g\sqrt{2} & -\frac{\hbar\Delta}{2} & & & \\ & & & & & \frac{\hbar\Delta}{2} & \hbar g\sqrt{3} & \\ & & & & & \hbar g\sqrt{3} & -\frac{\hbar\Delta}{2} & \\ & & & & & & & \frac{\hbar\Delta}{2} & \hbar g 2 \\ & & & & & & & \hbar g 2 & -\frac{\hbar\Delta}{2} \\ & & & & & & & & \ddots \end{array} \right) . \quad (1.7)$$

Die linke Seite in obiger Matrix gibt die Anordnung der Zeilen an. Die Spalten besitzen die gleiche Ordnung. Da die Photonenzahl nicht beschränkt ist, handelt es sich um eine unendlich-dimensionale Matrix. Die Diagonalisierung von  $H_{\text{int}}$  kann dennoch in einem zweidimensionalen Teilraum erfolgen, da die Kombinationen von Erzeuger- und Vernichterooperatoren in  $H_{\text{int}}$  die Besetzungszahlen der Atom- und Feldzustände nur um eins ändern und zwar der Art, dass Zustände von der Form  $|e; n\rangle$  und  $|g; n+1\rangle$  miteinander verknüpft werden. Die Operatoren wirken also in den durch  $\mathcal{B}_n := \{|e; n\rangle, |g; n+1\rangle\}$  gegebenen Teilräumen unabhängig voneinander. Dies ermöglicht die Diagonalisierung für beliebiges  $n > 0$  in einem zweidimensionalen Unterraum, der durch die Basis  $\mathcal{B}_n$  aufgespannt wird, wobei die zu diagonalisierende Matrix formal durch

$$(H_{\text{int}}^{(n)}) = \begin{pmatrix} \langle e; n | H_{\text{int}} | e; n \rangle & \langle e; n | H_{\text{int}} | g; n+1 \rangle \\ \langle g; n+1 | H_{\text{int}} | e; n \rangle & \langle g; n+1 | H_{\text{int}} | g; n+1 \rangle \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

gegeben ist und explizit ausgeschrieben

$$(H_{\text{int}}^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\Delta}{2} & \hbar g\sqrt{n+1} \\ \hbar g\sqrt{n+1} & -\frac{\hbar\Delta}{2} \end{pmatrix} , \quad (1.9)$$

lautet. Um die Matrix (1.9) zu diagonalisieren ist es nötig, die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $(H_{\text{int}}^{(n)})$  zu berechnen. Die Eigenwerte lauten:

$$E_n^+ = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)} = \frac{\hbar}{2} \mathcal{R}_n , \quad (1.10)$$

$$E_n^- = -\frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)} = -\frac{\hbar}{2} \mathcal{R}_n , \quad (1.11)$$

wobei die quantisierte Rabi-Frequenz eingeführt wurde:

$$\mathcal{R}_n := \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)} \quad . \quad (1.12)$$

Die Eigenvektoren in der Basis der freien Zustände ergeben sich zu

$$|+; n\rangle = \cos(\vartheta_n)|e; n\rangle - \sin(\vartheta_n)|g; n+1\rangle \quad , \quad (1.13)$$

$$|-; n\rangle = \sin(\vartheta_n)|e; n\rangle + \cos(\vartheta_n)|g; n+1\rangle \quad . \quad (1.14)$$

Dabei sind  $\cos(\vartheta_n)$  und  $\sin(\vartheta_n)$  durch die folgenden Beziehungen definiert worden:

$$\cos(\vartheta_n) := \frac{\mathcal{R}_n - \Delta}{\sqrt{(\mathcal{R}_n - \Delta)^2 + 4g^2(n+1)}} \quad , \quad (1.15)$$

$$\sin(\vartheta_n) := \frac{2g\sqrt{n+1}}{\sqrt{(\mathcal{R}_n - \Delta)^2 + 4g^2(n+1)}} \quad . \quad (1.16)$$

Die Ergebnisse dieses Kapitels dienen nun dazu, die Zeitabhängigkeit eines beliebigen Anfangszustandes im Wechselwirkungsbild aus der Beziehung

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_{\text{int}}t/\hbar} |\Psi(0)\rangle \quad (1.17)$$

zu berechnen, indem man die Zustände nach der vollständigen Eigenbasis entwickelt:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar} |g; 0\rangle \langle g; 0|\Psi(0)\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=\pm} e^{-iE_n^j t/\hbar} |j; n\rangle \langle j; n|\Psi(0)\rangle \quad . \quad (1.18)$$

Der erste Term nach dem Gleichheitszeichen ist der Vakuum-Term des Systems, der zur Vollständigkeit hinzugenommen werden muss. Dieser Term ist in dem Schema der eingeführten  $(2 \times 2)$ -Matrizen der vorhergehenden Betrachtungen nicht enthalten.

Das Problem der Zeitentwicklung eines beliebigen Anfangszustandes aus Atom und Feld ist auf diese Weise gelöst. Im folgenden Abschnitt wird ein algebraisches Lösungsverfahren vorgestellt, das sich auch für die Zwei-Moden-Erweiterung im nächsten Kapitel eignet.

## 1.2 Algebraische Lösung

Der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild ist gegeben durch

$$U(t) = \exp(-iH_{\text{int}}t/\hbar) \quad . \quad (1.19)$$

Dieser Operator lässt sich in der Atombasis algebraisch behandeln. Dazu wird  $U$  in der Atombasis entwickelt und stellt sich dort wie folgt dar,

$$U = U_{ee}|e\rangle\langle e| + U_{ge}|g\rangle\langle e| + U_{eg}|e\rangle\langle g| + U_{gg}|g\rangle\langle g| \quad . \quad (1.20)$$

Wird die Definition der Exponentialreihe verwendet, lautet der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild wie folgt

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta & ga \\ ga^\dagger & -\frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix}^n \quad . \quad (1.21)$$

Nach kurzer Rechnung (siehe auch Kap. 2 für die Zwischenrechnungen) ergibt sich folgende Form für den Zeitentwicklungsoperator [32]

$$U_{ee} = \cos(t\sqrt{\varphi + g^2}) + \frac{\Delta \sin(t\sqrt{\varphi + g^2})}{2i\sqrt{\varphi + g^2}} \quad , \quad (1.22)$$

$$U_{eg} = \frac{g \sin(t\sqrt{\varphi + g^2})}{i\sqrt{\varphi + g^2}} a \quad , \quad (1.23)$$

$$U_{ge} = a^\dagger \frac{g \sin(t\sqrt{\varphi + g^2})}{i\sqrt{\varphi + g^2}} \quad , \quad (1.24)$$

$$U_{gg} = \cos(t\sqrt{\varphi}) + \frac{\Delta \sin(t\sqrt{\varphi})}{2i\sqrt{\varphi}} \quad , \quad (1.25)$$

wobei die Abkürzung  $\varphi = g^2 a^\dagger a + \Delta^2/4$  eingeführt wurde. Angewendet auf die Fockzustände  $|n\rangle$  ergibt sich in der Atombasis

$$U_{ee}|n\rangle = \left[ \cos(\tau\sqrt{n+1+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{n+1+\delta^2})}{i\sqrt{n+1+\delta^2}} \right] |n\rangle \quad , \quad (1.26)$$

$$U_{eg}|n\rangle = \frac{\sin(\tau\sqrt{n+\delta^2})}{i\sqrt{n+\delta^2}} \sqrt{n} |n-1\rangle \quad , \quad (1.27)$$

$$U_{ge}|n\rangle = \frac{\sin(\tau\sqrt{n+1+\delta^2})}{i\sqrt{n+1+\delta^2}} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad , \quad (1.28)$$

$$U_{gg}|n\rangle = \left[ \cos(\tau\sqrt{n+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{n+\delta^2})}{2i\sqrt{n+\delta^2}} \right] |n\rangle \quad , \quad (1.29)$$

wobei  $\tau = gt$  sowie  $\delta = \Delta/(2g)$  zur Abkürzung eingeführt wurden.

Der Dichteoperator für das kombinierte Atom-Feld-System zur Zeit  $t = 0$  wird durch den unitären Zeitentwicklungsoperator  $U(t)$  entwickelt

$$\rho(t) = U\rho(0)U^\dagger \quad . \quad (1.30)$$

Damit ist wiederum das Problem der Zeitentwicklung eines beliebigen Anfangszustandes, oder auch die Zeitentwicklung eines Dichteoperators, gelöst. Erwartungswerte von Observablen werden dann aus

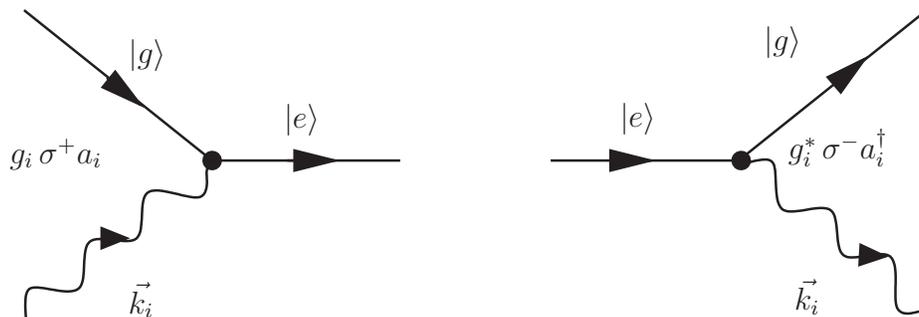
$$\langle O \rangle = \text{tr}[\rho(t)O] \quad , \quad (1.31)$$

berechnet.

Im nächsten Abschnitt wird das Ein-Moden-JCM zum Zwei-Moden-JCM erweitert und ebenfalls algebraisch gelöst.

## 2. DAS ZWEI-MODEN-JAYNES-CUMMINGS-MODELL

In diesem Kapitel wird die Erweiterung des Ein-Moden-JCMs zum Zwei-Moden-JCM betrachtet. Dabei wird ein Hamiltonoperator behandelt, der die Wechselwirkung eines Atoms mit zwei Moden beschreibt. Es können dann auch kompliziertere Prozesse, wobei ein Atom bei der Wechselwirkung mit den Moden ein Photon entweder in Mode 1 oder Mode 2 emittiert, oder auch abwechselnd aus Mode 1 oder 2 reabsorbiert, berücksichtigt werden. Dadurch ergeben sich interessante neue Effekte und Möglichkeiten, insbesondere im Hinblick auf die Erzeugung von verschränkten Feldzuständen.



**Abb. 2.1:** Feynman-Diagramm für den Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkungsoperator  $H_{\text{int}}$ ; die linke Abbildung zeigt den Absorptionsprozess eines Photons bei gleichzeitigem Übergang des Atoms vom Grundzustand  $|g\rangle$  in den angeregten Zustand  $|e\rangle$ , der rechte Teil beschreibt den Emissionsprozess eines Photons bei gleichzeitiger Abregung des angeregten Niveaus. Die Kopplungen der Moden an die Atomniveaus werden durch die Kopplungskonstanten  $g_i$ ,  $i = 1, 2$  beschrieben.

## 2.1 Diagonalisierung des Zwei-Moden-JCMs

Der Hamiltonoperator für ein Zwei-Niveau-Atom ( $|e\rangle, |g\rangle$ ), das an zwei quantisierte Moden ( $a_1, a_2$ ) in Dipol- und RWA-Näherung ankoppelt, kann wie folgt angesetzt werden [18]:

$$H = \hbar\Omega\frac{\sigma_z}{2} + \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 \quad , \\ + \hbar \left[ \sigma^+(g_1 a_1 + g_2 a_2) + \sigma^-(g_1^* a_1^\dagger + g_2^* a_2^\dagger) \right] \quad . \quad (2.1)$$

Hierbei sind wiederum  $\sigma_z := |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\sigma^+ := |e\rangle\langle g|$ ,  $\sigma^- := |g\rangle\langle e|$  und  $\mathbf{1} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$  die Operatoren für das Zwei-Niveau-System,  $g_i$  die Kopplung der  $i$ -ten Mode mit dem Atom und  $\hbar\omega_1$  ( $\hbar\omega_2$ ) die Photonenenergie von Mode 1 (2).

Dieser Hamiltonoperator beschreibt den relativ allgemeinen Fall, dass die zwei quantisierten Moden mit den beiden verschiedenen Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  an ein Zwei-Niveau-System mit der Übergangsfrequenz  $\Omega$  ankoppeln. Der Hamiltonoperator besitzt keine ausgezeichnete Symmetrie bzw. Erhaltungsgröße. Deshalb muss das Eigenwertproblem auf herkömmliche Weise, d.h. durch Diagonalisieren in einer Basis, gelöst werden. Da die Atom-Feld-Basis einen unendlich-dimensionalen Raum aufspannt, muss eine unendlich-dimensionale Matrix diagonalisiert werden. Im Zwei-Moden-Fall zerfällt der Hamiltonoperator in der Atom-Feld-Basis  $\{|a; n_1, n_2\rangle\}$  nicht mehr in Untermatrizen gleicher Dimension. Die Matrix des Hamiltonoperators weist zwar eine Blockstruktur auf (siehe Gl. (2.8)), wobei allerdings die Dimension der Blöcke anwächst. Eine derartige Matrix ist für den Fall  $\omega_1 \neq \omega_2$  i.A. nur durch trunkieren der Basis und numerische Verfahren diagonalisierbar.

Eine bedeutende Vereinfachung des Systems, die eine exakte Lösbarkeit zur Folge hat, soll im Folgenden besprochen werden. Zur Motivation wird zunächst eine wichtige Erhaltungsgröße des Zwei-Moden-JCMs vorgestellt.

Dazu wird der Materie-Besetzungszahloperator  $\hat{n}_M := (\sigma_z + 1)/2$ , der auf die Atomzustände  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  durch  $\hat{n}_M|e\rangle = |e\rangle$  und  $\hat{n}_M|g\rangle = 0$  wirkt sowie die üblichen Moden-Besetzungszahloperatoren  $\hat{n}_1 = a_1^\dagger a_1$   $\hat{n}_2 = a_2^\dagger a_2$  für Mode 1 und 2 eingeführt. Damit kann der Gesamtbesetzungszahloperator  $\hat{N}$  durch

$$\hat{N} = \frac{\sigma_z + 1}{2} + a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = \hat{n}_M + \hat{n}_1 + \hat{n}_2 \quad (2.2)$$

definiert werden. Dieser Operator wirkt auf die Atom-Feld-Zustände wie folgt:

$$\hat{N}|a; n_1, n_2\rangle = (n_a + n_1 + n_2)|a; n_1, n_2\rangle = N|a; n_1, n_2\rangle \quad . \quad (2.3)$$

Dabei können die Besetzungszahlen  $n_a$ ,  $n_1$  und  $n_2$  die Werte

$$n_a = \begin{cases} n_e = 1 \\ n_g = 0 \end{cases}, \quad n_1 = 0, 1, \dots, \quad n_2 = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

annehmen. Es stellt sich heraus, dass dieser Operator mit dem gesamten Hamiltonoperator  $H$  vertauscht, also  $[H, \hat{N}] = 0$  ergibt. Darum bietet es sich an, eine Vereinfachung des JCM-Hamiltonoperators aus Gl. (2.1) für entartete Photonenfrequenzen, d.h. für  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  zu diskutieren. Es kann dann der freie Hamiltonoperator  $H_0$  durch

$$H_0 = \hbar\omega(\hat{N} - \frac{1}{2}) \quad , \quad (2.5)$$

definiert werden, der folglich ebenfalls die Eigenschaft  $[H, H_0] = 0$  besitzt. Ferner lässt sich der volle Hamiltonoperator für entartete Photonenfrequenzen durch  $H = H_0 + H_{\text{int}}$  aus dem freien Hamiltonoperator  $H_0$  und dem Wechselwirkungsoperator  $H_{\text{int}}$ , die durch

$$H_0 = \hbar\omega(\hat{N} - \frac{1}{2}) = \hbar\omega \left[ \frac{\sigma_z}{2} + a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right] \quad , \quad (2.6)$$

$$H_{\text{int}} = \hbar \left[ \Delta \frac{\sigma_z}{2} + \sigma^+(g_1 a_1 + g_2 a_2) + \sigma^-(g_1^* a_1^\dagger + g_2^* a_2^\dagger) \right] \quad , \quad (2.7)$$

definiert sind, zusammensetzen, wobei wiederum die Frequenzdifferenz  $\Delta = \Omega - \omega$  zwischen dem Zwei-Niveau-Übergang und den Photonen eingeführt wurde. Die obige Zerlegung von  $H$  in einen nichtwechselwirkenden Anteil  $H_0$  und den Wechselwirkungsoperator  $H_{\text{int}}$  besitzt nach den Vorbemerkungen offensichtlich die Eigenschaft

$$0 = [H_0 + H_{\text{int}}, H_0] = [H_{\text{int}}, H_0] \quad .$$

Wird nun die Matrix von  $H_{\text{int}}$  in einer geeigneten Basis dargestellt, so erkennt man, dass diese Matrix aus Blöcken, die zu jeweils einem  $N = n_a + n_1 + n_2$  gehören, besteht. Die Matrix des Hamiltonoperators  $H_{\text{int}}/\hbar$  hat also in der Basis  $\{|a; n_1, n_2\rangle\}$  eine Blockstruktur, wobei die jeweiligen Blöcke die Dimension  $(2N+1) \times (2N+1)$  aufweisen. Wird die Anordnung der Basisvektoren geeignet gewählt, so lässt sich diese Matrix in eine blocktridiagonale Form überführen. Zur Verdeutlichung sei auf die folgende Matrix

verwiesen:

$$\begin{array}{l}
 \text{g00} \\
 \text{g10} \\
 \text{e00} \\
 \text{g01} \\
 \text{g20} \\
 \text{e10} \\
 \text{g11} \\
 \text{e01} \\
 \text{g02} \\
 \vdots
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{cccccccc}
 -\frac{\Delta}{2} & & & & & & & \\
 & -\frac{\Delta}{2} & g_1^* & 0 & & & & \\
 & g_1 & \frac{\Delta}{2} & g_2 & & & & \\
 & 0 & g_2^* & -\frac{\Delta}{2} & & & & \\
 & & & & -\frac{\Delta}{2} & g_1^*\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & g_1\sqrt{2} & \frac{\Delta}{2} & g_2 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & g_2^* & -\frac{\Delta}{2} & g_1^* & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & g_1 & \frac{\Delta}{2} & g_2\sqrt{2} \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & g_2^*\sqrt{2} & -\frac{\Delta}{2} \\
 & & & & & & & & \ddots
 \end{array}
 \right) \quad (2.8)$$

Die linke Spalte soll wiederum die Anordnung der Zeilen der Atom-Feld-Basis verdeutlichen. Die Spaltenordnung ist die gleiche. Um die Matrix zu diagonalisieren, muss ein Block für beliebiges  $N$  diagonalisiert werden. Das bedeutet, es muss eine Matrix der Form

$$\left(
 \begin{array}{cccccccc}
 -\frac{\Delta}{2} & g_1^*\sqrt{N} & & & & & & \\
 g_1\sqrt{N} & \frac{\Delta}{2} & g_2 & & & & & \\
 & g_2^* & -\frac{\Delta}{2} & g_1^*\sqrt{N-1} & & & & \\
 & & g_1\sqrt{N-1} & \frac{\Delta}{2} & g_2\sqrt{2} & & & \\
 & & & g_2^*\sqrt{2} & -\frac{\Delta}{2} & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & g_1^* \\
 & & & & & & g_1 & \frac{\Delta}{2} & g_2\sqrt{N} \\
 & & & & & & g_2^*\sqrt{N} & -\frac{\Delta}{2} & 
 \end{array}
 \right) \quad (2.9)$$

diagonalisiert werden. Im Resonanzfall  $\Delta = 0$  lautet das charakteristische Polynom  $p_{2N+1}(\lambda)$  dieser Matrix

$$p_{2N+1}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - g^2)(\lambda^2 - 2g^2) \dots (\lambda^2 - Ng^2) \quad , \quad (2.10)$$

wobei die Abkürzung  $g = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}$  eingeführt wurde. Die  $2N + 1$  Eigenwerte  $\lambda_i$

lauten

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0 \quad , \\
\lambda_{2/3} &= \pm g \quad , \\
\lambda_{4/5} &= \pm\sqrt{2}g \quad , \\
&\vdots \quad , \\
\lambda_{2N/2N+1} &= \pm\sqrt{N}g \quad .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Die Komponenten der Eigenvektoren in der angedeuteten Basis lassen sich formal angeben, führen aber für weitere Überlegungen zu sehr verwickelten Ausdrücken. Im folgenden Abschnitt wird ein eleganteres Lösungsverfahren vorgestellt, das zu einem kompakten handhabbaren Formalismus entwickelt wird. Damit lässt sich die beabsichtigte Fragestellung in übersichtlichen Formeln diskutieren.

## 2.2 Algebraische Lösung des Zwei-Moden-JCMs für $\Delta \neq 0$

Der Wechselwirkungsoperator  $H_{\text{int}}$  aus Gl. (2.7) lässt sich auf elegante Weise mit einem algebraischen Lösungsverfahren behandeln. Dies wird in den folgenden Ausführungen dargelegt. Der gesamte JCM-Hamiltonoperator für entartete Moden-Frequenzen sei hier nochmals angeführt, wobei wie bereits erwähnt  $H = H_0 + H_{\text{int}}$  gilt:

$$H_0 = \hbar\omega \left[ \frac{\sigma_z}{2} + a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right], \tag{2.12}$$

$$H_{\text{int}} = \hbar \left[ \Delta \frac{\sigma_z}{2} + \sigma^+(g_1 a_1 + g_2 a_2) + \sigma^-(g_1^* a_1^\dagger + g_2^* a_2^\dagger) \right]. \tag{2.13}$$

Durch Einführen der *Quasi-Moden*-Operatoren

$$A_1 = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 \quad , \tag{2.14}$$

$$A_2 = -\gamma_2^* a_1 + \gamma_1^* a_2 \quad , \tag{2.15}$$

mit  $\gamma_i := g_i/g$  und  $g := \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}$ , lässt sich der Wechselwirkungsoperator auf eine effektive Ein-Moden-Wechselwirkung zurückführen. Die Gln. (2.14, 2.15) definieren eine SU(2)-Transformation der Moden-Operatoren  $a_1, a_2$ , die die Kommutationsbeziehungen und die Summe der Besetzungszahloperatoren  $a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2$

invariant lässt. Der transformierte Hamiltonoperator lautet dann wie folgt:

$$H_0 = \hbar\omega \left[ \frac{\sigma_z}{2} + A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 \right] , \quad (2.16)$$

$$H_{\text{int}} = \hbar\Delta \frac{\sigma_z}{2} + \hbar g \left[ \sigma^+ A_1 + \sigma^- A_1^\dagger \right] . \quad (2.17)$$

In diesem JCM-Hamiltonoperator ist Quasi-Mode  $A_1$  von der nicht wechselwirkenden Quasi-Mode  $A_2$  entkoppelt. Es bietet sich nun die folgende neue Aufteilung in den freien Hamiltonoperator  $H_0^{(2)}$  und den wechselwirkenden Hamiltonoperator  $H^{(1)}$  an [33]

$$H_0^{(2)} = \hbar\omega A_2^\dagger A_2 , \quad (2.18)$$

$$H^{(1)} = \hbar\Omega \frac{\sigma_z}{2} + \hbar\omega A_1^\dagger A_1 + \hbar g \left[ \sigma^+ A_1 + \sigma^- A_1^\dagger \right] . \quad (2.19)$$

Für den effektiven Ein-Moden-Hamiltonoperator in Gl. (2.19), der im Folgenden zur Unterscheidung vom Zwei-Moden-Hamiltonoperator mit  $H^{(1)} = H_0^{(1)} + H_{\text{int}}^{(1)}$  bezeichnet werden soll, gibt es eine weitere Aufteilung, die ebenfalls simultane Eigenfunktionen besitzt,

$$H_0^{(1)} = \hbar\omega \frac{\sigma_z}{2} + \hbar\omega A_1^\dagger A_1 , \quad (2.20)$$

$$H_{\text{int}}^{(1)} = \hbar\Delta \frac{\sigma_z}{2} + \hbar g \left[ \sigma^+ A_1 + \sigma^- A_1^\dagger \right] . \quad (2.21)$$

Der gesamte Hamiltonoperator setzt sich dann zusammen aus  $H = H_0^{(2)} + H_0^{(1)} + H_{\text{int}}^{(1)}$  und die Operatoren vertauschen untereinander,

$$[H_0^{(2)}, H_0^{(1)}] = 0, \quad [H_0^{(2)}, H_{\text{int}}^{(1)}] = 0, \quad [H_0^{(1)}, H_{\text{int}}^{(1)}] = 0 \quad (2.22)$$

und besitzen deshalb simultane Eigenfunktionen. Da  $H_{\text{int}}^{(1)}$  nur von Quasi-Mode  $A_1$  abhängt, ist der Zeitentwicklungsoperator  $U(t) = \exp(-iH_{\text{int}}^{(1)}t/\hbar)$  im Wechselwirkungsbild der gleiche wie für ein Ein-Moden-JCM, welcher eine exakte Lösung besitzt [32].

Der Zeitentwicklungsoperator  $U$  kann in der Atom-Basis  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  entwickelt werden

$$U = U_{ee}|e\rangle\langle e| + U_{ge}|g\rangle\langle e| + U_{eg}|e\rangle\langle g| + U_{gg}|g\rangle\langle g| , \quad (2.23)$$

wobei die Matrixelemente  $U_{ab}(t)$  durch  $\langle a|U(t)|b\rangle$  definiert sind. Die Matrix in der Atom-Basis ist explizit gegeben durch

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta & gA_1 \\ gA_1^\dagger & -\frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix}^n . \quad (2.24)$$

Durch Aufteilung nach geraden und ungeraden Potenzen von  $n$  ergeben sich folgende Beziehungen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta & gA_1 \\ gA_1^\dagger & -\frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (\varphi + g^2)^n & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

wobei die Abkürzung  $\varphi = g^2 A_1^\dagger A_1 + \Delta^2/4$  eingeführt wurde. Für die ungeraden Potenzen von  $n$  ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta & gA_1 \\ gA_1^\dagger & -\frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix}^{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2}(\varphi + g^2)^n & g(\varphi + g^2)^n A_1 \\ gA_1^\dagger(\varphi + g^2)^n & -\frac{\Delta}{2}\varphi^n \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Damit erhält man für die geraden Potenzen von  $n$  Kosinus-Funktionen mit den Quasi-Moden-Operatoren  $A_1^\dagger A_1$  als Argument. Für die ungeraden Potenzen ergeben sich Sinus-Funktionen. Die Matrixelemente lauten wie folgt:

$$U_{ee} = \cos(t\sqrt{\varphi + g^2}) + \frac{\Delta \sin(t\sqrt{\varphi + g^2})}{2i\sqrt{\varphi + g^2}}, \quad (2.27)$$

$$U_{eg} = \frac{g \sin(t\sqrt{\varphi + g^2})}{i\sqrt{\varphi + g^2}} A_1, \quad (2.28)$$

$$U_{ge} = A_1^\dagger \frac{g \sin(t\sqrt{\varphi + g^2})}{i\sqrt{\varphi + g^2}}, \quad (2.29)$$

$$U_{gg} = \cos(t\sqrt{\varphi}) + \frac{\Delta \sin(t\sqrt{\varphi})}{2i\sqrt{\varphi}}. \quad (2.30)$$

Das Modell kann durch Einführen von Quasi-Moden-Fockzuständen, die als gemeinsame Eigenzustände der Quasi-Moden-Besetzungszahloperatoren  $A_1^\dagger A_1$  und  $A_2^\dagger A_2$  definiert werden können, gelöst werden. Die vollständige Lösung ist dann gefunden, wenn die Transformation zwischen den Quasi-Moden- und den gewöhnlichen Moden-Zuständen angegeben werden kann.

Die Quasi-Moden-Operatoren  $A_i$ ,  $A_i^\dagger$ ,  $i = 1, 2$  erfüllen die gleiche Algebra wie die Moden-Operatoren  $a_i$ ,  $a_i^\dagger$ ,

$$[A_1, A_1^\dagger] = 1, \quad [A_2, A_2^\dagger] = 1, \quad [A_1, A_2] = 0, \quad [A_1^\dagger, A_2^\dagger] = 0, \quad (2.31)$$

so dass Zwei-Quasi-Moden-Fockzustände (bezeichnet durch einen Doppel-ket) wie folgt definiert werden können,

$$|n_1, n_2\rangle\rangle := \frac{A_1^{\dagger n_1} A_2^{\dagger n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |0, 0\rangle\rangle. \quad (2.32)$$

Um die Transformation zwischen den Zwei-Moden-Fockzuständen  $|n_1, n_2\rangle$  und den Zwei-Quasi-Moden-Fockzuständen  $|n_1, n_2\rangle\rangle$  zu finden, wird das Schwinger'sche Oszillator-Modell [34] herangezogen. Dabei führt man Drehimpuls-Zustände  $|j, m\rangle$  und  $|j, m\rangle\rangle$  ein, wobei  $j = (n_1 + n_2)/2$  und  $m = (n_1 - n_2)/2$  mit den ursprünglichen Besetzungszahlen von Mode 1 und 2 auf diese Weise verknüpft sind.

Zur Unterscheidung der Zustände in der Schwingernotation und Focknotation wird in Zweifelsfällen ein Index S an den Zustandsvektor angefügt, um die Schwingernotation wie in dem folgenden Beispiel  $|2, 0\rangle = |1, 1\rangle_S$ , deutlich zu machen. Einsetzen der Gln. (2.14, 2.15) in Gl. (2.32) und Identifizierung der beiden Vakua  $|0, 0\rangle\rangle$  und  $|0, 0\rangle$  ergibt

$$|j, m\rangle\rangle := \frac{(\gamma_1^* a_1^\dagger + \gamma_2^* a_2^\dagger)^{j+m} (-\gamma_2 a_1^\dagger + \gamma_1 a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle \quad .$$

Durch Entwicklung des Produkts und Zusammenfassen der Potenzen von  $a_1^\dagger$  und  $a_2^\dagger$  [35] erhält man in der Schwingernotation unter Verwendung der Definition für die Fock-Basis

$$|n_1, n_2\rangle := \frac{a_1^{\dagger n_1} a_2^{\dagger n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |0, 0\rangle \quad ,$$

die folgenden wichtigen Beziehungen zwischen den Quasi-Moden und den Moden-Fockzuständen

$$|j, m\rangle\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m',m}^{(j)}(\varphi, \vartheta, \chi) |j, m'\rangle \quad , \quad (2.33)$$

$$|j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m',m}^{(j)\dagger}(\varphi, \vartheta, \chi) |j, m'\rangle\rangle \quad . \quad (2.34)$$

Hier bedeuten

$$D_{m',m}^{(j)}(\varphi, \vartheta, \chi) = \exp[-i(m'\varphi + m\chi)] d_{m',m}^{(j)}(\vartheta) \quad (2.35)$$

die Wigner'schen D-Matrixelemente der SU(2)-Gruppe [34, 35], deren Argumente  $\varphi$ ,  $\vartheta$  und  $\chi$  wie folgt mit den Parametern im Zwei-Moden-JCM verbunden sind:

$$\begin{aligned} \varphi &:= \varphi_1 - \varphi_2 \quad , \quad \chi := \varphi_1 + \varphi_2 \quad , \\ \cos(\vartheta/2) &:= |\gamma_1| \quad , \quad \sin(\vartheta/2) := |\gamma_2| \quad , \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei die skalierten Kopplungskonstanten  $\gamma_i$  entsprechend  $\gamma_i = |\gamma_i| \exp(i\varphi_i)$  nach Betrag und Phase aufgespalten wurden. Es folgt, dass die Moden- und Quasi-Moden-Fockzustände, die zur gleichen Gesamtphotonenzahl  $n_1 + n_2 = 2j$  gehören, durch eine

irreduzible Drehmatrix vom Gewicht  $j$  mit Eulerwinkeln, die vollständig durch die Wechselwirkungskonstanten definiert sind, bestimmt werden.

Um die Matrixelemente der Zeitentwicklungsoperatoren in der Atom-Basis berechnen zu können, benötigt man zunächst die Wirkung der Quasi-Moden-Operatoren  $A_1, A_2, A_1^\dagger, A_2^\dagger$  auf die Quasi-Moden-Zustände. Diese ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} A_1 |j, m\rangle\rangle &= \sqrt{j+m} |j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle\rangle \quad , \\ A_1^\dagger |j, m\rangle\rangle &= \sqrt{j+m+1} |j + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle\rangle \quad , \\ A_2 |j, m\rangle\rangle &= \sqrt{j-m} |j - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle\rangle \quad , \\ A_2^\dagger |j, m\rangle\rangle &= \sqrt{j-m+1} |j + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle\rangle \quad . \end{aligned}$$

Die Wirkung der Matrixelemente  $U_{ab}$  auf die Feldzustände ergibt sich in der Quasi-Moden Fock-Basis zu:

$$\begin{aligned} U_{ee}(\tau) |j, m\rangle\rangle &= \left[ \cos(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+m+1+\delta^2}} \right] |j, m\rangle\rangle \quad , \\ U_{ge}(\tau) |j, m\rangle\rangle &= \frac{\sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+m+1+\delta^2}} \sqrt{j+m+1} |j + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle\rangle \quad , \\ U_{eg}(\tau) |j, m\rangle\rangle &= \frac{\sin(\tau\sqrt{j+m+\delta^2})}{i\sqrt{j+m+\delta^2}} \sqrt{j+m} |j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle\rangle \quad , \\ U_{gg}(\tau) |j, m\rangle\rangle &= \left[ \cos(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+m+\delta^2})}{i\sqrt{j+m+\delta^2}} \right] |j, m\rangle\rangle \quad , \end{aligned} \tag{2.37}$$

wobei die dimensionslose „Wechselwirkungszeit“

$$\tau := gt \tag{2.38}$$

definiert wurde und zusätzlich der dimensionslose Parameter

$$\delta := \frac{\Delta}{2g} \tag{2.39}$$

eingeführt wurde. Es zeigt sich, dass  $U_{ee}$  und  $U_{gg}$  die Anzahl der Quasi-Photonen nicht ändern, hingegen  $U_{ge}$  ( $U_{eg}$ ) als Erzeugungs- (Vernichtungs-) Operatoren für die Quasi-Mode  $A_1$  wirken.

Verwendung von Gl. (2.33) und Gl. (2.34) erlaubt es, die Wirkung der Matrixelemente auf die gewöhnlichen Fockzustände in der Schwingernotation anzugeben,

$$\begin{aligned}
U_{ee}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j}^j C_{m',m}^j(\tau) |j, m'\rangle \quad , \\
U_{ge}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} S_{m',m}^j(\tau) |j + \frac{1}{2}, m'\rangle \quad , \\
U_{eg}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} \bar{S}_{m',m}^j(\tau) |j - \frac{1}{2}, m'\rangle \quad , \\
U_{gg}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j}^j \bar{C}_{m',m}^j(\tau) |j, m'\rangle \quad , \tag{2.40}
\end{aligned}$$

wobei die folgenden Koeffizienten eingeführt wurden

$$\begin{aligned}
C_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \left[ \cos(\tau\sqrt{j+\nu+1+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+\nu+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+1+\delta^2}} \right] D_{m',\nu}^{(j)} D_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
S_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \frac{\sin(\tau\sqrt{j+\nu+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+1+\delta^2}} \sqrt{j+\nu+1} D_{m',\nu+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} D_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
\bar{S}_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \frac{\sin(\tau\sqrt{j+\nu+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+\delta^2}} \sqrt{j+\nu} D_{m',\nu-\frac{1}{2}}^{(j-\frac{1}{2})} D_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
\bar{C}_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \left[ \cos(\tau\sqrt{j+\nu+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+\nu+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+\delta^2}} \right] D_{m',\nu}^{(j)} D_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad . \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Beachtenswert ist, dass die Wignerfunktion und ihre Inverse als Produkt in den Koeffizienten (2.41) auftreten. Dies ergibt sich daher, dass zuerst der gewöhnliche Fockzustand in das Quasi-Moden-Bild vermöge der Gleichung (2.34) und nach Anwendung der Matrixelemente  $U_{ab}$  die Quasi-Moden-Zustände wieder mittels Gleichung (2.33) zurück transformiert werden müssen. Durch explizites Einsetzen der Definition für die Wignerfunktionen (2.35) lassen sich die Koeffizienten durch die „kleinen“ Wigner'schen

d-Funktionen ausdrücken.

$$\begin{aligned}
C_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \left[ \cos(\tau\sqrt{j+\nu+1+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+\nu+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+1+\delta^2}} \right] \\
&\quad \times e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu}^{(j)} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
S_{m',m}^j(\tau) &= e^{-i\frac{\chi}{2}} \sum_{\nu=-j}^j \frac{\sin(\tau\sqrt{j+\nu+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+1+\delta^2}} \sqrt{j+\nu+1} e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
\bar{S}_{m',m}^j(\tau) &= e^{i\frac{\chi}{2}} \sum_{\nu=-j}^j \frac{\sin(\tau\sqrt{j+\nu+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+\delta^2}} \sqrt{j+\nu} e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu-\frac{1}{2}}^{(j-\frac{1}{2})} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
\bar{C}_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \left[ \cos(\tau\sqrt{j+\nu+\delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+\nu+\delta^2})}{i\sqrt{j+\nu+\delta^2}} \right] e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu}^{(j)} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad .
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dabei zeigt sich, dass die Koeffizienten  $C_{m',m}^j(\tau)$  sowie  $\bar{C}_{m',m}^j(\tau)$  nur noch von der relativen Phase  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  beider Moden abhängen. Die Koeffizienten  $S_{m',m}^j(\tau)$  und  $\bar{S}_{m',m}^j(\tau)$  hängen auch noch von  $\chi = \varphi_1 + \varphi_2$  ab. Der Phasenterm hängt aber nicht mehr vom Summationsindex  $\nu$  ab. Die konstante Phase wird dann in der Berechnung aller Erwartungswerte wegfallen und die Ergebnisse werden nur noch von der relativen Phase der beiden Moden abhängen.

Diese Beziehungen erlauben es nun, die Zeitentwicklung eines gegebenen Dichteoperators  $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$  analytisch zu berechnen. Ebenso können Erwartungswerte in diesem Formalismus analytisch exakt berechnet werden. Die Erwartungswerte lassen sich insbesondere im Quasi-Moden-Bild wie in einem Ein-Moden-JCM berechnen.

Durch Verwendung des Schwingerformalismus, der einen Zusammenhang zwischen den zwei Moden und den Darstellungen der Drehimpulsalgebra der  $SU(2)$  ermöglicht, konnte ein geschlossener Ausdruck für die Transformation zwischen Moden- und Quasi-Moden-Zuständen gefunden werden. Die Transformationen in Gl. (2.33) und Gl. (2.34), die Wigner'sche D-Funktionen enthalten deren Argumente mit den Kopplungskonstanten im Zwei-Moden-JCM identifiziert werden können, erlauben es schließlich, Erwartungswerte im Zwei-Moden-JCM in analytisch exakter Form angeben zu können. Bereits in früheren Arbeiten zum JCM wurde die Symmetrie des Zwei-Moden-JCMs, deren zwei Moden gleiche Frequenzen haben, unter einer  $SU(2)$ -Transformation gezeigt [33, 36, 37, 38]. Ein entscheidender Schritt zur analytischen Lösbarkeit der Zeitentwicklung und der Berechnung von Erwartungswerten für Observable ist es jedoch, eine elegante Transformation zwischen den ursprünglichen Moden-Zuständen und den

Quasi-Feld-Moden-Zuständen angeben zu können. Damit lässt sich erst ein Nutzen aus der  $SU(2)$ -Symmetrie des Modells ziehen, woraus schließlich die analytische Berechenbarkeit von Observablen folgt.

## 2.3 Algebraische Lösung des Zwei-Moden-JCMs im Resonanzfall ( $\Delta = 0$ )

Im Folgenden wird zunächst der Resonanzfall zwischen Atom und den Zwei-Moden-Feldern betrachtet. Dieser Fall wird in nahezu allen Experimenten zur Zustandserzeugung realisiert, siehe auch Kap. 7. Die Verstimmung ist dabei  $\Delta = 0$  und es gilt  $\Omega = \omega$ . Der Resonanzfall erlaubt es, insbesondere verschränkte Zustände zwischen den Moden oder aber zwischen den Atomen und den Moden am „schnellsten“ zu erzeugen. Der Einfluss der Verstimmung wird dann jeweils am Ende der Kapitel untersucht.

Für den Resonanzfall ergeben sich die Matrixelemente des Zeitentwicklungsoperators zu

$$\begin{aligned} U_{ee} &= \cos(\tau\sqrt{A_1^\dagger A_1 + 1}), \quad U_{ge} = A_1^\dagger \frac{\sin(\tau\sqrt{A_1^\dagger A_1 + 1})}{i\sqrt{A_1^\dagger A_1 + 1}}, \\ U_{eg} &= \frac{\sin(\tau\sqrt{A_1^\dagger A_1 + 1})}{i\sqrt{A_1^\dagger A_1 + 1}} A_1, \quad U_{gg} = \cos(\tau\sqrt{A_1^\dagger A_1}), \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit  $\tau = gt$  der dimensionslosen Wechselwirkungszeit.

Die Wirkung der Matrixelemente  $U_{ab}$  auf die Feldzustände ergibt sich im Resonanzfall in der Quasi-Moden-Fock-Basis zu

$$\begin{aligned} U_{ee}(\tau) |j, m\rangle &= \cos(\tau\sqrt{j+m+1}) |j, m\rangle, \\ U_{ge}(\tau) |j, m\rangle &= -i \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) |j + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle, \\ U_{eg}(\tau) |j, m\rangle &= -i \sin(\tau\sqrt{j+m}) |j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle, \\ U_{gg}(\tau) |j, m\rangle &= \cos(\tau\sqrt{j+m}) |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Wirkung der Matrixelemente auf die gewöhnlichen Fockzustände vereinfacht sich

dann zu

$$\begin{aligned}
U_{ee}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j}^j C_{m',m}^j(\tau) |j, m'\rangle \quad , \\
U_{ge}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} S_{m',m}^j(\tau) |j + \frac{1}{2}, m'\rangle \quad , \\
U_{eg}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} \bar{S}_{m',m}^j(\tau) |j - \frac{1}{2}, m'\rangle \quad , \\
U_{gg}(\tau) |j, m\rangle &= \sum_{m'=-j}^j \bar{C}_{m',m}^j(\tau) |j, m'\rangle \quad , \tag{2.45}
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
C_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \cos(\tau \sqrt{j + \nu + 1}) e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu}^{(j)} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
S_{m',m}^j(\tau) &= -ie^{-i\frac{\chi}{2}} \sum_{\nu=-j}^j \sin(\tau \sqrt{j + \nu + 1}) e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
\bar{S}_{m',m}^j(\tau) &= -ie^{i\frac{\chi}{2}} \sum_{\nu=-j}^j \sin(\tau \sqrt{j + \nu}) e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu-\frac{1}{2}}^{(j-\frac{1}{2})} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad , \\
\bar{C}_{m',m}^j(\tau) &= \sum_{\nu=-j}^j \cos(\tau \sqrt{j + \nu}) e^{-i\varphi(m'-m)} d_{m',\nu}^{(j)} d_{\nu,m}^{(j)\dagger} \quad . \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken wird im folgenden Kapitel die Erzeugung von Verschränkung zwischen den zwei Moden untersucht.



### 3. ERZEUGUNG VERSCHRÄNKTER FELD-ZUSTÄNDE IM ZWEI-MODEN-JCM

Verschränkte Zustände eignen sich sehr gut für fundamentale Tests zur Nichtlokalität in der Quantenmechanik. Außerdem dienen sie als fundamentale Bausteine für die Quantenkryptographie und für zukünftige Quantencomputer [39]. Im Falle des elektromagnetischen Feldes können sie die Empfindlichkeit von interferometrischen Messungen erhöhen [40, 41, 42, 43]. Im neuen Gebiet der quantenoptischen Lithographie können sie dazu beitragen, das Rayleigh-Diffraktionslimit zu umgehen [44]. Dies soll kurz genauer erläutert werden. Bei den klassischen lithographischen Verfahren wird meist ein Zwei-Wege-Interferometer verwendet, dessen zwei Strahlen auf dem zu belichtenden Substrat zur Interferenz gebracht werden. Dabei ist der minimal zu erzielende Abstand zwischen zwei Interferenz-Maxima oder -Minima durch das Rayleigh-Diffraktionslimit von  $\lambda/2$  begrenzt. Werden nun statt den herkömmlichen Strahlen die  $N$ -Photonen-Zustände

$$|\Psi_N^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, 0\rangle \pm |0, N\rangle)$$

verwendet, so zeigt sich, dass sich die  $N$  Photonen, deren zwei Wege miteinander verschränkt sind, wie ein Pseudoteilchen mit der neuen Wellenlänge  $\lambda/(2N)$  verhalten. Folglich lassen sich bei gleicher Wellenlänge Interferenzstreifen erzielen, die um den Faktor  $1/N$  näher zusammengedrückt sind. Dies wurde erstmals von J.P. Dowling am JPL in Pasadena untersucht [43]. Es gibt heute einige Gruppen die sich mit der Realisierung dieser Technik beschäftigen. Die technische Umsetzung dieses Verfahrens stellt zum Einen hohe Anforderungen an die Erzeugung von verschränkten Zuständen aber auch an die Entwicklung geeigneter Materialien (Substrate), die eine hohe Wahrscheinlichkeit für  $N$ -Photonen-Absorptionsprozesse aufweisen.

Ein möglicher Weg, verschränkte Zustände des elektromagnetischen Feldes zu erzeugen ist dabei durch die Atom-Feld-Wechselwirkung im Rahmen der Ein- oder Zwei-

Moden-JCM-Wechselwirkung gegeben [45, 46, 47, 48, 49, 50]. In der vorliegenden Arbeit werden im Rahmen des Zwei-Moden-JCMs Erzeugungsschemata diskutiert, die durch die Arbeiten [45, 46, 51] angeregt wurden und in der Veröffentlichung von Wildfeuer und Schiller in [52] publiziert wurden.

Im folgenden Abschnitt wird zuerst der Begriff der Verschränkung näher erläutert, bevor die Erzeugungsprozesse von verschränkten Zuständen im Zwei-Moden-JCM untersucht werden.

### 3.1 Verschränkung und Verschränkungsmaße

Der Begriff des verschränkten Zustandes wurde bereits von Schrödinger eingeführt und als „die charakteristische Eigenschaft der Quantenmechanik“ bezeichnet [53]. Seitdem ist aus den rein theoretischen Forschungen zu verschränkten Zuständen ein Gebiet der Quantentechnologie geworden, in dem gerade die besonderen Eigenschaften der Quantensysteme für technische Entwicklungen genutzt werden. Vielmehr ist das reine Staunen über die quantenmechanischen Besonderheiten der Frage gewichen, welche Verbesserungen eine Umsetzung der quantenmechanischen Phänomene in technische Prozesse bringen kann. Oftmals wird versucht für bisher klassisch behandelte Verfahren, ein quantenmechanisches Analogon zu finden.

Um die Unterschiede zwischen klassischen und quantenmechanischen Verfahren, charakterisieren zu können, sind quantitative Verfahren wie z.B. Verschränkungsmaße notwendig. Neben der reinen Definition eines verschränkten Zustandes, wie sie bereits Schrödinger in klarer elementarer Weise für reine Zustände angegeben hat, ist es wichtig auch den Grad der Verschränkung angeben zu können, was die Verschränkungsmaße leisten können. Ein etabliertes Verschränkungsmaß ist die „concurrence“ [55, 56]. Daneben kann die Entropie [57] zur Charakterisierung der Verschränkung herangezogen werden. Zuerst soll die grundlegende Definition für die Verschränkung von reinen Zuständen sowie für Dichtematrizen angegeben werden.

Ein reiner Zustand, der mehrere Quantensysteme A, B, C, ... beschreibt, heißt verschränkt, wenn er nicht faktorisiert werden kann. Umgekehrt heißt ein Zustand nicht verschränkt, wenn er als Tensorprodukt geschrieben werden kann, d.h. in einer Formel ausgedrückt [58]

$$|\Psi^{ABC\dots}\rangle = |\phi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle \otimes |\psi^C\rangle \otimes \dots \quad (3.1)$$

Als Beispiel für einen verschränkten Zwei-Teilchenzustand sei

$$|\Psi_1^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1^A\rangle \otimes |0^B\rangle - |0^A\rangle \otimes |1^B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 1\rangle)$$

angeführt, der in geänderter Notation  $|1, 0\rangle = |\uparrow, \downarrow\rangle$  etc., als Singlet-Zustand eines Systems aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen bekannt ist. Für diesen Zustand lässt sich keine Zerlegung dergestalt

$$|\Psi_1^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 1\rangle) = (\alpha|1^A\rangle + \beta|0^A\rangle) \otimes (\gamma|1^B\rangle + \delta|0^B\rangle) \quad , \quad (3.2)$$

mit geeignet gewählten Koeffizienten  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0$ , finden. Dies ist sofort ersichtlich wenn der rechte Teil von Gl. (3.2) ausmultipliziert wird

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 1\rangle) = \alpha\gamma|1, 1\rangle + \beta\delta|0, 0\rangle + \alpha\delta|1, 0\rangle + \beta\gamma|0, 1\rangle \quad .$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung müssen verschwinden, da sie links nicht auftreten. Dabei sieht man, dass für jede Wahl der Koeffizienten auch die beiden relevanten Terme der rechten Seite verschwinden. Es existiert also keine Zerlegung des Gesamtsystems in die Teilsysteme A und B. Der reine Singlet-Zustand kann nur als Gesamtheit behandelt werden und so verhält er sich in Experimenten auch. Vielmehr existiert für System A und B keine Wellenfunktion. Das wird auch noch deutlicher, wenn versucht wird trotzdem die Teilsysteme separat zu betrachten. Die Systeme A und B müssen mit der Dichtematrix

$$\rho_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = A, B \quad , \quad (3.3)$$

beschrieben werden, d.h. System A und B besitzen keinen reinen Zustand. Das Resultat wird wie gewöhnlich durch Ausreduktion eines der beiden Teilsysteme aus der Dichtematrix des Gesamtsystems  $|\Psi_1^-\rangle$  erhalten:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{tr}_B |\Psi_1^-\rangle \langle \Psi_1^-| \quad , \\ \rho_B &= \text{tr}_A |\Psi_1^-\rangle \langle \Psi_1^-| \quad . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Interpretation dieser Dichtematrizen ist, dass sich jedes Teilsystem mit der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  in dem Zustand  $|1\rangle$  und der Wahrscheinlichkeit  $1/2$  in dem Zustand  $|0\rangle$  befindet. Dass das Gesamtsystem allerdings stark korreliert ist (bei Messung von Teilchen A im Zustand  $|1\rangle$  muss sich Teilchen B im Zustand  $|0\rangle$  befinden und vice versa), lässt sich an den Dichtematrizen der Teilsysteme nicht erkennen. Der Versuch einen

verschränkten Zustand durch seine Teilsysteme zu beschreiben hat also zur Folge, dass die Teilsysteme mit einer Dichtematrix beschrieben werden müssen, die keine Aussage mehr über die Quantenkorrelationen beinhaltet. In diesem Sinne ist die Gesamtheit mehr als die Summe seiner Teile. Dies ist eine Folge davon, dass keine Faktorisierung in die Teilsysteme gelingt. Um die Natur der Verschränktheit zu erkennen, muss neben den Messungen an den Teilsystemen auch ein Vergleich der beiden Messungen miteinander erfolgen. Dabei kann dann die Korrelation der beiden Systeme festgestellt werden. Diese Eigenschaft nennt man seit Schrödinger verschränkt oder engl. entangled; auch die englische Übersetzung stammt von ihm!

Es stellt sich die Frage, wie dieser Begriff formuliert werden kann, wenn bereits der verschränkte Ausgangszustand kein reiner Zustand mehr ist. Es muss dann eine Definition der Verschränkung für Dichtematrizen gefunden werden. Werner hat in der Veröffentlichung [59] eine Antwort auf diese Frage gefunden. Dabei nennt man eine Dichtematrix  $\rho^{\text{ABC}\dots}$  nicht verschränkt, wenn sich eine Zerlegung der folgenden Art finden lässt:

$$\rho^{\text{ABC}\dots} = \sum_i p_i |\phi_i^{\text{A}}\rangle\langle\phi_i^{\text{A}}| \otimes |\chi_i^{\text{B}}\rangle\langle\chi_i^{\text{B}}| \otimes |\psi_i^{\text{C}}\rangle\langle\psi_i^{\text{C}}| \otimes \dots \quad (3.5)$$

Hierbei sind die  $p_i \geq 0$  und  $\sum_i p_i = 1$ . In Worten, eine Dichtematrix nennt man nicht verschränkt (separabel), dann und nur dann, wenn sie als eine gewichtete Summe von Dichtematrizen für separable reine Zustände geschrieben werden kann. Andernfalls heißt sie verschränkt.

Hiermit ist der Begriff, was ein verschränkter Zustand, oder eine Dichtematrix eines Systems aus mehreren Teilsystemen ist, klar definiert. Allerdings ist es in konkreten Fällen schwierig, wenn nicht unmöglich, zu überprüfen ob für eine gegebene Dichtematrix eine Zerlegung wie in Gl. (3.5) existiert. Deshalb ist es notwendig neben den reinen Definitionen, berechenbare Maße abzuleiten, mit denen eine konkrete Dichtematrix auf Verschränktheit überprüft werden kann. Hierbei gelangt man zum Gebiet der Verschränkungsmaße, das heute ein fast unüberschaubares Forschungsfeld von Physikern und Mathematikern geworden ist. Bereits zu Beginn dieses Kapitels wurden zwei Verschränkungsmaße erwähnt, die hier näher erläutert werden sollen.

Die „concurrence“ ist zunächst für ein System aus zwei Zwei-Niveau-Systemen definiert. Zuerst muss aus der gegebenen Dichtematrix  $\rho$  die Dichtematrix  $\tilde{\rho}$  nach folgender Vorschrift berechnet werden:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad . \quad (3.6)$$

Dabei ist die Dichtematrix  $\rho$  in der Standard-Produktbasis, welche z.B. für zwei Spin- $\frac{1}{2}$

Teilchen durch  $\{|\uparrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle\}$  gegeben ist, darzustellen.  $\rho^*$  ist dann die komplex konjugierte Dichtematrix von  $\rho$  in dieser Basis. Die Dichtematrix  $\tilde{\rho}$  stellt eine gegenüber der ursprünglichen Matrix Spin-gespiegelte Dichtematrix dar. Diese Operation ist bereits auf den Zuständen bekannt und ist dort definiert durch  $|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y |\Psi^*\rangle$ . Hier ist  $|\Psi^*\rangle$  der komplex konjugierte Zustand von  $|\Psi\rangle$ .  $|\Psi^*\rangle$  soll dabei in der Standard-Basis  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  dargestellt werden, wobei in dieser Basis  $\sigma_y$  die bekannte Form  $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  annimmt. Für ein Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen ist diese Operation die Zeitumkehrtransformation und ebenso die Spinumkehrtransformation [34]. Die Erweiterung dieser Operation auf Zwei-Teilchenzustände ist durch Gl. (3.6) gegeben.

Im nächsten Schritt wird die Produktmatrix  $\rho\tilde{\rho}$  berechnet. Von dieser Matrix müssen die Wurzeln aus den Eigenwerten  $\sqrt{\lambda_i}$  berechnet werden. Die „concurrency“ ist dann das Maximum des Ausdrucks

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad , \quad (3.7)$$

wobei die Wurzeln der Eigenwerte der Größe nach,  $\sqrt{\lambda_4} \leq \sqrt{\lambda_3} \leq \sqrt{\lambda_2} \leq \sqrt{\lambda_1}$ , anzuordnen sind. Der Wertebereich der „concurrency“ liegt zwischen 0 und 1, wobei ein nicht verschränkter Zustand 0 ergibt, ein maximal verschränkter Zustand hingegen 1 ergibt. Für ein System aus zwei Zwei-Niveau-Systemen müssen die Eigenwerte einer  $4 \times 4$ -Matrix berechnet werden, was dem Lösen eines Polynoms 4-ten Grades entspricht. Dies ist i.A. noch ein vergleichsweise leicht zu lösendes Problem. Für eine Verallgemeinerung der „concurrency“ auf mehr als zwei Teilchen sowie mehr als zwei Freiheitsgrade pro Teilchen wird die Eigenwertberechnung schnell unhandlich. Somit ist dieses Verfahren nur für kleine System brauchbar. Es gibt für hochdimensionale Systeme abgeleitete Größen, auf die allerdings nicht näher eingegangen werden soll, siehe dazu [60].

Als weiteres Maß kann die von-Neumann-Entropie der Teilsysteme berechnet werden, die in diesem Zusammenhang auch als Entropie der Verschränkung  $E(\Psi)$  bezeichnet wird. Die von-Neumann-Entropie der Dichtematrix  $\rho$  ist definiert durch [61]

$$S(\rho) = -\text{tr}[\rho \ln(\rho)] \quad . \quad (3.8)$$

Die Boltzmannkonstante ist hierbei  $k_B = 1$  gesetzt, da für die Betrachtungen im Zusammenhang mit Verschränkung nur der abstrakte Begriff Information von Bedeutung ist. Die Entropie der Verschränkung  $E(\Psi)$  eines reinen Zustandes  $|\Psi\rangle$ , der ein System aus zwei Teilsystemen A und B mit der Dichtematrix  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  beschreibt, ist dann definiert durch

$$E(\Psi) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad . \quad (3.9)$$

Hierbei ist  $\rho_A = \text{tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$  bzw.  $\rho_B = \text{tr}_A |\Psi\rangle\langle\Psi|$  die Dichtematrix die aus  $\rho$  durch Ausreduktion von System B bzw. A gewonnen wird. Die Entropie ist 0 für einen nicht verschränkten Produktzustand und erreicht den Wert  $\ln N$  für einen maximal verschränkten Zustand aus zwei Subsystemen von denen jedes aus  $N$  Niveaus besteht. Folglich ergibt sich für den Singlet-Zustand  $|\Psi_1^-\rangle$  der Wert  $E(\Psi_1^-) = 1$ . Bei dem Zustand  $|\Psi_1^-\rangle$  handelt es sich also um einen maximal verschränkten Zwei-Teilchen-Zustand mit je zwei Freiheitsgraden.

In der Quantenmechanik wird üblicherweise die Reinheit eines Zustandes über die Eigenschaft der Dichtematrix  $\rho^2 = \rho$  definiert. D.h. ist  $\rho$  idempotent, so spricht man von einem reinen Zustand. Eine Folgerung daraus ist dann, dass  $\text{tr}(\rho^2) = 1$  gilt, da jede Dichtematrix die Eigenschaft  $\text{tr}(\rho) = 1$  aufweisen muss. Eine Umkehrung dieser Aussage kann auch bewiesen werden. Die Eigenschaft  $\text{tr}(\rho^2) = 1$  ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Reinheit eines Zustandes. Somit eignet sich die Bedingung  $\text{tr}(\rho^2) \leq 1$  als Maß für die Reinheit eines Zustandes.

Die Bedeutung von  $\text{tr}(\rho^2)$  als Verschränkungsmaß zwischen zwei Systemen A und B wird durch folgende Überlegung klar. Ist ein System aus zwei Freiheitsgraden in einem verschränkten Zustand, so befindet sich das jeweilige Teilsystem in einem Gemisch, da ja nur die Gesamtwellenfunktion existiert. Folglich kann durch  $\text{tr}(\rho_A^2)$  bzw. durch  $\text{tr}(\rho_B^2)$  direkt untersucht werden ob Verschränkung vorliegt. Allerdings muss man mit dieser Folgerung vorsichtig umgehen. Im Gebiet der Quanteninformation wird die Reinheit eines zusammengesetzten Zustandes durch die von-Neumann-Entropie der Teilsysteme  $S_A = -\text{tr}[\rho_A \ln \rho_A]$  und  $S_B = -\text{tr}[\rho_B \ln \rho_B]$  definiert. Dieses Maß für die Reinheit enthält wesentlich mehr Information über Korrelationen als nur die Spur von dem Quadrat der Dichtematrix [62]. Dies lässt sich auch einsehen, wenn man sich die Reihenentwicklung der Entropie in  $\rho$  ansieht. In dieser Reihenentwicklung kommen dann auch Terme der Form  $\text{tr}(\rho^n)$ ,  $n > 2$  vor. Somit reicht es für die Zwecke der Quanteninformation im Allgemeinen nicht, die Reinheit eines Zustandes nur durch  $\text{tr}(\rho^2)$  zu testen. Vielmehr muss die Entropie  $S(\rho) = -\text{tr}[\rho \ln \rho]$  untersucht werden, falls man weitergehende Folgerungen ziehen möchte. Es gibt allerdings Spezialfälle, in denen die Spur ein vergleichbar gutes Maß wie die Entropie ist. Darauf wird in Kap. 5 näher eingegangen.

## 3.2 Erzeugung verschränkter $N$ -Photonen-Zustände in einem Schritt

Ein möglicher Weg verschränkte Zustände des elektromagnetischen Feldes zu erzeugen, ist durch die Atom-Feld-Wechselwirkung, die im Rahmen von Ein- und Zwei-Moden-JCMen beschrieben wird gegeben. Sehr aussagekräftige Experimente mit Resonatoren werden hierzu von Walther in Garching sowie von Haroche in Paris durchgeführt [21, 22, 47].

Im Folgenden soll die Erzeugung von verschränkten Moden im Rahmen des Zwei-Moden-JCMs untersucht werden. Im Gegensatz zur Ein-Moden-Wechselwirkung werden bei einem Durchflug eines Atoms durch den Resonator zwei Moden wechselweise an- oder abgeregt. Somit ergeben sich gegenüber der reinen Ein-Moden-Wechselwirkung neue interessante Effekte. Der Umstand, dass es gelungen ist die Zwei-Moden-Erweiterung analytisch exakt zu lösen, ermöglicht es darüber hinaus diese Effekte besser zu verstehen.

Ein Novum des Zwei-Moden-JCMs ist, dass es die Verschränkung der beiden Moden in einer einzigen Wechselwirkung eines Atoms mit den Resonator-Moden erlaubt. Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass die Klasse der Anfangszustände des Atom-Feld-Systems eingeschränkt wird. Untersuchungen dazu werden im nächsten Abschnitt vorgenommen.

In diesem Abschnitt wird der Erwartungswert dafür berechnet, den allgemeinen verschränkten  $N$ -Photonen-Zustand

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{k=0}^N c_k^{(N)} |N-k, k\rangle \quad , \quad (3.10)$$

für bestimmte Anfangszustände des Atom-Feld-Systems zu erhalten. Die Zustände in Gl. (3.10) enthalten die maximal verschränkten Bell-Zustände

$$|\Psi_N^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, 0\rangle \pm |0, N\rangle) \quad , \quad (3.11)$$

als Spezialfall (durch Wahl der Koeffizienten  $c_0^{(N)} = 1/\sqrt{2}$ ,  $c_N^{(N)} = \pm 1/\sqrt{2}$ , alle anderen  $c_k^{(N)} = 0$  in Gl. (3.10), J.P. Dowling bezeichnet diese Zustände auch als NOON-Zustände, wobei dann für großes  $N$  daraus high-NOON wird! [63]). Die Feldzustände sind durch Zwei-Moden-Fockzustände  $|n_1, n_2\rangle := |n_1\rangle_1 |n_2\rangle_2$  definiert, wobei  $n_1, n_2 \geq 0$  die Besetzungszahlen von Mode 1 (2) sind.

Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|\Psi_N\rangle$  in Gl. (3.10) zu erhalten, berechnet. Als Anfangszustände werden die Produktzustände des Atom-Feld-Systems  $|e; \xi\rangle$  oder  $|g; \xi\rangle$ , mit dem beliebigen reinen Feldzustand  $|\xi\rangle$  betrachtet. Das Atom tritt in den Resonator entweder im angeregten- oder im Grundzustand ein, wobei die Feldmoden des Resonators vor der Wechselwirkung durch den Zustand  $|\xi\rangle$  beschrieben werden.

Zuerst wird der Feldzustand in der Schwingernotation durch

$$|\xi\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} b_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} |j, m\rangle \quad , \quad (3.12)$$

beschrieben, wobei das gestrichene Summationssymbol eine Summe über ganzzahlige und halbzahlige Werte von  $j$  anzeigen soll. Die Entwicklungskoeffizienten bezüglich der Fock- und Schwingernotation sind verbunden durch  $b_{j+m, j-m} = \tilde{b}_{j,m}$ . Der Zustand  $|\Psi_N\rangle$  der durch die Wechselwirkung produziert werden soll ist in der Schwingernotation gegeben durch

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, m} \left| \frac{N}{2}, m \right\rangle_S \quad , \quad (3.13)$$

mit dem Dichteoperator  $\rho_{\Psi_N} = |\Psi_N\rangle\langle\Psi_N|$ . Aus den zeitentwickelten Anfangszuständen

$$U |e; \xi\rangle = U_{ee} |e; \xi\rangle + U_{ge} |g; \xi\rangle \quad , \quad (3.14)$$

$$U |g; \xi\rangle = U_{eg} |e; \xi\rangle + U_{gg} |g; \xi\rangle \quad , \quad (3.15)$$

erhält man den reduzierten Dichteoperator für das Feld durch Ausreduktion der Atomfreiheitsgrade

$$\rho_F^{(a)}(t) = \text{tr}_A [U(t)|a; \xi\rangle\langle a; \xi|U^\dagger(t)] \quad , \quad a = e \quad \text{oder} \quad g \quad . \quad (3.16)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $|\Psi_N\rangle$  zur Zeit  $t$  zu erhalten, ergibt sich aus

$$\langle \rho_{\Psi_N}^{(a)} \rangle = \text{tr}[\rho_F^{(a)}(t)\rho_{\Psi_N}]$$

und ist explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_N}^{(e)} \rangle &= \left| \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{m'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{b}_{\frac{N}{2}, m} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, m'}^* C_{m', m}^{\frac{N}{2}}(\tau) \right|^2 \\ &+ \left| \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{(N-1)/2} \sum_{m'=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{b}_{\frac{N-1}{2}, m} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, m'}^* S_{m', m}^{\frac{N-1}{2}}(\tau) \right|^2 \quad , \quad (3.17) \end{aligned}$$

falls von dem Atom-Feld-Anfangszustand  $|e; \xi\rangle$  ausgegangen wird, und

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_N}^{(g)} \rangle &= \left| \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{N/2} \sum_{m'=-\frac{N}{2}}^{N/2} \tilde{b}_{\frac{N}{2},m} \tilde{c}_{\frac{N}{2},m'}^* \overline{C}_{m',m}^{\frac{N}{2}}(\tau) \right|^2 \\ &+ \left| \sum_{m=-\frac{N+1}{2}}^{(N+1)/2} \sum_{m'=-\frac{N}{2}}^{N/2} \tilde{b}_{\frac{N+1}{2},m} \tilde{c}_{\frac{N}{2},m'}^* \overline{S}_{m',m}^{\frac{N+1}{2}}(\tau) \right|^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

für den Anfangszustand  $|g; \xi\rangle$ .

### 3.2.1 Erwartungswert-Berechnung im Quasi-Moden-Bild

Um die Vorteile der Quasi-Moden-Beschreibung noch augenfälliger werden zu lassen, werden die vorstehenden Erwartungswerte vollständig in der Quasi-Moden-Basis berechnet. Dazu muss sowohl der Anfangszustand  $|\xi\rangle$ , als auch der Endzustand  $|\Psi_N\rangle$  in das Quasi-Moden-Bild transformiert werden. Das geschieht leicht unter Verwendung der Transformation in Gl. (2.34), wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} |j, m\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} \sum_{m'=-j}^j D_{m',m}^{(j)\dagger} |j, m'\rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Damit lässt sich unter Verwendung der Definition

$$\tilde{\tilde{b}}_{j,m'} := \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} D_{m',m}^{(j)\dagger} \quad , \quad (3.20)$$

der Zustand  $|\xi\rangle$  wie folgt einführen:

$$|\xi\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m'=-j}^j \tilde{\tilde{b}}_{j,m'} |j, m'\rangle \quad . \quad (3.21)$$

Die analoge Transformation für den Endzustand  $|\Psi_N\rangle$  führt auf

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{m'=-N/2}^{N/2} \tilde{\tilde{c}}_{\frac{N}{2},m'} \left| \frac{N}{2}, m' \right\rangle \quad . \quad (3.22)$$

Die Anwendung des Zeitentwicklungsoperators auf  $|e; \xi\rangle$  und  $|g; \xi\rangle$  ergibt analog zu den Gln. (3.14, 3.15)

$$U|e; \xi\rangle = U_{ee}|e; \xi\rangle + U_{ge}|g; \xi\rangle \quad , \quad (3.23)$$

$$U|g; \xi\rangle = U_{eg}|e; \xi\rangle + U_{gg}|g; \xi\rangle \quad . \quad (3.24)$$

Daraus lassen sich die Dichtematrizen zur Zeit  $t$  für das Atom-Feld-System berechnen und ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \rho_{\text{AF}}^{(e)}(t) &= [U_{ee}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ee}^\dagger|e\rangle\langle e| + [U_{ge}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ee}^\dagger|g\rangle\langle e| \\ &\quad + [U_{ee}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ge}^\dagger|e\rangle\langle g| + [U_{ge}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ge}^\dagger|g\rangle\langle g| \quad , \quad (3.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{AF}}^{(g)}(t) &= [U_{eg}|\xi\rangle\langle\xi|U_{eg}^\dagger|e\rangle\langle e| + [U_{gg}|\xi\rangle\langle\xi|U_{eg}^\dagger|g\rangle\langle e| \\ &\quad + [U_{eg}|\xi\rangle\langle\xi|U_{gg}^\dagger|e\rangle\langle g| + [U_{gg}|\xi\rangle\langle\xi|U_{gg}^\dagger|g\rangle\langle g| \quad . \quad (3.26) \end{aligned}$$

Um Observablen für die Felder berechnen zu können, werden daraus die reduzierten Dichtematrizen im Feldraum berechnet

$$\rho_{\text{F}}^{(e)} = U_{ee}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ee}^\dagger + U_{ge}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ge}^\dagger \quad , \quad (3.27)$$

$$\rho_{\text{F}}^{(g)} = U_{eg}|\xi\rangle\langle\xi|U_{eg}^\dagger + U_{gg}|\xi\rangle\langle\xi|U_{gg}^\dagger \quad . \quad (3.28)$$

Damit können Erwartungswerte für das Feld berechnet werden.  $\langle\rho_{\Psi_N}^{(e)}\rangle$  ergibt sich wie nachstehend:

$$\begin{aligned} \langle\rho_{\Psi_N}^{(e)}\rangle = \text{tr} \left[ \rho_{\text{F}}^{(e)}(t) |\Psi_N\rangle\langle\Psi_N| \right] &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\ell}^{\ell} \left[ \langle\langle\ell, \mu| U_{ee}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ee}^\dagger|\Psi_N\rangle\langle\Psi_N|\ell, \mu\rangle\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle\langle\ell, \mu| U_{ge}|\xi\rangle\langle\xi|U_{ge}^\dagger|\Psi_N\rangle\langle\Psi_N|\ell, \mu\rangle\rangle \right] . \quad (3.29) \end{aligned}$$

Analog wird der Erwartungswert für  $\langle\rho_{\Psi_N}^{(g)}\rangle$  berechnet. Die Matrixelemente in Gl. (3.29) können unter Verwendung der Gl. (2.37) explizit berechnet werden und lauten:

$$\begin{aligned} \langle\rho_{\Psi_N}^{(e)}\rangle &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \tilde{b}_{\frac{N}{2}, \nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, \nu}^* \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2 \\ &\quad + \left| \sum_{\nu=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \tilde{b}_{\frac{N-1}{2}, \nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, \nu+\frac{1}{2}}^* \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2}}) \right|^2 \quad , \quad (3.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\rho_{\Psi_N}^{(g)}\rangle &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \tilde{b}_{\frac{N}{2}, \nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, \nu}^* \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 \\ &\quad + \left| \sum_{\nu=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{b}_{\frac{N+1}{2}, \nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, \nu-\frac{1}{2}}^* \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2}}) \right|^2 \quad . \quad (3.31) \end{aligned}$$

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass man ein relativ kompaktes Ergebnis erhält. Der Nachteil ist allerdings, dass die Entwicklungskoeffizienten der Zustände  $|\xi\rangle$  und  $|\Psi_N\rangle$  üblicherweise im herkömmlichen Moden-Bild angegeben werden und dann die Entwicklungskoeffizienten  $\tilde{b}_{j,m}$  sowie  $\tilde{c}_{j,m}$  im Quasi-Moden-Bild zuerst daraus berechnet werden müssen, bevor die Gln. (3.30) und (3.31) verwendet werden können.

Um nichtverschwindende Wahrscheinlichkeiten zur Zeit  $\tau$  zu erhalten gibt es gewisse Einschränkungen an die Anfangszustände für das Atom und das Feld. Tritt das Atom zur Zeit  $\tau = 0$  in den Resonator im angeregten Zustand ein, so muss der Feldzustand zu Beginn der Wechselwirkung wenigstens einen der Fockzustände aus der Menge

$$\begin{aligned} & \{|N, 0\rangle, |N-1, 1\rangle, \dots, |0, N\rangle\} \\ & \cup \{|N-1, 0\rangle, |N-2, 1\rangle, \dots, |0, N-1\rangle\} \quad , \end{aligned} \quad (3.32)$$

enthalten. Tritt das Atom zur Zeit  $\tau = 0$  im Grundzustand in den Resonator ein, so muss das Feld des Resonators zu Beginn der Wechselwirkung wenigstens einen der folgenden Feldzustände enthalten

$$\begin{aligned} & \{|N, 0\rangle, |N-1, 1\rangle, \dots, |0, N\rangle\} \\ & \cup \{|N+1, 0\rangle, |N, 1\rangle, \dots, |0, N+1\rangle\} \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Andernfalls werden die Erwartungswerte in den Gln. (3.30, 3.31) null. Im folgenden Abschnitt sollen die allgemeinen Ergebnisse für überschaubare Spezialfälle betrachtet werden.

### 3.2.2 Ergebnisse der Erzeugungswahrscheinlichkeiten für Spezialfälle

Für  $N = 1$  ist die Menge der Atom-Feld-Anfangszustände, die zu nichtverschwindenden Erzeugungswahrscheinlichkeiten führen nach Gl. (3.32) gegeben durch

$$\{|e; 1, 0\rangle, |e; 0, 1\rangle\} \cup \{|e; 0, 0\rangle\} \quad (3.34)$$

und nach Gl. (3.33) durch die Zustände

$$\{|g; 1, 0\rangle, |g; 0, 1\rangle\} \cup \{|g; 2, 0\rangle, |g; 1, 1\rangle, |g; 0, 2\rangle\} \quad (3.35)$$

gegeben.

Es soll nun die etwas allgemeinere Situation eines Atom-Feld-Anfangszustandes

$$|e; N, 0\rangle = |e; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle_s$$

betrachtet werden. Aus Gl. (3.17) ergibt sich für diesen Anfangszustand die Wahrscheinlichkeit den Feldzustand  $|\Psi_N^\pm\rangle$  zu erzeugen zu

$$\langle \rho_{\Psi_N^\pm}^{(e)} \rangle = \frac{1}{2} \left| C_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\tau) \pm C_{-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\tau) \right|^2, \quad (3.36)$$

aber auch eine Wahrscheinlichkeit den  $(N+1)$ -Photonen-Zustand  $|\Psi_{N+1}^\pm\rangle$  zu erzeugen

$$\langle \rho_{\Psi_{N+1}^\pm}^{(e)} \rangle = \frac{1}{2} \left| S_{\frac{N+1}{2}, \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\tau) \pm S_{-\frac{N+1}{2}, \frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}(\tau) \right|^2. \quad (3.37)$$

Im Falle der Gl. (3.37) haben die Bell-Zustände  $|\Psi_{N+1}^\pm\rangle$  keinen Überlapp mit dem Feld-Anfangszustand  $|N, 0\rangle$ . Die Wahrscheinlichkeiten zur Zeit  $\tau$  können aber für einige spezielle Werte der Kopplungskonstanten, relativen Phase und Wechselwirkungszeit eins erreichen. In diesem Fall kann man davon sprechen, dass der Feldzustand  $|\Psi_{N+1}^\pm\rangle$  in einem einzigen Schritt (ein Atom durchquert einen supraleitenden Resonator in der Zeit  $\tau$ ) erzeugt wurde.

Diese Eigenschaft des Zwei-Moden-JCMs kann man leicht verstehen, wenn man bedenkt, dass das Atom während der Wechselwirkung mit den verlustfreien Resonator-Moden Photonen abwechselnd in beide Moden emittieren sowie Photonen aus beiden Resonator-Moden reabsorbieren kann und damit während vieler solcher „Oszillationen“ aus dem anfänglichen Feldzustand  $|N, 0\rangle$  auch der Zustand  $|0, N\rangle$  entstehen kann, oder wie im zweiten Fall gefordert wird, die Zustände  $|N+1, 0\rangle$  und  $|0, N+1\rangle$  in einer Überlagerung erzeugt werden können.

Im Folgenden werden explizit die Wahrscheinlichkeiten, die Zustände

$$|\Psi_1^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle) \quad ,$$

zu erhalten für die Menge der möglichen Anfangszustände angegeben:

$|e; 0, 0\rangle$  ergibt,

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(e)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| S_{\frac{1}{2}, 0}^0 \pm S_{-\frac{1}{2}, 0}^0 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\tau) \left| d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

$|e; 1, 0\rangle = |e; 1/2, 1/2\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned}\langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(e)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| C_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm C_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \cos(\tau) \left[ d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i\varphi} d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \cos(\tau\sqrt{2}) \left[ d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i\varphi} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2.\end{aligned}\quad (3.39)$$

$|e; 0, 1\rangle = |e; 1/2, -1/2\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned}\langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(e)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| C_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm C_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \cos(\tau) \left[ e^{-i\varphi} d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \cos(\tau\sqrt{2}) \left[ e^{-i\varphi} d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2.\end{aligned}\quad (3.40)$$

$|g; 1, 0\rangle = |g; 1/2, 1/2\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned}\langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| \overline{C}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm \overline{C}_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[ d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i\varphi} d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \cos(\tau) \left[ d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i\varphi} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2.\end{aligned}\quad (3.41)$$

$|g; 0, 1\rangle = |g; 1/2, -1/2\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned}\langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| \overline{C}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm \overline{C}_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[ e^{-i\varphi} d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \cos(\tau) \left[ e^{-i\varphi} d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|^2.\end{aligned}\quad (3.42)$$

$|g; 2, 0\rangle = |g; 1, 1\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned}\langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| \overline{S}_{\frac{1}{2}, 1}^1 \pm \overline{S}_{-\frac{1}{2}, 1}^1 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \sin(\tau) \left[ e^{i\varphi/2} d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i3\varphi/2} d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{1,0}^1 \right. \\ &\quad \left. + \sin(\tau\sqrt{2}) \left[ e^{i\varphi/2} d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i3\varphi/2} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{1,1}^1 \right|^2.\end{aligned}\quad (3.43)$$

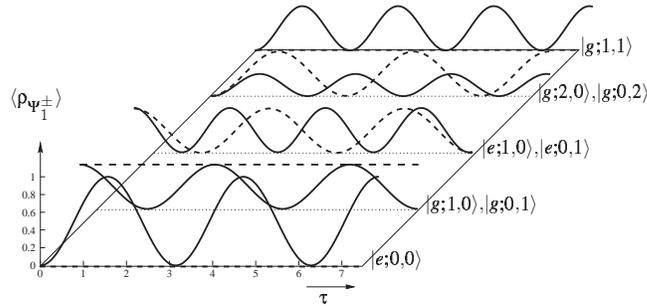
$|g; 0, 2\rangle = |g; 1, -1\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| \bar{S}_{\frac{1}{2}, -1}^1 \pm \bar{S}_{-\frac{1}{2}, -1}^1 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \sin(\tau) \left[ e^{-i3\varphi/2} d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{-i\varphi/2} d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{-1,0}^1 \right. \\ &\quad \left. + \sin(\tau\sqrt{2}) \left[ e^{-i3\varphi/2} d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{-i\varphi/2} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{-1,1}^1 \right|^2 . \end{aligned} \quad (3.44)$$

$|g; 1, 1\rangle = |g; 1, 0\rangle_S$  ergibt,

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(g)} \rangle &= \frac{1}{2} \left| \bar{S}_{\frac{1}{2}, 0}^1 \pm \bar{S}_{-\frac{1}{2}, 0}^1 \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \sin(\tau) \left[ e^{-i\varphi/2} d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i\varphi/2} d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{0,0}^1 \right. \\ &\quad \left. + \sin(\tau\sqrt{2}) \left[ e^{-i\varphi/2} d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pm e^{i\varphi/2} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] d_{0,1}^1 \right|^2 . \end{aligned} \quad (3.45)$$

In der folgenden Abb. 3.1 werden die Erwartungswerte illustriert, wobei für die Kopplungskonstanten  $g_1 = g_2$  und die relative Phase  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  gesetzt wurde. Die



**Abb. 3.1:** Parameterdarstellung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten  $\langle \rho_{\Psi_1^+} \rangle$  (durchgezogen) und  $\langle \rho_{\Psi_1^-} \rangle$  (gestrichelt) als Funktion der Zeit  $\tau = gt$ , für unterschiedliche Anfangszustände, wobei  $g_1 = g_2$  und  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  gewählt wurde.

Zustände an der rechten Seite der Abbildung sind gerade die Anfangszustände aus den Gln. (3.34, 3.35). Zu beachten ist, dass wegen des Spezialfalls  $g_1 = g_2$  (Atom koppelt mit gleicher Stärke an Mode 1 und 2), z.B. die Zustände  $|g; 1, 0\rangle$  und  $|g; 0, 1\rangle$  zum gleichen Erwartungswert führen.

Der interessante Fall ist  $|e; 0, 0\rangle$ , wobei der Zustand  $|\Psi_1^+\rangle$  periodisch mit der Wahrscheinlichkeit eins zu den Zeiten  $\tau_n = (n + 1/2)\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$  produziert wird. Dieser

Spezialfall soll hier noch genauer betrachtet werden. Explizit lautet die Zeitentwicklung des Anfangszustandes  $U|e; 0, 0\rangle$ ,

$$U|e; 0, 0\rangle = \cos(\tau)|e; 0, 0\rangle - i \sin(\tau)|g\rangle(\gamma_1|1, 0\rangle + \gamma_2|0, 1\rangle) \quad . \quad (3.46)$$

Dies führt auf die ausreduzierte Dichtematrix des Feldes  $\rho_F = \text{tr}_A[U|e; 0, 0\rangle\langle e; 0, 0|U^\dagger]$ , die ausgeschrieben wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} \rho_F = \cos^2(\tau)|0, 0\rangle\langle 0, 0| + \sin^2(\tau) [ & |\gamma_1|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |\gamma_2|^2|0, 1\rangle\langle 0, 1| \\ & + \gamma_1\gamma_2^*|0, 1\rangle\langle 1, 0| + \gamma_1^*\gamma_2|1, 0\rangle\langle 0, 1|] \quad . \quad (3.47) \end{aligned}$$

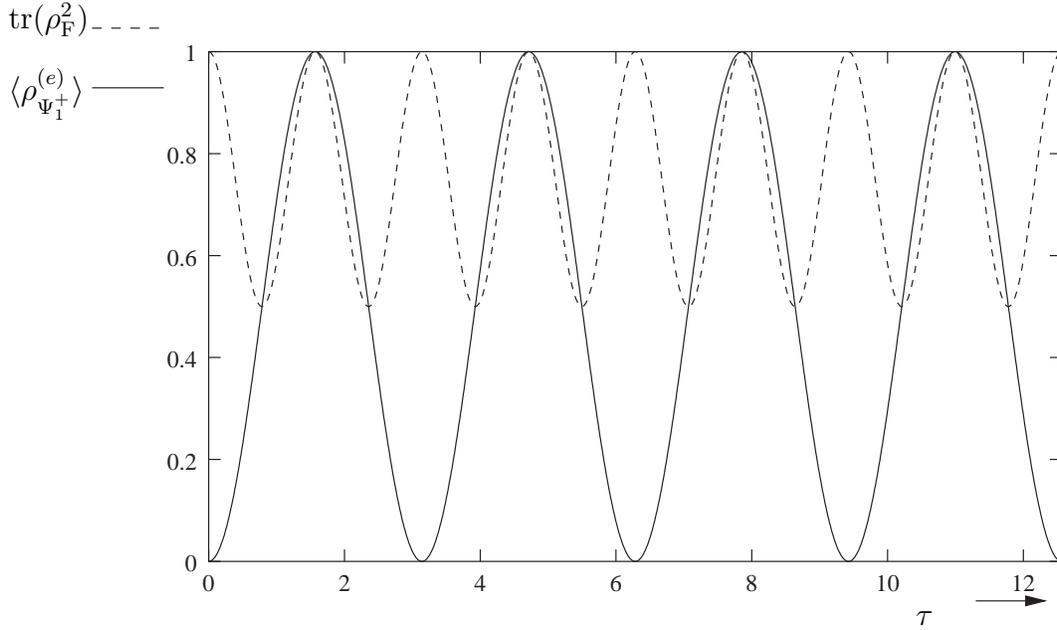
Die Matrixdarstellung in der geordneten Basis  $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |0, 1\rangle, |0, 0\rangle\}$  lautet dann

$$\rho_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\gamma_1|^2 \sin^2(\tau) & \gamma_1^* \gamma_2 \sin^2(\tau) & 0 \\ 0 & \gamma_1 \gamma_2^* \sin^2(\tau) & |\gamma_2|^2 \sin^2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\tau) \end{pmatrix} \quad . \quad (3.48)$$

Hieran lässt sich leicht die für eine Dichtematrix notwendige Eigenschaft, dass die Spur 1 ergibt (unter Verwendung  $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = 1$ ), nachprüfen. Dies muss natürlich für alle Zeiten  $\tau$  gelten, d.h. es gilt  $\text{tr}(\rho_F(\tau)) = 1$ . Handelt es sich bei der vorliegenden Dichtematrix um ein echtes Gemisch, so muss sie die Eigenschaft  $\text{tr}(\rho_F^2) < 1$  aufweisen. Für ein vollständig zufälliges Gemisch gilt dann  $\text{tr}(\rho_F^2) = 1/2$  als untere Schranke. Liegt der Fall  $\text{tr}(\rho_F^2) = 1$  vor, so handelt es sich um die Dichtematrix eines reinen Zustandes. Da hier zeitabhängige Matrixeinträge vorliegen, ist es interessant sich den Zeitverlauf der Größe  $\text{tr}(\rho_F^2)$  anzusehen. Das Ergebnis für beliebige Kopplungen  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  lautet:

$$\text{tr}(\rho_F^2) = \sin^4(\tau) + \cos^4(\tau) \quad .$$

In der folgenden Abb. 3.2 wird diese Funktion zusammen mit dem Erwartungswert für die Erzeugung von  $|\Psi_1^+\rangle$  aufgetragen. Die Dichtematrix oszilliert periodisch zwischen einem reinen Zustand und einem Gemisch. Während Phasen in denen  $\text{tr}(\rho_F^2) < 1$  gilt, kann das Feld nicht durch einen Zustand beschrieben werden. Nimmt die Spur  $\text{tr}(\rho_F^2) = 1/2$  an, so handelt es sich bei der Beschreibung des Feldes um ein vollständig zufälliges Gemisch, was auch als maximales Gemisch bezeichnet werden kann. Der Kollaps der Wellenfunktion für den Feldzustand kann in dem Modell somit direkt beobachtet werden. Des Weiteren wandelt sich ein maximales Gemisch periodisch wieder in einen reinen Zustand um. Auf diese interessante Eigenschaft haben die Autoren



**Abb. 3.2:** Die Abbildung zeigt die Zeitabhängigkeit von  $\text{tr}(\rho_F^2)$  (gestrichelt) sowie den Erwartungswert  $\langle \rho_{\Psi_1^+}^{(e)} \rangle$  für  $g_1 = g_2$  und  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  (durchgezogen).

S.J.D. Phoenix und P.L. Knight sowie Julio Gea-Banacloche [64, 65] im Ein-Moden-JCM hingewiesen.

Erreicht der Erwartungswert 1, so liegt der reine Feldzustand  $|\Psi_1^+\rangle$  mit der Wahrscheinlichkeit 1 vor, d.h. in diesem Fall ist es sicher diesen Zustand in dem Resonator vorzufinden. Die Dichtematrix des Feldsystems muss folglich zu den gleichen Zeiten vom Gemisch in den reinen Zustand übergehen. Der Ausdruck  $\text{tr}(\rho_F^2)$  kann in diesem Falle als Maß für das Auftreten eines verschränkten Zustandes dienen.

Im folgenden Abschnitt wird ein weiteres Verschränkungsmaß, die „concurrency“, explizit für den betrachteten Spezialfall berechnet und wiederum mit dem Erwartungswert verglichen.

### 3.2.3 Berechnung der „concurrency“

Wie bereits im Abschnitt 3.1 erwähnt gibt es ein etabliertes Maß für den Grad der Verschränkung, die „concurrency“  $C(\rho)$ . Zu deren Berechnung muss die Spin-gespiegelte Dichtematrix  $\tilde{\rho}_F$  aus der Dichtematrix des Feldes berechnet werden. Mit den Wurzeln der Eigenwerte der Produktmatrix  $\rho_F \tilde{\rho}_F$  kann dann die „concurrency“ über die

Beziehung

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad ,$$

berechnet werden, wobei die  $\sqrt{\lambda_i}$ 's in der Reihenfolge  $\sqrt{\lambda_4} < \sqrt{\lambda_3} < \sqrt{\lambda_2} < \sqrt{\lambda_1}$  eingesetzt werden müssen [55]. Für den hier betrachteten Spezialfall der Erzeugung von  $|\Psi_1^+\rangle$  aus dem Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$  erhält man

$$\rho_F \tilde{\rho}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (|\gamma_1|^2 |\gamma_2|^2 + \gamma_1^{*2} \gamma_2^2) \sin^4(\tau) & (|\gamma_1|^2 \gamma_1 \gamma_2^* + |\gamma_1|^2 \gamma_1^* \gamma_2) \sin^4(\tau) & 0 \\ 0 & (\gamma_1 \gamma_2^* |\gamma_2|^2 + |\gamma_2|^2 \gamma_2 \gamma_1^*) \sin^4(\tau) & (\gamma_1^2 \gamma_2^{*2} + |\gamma_1|^2 |\gamma_2|^2) \sin^4(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

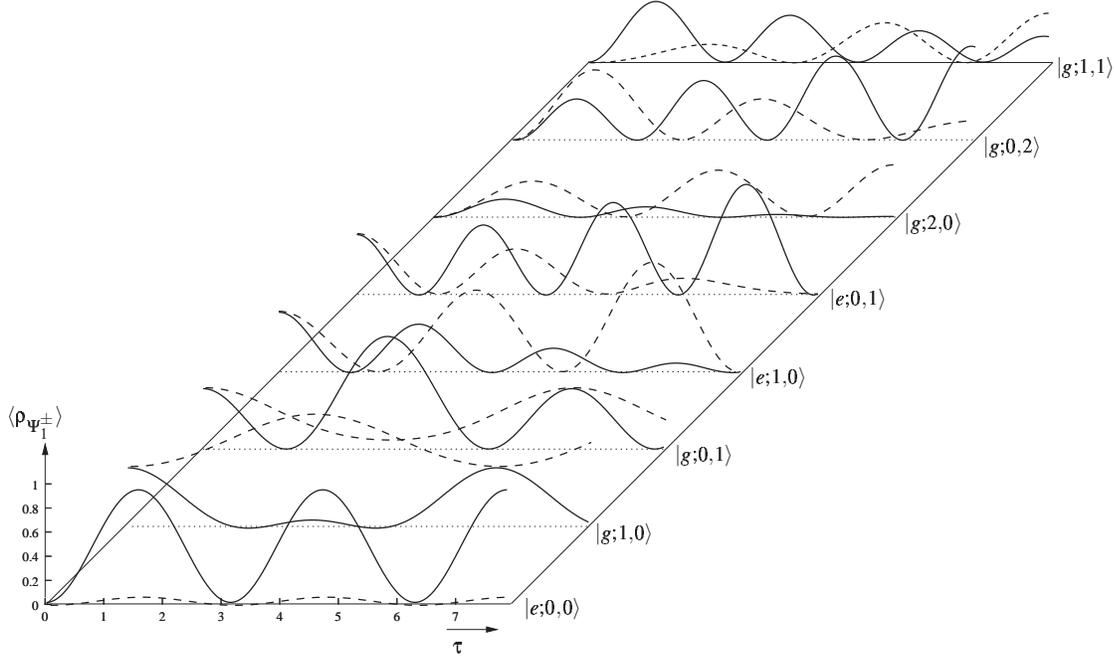
Für den Spezialfall  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/\sqrt{2}$ , was gleichen Kopplungskonstanten  $g_1 = g_2$  entspricht, erhält man

$$C(\rho_F) = \sin^2(\tau) \quad .$$

In diesem Fall liefert die „concurrence“ die gleiche Information wie der Erwartungswert  $\langle \rho_{\Psi_1^+}^{(e)} \rangle$ , da dieser ebenfalls die gleiche Funktion ergibt (vgl. Abb. 3.2). Das heißt der Grad der Verschränkung ändert sich periodisch von 0 (nicht verschränkt) bis 1 (maximal verschränkt), analog zum Erwartungswert selbst. Es zeigt sich bei diesen Untersuchungen auch, dass das Maß der „concurrence“ in diesem Spezialfall genauso viel Information über den Grad der Verschränkung liefert wie eine direkte Berechnung der Wahrscheinlichkeiten (Erwartungswerte), den gewünschten verschränkten Zustand zu erzeugen. Dies lässt darauf schließen, dass es sich bei der „concurrence“ um ein gutes Verschränkungsmaß handelt.

Man könnte sich des Weiteren die Frage stellen, warum Verschränkungsmaße notwendig sind, wenn sie keine andere Information liefern, als man durch die Berechnung der Erwartungswerte gewinnt. Die Verschränkungsmaße haben dann ihre uneingeschränkte Bedeutung, wenn die Zeitentwicklung die zu einer Dichtmatrix führt, nicht bekannt ist. In den meisten Fällen, die experimentell von Bedeutung sind, rekonstruiert man aufgrund von Messungen die Dichtmatrix des Systems und möchte dann ein Verfahren anwenden, das den Grad der Verschränkung testet. Dies lässt sich nur mit einem handhabbaren leicht zu berechnenden Verschränkungsmaß bewerkstelligen. Modellsysteme wie das JCM in dem Verschränkung determiniert erzeugt werden kann sind dann ein ausgezeichneter Test für Verschränkungsmaße.

Falls die Kopplungen des Atoms an die beiden Moden unterschiedlich sind, z.B.  $g_2 = 1/\sqrt{3}g_1$ , ergibt sich folgendes Bild in Abb. 3.3. Der Vergleich mit Abb. 3.1 zeigt, dass

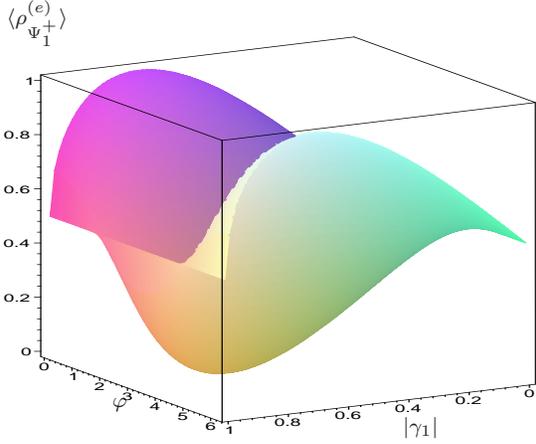


**Abb. 3.3:** Parameterdarstellung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten  $\langle \rho_{\Psi_1^+} \rangle$  (durchgezogen) und  $\langle \rho_{\Psi_1^-} \rangle$  (gestrichelt) als Funktion der Zeit  $\tau = gt$ , für unterschiedliche Anfangszustände, wobei  $g_2 = 1/\sqrt{3}g_1$  und  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  gewählt wurde.

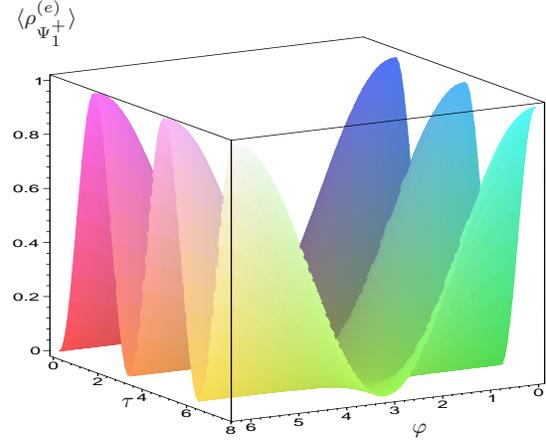
im Falle  $|e; 0, 0\rangle$  der Erwartungswert für  $|\Psi_1^+\rangle$  nicht mehr exakt 1 erreicht, dafür erhält der Erwartungswert für  $|\Psi_1^-\rangle$  einen Beitrag. Ebenso ändern sich die Erwartungswerte für andere Anfangszustände.

Allgemein können die Erwartungswerte für  $|\Psi_1^\pm\rangle$  als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau$ , der beiden Kopplungskonstanten  $g_1$  und  $g_2$  sowie der Phasendifferenz zwischen beiden Moden  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  untersucht werden. Die Parameter zu finden, für die die Wahrscheinlichkeiten maximal werden, stellt ein mehrdimensionales Maximierungsproblem dar, das sich mit numerischen Verfahren (Simplex-Algorithmus) lösen lässt. Die folgenden zwei Bilder zeigen die Abhängigkeit der Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^+\rangle$  von der relativen Phase  $\varphi$  und  $|\gamma_1|$ , Abb. 3.4 sowie von der Wechselwirkungszeit  $\tau$  und der relativen Phase  $\varphi$ , Abb. 3.5. In Abb. 3.6 und Abb. 3.7 sind analog dazu die Erzeugungswahrscheinlichkeiten für die antisymmetrische Kombination  $|\Psi_1^-\rangle$  dargestellt. Der Vergleich der Abbildungen für  $|\Psi_1^+\rangle$  und  $|\Psi_1^-\rangle$  zeigt, dass dort wo  $|\Psi_1^+\rangle$  ein Minimum besitzt,  $|\Psi_1^-\rangle$  ein Maximum aufweist.

Als weitere Spezialfälle werden noch einige Illustrationen zum Verhalten der Erzeugungswahrscheinlichkeiten für  $N = 2$ , d.h. für  $|\Psi_2^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle \pm |0, 2\rangle)$  angegeben.



**Abb. 3.4:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle)$  als Funktion der relativen Phase  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  und  $|\gamma_1|$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$  und Wechselwirkungszeit  $\tau = \pi/2$ .

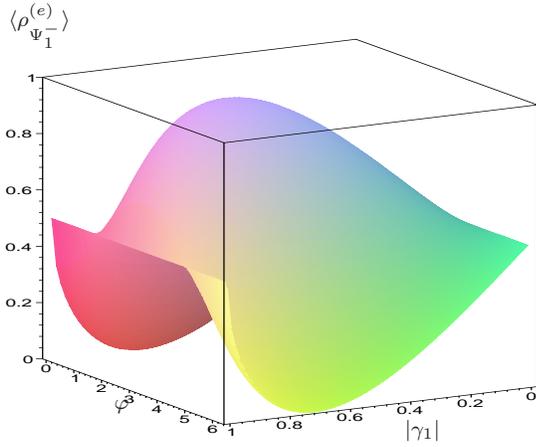


**Abb. 3.5:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle)$  als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau$  und der relativen Phase  $\varphi$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$  und Kopplungskonstante  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ .

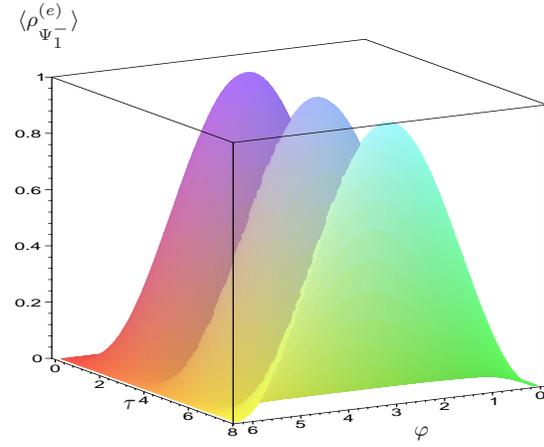
Die Abb. 3.8 sollte mit Abb. 3.1 verglichen werden.

Weitere Abhängigkeiten der Erzeugungswahrscheinlichkeiten für  $N = 2$  werden in den folgenden zwei Bildern untersucht. Sie zeigen die Abhängigkeit der Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_2^+\rangle$  von der relativen Phase  $\varphi$  und  $|\gamma_1|$ , Abb. 3.9 sowie von der Wechselwirkungszeit  $\tau$  und der relativen Phase  $\varphi$ , Abb. 3.10.

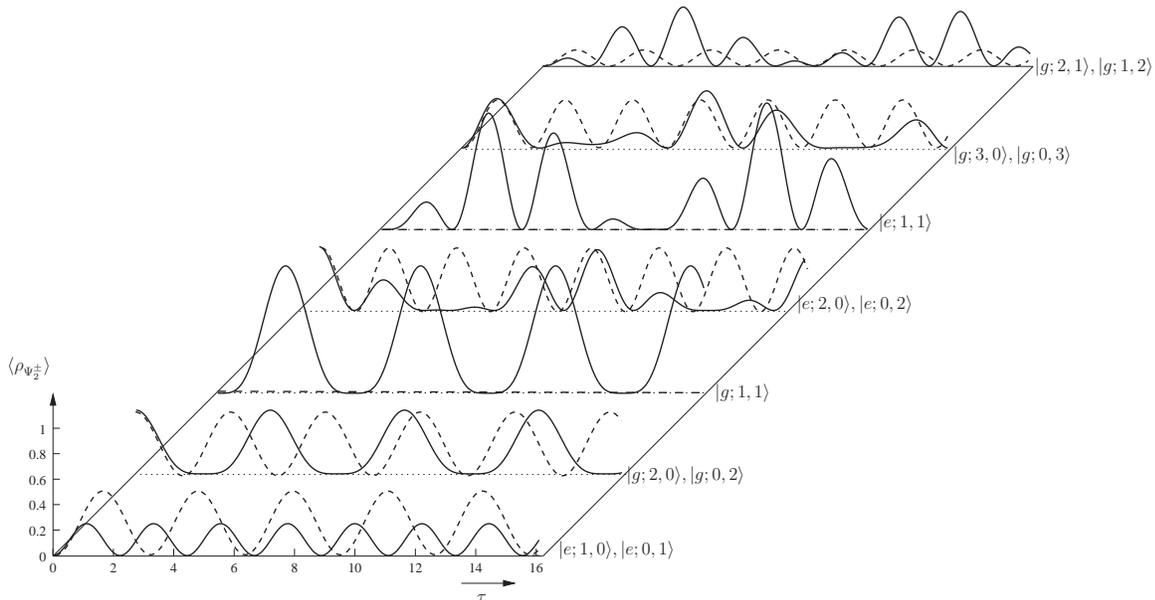
Es wurde hiermit demonstriert, dass es möglich ist zwei zu Beginn unverschränkte Feldmoden durch die Wechselwirkung, die im Rahmen des Zwei-Moden-JCMs beschrieben wird, zu verschränken. Zur konkreten experimentellen Realisierung siehe dazu auch Kap. 7. Es sei nochmals betont, dass dies während der Wechselwirkung eines einzigen Atoms mit den zwei Resonator-Moden geschieht. Um die Erwartungswerte eines gewünschten Zustandes mit  $N$  verschränkten Photonen zu maximieren, müssen die Wechselwirkungszeit, die relative Phase der zwei Feldmoden und deren Kopplung an das Atom sowie die Besetzungszahl des Anfangszustandes geeignet gewählt werden. Wie die Wahrscheinlichkeiten von diesen Parametern abhängen, wurde an einigen Spezialfällen veranschaulicht. Im Allgemeinen müssen diese Parameter aus einem multidimensionalen Maximierungsverfahren (z.B. Simplex-Algorithmus) bestimmt werden. Im nächsten Abschnitt wird ein weiteres Schema vorgestellt in dem verschränkte Feldmoden erzeugt werden können.



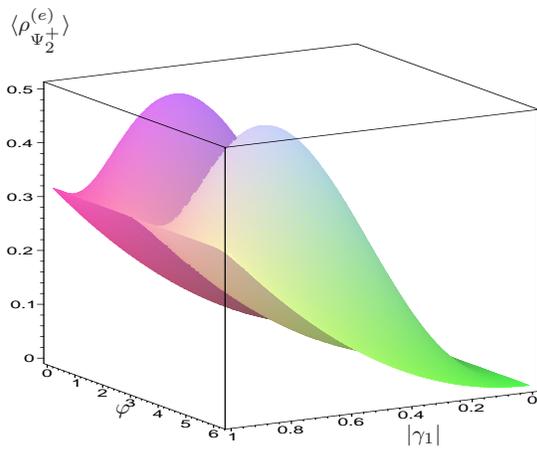
**Abb. 3.6:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle)$  als Funktion der relativen Phase  $\varphi$  und  $|\gamma_1|$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$  und Wechselwirkungszeit  $\tau = \pi/2$ .



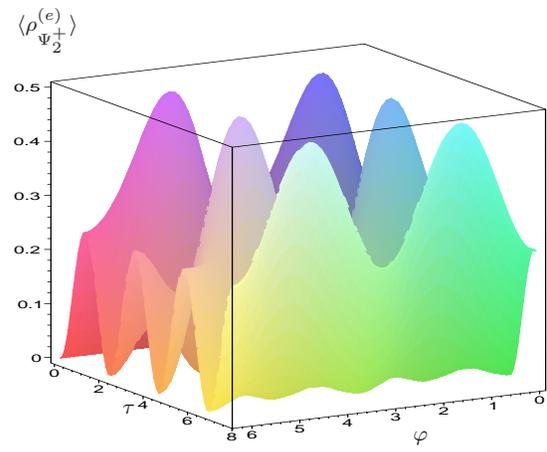
**Abb. 3.7:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle)$  als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau$  und der relativen Phase  $\varphi$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$  und Kopplungskonstante  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$ .



**Abb. 3.8:** Parameterdarstellung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten  $\langle \rho_{\Psi_2^+} \rangle$  (durchgezogen) und  $\langle \rho_{\Psi_2^-} \rangle$  (gestrichelt) als Funktion der Zeit  $\tau = gt$ , für unterschiedliche Anfangszustände, wobei  $g_1 = g_2$  und  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  gewählt wurde.



**Abb. 3.9:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0\rangle + |0, 2\rangle)$  als Funktion der relativen Phase  $\varphi$  und  $|\gamma_1|$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$  und Wechselwirkungszeit  $\tau = \pi/2$ .



**Abb. 3.10:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0\rangle + |0, 2\rangle)$  als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau$  und der relativen Phase  $\varphi$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$  und Kopplungskonstante  $|\gamma_1| = 1/\sqrt{2}$ .

### 3.3 Bedingte Erzeugung verschränkter $N$ -Photonen-Zustände

Ein weiteres Verfahren um verschränkte Zustände der beiden Moden zu erzeugen wird in diesem Abschnitt beschrieben. Im vorangegangenen Abschnitt wurde hervorgehoben, dass es sich um ein Einschnittverfahren handelt, allerdings mit dem Nachteil, dass der Resonator bereits in einem bestimmten Anfangszustand sein muss. Dies bedeutet für ein Experiment, dass für die Erzeugung eines  $N$ -Photonen-verschränkten-Zustandes in einem Schritt, sich bereits  $N$  oder  $N \pm 1$  Photonen in einem nichtverschränkten Zustand vor Beginn der Wechselwirkung mit dem Atom, in den Moden befinden müssen.

Im Folgenden wird untersucht, wie sich in einem Resonator, dessen Moden vor der Wechselwirkung im Vakuum sind, ein  $N$ -Photonen-verschränkter-Zustand erzeugen lässt. In dem vorgeschlagenen Verfahren werden wiederum einzelne Atome mit den definierten Anfangszuständen  $|e\rangle$  oder  $|g\rangle$  durch einen Resonator fliegen und mit den Moden des Resonators eine Zeit  $\tau$  wechselwirken. Allerdings wird gegenüber dem Einschnittverfahren der Endzustand der jeweiligen Atome die den Resonator verlassen gemessen. Abhängig vom Messergebnis stellt sich im Resonator ein bestimmter Feldzustand ein. Dadurch wird der Begriff bedingte Erzeugung („conditional generation“) geprägt, der im Zusammenhang mit dem Ein-Moden-JCM bereits in den Arbeiten [45, 46] gebraucht wird. Es handelt sich also in gewisser Weise um die Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten, denn unter der Annahme, dass das Atom in einem bestimmten Endzustand gemessen wird, werden die Wahrscheinlichkeiten die Resonator-Moden in einem verschränkten Zustand vorzufinden berechnet.

Gestartet wird das Verfahren mit dem ersten Schritt, in dem sich das Atom-Feld-System im Ausgangszustand  $|e; 0, 0\rangle = |e; 0, 0\rangle_S$  befinden soll. Die Wechselwirkung des angeregten Atoms für eine Zeit  $\tau_1$  führt auf die Zeitentwicklung

$$U(\tau_1) |e; 0, 0\rangle_S = \cos(\tau_1) |e; 0, 0\rangle_S - i \sin(\tau_1) |g; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_S \quad . \quad (3.50)$$

Wird das Atom im Grundzustand  $|g\rangle$  gemessen, verbleibt das Feld folglich in dem Zustand

$$|\chi_1\rangle = K_1(-i) \sin(\tau_1) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_S \quad , \quad (3.51)$$

wobei  $K_1 = |\sin(\tau_1)|^{-1} \exp(i\alpha_1)$  eine Normierungskonstante darstellt. Wenn die Phase  $\alpha_1$  geeignet gewählt wird, kann der Faktor mit dem der Zustand in Gl. (3.51) multipliziert wird eins werden, wobei dann nach dem ersten Schritt der Zustand  $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_S$

erhalten wird. Durch weiteres Fortfahren in dieser Weise ergibt sich der Feldzustand nach  $N$  Schritten zu

$$|\chi_N\rangle = \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\rangle_S = \sum_{k=0}^N D_{\frac{N}{2}-k, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}(\varphi, \vartheta, \chi) |N-k, k\rangle, \quad (3.52)$$

wobei Gl. (2.33) und die Notation für Fockzustände auf der rechten Seite der Gleichung benutzt wurden.

Das ist genau der gewünschte  $N$ -Photonen-verschränkte-Zustand in Gl. (3.10), wobei die Koeffizienten vollständig durch die Wigner'schen D-Funktionen gegeben sind. Die Argumente der Wignerfunktionen hängen über Gl. (2.36) mit den Kopplungen zusammen und sind deshalb vollständig bestimmt.

Wird der Zustand  $|N/2, N/2\rangle_S$  in Gl. (3.52) in der Schwingernotation, wieder zurück in die Focknotation  $|N, 0\rangle$  geschrieben, so sieht man eine interessante Eigenschaft der Quasi-Moden-Beschreibung. Jeder bedingte Schritt erzeugt offenbar ein Photon in Quasi-Mode 1. Dies bringt nochmal deutlich zum Ausdruck, dass in den Wechselwirkungsoperator in Gl. (2.17) nur Quasi-Mode  $A_1$  eingeht und somit in jeder Wechselwirkung auch nur Quasi-Mode 1 geändert werden kann. Die Quasi-Moden-Beschreibung verkörpert also in jeder Weise ein effektives Ein-Moden-Modell.

Die Erzeugungswahrscheinlichkeiten für die Zustände  $|\Psi_N\rangle$  und  $|\Psi_N^\pm\rangle$  nach  $N$  bedingten Schritten sind gegeben durch

$$|\langle \Psi_N | \chi_N \rangle|^2 = \left| \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, m}^* D_{m, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \right|^2, \quad (3.53)$$

$$|\langle \Psi_N^\pm | \chi_N \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| D_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \pm D_{-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \right|^2. \quad (3.54)$$

Es zeigt sich, dass die Wahrscheinlichkeit das Atom  $N$ -mal hintereinander im Grundzustand zu messen eine stark fallende Funktion von  $N$  ist. Das Verfahren wäre also nicht praktikabel, wenn es nur auf diese Weise funktionieren würde. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Annahme die Atome  $N$ -mal hintereinander im Grundzustand zu messen keine notwendige Bedingung darstellt, vielmehr reicht es aus, in einer Sequenz von  $n(\geq N)$  Schritten  $N$ -mal die Atome im Grundzustand zu finden, unabhängig von der Reihenfolge in der die Messergebnisse auftreten.

### 3.4 Nichtbedingte Erzeugung verschränkter $N$ -Photonen-Zustände

Im vorangegangenen Abschnitt wurde jeweils nach der Wechselwirkung der Atome mit den Moden der Endzustand der Atome gemessen. Im Folgenden wird diese Prämisse aufgegeben und die gesamte Dichtematrix des Feldsystems unabhängig vom Endzustand der Atome berechnet.

Auch hier soll durch einen anfänglich leeren Resonator eine Sequenz von angeregten Atomen geschickt werden, wobei aber wie bereits erwähnt deren Endzustand nicht gemessen wird. Der reduzierte Dichteoperator des Feldes nach der Wechselwirkung des ersten Atoms mit den Moden ist gegeben durch

$$\rho_{\text{F}}^{(1)}(\tau_1) = \cos^2(\tau_1) |0, 0\rangle_{\text{S}} \langle\langle 0, 0| + \sin^2(\tau_1) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_{\text{S}} \langle\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} |$$

und dient als neue Anfangsfeld-Konfiguration für das zweite angeregte Atom. Wenn in dieser Weise die Rechnung durchgeführt wird, ergibt sich der reduzierte Dichteoperator des Feldes nach  $n$  Schritten zu

$$\rho_{\text{F}}^{(n)}(\{\tau_n\}) = \sum_{j=0}^{n/2} p_j^{(n)}(\{\tau_n\}) |j, j\rangle_{\text{S}} \langle\langle j, j| \quad , \quad (3.55)$$

wobei die Koeffizienten  $p_j^{(n)}$  rekursiv durch folgende Gleichungen gegeben sind

$$\begin{aligned} p_0^{(n)} &= \cos^2(\tau_n) p_0^{(n-1)} \quad , \\ p_j^{(n)} &= \cos^2(\tau_n \sqrt{2j+1}) p_j^{(n-1)} + \sin^2(\tau_n \sqrt{2j}) p_{j-\frac{1}{2}}^{(n-1)} \quad , \\ p_{n/2}^{(n)} &= \sin^2(\tau_n \sqrt{n}) p_{(n-1)/2}^{(n-1)} \quad , \end{aligned} \quad (3.56)$$

mit  $1/2 \leq j \leq (n-1)/2$  und  $p_0^{(0)} = 1$ . Das Argument  $\{\tau_n\}$  steht für alle Wechselwirkungszeiten  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  der  $n$  Schritte. Gleichung (3.55), die offensichtlich für  $n = 1$  und  $n = 2$  gilt, siehe Gl. (3.57), kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Die Koeffizienten  $p_j^{(n)}$  in Gl. (3.55) sind die Wahrscheinlichkeiten das Feld nach  $n$  nicht-bedingten Schritten in dem Quasi-Moden-Zustand  $|j, j\rangle_{\text{S}}$  zu finden. Speziell gehören  $p_0^{(n)} = \cos^2(\tau_1) \cos^2(\tau_2 \sqrt{2}) \dots \cos^2(\tau_n \sqrt{n})$  und  $p_{n/2}^{(n)} = \sin^2(\tau_1) \sin^2(\tau_2 \sqrt{2}) \dots \sin^2(\tau_n \sqrt{n})$  zu den Fällen, wo in  $n$  Schritten die anfänglich angeregten Atome  $n$ -mal im angeregten bzw. im Grundzustand erscheinen. Die anderen  $p_j^{(n)}$ 's beschreiben die Fälle in denen  $n$  Atome  $2j$ -mal im Grundzustand und  $(n-2j)$ -mal im angeregten Zustand erscheinen, unabhängig davon in welcher Reihenfolge die Ergebnisse auftreten. Die

Koeffizienten  $p_j^{(n)}$  bestehen aus einer Summe von  $\binom{n}{2j}$  Termen, wobei jeder von ihnen aus einer bestimmten Sequenz von  $|g\rangle$ 's und  $|e\rangle$ 's besteht und einen Sinusquadrat- bzw. Kosinusquadrat-Term beiträgt. Es gibt insgesamt  $2^n$  Terme in Gl. (3.55).

Dies alles lässt sich leicht an einem speziellen Beispiel für  $\rho_F^{(2)}$  erkennen:

$$\begin{aligned} \rho_F^{(2)} &= \cos^2 \tau_1 \cos^2 \tau_2 |0, 0\rangle_S \langle\langle 0, 0 | \\ &+ (\cos^2 \tau_1 \sin^2 \tau_2 + \sin^2 \tau_1 \cos^2 (\tau_2 \sqrt{2})) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_S \langle\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \\ &+ \sin^2 \tau_1 \sin^2 (\tau_2 \sqrt{2}) |1, 1\rangle_S \langle\langle 1, 1 | \quad . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Hierbei gehören die vier Terme zu den Sequenzen  $(e,e)$ ,  $(e,g)$ ,  $(g,e)$ , und  $(g,g)$  in denen die Messergebnisse der Atomzustände auftreten.

Die Zustände  $|\Psi_N\rangle$  und  $|\Psi_N^\pm\rangle$  werden in einem nicht-bedingten  $n$ -Schritt-Prozess mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\langle \rho_{\Psi_N} \rangle = p_{\frac{N}{2}}^{(n)} \left| \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{c}_{\frac{N}{2}, m}^* D_{m, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \right|^2, \quad (3.58)$$

$$\langle \rho_{\Psi_N^\pm} \rangle = \frac{1}{2} p_{\frac{N}{2}}^{(n)} \left| D_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \pm D_{-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \right|^2, \quad (3.59)$$

erzeugt. Dies sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, die bereits im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{N/2}^{(n)}$ . Die Wechselwirkungszeiten können so gewählt werden, dass die  $p_{N/2}^{(n)} \neq 0$  werden. Das bedeutet, dass die  $n$  Parameter  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  in einem Experiment kontrolliert werden müssen. Der Zustand  $|\Psi_N\rangle$  kann in einem Minimum von  $n = N$  Schritten mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{N/2}^{(N)}$  generiert werden, wobei die Wahrscheinlichkeiten eine stark fallende Funktion von  $N$  sind.

In dem nichtbedingten Erzeugungsprozess werden alle Zustände  $|j, j\rangle_S = |2j, 0\rangle$  für  $j = 0, 1/2, \dots, n/2$  generiert, Gl. (3.55). Im Gegensatz dazu werden in dem bedingten Erzeugungsprozess aus dem vorigen Abschnitt nur die verschränkten  $N$ -Photonen-Zustände

$$|\chi_N\rangle = \sum_{k=0}^N D_{\frac{N}{2}-k, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}(\varphi, \vartheta, \chi) |N-k, k\rangle, \quad ,$$

Gl. (3.52) erzeugt, falls in  $n$  Schritten  $N$ -mal die Atome im Grundzustand detektiert werden. Um den Zustand  $|\Psi_N\rangle$  zu produzieren ist es also nicht notwendig, dass die Atome  $N$ -mal hintereinander in ihrem Grundzustand gemessen werden. Es ist nur notwendig, dass sie in irgendeiner Sequenz aus Grund- und angeregten Zuständen insgesamt  $N$ -mal im Grundzustand gemessen werden.

Abschließend sei noch bemerkt, dass es eine spezielle Wahl für die Wechselwirkungszeit des  $\ell$ -ten Atoms gibt, die durch  $\tau_\ell = \pi/(2\sqrt{\ell})$  gegeben ist, für welche beide Schemata (bedingtes und nichtbedingtes) das gleiche Ergebnis, d.h. den gleichen verschränkten Zustand in Gl. (3.52) ergeben.

## 3.5 Einfluss von Verstimmung auf die Verschränkung

Die Berechnung von Erwartungswerten zur Gewinnung der Erzeugungswahrscheinlichkeiten für  $N$ -Photonen-verschränkte-Zustände wurde bisher für den Resonanzfall untersucht. In dem gegenwärtigen Abschnitt soll nun der Einfluss von Verstimmungseffekten, d.h. für  $\Delta \neq 0$  (oder  $\delta = \Delta/(2g) \neq 0$ ), auf die Erzeugung von verschränkten Feldzuständen untersucht werden. Dies wird für das Einschnittverfahren in Abschnitt 3.2 explizit ausgeführt.

### 3.5.1 Erzeugung von Verschränkung in einem Schritt

Wird  $\Delta \neq 0$  berücksichtigt, lauten die Erwartungswerte in den Gln. (3.30, 3.31) für die Erzeugung der NOON-Zustände wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_N}^{(e)} \rangle &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \tilde{b}_{\frac{N}{2},\nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2},\nu}^* \left[ \cos\left(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1 + \delta^2}\right) + \frac{\delta \sin\left(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1 + \delta^2}\right)}{i \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1 + \delta^2}} \right] \right|^2 \\ &+ \left| \sum_{\nu=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \tilde{b}_{\frac{N-1}{2},\nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2},\nu+\frac{1}{2}}^* \frac{\sin\left(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2}\right)}{\sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2}} \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2}} \right|^2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_N}^{(g)} \rangle &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \tilde{b}_{\frac{N}{2},\nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2},\nu}^* \left[ \cos\left(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \delta^2}\right) + \frac{\delta \sin\left(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \delta^2}\right)}{i \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \delta^2}} \right] \right|^2 \\ &+ \left| \sum_{\nu=-(N+1)/2}^{(N+1)/2} \tilde{b}_{\frac{N+1}{2},\nu} \tilde{c}_{\frac{N}{2},\nu-\frac{1}{2}}^* \frac{\sin\left(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2}\right)}{\sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2}} \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + \frac{1}{2}} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Es treten gegenüber dem Resonanzfall einige Zusatzterme auf, die je nach Größe der Verstimmung  $\delta$  mehr oder weniger unterdrückt sind. Dabei erfahren sowohl die Amplitude als auch die Frequenz eine Veränderung gegenüber dem Resonanzfall.

Um Verstimmungs-Effekte, für realistische Bedingungen untersuchen zu können wird auf experimentelle Daten eines Mikromasers, wie er in den Veröffentlichungen [19, 20] beschrieben wird, zurückgegriffen. Dort wird das Zwei-Niveaus-System durch Rubidiumatome in Rydbergzuständen realisiert, wobei Übergänge zwischen den Hauptquantenzahlen 51 nach 50 mit der Übergangsfrequenz  $\Omega/2\pi = 50.099$  GHz verwendet werden. Das Atom koppelt mit der Kopplungskonstante  $\tilde{g}/2\pi = 25$  kHz an eine Mode

eines supraleitenden Resonator hoher Güte. Es kann eine große Verstimmung von bis zu 1 MHz zwischen Atom und Mode realisiert werden, indem ein externes elektrisches Feld an dem Resonator angelegt wird (Stark-Effekt Verstimmung). Für den Zwei-Moden-Fall werden die experimentellen Werte des Ein-Moden-Resonators übernommen. Um einen Wert für die effektive Kopplungskonstante

$$g = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2} \quad ,$$

im Zwei-Moden-Fall zu bekommen, wird angenommen, dass für einen Zwei-Moden-Resonator beide Moden jeweils mit  $\tilde{g}/2\pi = 25$  kHz zur effektiven Kopplungskonstante beitragen. Es ergibt sich also

$$g/2\pi = \sqrt{2} \text{ 25 kHz} \quad ,$$

für vorstehendes Beispiel.

Der Einfluss von Verstimmungs-Werten auf die Erzeugungswahrscheinlichkeit eines NOON-Zustandes wird an dem einfachen Spezialfall der Erzeugung von

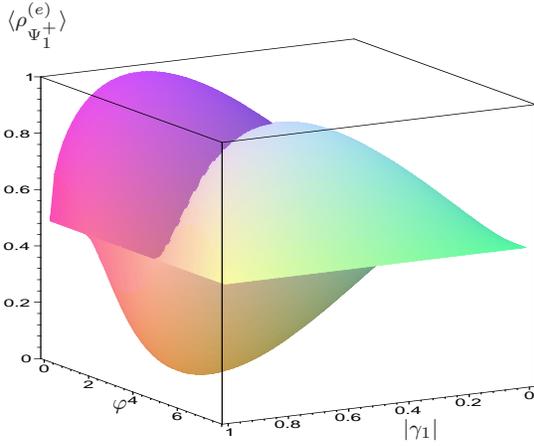
$$(|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle)/\sqrt{2}$$

aus dem Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$  untersucht. Der Erwartungswert mit Verstimmung ergibt sich für diesen Fall aus Gl. (3.60) zu

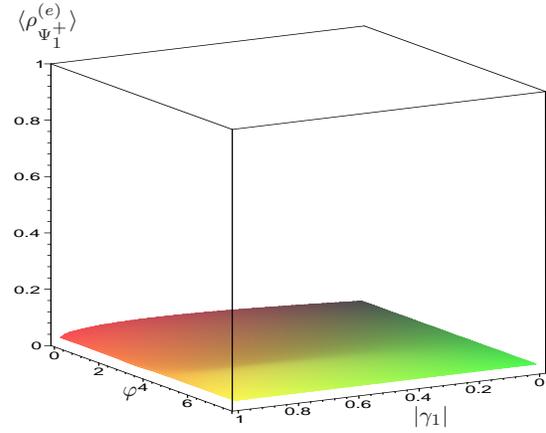
$$\begin{aligned} \langle \rho_{\Psi_1^\pm}^{(e)} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\tau\sqrt{1+\delta^2})}{1+\delta^2} [d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})^2} + d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})^2} \pm 2 \cos(\varphi) d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\tau\sqrt{1+\delta^2})}{1+\delta^2} \left[ 1 + 2 \cos(\varphi) \gamma_1 \sqrt{1-\gamma_1^2} \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.62)$$

In den Abbildungen 3.11 und 3.12 wird jeweils für eine Verstimmung von  $\Delta/2\pi = 10$  kHz sowie  $\Delta/2\pi = 100$  kHz der Spezialfall der Erzeugungswahrscheinlichkeit von  $|\Psi_1^\pm\rangle$  dargestellt (vgl. auch Abb. 3.11 mit Abb. 3.4). Es wird der Erwartungswert als Funktion von der relativen Phase und der Kopplungskonstante  $|\gamma_1|$  aufgetragen, wobei die Wechselwirkungszeit festgelegt wurde. In der Abb. 3.13 und Abb. 3.14 wird der Erwartungswert gegen die Wechselwirkungszeit und relative Phase aufgetragen, wobei die Kopplungskonstante festgelegt wurde. Die Abhängigkeit des Erwartungswertes von allen Parametern gleichzeitig lässt sich leider nicht mehr in einer dreidimensionalen Abbildung darstellen.

Es zeigt sich, dass für kleine Werte der Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz, der Erwartungswert praktisch unverändert bleibt. Eine größere Verstimmung von  $\Delta/2\pi = 100$

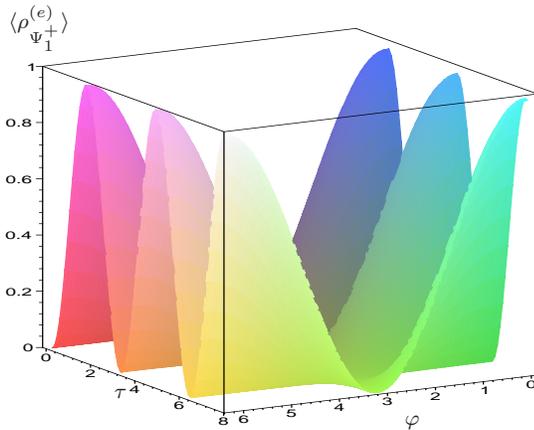


**Abb. 3.11:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 1\rangle)$  als Funktion der relativen Phase  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  und  $|\gamma_1|$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$ , Wechselwirkungszeit  $\tau = \pi/2$  und Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz.

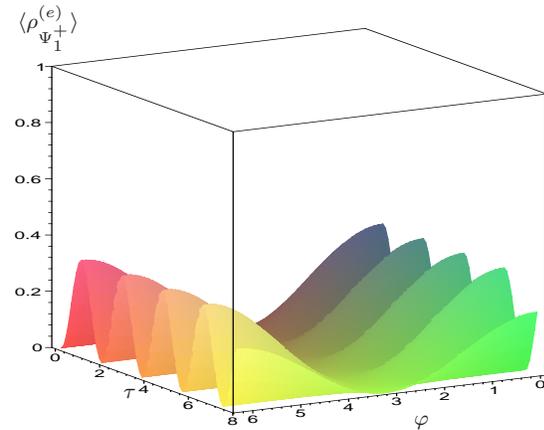


**Abb. 3.12:** Wie nebenstehend, jedoch mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz.

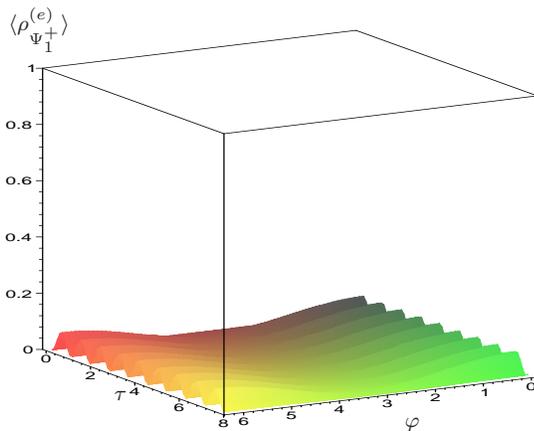
kHz wirkt sich jedoch deutlich sowohl auf die Amplitude, als auch auf die Frequenz der Erzeugungswahrscheinlichkeiten aus. In den Abbildungen 3.15 und 3.16 für  $\Delta/2\pi = 250$  kHz und  $\Delta/2\pi = 500$  kHz ist dieser Effekt deutlich zu sehen. Es ist daher für die Zwecke der Zustandserzeugung wichtig die Verstimmung kleiner als die Vakuum-Rabioszillationsfrequenz  $g$  einzustellen. Dies kann bei den aktuellen Mikromasern, wie sie von Haroche und Walther betrieben werden, erreicht werden. Andererseits kann eine gezielt eingestellte Verstimmung die Zeitentwicklung unterdrücken und erlaubt so ein Abschalten der Wechselwirkung, wenn der zu erzeugende Zustand erreicht ist. Dazu wird wie bei dem Mikromaser von Haroche [20] eine Verstimmung von  $\Delta/2\pi = 1$  MHz verwendet. Zur weiteren Diskussion von Verstimmungs-Effekten siehe auch Abschnitt 5.2.



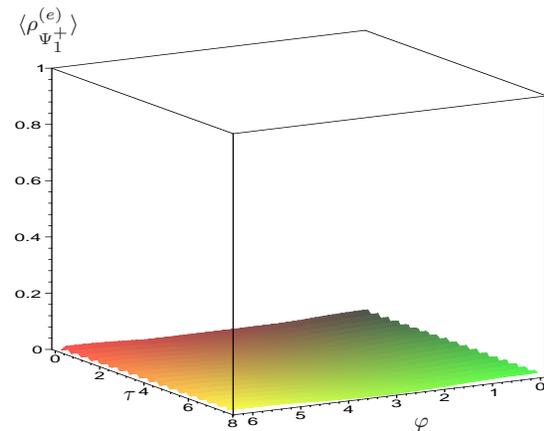
**Abb. 3.13:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,1\rangle)$  als Funktion der Wechselwirkungszeit und relativen Phase  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$ , Kopplungskonstante  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$  und Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz.



**Abb. 3.14:** Wie nebenstehend, jedoch mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz.



**Abb. 3.15:** Erzeugungswahrscheinlichkeit für  $|\Psi_1^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,1\rangle)$  als Funktion der Wechselwirkungszeit und relativen Phase  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Feste Parameter: Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle$ , Kopplungskonstante  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$  und Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz.



**Abb. 3.16:** Wie nebenstehend, jedoch mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz.

# 4. PHOTONENZAHL- VERTEILUNGSFUNKTIONEN IM ZWEI-MODEN-JCM

In diesem Kapitel wird die Felddynamik im Zwei-Moden-JCM untersucht. Dazu werden die zeitabhängigen Photonenzahl-Verteilungen  $P^{(a)}(n_1, n_2)$ ,  $a = e, g$ , für verschiedene Anfangszustände des Atom-Feld-Systems berechnet. Die zeitliche Entwicklung der Moden-Besetzungszahlen lässt sich so systematisch untersuchen. Außerdem wird untersucht wie sich die Gesamtphotonenzahl  $n^+ = n_1 + n_2$  sowie die Differenz  $n^- = n_1 - n_2$  zeitlich entwickelt. Ebenso werden die Randverteilungen  $P_j^{(a)}(n_j)$ ,  $a = e, g$ ,  $j = 1, 2$  untersucht. In konkreten Rechnungen werden diese Verteilungsfunktionen in der Schwingernotation angegeben, da sich dies aufgrund des bisherigen Lösungsverfahrens, das mittels des Schwingerformalismus erarbeitet wurde, anbietet.

## 4.1 Eigenschaften der Besetzungszahlverteilungen

Da normierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen berechnet werden, gelten die folgenden zum Teil offensichtlichen Eigenschaften:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P^{(a)}(n_1, n_2) = 1 \quad , \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} P_1^{(a)}(n_1) = 1 \quad , \quad \sum_{n_2=0}^{\infty} P_2^{(a)}(n_2) = 1 \quad , \quad (4.1)$$

wobei die Randverteilungen durch Summation über jeweils eine der Besetzungszahlen wie folgt definiert sind:

$$P_1^{(a)}(n_1) = \sum_{n_2=0}^{\infty} P^{(a)}(n_1, n_2) \quad , \quad P_2^{(a)}(n_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} P^{(a)}(n_1, n_2) \quad . \quad (4.2)$$

Die Verteilungsfunktionen für die Summen und Differenzen werden durch die folgenden Beziehungen definiert:

$$P_{+}^{(a)}(n^{+}) = \sum_{n_2=0}^{n^{+}} P^{(a)}(n^{+} - n_2, n_2) = \sum_{n_1=0}^{n^{+}} P^{(a)}(n_1, n^{+} - n_1) \quad , \quad (4.3)$$

$$P_{\geq}^{(a)}(n^{-} \geq 0) = \sum_{n_2=0}^{\infty} P^{(a)}(n^{-} + n_2, n_2) = \sum_{n_1=n^{-}}^{\infty} P^{(a)}(n_1, n_1 - n^{-}) \quad , \quad (4.4)$$

$$P_{<}^{(a)}(n^{-} < 0) = \sum_{n_2=-n^{-}}^{\infty} P^{(a)}(n^{-} + n_2, n_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} P^{(a)}(n_1, n_1 - n^{-}) \quad . \quad (4.5)$$

Des Weiteren gelten für die Summen- und Differenzverteilungen folgende Eigenschaften:

$$\sum_{n^{+}=0}^{\infty} P^{(a)}(n^{+}) = 1 \quad , \quad (4.6)$$

$$\sum_{n^{-}=0}^{\infty} P_{\geq}^{(a)}(n^{-}) + \sum_{n^{-}=-1}^{-\infty} P_{<}^{(a)}(n^{-}) = 1 \quad . \quad (4.7)$$

#### 4.1.1 Besetzungszahlverteilungen in der Schwingernotation

Die zeitabhängigen Photonenzahl-Verteilungsfunktionen  $P^{(a)}(n_1, n_2)$ ,  $a = e, g$ , lassen sich aus den Erwartungswerten

$$\begin{aligned} P^{(a)}(n_1, n_2) &= \text{tr} \left[ \rho_{\text{F}}^{(a)} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| \right] = \langle n_1, n_2 | \rho_{\text{F}}^{(a)} |n_1, n_2\rangle \\ &= \text{s} \langle j, m | \rho_{\text{F}}^{(a)} |j, m\rangle_{\text{S}} = P_{\text{S}}^{(a)}(j, m) \quad , \end{aligned} \quad (4.8)$$

gewinnen. Für die Berechnung im Schwingerformalismus wird die Verteilungsfunktion mit einem Index S versehen. Die Verteilungsfunktionen in der Schwingernotation sind dann durch

$$P_{\text{S}}^{(a)}(j, m) = \text{tr} \left[ \rho_{\text{F}}^{(a)} |j, m\rangle \langle j, m| \right] \quad , \quad (4.9)$$

berechenbar. Diese lassen sich aus Gl. (4.8) durch die Ersetzungen  $n_1 = j + m$  und  $n_2 = j - m$  gewinnen, wobei selbstverständlich auch die reduzierten Dichtematrizen  $\rho_{\text{F}}^{(a)}$  in der Schwingernotation zu nehmen sind. Dabei kann auf die reduzierten Dichtematrizen  $\rho_{\text{F}}^{(a)}$  in den Gln. (3.27, 3.28) zurückgegriffen werden, die für einen beliebigen reinen

Feld-Anfangszustand  $|\xi\rangle\rangle$  berechnet wurden. Es ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
P_S^{(e)}(j, m) &= \left| \sum_{\nu=-j}^j \tilde{b}_{j,\nu} D_{m,\nu}^{(j)} \cos(\tau \sqrt{j+\nu+1}) \right|^2 \\
&\quad + \left| \sum_{\nu=-j+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} \tilde{b}_{j-\frac{1}{2},\nu} D_{m,\nu+\frac{1}{2}}^{(j)} \sin(\tau \sqrt{j+\nu+\frac{1}{2}}) \right|^2, \\
P_S^{(g)}(j, m) &= \left| \sum_{\nu=-j}^j \tilde{b}_{j,\nu} D_{m,\nu}^{(j)} \cos(\tau \sqrt{j+\nu}) \right|^2 \\
&\quad + \left| \sum_{\nu=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{j+\frac{1}{2},\nu} D_{m,\nu-\frac{1}{2}}^{(j)} \sin(\tau \sqrt{j+\nu+\frac{1}{2}}) \right|^2, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten des Quasi-Moden-Anfangszustandes  $|\xi\rangle\rangle$  mit den Moden-Entwicklungskoeffizienten durch

$$\tilde{b}_{j,\nu} := \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} D_{m,\nu}^{(j)*} = \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} D_{\nu,m}^{(j)\dagger}, \tag{4.11}$$

verbunden sind.

Aus Gl. (4.10) lassen sich die Verteilungsfunktionen für die Summe  $n^+ = n_1 + n_2$  und die Differenz  $n^- = n_1 - n_2$  sowie die Randverteilungen  $P_1^{(a)}(n_1), P_2^{(a)}(n_2)$  leicht berechnen:

$$P_+^{(a)}(n^+) = \sum_{m=-n^+/2}^{n^+/2} P_S^{(a)}\left(\frac{n^+}{2}, m\right), \tag{4.12}$$

$$P_-^{(a)}(n^- \geq 0) = \sum_{j=n^-/2}^{\infty} P_S^{(a)}\left(j, \frac{n^-}{2}\right) = P_-^{(a)}(|n^-| \geq 0) = \sum_{j=|n^-|/2}^{\infty} P_S^{(a)}\left(j, \frac{|n^-|}{2}\right), \tag{4.13}$$

$$P_-^{(a)}(n^- < 0) = \sum_{j=-n^-/2}^{\infty} P_S^{(a)}\left(j, \frac{n^-}{2}\right) = P_-^{(a)}(-|n^-| < 0) = \sum_{j=|n^-|/2}^{\infty} P_S^{(a)}\left(j, \frac{-|n^-|}{2}\right), \tag{4.14}$$

$$P_1^{(a)}(n_1) = \sum_{j=n_1/2}^{\infty} P_S^{(a)}(j, n_1 - j), \quad P_2^{(a)}(n_2) = \sum_{j=n_2/2}^{\infty} P_S^{(a)}(j, j - n_2). \tag{4.15}$$

Um in den Gleichungen explizite Ergebnisse zu erhalten, muss Gl. (4.10) mit den entsprechenden Werten für  $j, m$  in die Gln. (4.12, 4.13, 4.15) eingesetzt werden. Im nächsten Abschnitt werden die Besetzungszahlverteilungen für spezielle Anfangszustände explizit angegeben und zum Teil illustriert.

### 4.1.2 Besetzungszahlverteilungen für spezielle Anfangszustände

Die Besetzungszahlverteilungen für die Anfangszustände

$$\begin{aligned} |a; N, 0\rangle &= |a; N/2, N/2\rangle_S \quad , \\ |a; 0, N\rangle &= |a; N/2, -N/2\rangle_S \quad , \quad a = e, g \quad , \end{aligned}$$

führen zum Teil auf sehr übersichtliche Ergebnisse, was deren Interpretation erleichtert. Die Ergebnisse sollen insbesondere für einige konkrete Besetzungszahlen  $N$  graphisch veranschaulicht werden.

Zuerst werden die Summenzahlverteilungen  $P_+^{(a)}(n^+)$  für obige Anfangszustände angegeben. Um den speziellen Anfangsbedingungen für das Feld Rechnung zu tragen, müssen in Gl. (4.12) die Entwicklungskoeffizienten entsprechend

$$|a; N/2, \pm N/2\rangle_S = \begin{cases} |a; N, 0\rangle, & \tilde{b}_{\frac{N}{2}, \nu} = D_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})^*} = e^{i(\frac{N}{2}\varphi + \nu\chi)} d_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} \\ |a; 0, N\rangle, & \tilde{b}_{\frac{N}{2}, \nu} = D_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})^*} = e^{i(-\frac{N}{2}\varphi + \nu\chi)} d_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} \end{cases}, \quad a = e, g \quad , \quad (4.16)$$

gesetzt werden. Da in den Ergebnissen jeweils ein Produkt aus einer komplex konjugierten und einer nicht konjugierten Wignerfunktion auftritt, wobei der zweite Index der Funktionen auf die Werte  $\nu$  oder  $\nu \pm 1/2$  eingeschränkt ist, fällt offensichtlich die  $\nu$ -Abhängigkeit der Phasen im Produkt der Wignerfunktionen weg. Folglich hängen die Phasenterme nur noch von der Konstante  $N$  ab. Somit ist die Phase unabhängig vom Summationsindex und wird im Modulquadrat absorbiert. Es können also bei allen konkreten Rechnungen zu den Photonenzahlverteilungen die „großen“ Wigner'schen D-Funktionen durch die „kleinen“ Wigner'schen d-Funktionen ersetzt werden. Dies liegt daran, dass hier die zeitabhängigen Besetzungszahlverteilungen von Fockzuständen untersucht werden, deren Phase nicht definiert ist, da die Besetzungszahl festliegt.

Es ergeben sich dann folgende Ergebnisse für die Anfangszustände  $|e; N/2, \pm N/2\rangle_S$

$$P_+^{(e)}(n^+ = N) = \sum_{\nu=-N/2}^{\frac{N}{2}} |d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})}|^2 \cos^2(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \quad , \quad (4.17)$$

$$P_+^{(e)}(n^+ = N + 1) = \sum_{\nu=-N/2}^{\frac{N}{2}} |d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})}|^2 \sin^2(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \quad (4.18)$$

sowie für die Anfangszustände  $|g; N/2, \pm N/2\rangle_S$

$$P_+^{(g)}(n^+ = N) = \sum_{\nu=-N/2}^{\frac{N}{2}} |d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})}|^2 \cos^2(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \quad , \quad (4.19)$$

$$P_+^{(g)}(n^+ = N - 1) = \sum_{\nu=-N/2}^{\frac{N}{2}} |d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})}|^2 \sin^2(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \quad . \quad (4.20)$$

Die Besetzungszahlverteilungen für die Differenz  $n^- = n_1 - n_2$  lauten für die Anfangszustände aus Gl. (4.16) wie nachstehend. Dabei ist zu beachten, dass die Ergebnisse einer Fallunterscheidung unterliegen und zwar je nachdem, ob der Zustand  $|a; N/2, \pm N/2\rangle$  halb oder ganzzahliges  $N/2$  aufweist.

Für den Anfangszustand  $|e; N/2, N/2\rangle_S$ ,  $N/2$  halbzahlig und  $N \geq 1$  erhält man:

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k, \nu + \frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N+1}{2},$$

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k, \nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N}{2}.$$

Für den Anfangszustand  $|e; N/2, -N/2\rangle_S$  ergibt sich:

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k, \nu + \frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N+1}{2},$$

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k, \nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N}{2}.$$

(4.21)

Ist  $N/2$  hingegen ganzzahlig, so ergeben sich für den Anfangszustand  $|e; N/2, N/2\rangle_S$  die folgenden Ergebnisse:

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k, \nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2},$$

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k, \nu + \frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N+1}{2}.$$

(4.22)

Schließlich ergeben sich dann für den Anfangszustand  $|e; N/2, -N/2\rangle_S$  die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k,\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \\
P_-^{(e)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k,\nu+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N+1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Es fällt auf, dass bei den Fällen für halb- und ganzzahliges  $N/2$ , die Rolle der Sinus- und Kosinusfunktion vertauscht wird.

Abschließend werden noch die jeweiligen Ergebnisse für die vorstehenden Fälle, wobei sich das Atom zu Beginn der Wechselwirkung im Grundzustand befinden soll, angegeben. Für den Anfangszustand  $|g; N/2, N/2\rangle_S$ ,  $N/2$  halbzahlig, erhält man so dann:

$$\begin{aligned}
P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k,\nu-\frac{1}{2}}^{(\frac{N-1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \\
P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k,\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N}{2}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Für den Anfangszustand  $|g; N/2, -N/2\rangle_S$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k,\nu-\frac{1}{2}}^{(\frac{N-1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \\
P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\pm k,\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N}{2}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Der Fall in dem  $N/2$  ganzzahlig wird, führt für den Anfangszustand  $|g; N/2, N/2\rangle_S$  auf

$$\begin{aligned}
 P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm k, \nu}^{(N/2)} d_{\pm k, \nu}^{(N/2)} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \\
 P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm k, \nu}^{(N/2)} d_{\pm k, \nu - \frac{1}{2}}^{(N-1)} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

sowie für den Anfangszustand  $|g; N/2, -N/2\rangle_S$  auf

$$\begin{aligned}
 P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} d_{\pm k, \nu}^{(N/2)} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \\
 P_-^{(g)}(n^- = \pm 2k) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} d_{\pm k, \nu - \frac{1}{2}}^{(N-1)} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Schließlich werden die Randverteilungen  $P_1^{(a)}(n_1)$  und  $P_2^{(a)}(n_2)$  angegeben. Die Anfangszustände  $|e; N/2, \pm N/2\rangle_S$  führen auf die Randverteilung für  $n_1$ :

$$\begin{aligned}
 P_1^{(e)}(n_1) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} d_{n_1 - \frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2 \\
 &+ \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} d_{n_1 - \frac{N+1}{2}, \nu + \frac{1}{2}}^{(N+1)} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die Randverteilung für  $n_2$  lautet:

$$\begin{aligned}
 P_2^{(e)}(n_2) &= \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} d_{\frac{N}{2} - n_2, \nu}^{(N/2)} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2 \\
 &+ \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(N/2)} d_{\frac{N+1}{2} - n_2, \nu + \frac{1}{2}}^{(N+1)} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Befindet sich das Atom im Grundzustand, d.h. als Atom-Feld-Anfangszustand soll

$|g; N/2, \pm N/2\rangle_S$  betrachtet werden, so ergibt sich für die Verteilungsfunktion von  $n_1$

$$P_1^{(g)}(n_1) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{n_1 - \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 + \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{n_1 - \frac{N-1}{2}, \nu - \frac{1}{2}}^{(\frac{N-1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 \quad (4.30)$$

und für die Verteilungsfunktion von  $n_2$

$$P_2^{(g)}(n_2) = \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\frac{N}{2} - n_2, \nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 + \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} d_{\pm \frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} d_{\frac{N-1}{2} - n_2, \nu - \frac{1}{2}}^{(\frac{N-1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 . \quad (4.31)$$

In den vorstehenden Ergebnissen zu den Randverteilungen von  $n_1$  und  $n_2$  gilt das bereits gesagte zur Phasenabhängigkeit ebenso. Die Ergebnisse sind unabhängig von der relativen Phase beider Moden. Es können hier sowie in allen nachstehenden Verteilungsfunktionen die reellen phasenunabhängigen „kleinen“ Wigner'schen d-Funktionen verwendet werden.

Ein weiterer interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn sich in dem Resonator zu Beginn bereits ein verschränkter  $N$ -Photonen-Feldzustand befindet. Dieser kann z.B. als Endzustand der bisher vorgestellten Erzeugungsschemata auftreten. Tritt nun ein weiteres Atom im Grund- oder angeregten Zustand in den Resonator ein, so wird die Frage aufgeworfen, wie sich das Feldsystem zeitlich unter der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung entwickelt. Um eine Antwort auf diese Fragestellung geben zu können, werden die Randverteilungen  $P_1^{(a)}(n_1)$  sowie  $P_2^{(a)}(n_2)$  für die Anfangszustände

$$|a; \Psi_N^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a; N, 0\rangle \pm |a; 0, N\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle_S \pm |a; \frac{N}{2}, -\frac{N}{2}\rangle_S) \quad ,$$

untersucht. Dazu müssen in den allgemeinen Ausdrücken in Gl. (4.10) die Entwicklungskoeffizienten für die Feldzustände, wie folgt gesetzt werden:

$$\tilde{b}_{\frac{N}{2}, \nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( D_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2}) *} \pm D_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2}) *} \right) .$$

Die Ergebnisse lauten dann in Analogie zu den vorstehend bereits angegebenen Verteilungsfunktionen wie nachstehend aufgeführt. Tritt das Atom zu Beginn der Wechselwirkung im angeregten Zustand in den Resonator, so ergibt sich für die Verteilung

von  $n_1$

$$\begin{aligned}
P_1^{(e)}(n_1) &= \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{n_1-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{n_1-\frac{N+1}{2},\nu+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

sowie für die Verteilung von  $n_2$

$$\begin{aligned}
P_2^{(e)}(n_2) &= \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{\frac{N}{2}-n_2,\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{\frac{N+1}{2}-n_2,\nu+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu + 1}) \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Tritt das Atom im Grundzustand ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
P_1^{(g)}(n_1) &= \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{n_1-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{n_1-\frac{N-1}{2},\nu-\frac{1}{2}}^{(\frac{N-1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

und für die Verteilungsfunktion von  $n_2$

$$\begin{aligned}
P_2^{(g)}(n_2) &= \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{\frac{N}{2}-n_2,\nu}^{(\frac{N}{2})} \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \left( d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \right) d_{\frac{N-1}{2}-n_2,\nu-\frac{1}{2}}^{(\frac{N-1}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + \nu}) \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Für die Summenzahlverteilung erhält man die Ausdrücke, wenn die Wignerfunktionen  $d_{\pm\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})}$  in den Formeln in Gln. (4.17, 4.18, 4.19, 4.20) durch  $d_{\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2},\nu}^{(\frac{N}{2})}$  ersetzt

werden. Für die Differenzanzahlverteilungen lassen sich aus den bereits gewonnenen Ergebnissen für die Anfangszustände  $|a; N/2, N/2\rangle_S$ , diejenigen für die NOON-Zustände gewinnen, wenn wiederum die entsprechenden Wignerfunktionen durch  $d_{\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})} \pm d_{-\frac{N}{2}, \nu}^{(\frac{N}{2})}$  in den Gln. (4.21, 4.21, 4.22, 4.23) ersetzt werden.

Um die Ergebnisse weiter zu konkretisieren wird der Fall  $|e; 1/2, \pm 1/2\rangle_S$  als Anfangszustand für das Atom-Feldsystem untersucht. In diesem Fall, der durch die Gesamtphotonenzahl  $N = 1$  charakterisiert ist, kann die Summenzahlverteilung nur zwei Werte annehmen  $n^+ = 1$  und  $n^+ = 2$ , wobei sich dann die folgenden expliziten Resultate ergeben:

$$P_+^{(e)}(n^+ = 1) = \begin{cases} |\gamma_2|^2 \cos^2(\tau) + |\gamma_1|^2 \cos^2(\tau\sqrt{2}), & |e; 1/2, 1/2\rangle_S \\ |\gamma_1|^2 \cos^2(\tau) + |\gamma_2|^2 \cos^2(\tau\sqrt{2}), & |e; 1/2, -1/2\rangle_S \end{cases}, \quad (4.36)$$

und

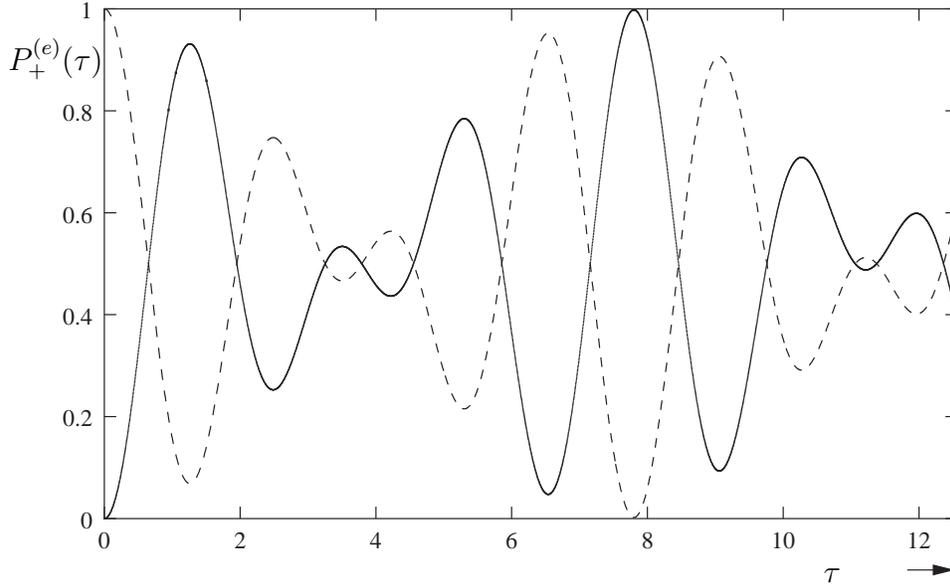
$$P_+^{(e)}(n^+ = 2) = \begin{cases} |\gamma_2|^2 \sin^2(\tau) + |\gamma_1|^2 \sin^2(\tau\sqrt{2}), & |e; 1/2, 1/2\rangle_S \\ |\gamma_1|^2 \sin^2(\tau) + |\gamma_2|^2 \sin^2(\tau\sqrt{2}), & |e; 1/2, -1/2\rangle_S \end{cases}. \quad (4.37)$$

An diesem Spezialfall lässt sich leicht nachrechnen, dass sich für jeden Anfangszustand

$$P_+^{(e)}(n^+ = 1) + P_+^{(e)}(n^+ = 2) = 1$$

ergibt, wobei die Eigenschaft  $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = 1$  eingesetzt wurde. Die beiden Verteilungen oszillieren um  $90^\circ$  phasenverschoben zwischen 0 und 1, Abb. 4.1. Da der Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle = |e; 1/2, 1/2\rangle_S$  angenommen wurde besitzt die Mode anfänglich nur eine Anregung. Deshalb beginnt die Verteilungsfunktion  $P_+^{(e)}(n^+ = 1)$  bei dem Wert 1 und fällt dann ab. Geht das Atom durch die JCM-Wechselwirkung in den Grundzustand über, so muss ein Photon in eine der beiden Moden abgegeben worden sein, deshalb ergibt sich eine ansteigende Wahrscheinlichkeit 2 Photonen in den Moden zu finden. Daher steigt die Wahrscheinlichkeit für  $P_+^{(e)}(n^+ = 2)$ , von  $\tau = 0$  beginnend, an. Diese beiden konkurrierenden Prozesse laufen periodisch mit den beiden überlagerten Frequenzen  $g$  und  $g\sqrt{2}$  ab. Die Abb.4.2 und Abb.4.3 zeigen die Verteilungsfunktionen für die Summenanzahl nochmals für den Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , allerdings als Funktion von  $\tau$  und  $|\gamma_1|$ .

Die Differenzverteilung für den Spezialfall  $|e; 1/2, 1/2\rangle_S$  wird nachfolgend angegeben. Dabei treten die folgenden Terme auf:  $P_-^{(e)}(n^- = 0)$ ,  $P_-^{(e)}(n^- = \pm 1)$  und



**Abb. 4.1:** Abbildung der Summenzahlverteilungen  $P_+^{(e)}(n^+ = 1)$  (gestrichelt) und  $P_+^{(e)}(n^+ = 2)$  (durchgezogen) für den Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion von  $\tau$ , wobei  $g_1 = g_2$  gewählt wurde.

$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2)$ . Die zeitabhängigen Verteilungsfunktionen lauten:

$$P_-^{(e)}(n^- = 0) = \left| d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{0,0}^{(1)} \sin(\tau) + d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{0,1}^{(1)} \sin(\tau\sqrt{2}) \right|^2, \quad (4.38)$$

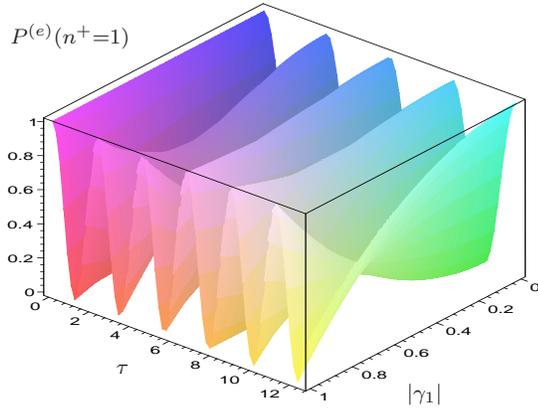
$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 1) = \begin{cases} \left| (d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})})^2 \cos(\tau) + (d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})})^2 \cos(\tau\sqrt{2}) \right|^2 \\ \left| d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \cos(\tau) + d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \cos(\tau\sqrt{2}) \right|^2 \end{cases}, \quad (4.39)$$

$$P_-^{(e)}(n^- = \pm 2) = \begin{cases} \left| d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{1,0}^{(1)} \sin(\tau) + d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{1,1}^{(1)} \sin(\tau\sqrt{2}) \right|^2 \\ \left| d_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{-1,0}^{(1)} \sin(\tau) + d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} d_{-1,1}^{(1)} \sin(\tau\sqrt{2}) \right|^2 \end{cases}. \quad (4.40)$$

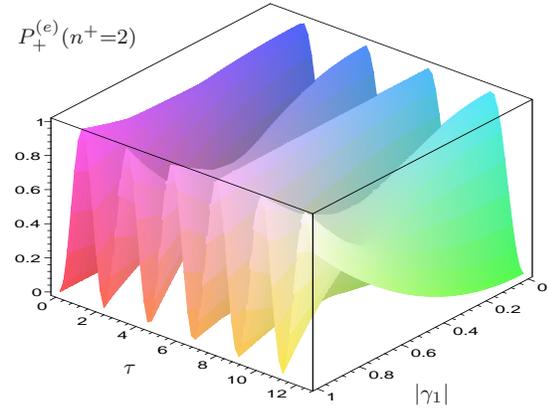
In den Abbildungen 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 und 4.8 werden die Differenzanzahl-Verteilungsfunktionen als Funktion der Wechselwirkungszeit und der Kopplung illustriert.

Da der Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$  zur Zeit  $\tau = 0$ ,  $n_1 = 1$  Photonen in Mode 1 und  $n_2 = 0$  Photonen in Mode 2 besitzt, muss die Verteilungsfunktion für  $n^- = n_1 - n_2 = 1$ , wie in Abb. 4.5 mit der Wahrscheinlichkeit 1 für  $\tau = 0$  beginnen. Alle anderen Differenzverteilungen haben hingegen bei  $\tau = 0$  ein Minimum. Schreitet die Wechselwirkung voran, so entstehen periodisch Wahrscheinlichkeiten auch die anderen Differenzen  $n^- = 0, \pm 1, \pm 2$  zu erreichen. Für diesen Spezialfall läßt sich leicht zeigen, dass sich

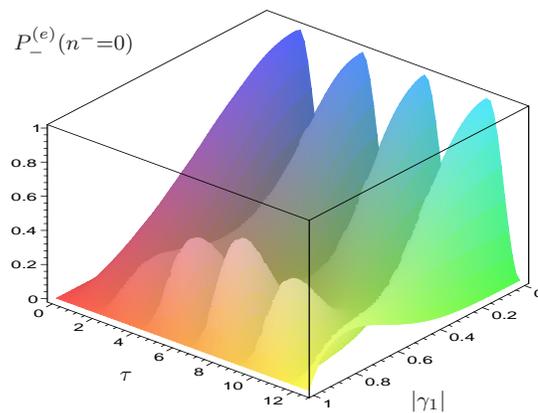
$$P_-^{(e)}(n^- = 0) + P_-^{(e)}(n^- = 1) + P_-^{(e)}(n^- = -1) + P_-^{(e)}(n^- = 2) + P_-^{(e)}(n^- = -2) = 1$$



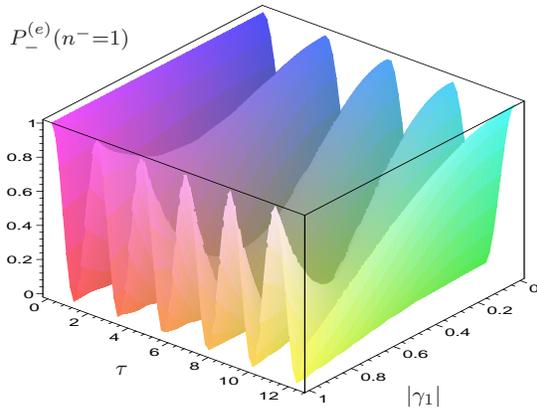
**Abb. 4.2:** Verteilungsfunktion für die Summenanzahl  $P_+^{(e)}(n^+ = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



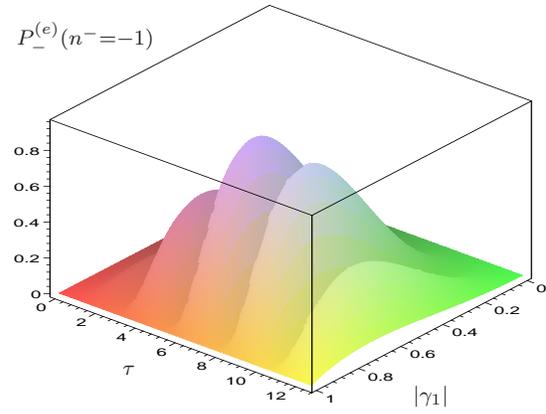
**Abb. 4.3:** Verteilungsfunktion für die Summenanzahl  $P_+^{(e)}(n^+ = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



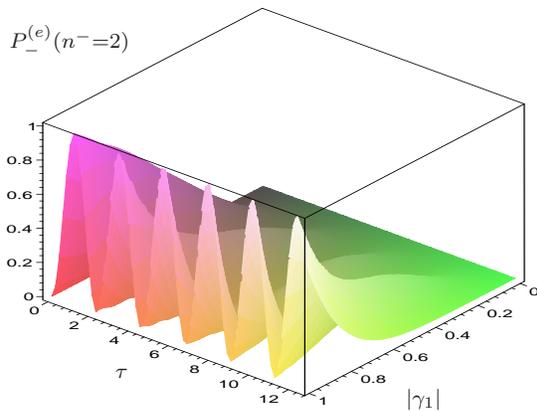
**Abb. 4.4:** Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl  $P_-^{(e)}(n^- = 0)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



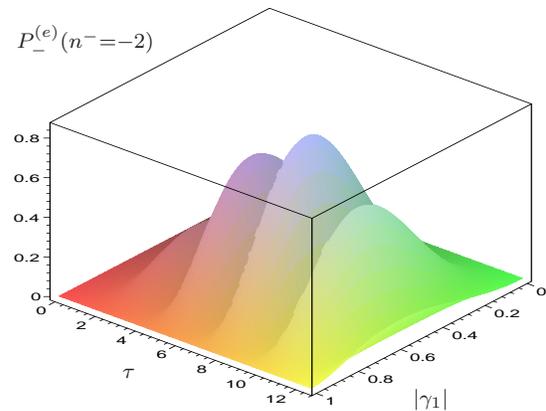
**Abb. 4.5:** Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl  $P_-^{(e)}(n^- = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 4.6:** Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl  $P_-^{(e)}(n^- = -1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



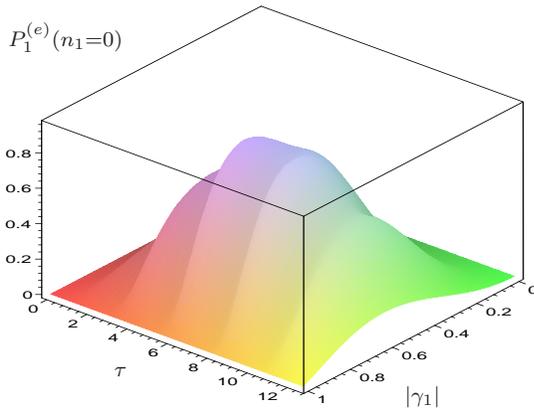
**Abb. 4.7:** Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl  $P_-^{(e)}(n^- = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



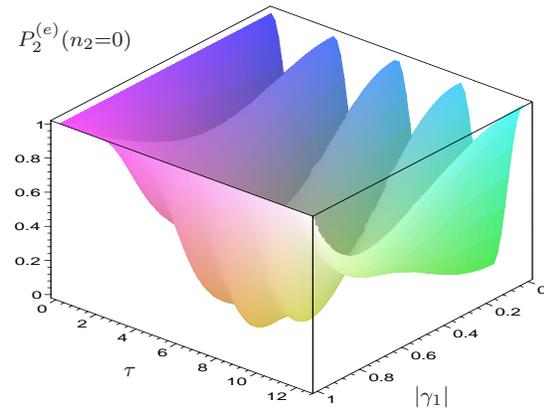
**Abb. 4.8:** Verteilungsfunktion für die Differenzanzahl  $P_-^{(e)}(n^- = -2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

ergibt.

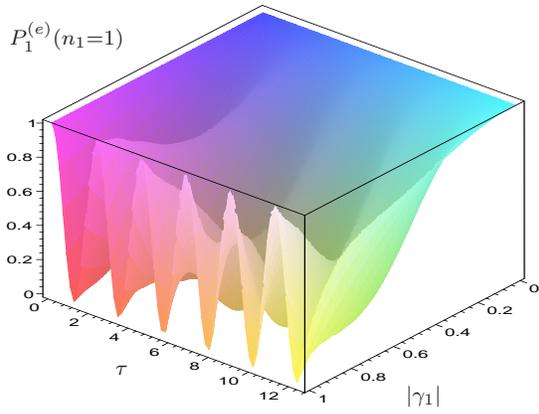
Als weiteren Spezialfall werden noch die Randverteilungen  $P_j^{(e)}(n_j)$ ,  $j = 1, 2$  angegeben. Für den Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$  findet man die Terme  $P_j^{(e)}(n_j = 0)$ ,  $P_j^{(e)}(n_j = 1)$ ,  $P_j^{(e)}(n_j = 2)$ , die sich wiederum für jedes  $j$  separat zu eins aufsummieren. Die Ergebnisse für diesen Spezialfall werden in den folgenden Abbildungen 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 und 4.14 illustriert.



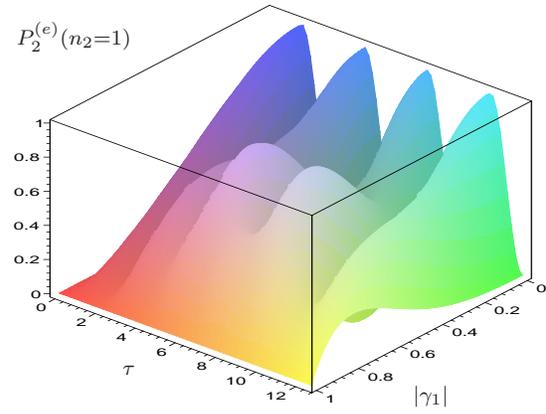
**Abb. 4.9:** Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl  $P_1^{(e)}(n_1 = 0)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



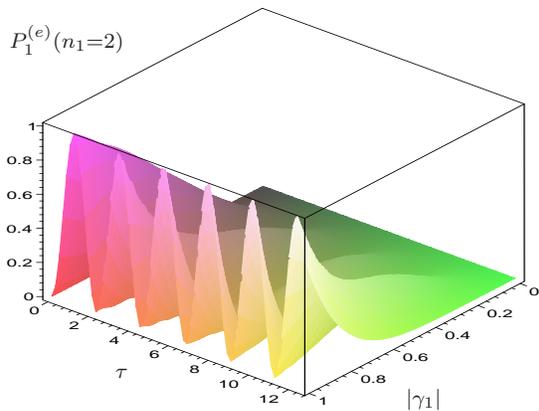
**Abb. 4.10:** Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl  $P_2^{(e)}(n_2 = 0)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



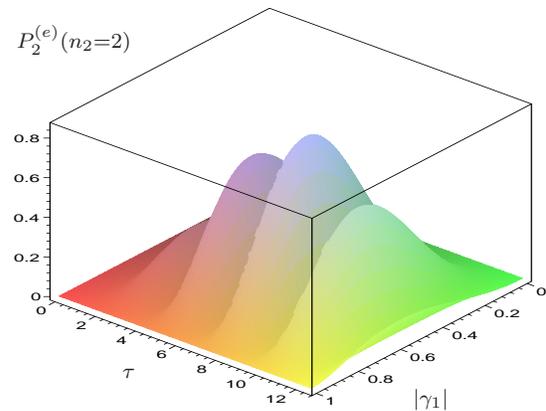
**Abb. 4.11:** Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl  $P_1^{(e)}(n_1 = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 4.12:** Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl  $P_2^{(e)}(n_2 = 1)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 4.13:** Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl  $P_1^{(e)}(n_1 = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 4.14:** Verteilungsfunktion für die Besetzungszahl  $P_2^{(e)}(n_2 = 2)$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

## 4.2 Einfluss von Verstimmung $\Delta \neq 0$

Als Ausgangspunkt für die Diskussion von Verstimmung, dienen die Besetzungszahlverteilungen in der Schwingernotation für den Fall  $\Delta \neq 0$ . Diese gewinnt man wiederum leicht aus den Erwartungswerten in Gl. (3.60), (3.61) als Spezialfall. Es ergeben sich

$$\begin{aligned}
P_S^{(e)}(j, m) &= \left| \sum_{\nu=-j}^j \tilde{b}_{j,\nu} D_{m,\nu}^{(j)} \left[ \cos(\tau \sqrt{j + \nu + 1 + \delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau \sqrt{j + \nu + 1 + \delta^2})}{i \sqrt{j + \nu + 1 + \delta^2}} \right] \right|^2 \\
&\quad + \left| \sum_{\nu=-j+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} \tilde{b}_{j-\frac{1}{2},\nu} D_{m,\nu+\frac{1}{2}}^{(j)} \frac{\sin(\tau \sqrt{j + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2})}{\sqrt{j + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2}} \sqrt{j + \nu + \frac{1}{2}} \right|^2, \\
P_S^{(g)}(j, m) &= \left| \sum_{\nu=-j}^j \tilde{b}_{j,\nu} D_{m,\nu}^{(j)} \left[ \cos(\tau \sqrt{j + \nu + \delta^2}) + \frac{\delta \sin(\tau \sqrt{j + \nu + \delta^2})}{i \sqrt{j + \nu + \delta^2}} \right] \right|^2 \\
&\quad + \left| \sum_{\nu=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{j+\frac{1}{2},\nu} D_{m,\nu-\frac{1}{2}}^{(j)} \frac{\sin(\tau \sqrt{j + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2})}{\sqrt{j + \nu + \frac{1}{2} + \delta^2}} \sqrt{j + \nu + \frac{1}{2}} \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Im Kap. 3 wurde bereits der Einfluss der Verstimmung auf das Einschrittverfahren untersucht. Dabei zeigte sich, dass sowohl die Amplitude als auch die Frequenz der Erwartungswerte Änderungen erfahren. Da es sich bei den vorstehenden Photonenzahl-Verteilungsfunktionen um Ergebnisse handelt, die als Spezialfälle in den Erwartungswerten enthalten sind, führt der Einfluss von Verstimmung auf die Photonenzahl-Verteilungen zu ähnlichen Ergebnissen.

Der Einfluss von Verstimmung im Zusammenhang mit der Verschränkung von Atom und Feld wird in dem folgenden Kapitel eingehender untersucht.

# 5. ERZEUGUNG VON VERSCHRÄNKUNG ZWISCHEN ATOM UND MODEN

Bereits im Ein-Moden-JCM kann Verschränkung beobachtet werden. Dabei zeigt sich, dass die Atome durch die Wechselwirkung mit der Mode einen verschränkten Zustand ausbilden können [65]. Dies lässt sich auch im Zwei-Moden-JCM finden, wobei sich allerdings ein komplexeres Zeitverhalten ergibt.

## 5.1 Verschränkung für kohärente Anfangszustände

In diesem Abschnitt wird zunächst die Zeitentwicklung eines allgemeinen Atom-Feld Anfangszustandes unter der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung berechnet. Um die Resultate mit dem Ein-Moden-Fall in der Veröffentlichung von Gea-Banacloche [65] besser vergleichen zu können, werden die Ergebnisse auf spezielle Atom-Feld-Anfangszustände eingeschränkt und ausführlicher diskutiert.

Die Zeitentwicklung für ein Atom im kohärenten Anfangszustand

$$|\Psi_{\text{Atom}}(0)\rangle = \alpha|e\rangle + \beta|g\rangle \quad (5.1)$$

( $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ) und das Zwei-Moden-Feld in dem Zustand

$$|\Psi_{\text{F}}(0)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} |j, m\rangle \quad , \quad (5.2)$$

kann im Quasi-Moden-Bild berechnet werden. Der ungekoppelte Produktzustand aus Atom und Feld zur Zeit  $t = 0$  ist dann gegeben durch  $|\Psi_{\text{Atom}}(0)\rangle|\Psi_{\text{Feld}}(0)\rangle$  und unter-

liegt im Wechselwirkungsbild der Zeitentwicklung

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left\{ \left[ \alpha \tilde{b}_{j,m} \cos(\tau \sqrt{j+m+1}) \right. \right. \\
& \left. \left. - i \beta \tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \sin(\tau \sqrt{j+m+1}) \right] |e; j, m\rangle \right. \\
& \left. + \left[ -i \alpha \tilde{b}_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \sin(\tau \sqrt{j+m}) + \beta \tilde{b}_{j,m} \cos(\tau \sqrt{j+m}) \right] |g; j, m\rangle \right\} .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Hierbei handelt es sich um einen verschränkten Zustand zwischen den Atomfreiheitsgraden und den zwei Moden. Dies lässt sich besser erkennen, wenn ein Spezialfall wie z.B.  $\alpha = 0, \beta = 1$  betrachtet wird. Der Zustand in Gl. (5.3) reduziert sich dann auf

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left[ \tilde{b}_{j,m} \cos(\tau \sqrt{j+m}) |g; j, m\rangle \right. \\
& \left. - i \tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \sin(\tau \sqrt{j+m+1}) |e; j, m\rangle \right] .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Um die Verschränkung zwischen Atom- und Feld-Freiheitsgraden augenfälliger werden zu lassen wird der Summationsindex für den zweiten Term auf der rechten Seite in Gl. (5.4) geändert und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} \cos(\tau \sqrt{j+m}) |g; j, m\rangle \\
& - i \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} \sin(\tau \sqrt{j+m}) |e; j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

In Gl. (5.5) werden also Zustände der Form

$$a |g; j, m\rangle + b |e; j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle , \tag{5.6}$$

mit entsprechenden Koeffizienten  $a$  und  $b$  überlagert. Dabei wird deutlich, dass bei einer Messung des Atoms im Zustand  $|g\rangle$ , das Feld in einer Überlagerung der Zustände  $|j, m\rangle$  sein muss. Liefert eine Messung des Atoms hingegen den Zustand  $|e\rangle$ , so wird sich das Zwei-Moden-Feld in einer Überlagerung der Zustände  $|j - 1/2, m - 1/2\rangle$  befinden. Der Zustand in Gl. (5.3) ist also aus Überlagerungen von verschränkten Zuständen aufgebaut und deshalb offensichtlich selbst ein verschränkter Zustand.

In dem Artikel [65] wird als Feld-Anfangszustand ein kohärenter Ein-Moden-Zustand angesetzt. Um Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu erzielen, sei hier ebenfalls zur

Zeit  $t = 0$  Mode 1 in einem kohärenten Zustand und Mode 2 im Vakuum. Der Anfangszustand lautet dann

$$|\Psi_{\text{Feld}}(0)\rangle = |\eta, 0\rangle = e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{\eta^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} |n_1, 0\rangle \quad . \quad (5.7)$$

Um die Quasi-Moden-Entwicklungskoeffizienten  $\tilde{b}_{j,m}$  in Gl. (5.3) zu bestimmen, wird Gl. (5.7) in das Quasi-Moden-Bild transformiert:

$$|\eta, 0\rangle = e^{-|\eta|^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{\eta^{2j}}{\sqrt{(2j)!}} D_{j,m}^{(j)*} |j, m\rangle \quad . \quad (5.8)$$

Die Entwicklungskoeffizienten in Gl. (5.3) sind dann bestimmt durch

$$\tilde{b}_{j,m} = e^{-|\eta|^2/2} \frac{\eta^{2j}}{\sqrt{(2j)!}} D_{j,m}^{(j)*} \quad . \quad (5.9)$$

Wie bereits erwähnt, haben die Teilsysteme d.h. Atom und Feld für sich, bei einem verschränkten Zustand wie in Gl. (5.3) keine Existenz. Möchte man die Teilsysteme Atom und Feld untersuchen, so ist man auf eine Beschreibung durch eine Dichtematrix angewiesen. Um sich die Zeitabhängigkeit der Reinheit des Zwei-Niveau-Systems anzusehen, kann das Maß  $\text{tr}(\rho_A^2)$  betrachtet werden. Der Wertebereich wird, da es sich um ein Zwei-Niveau-System handelt, zwischen  $1/2 \leq \text{tr}(\rho_A^2) \leq 1$  liegen. Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass sich das Atom in einem reinen Zustand befindet, ist dabei durch  $\text{tr}(\rho_A^2) = 1$  gegeben. Liegt dieser Fall vor, kann das Atomsystem mit einer Wellenfunktion beschrieben werden und folglich kann keine Verschränkung mit den Moden vorliegen. Ist andererseits das Atom in einem maximalen Gemisch, wird es durch  $\rho_A = \frac{1}{2}$  beschrieben und es gilt  $\text{tr}(\rho_A^2) = 1/2$ . Zu allen Zeiten an denen  $\text{tr}(\rho_A^2) < 1$  gilt, existiert ein verschränkter Zustand von Atom und Feld, da die Zeitentwicklung keine anderen Zweiteilchenzustände als in Gl. (5.3) gegeben sind, zulässt. Da außer für  $t = 0$  nur noch einmal, zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$ , ein näherungsweise reiner Zustand vorliegt (der im übrigen immer näher an 1 heranrückt je größer der Mittelwert  $\bar{n}$  gewählt wird ( $\eta = \sqrt{\bar{n}} \exp(-i\varphi_1)$ ) ist das Atom-Zwei-Moden-Feld praktisch fast immer in einem verschränkten Zustand, siehe dazu Abb. 5.1.

### 5.1.1 $\text{tr}(\rho_A^2)$ , Inversion und Polarisation

Um diese Sachverhalte mit dem Verhalten des Atoms in Verbindung bringen zu können, ist es interessant die Größe  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit dem Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z \rangle$  sowie

der atomaren Polarisation  $\langle \sigma_x \rangle$  und  $\langle \sigma_y \rangle$  zu vergleichen. Zur Definition dieser Atomobservablen siehe Kap. 6.

Analog zu dem Artikel [65] werden hier zunächst die Anfangsbedingungen  $\alpha = 0, \beta = 1$  (Atom befindet sich zur Zeit  $t = 0$  im Grundzustand) betrachtet. Der verschränkte Zustand in Gl. (5.3) reduziert sich dann auf Gl. (5.4). Das Ergebnis für  $\text{tr}(\rho_A^2)$  lautet:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho_A^2) &= \left| \sum_{j,m} |\tilde{b}_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}|^2 \sin^2(\tau\sqrt{j+m+1}) \right|^2 + \left| \sum_{j,m} |\tilde{b}_{j,m}|^2 \cos^2(\tau\sqrt{j+m}) \right|^2 \\ &+ 2 \left| \sum_{j,m} \tilde{b}_{j,m}^* \tilde{b}_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Um aus Gl. (5.10) das Ergebnis für den kohärenten Feld-Anfangszustand zu erhalten, müssen die Koeffizienten  $\tilde{b}_{jm}$  noch durch Gl. (5.9) ersetzt werden. Man erhält dann den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho_A^2)e^{2\bar{n}} &= \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1}}{(2j+1)!} \left( d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \right)^2 \sin^2(\tau\sqrt{j+m+1}) \right|^2 \\ &+ \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j}}{(2j)!} \left( d_{j,m}^{(j)} \right)^2 \cos^2(\tau\sqrt{j+m}) \right|^2 \\ &+ 2 \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1/2}}{\sqrt{(2j)!(2j+1)!}} d_{j,m}^{(j)} d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Für die Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  ergibt sich

$$\langle \sigma_z^{(g)} \rangle = -e^{-\bar{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{\bar{n}^{2j}}{(2j)!} |d_{j,m}^{(j)}|^2 \cos(2\tau\sqrt{j+m}), \quad (5.12)$$

wobei für den komplexen Parameter  $\eta$  in Gl. (5.8),  $\eta = \sqrt{\bar{n}}e^{-i\varphi_1}$  angesetzt wurde. Die Ergebnisse werden im Folgenden für eine vorgegebene mittlere Besetzungszahl  $\bar{n}$  in Mode 1 dargestellt. Für die Abschätzung des zu erwartenden Wertebereichs von  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  ist folgende Betrachtung vorteilhaft:

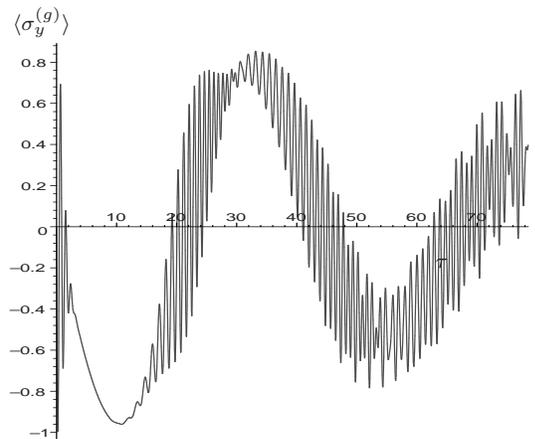
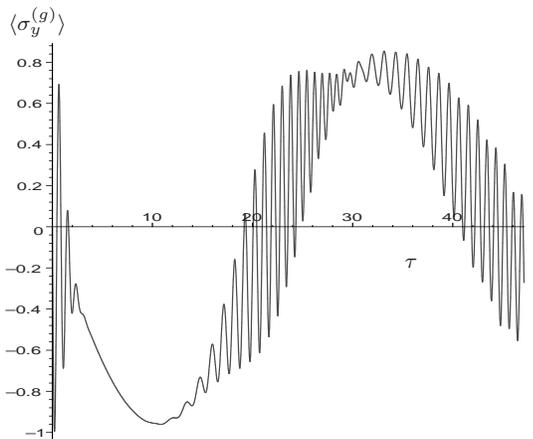
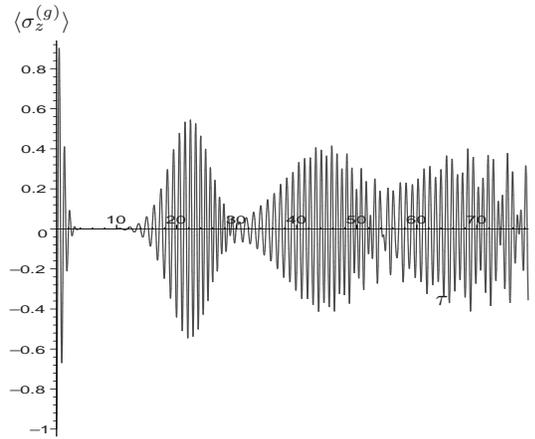
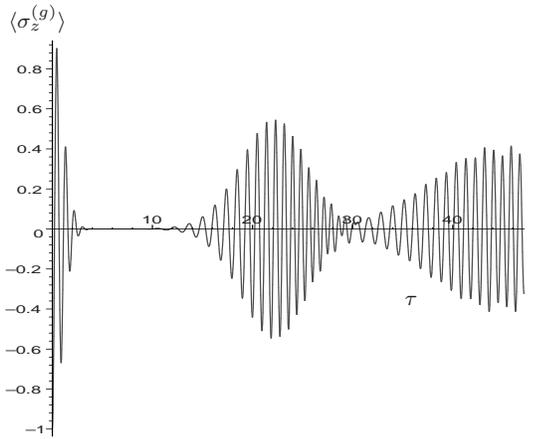
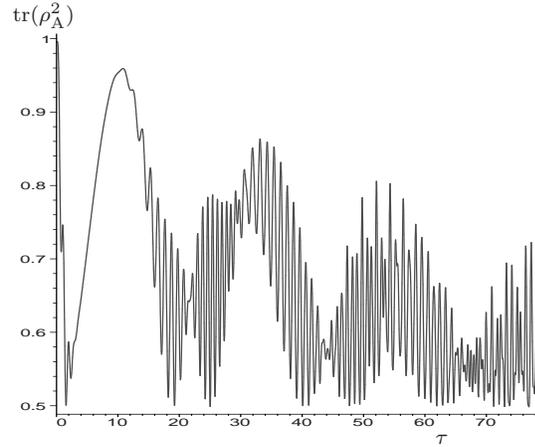
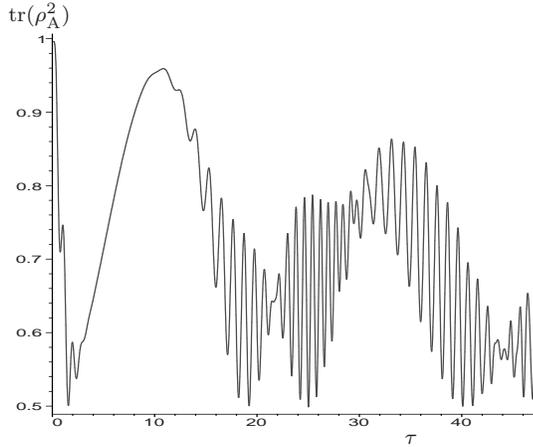
$$\begin{aligned} |\langle \sigma_z^{(g)} \rangle| &\leq e^{-\bar{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{\bar{n}^{2j}}{(2j)!} |d_{j,m}^{(j)}|^2 |\cos(2\tau\sqrt{j+m})| \\ &\leq e^{-\bar{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{\bar{n}^{2j}}{(2j)!} |d_{j,m}^{(j)}|^2 = e^{-\bar{n}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{2j}}{(2j)!} = 1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Es können nun die numerischen Ergebnisse für  $\bar{n} = 25$  Photonen in Mode 1 und das Atom im Grundzustand, diskutiert werden. Die Zeitentwicklung von  $\text{tr}(\rho_{\text{A}}^2)$  wird jeweils mit dem Erwartungswert für die Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  und der für die Polarisation  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  verglichen. Zuerst wird der Fall betrachtet, dass beide Moden mit gleicher Stärke an das Atom ankoppeln, siehe dazu die Abbildungen 5.1 und 5.2. Beginnend mit einem reinen Atomzustand startet  $\text{tr}(\rho_{\text{A}}^2)$  mit dem Wert 1 und fällt dann sehr schnell auf  $1/2$  ab. Dies entspricht dann einem völlig unpolarisierten Atomzustand. Bei der Inversion beobachtet man, dass der Kollapsvorgang etwa zur gleichen Zeit abgeschlossen ist. Die Inversion 0 bedeutet dann, ein unpolarisiertes Atom vorzufinden. Die erste Kollapsphase in der Observable Inversion ist also mit dem Kollaps der Atomwellenfunktion korreliert. Allerdings stimmt dies für die weitere Zeitentwicklung nicht mehr. Für längere Wechselwirkungszeiten zeigt sich, dass die Reinheit des Zustandes wieder zunimmt, obwohl die Inversion immer noch im Kollapsbereich bleibt. Offensichtlich kann sich auch ein kohärenter Atomzustand so äußern, dass seine Inversion 0 ergibt. Aus der Inversion kann also nicht auf den Polarisationszustand des Atoms geschlossen werden.

Deshalb wurde das atomare induzierte Dipolmoment, oder auch die Polarisation, wobei beide Größen zueinander proportional sind, in den Abbildungen den Größen  $\text{tr}(\rho_{\text{A}}^2)$  und Inversion gegenübergestellt. Für den Anfangszustand des Atoms in  $|g\rangle$  und das Feld in dem kohärenten Zustand  $|\eta, 0\rangle$  ergeben sich die beiden Komponenten der atomaren Polarisierungen  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle = 0$  und  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  zu,

$$\langle \sigma_y^{(g)} \rangle = -2e^{-\bar{n}} \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1/2}}{\sqrt{(2j)!(2j+1)!}} d_{j,m}^{(j)} d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}). \quad (5.14)$$

Offenbar kommt dieser Term auch in  $\text{tr}(\rho_{\text{A}}^2)$ , Gl. (5.11), quadriert als dritter Term vor. Die beiden anderen in Gl. (5.11) vorkommenden Terme, können als Quadrate der Wahrscheinlichkeiten, das Atom im Grundzustand sowie im angeregten Zustand zu finden, interpretiert werden. In den Abbildungen 5.1 und 5.2 sind die Ergebnisse zusammengefasst. Es ist sehr schön zu sehen, dass die Reinheit des Zustandes stark mit der Amplitude der Polarisation korreliert ist. Um ein induziertes Dipolmoment zu erzeugen, muss sich offenbar das Atom in einer kohärenten Überlagerung aus  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  befinden. Die vorstehenden Betrachtungen wurden für das Ein-Moden-JCM bereits im Rahmen der Thematik zur Zustandserzeugung in der Quantenmechanik diskutiert. Stellvertretend sei auf die Arbeiten [65, 66] verwiesen.



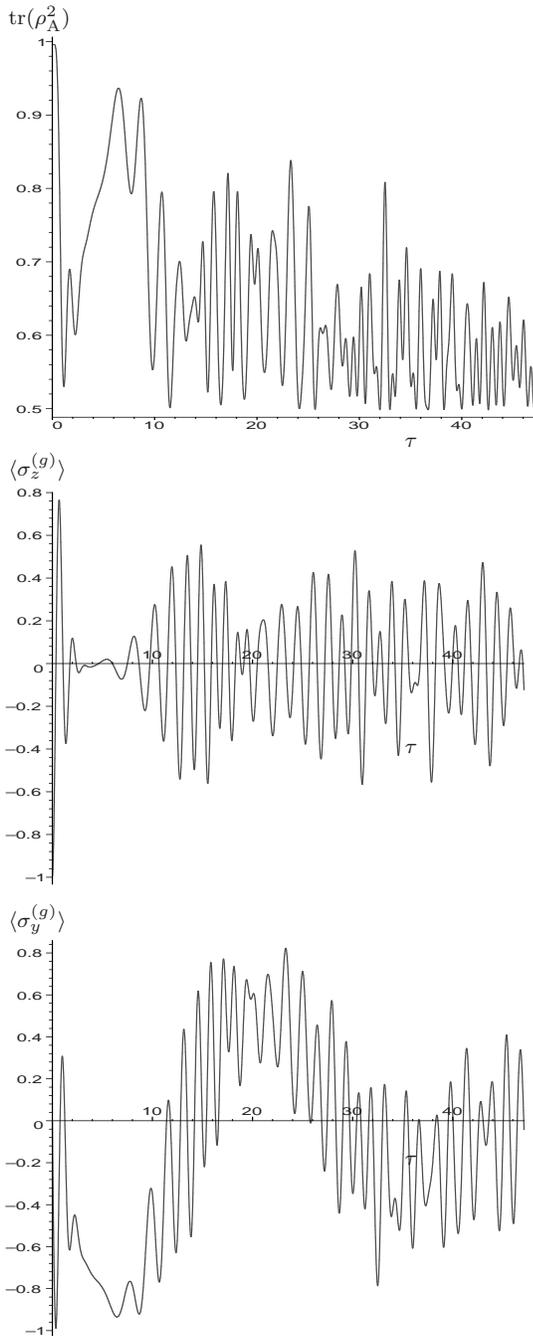
**Abb. 5.1:** Oben: Spur  $\text{tr}(\rho_A^2)$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = g_2$ . Mitte: Erwartungswert der Inversion  $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$ . Unten: Erwartungswert für die atomare Polarisation  $\langle\sigma_y^{(g)}\rangle$ .

**Abb. 5.2:** Beschreibung wie links stehend. Die Graphen sind allerdings für einen längeren Zeitbereich dargestellt.

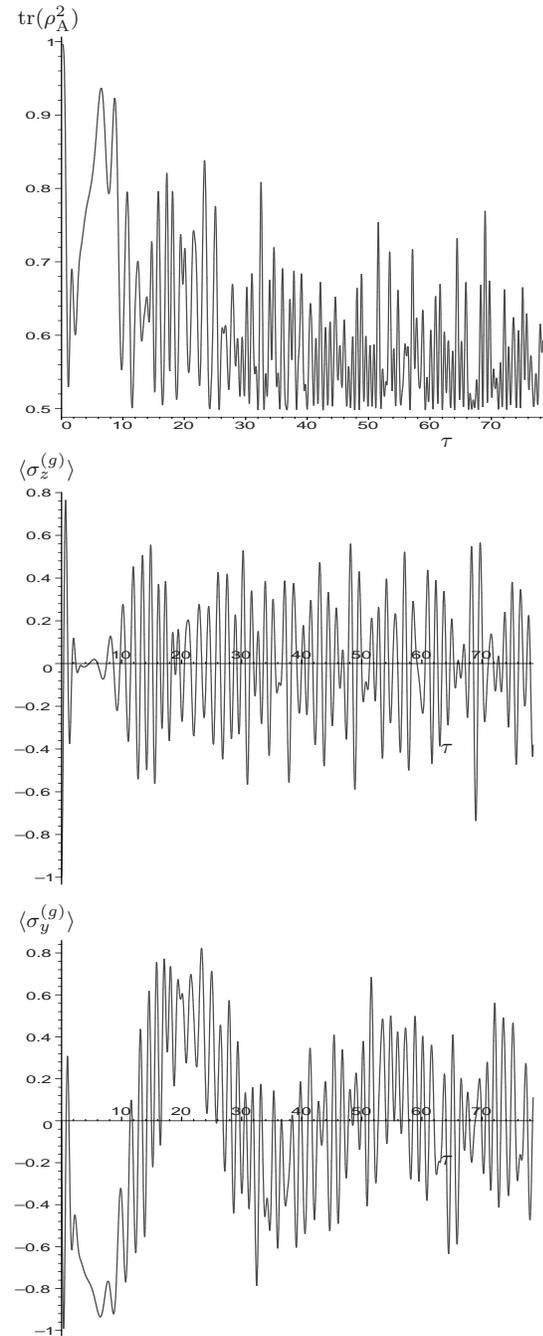
Abschließend soll der Einfluss verschiedener Kopplungskonstanten auf die betrachteten Ergebnisse untersucht werden. Dies wird in den Abbildungen 5.3, 5.4 für den Fall  $g_2 = 2g_1$  und in den Abbildungen 5.5, 5.6 für  $g_1 = 2g_2$  dargestellt.

Um einen Eindruck zu bekommen wie stark die Unterschiede zum Ein-Moden-Fall sind, wird das Ergebnis in [65] für die hier verwendete mittlere Besetzungszahl  $\bar{n} = 25$  reproduziert, was in der Abb. 5.7 zu sehen ist. Es zeigt sich, dass sich das Zeitverhalten des Zwei-Moden-Falles, dem des Ein-Moden-Falles immer mehr annähert, je größer die Kopplung an Mode 1 wird. Dies ist zu erwarten, da zu Beginn der Wechselwirkung auch nur Mode 1 mit dem kohärenten Zustand besetzt ist.

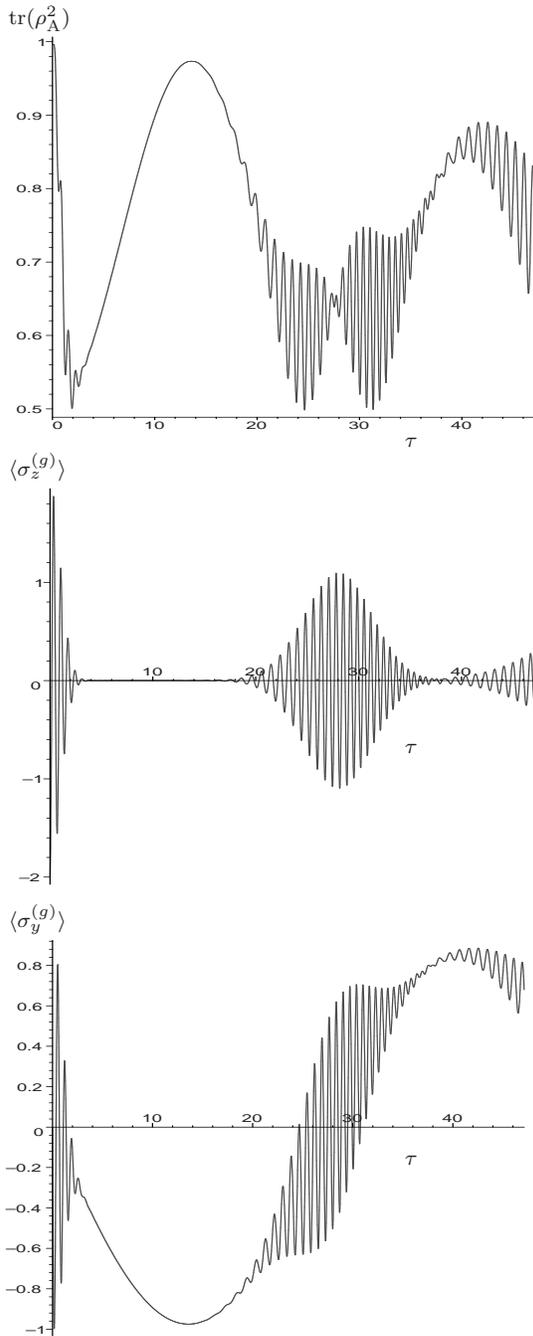
Es konnte hiermit gezeigt werden, dass sich die Atom-Feld-Verschränkung im Zwei-Moden-JCM sehr ähnlich wie im Ein-Moden-Fall verhält. Allerdings kann durch Veränderung der Kopplung des Atoms an die Feldmoden auch ein sehr stark abweichendes Verhalten erzielt werden, siehe dazu die Abbildungen 5.3 und 5.4. In den meisten bisher durchgeführten Ein-Moden-Resonatorexperimenten wird die Verschränkung von Atom und Mode dazu verwendet, um über eine Messung des Endzustandes des Atoms, Aussagen über das Feld machen zu können. Im Zwei-Moden-Fall muss dabei der zusätzliche Einfluss, den die unterschiedlichen Kopplungen an die zwei Feldmoden bringen können, berücksichtigt werden.



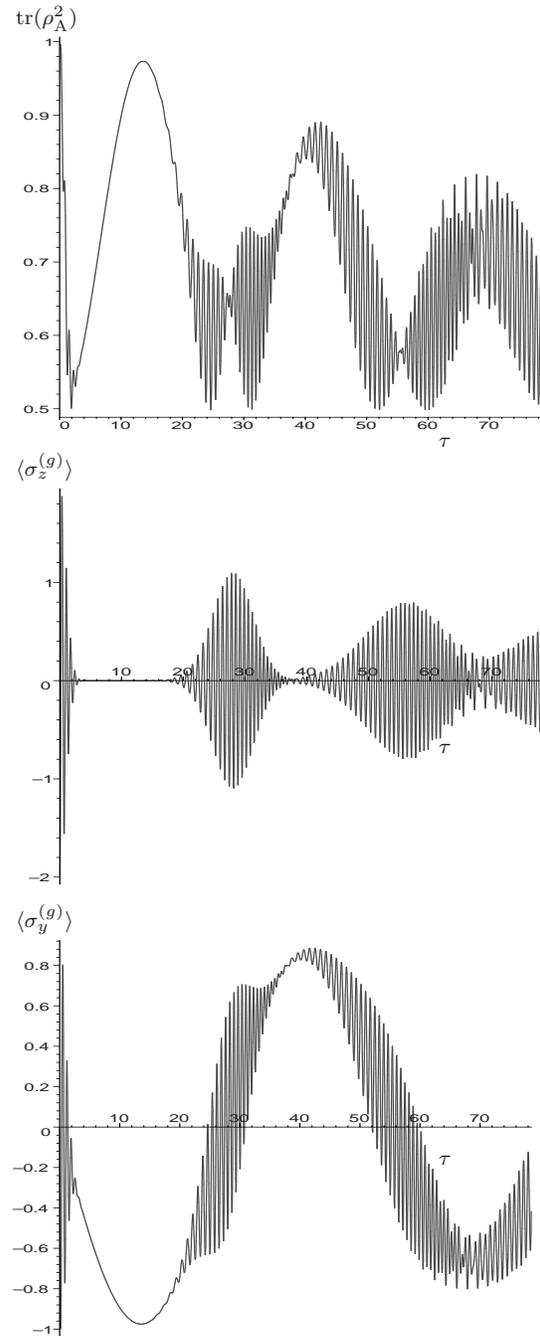
**Abb. 5.3:** Oben: Spur  $\text{tr}(\rho_A^2)$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_2 = 2g_1$ . Mitte: Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ . Unten: Erwartungswert für die atomare Polarisation  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$ .



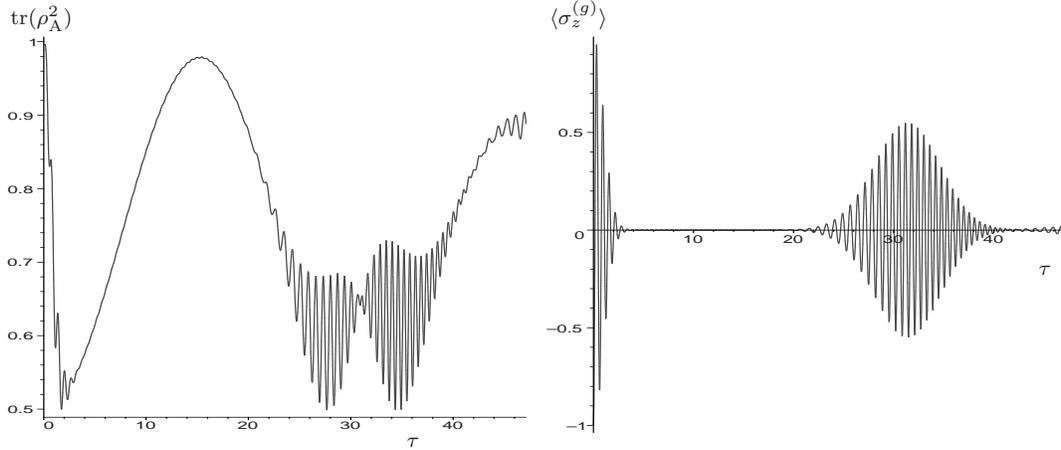
**Abb. 5.4:** Beschreibung wie links stehend. Die Graphen sind allerdings für einen längeren Zeitbereich dargestellt.



**Abb. 5.5:** Oben: Spur  $\text{tr}(\rho_A^2)$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = 2g_2$ . Mitte: Erwartungswert der Inversion  $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$ . Unten: Erwartungswert für die atomare Polarisation  $\langle\sigma_y^{(g)}\rangle$ .



**Abb. 5.6:** Beschreibung wie links stehend. Die Graphen sind allerdings für einen längeren Zeitbereich dargestellt.



**Abb. 5.7:** Links: Spur  $\text{tr}(\rho_A^2)$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für ein Atom das sich zu Beginn der Wechselwirkung in  $|g\rangle$  befindet und die beiden Moden in  $|\eta, 0\rangle$ . Dabei wurde  $\bar{n} = 25$  angenommen sowie  $|\gamma_1| = 1$  (nur Mode 1 koppelt an das Atom). Rechts: Erwartungswert der Inversion  $\langle\sigma_z^{(g)}\rangle$  für die gleichen Anfangsbedingungen wie oben.

### 5.1.2 Entropie $S(\rho_A)$ und $\text{tr}(\rho_A^2)$ als Verschränkungsmaße

Für das Zwei-Niveau-System lässt sich auch die Entropie  $S(\rho_A)$  explizit berechnen. Die Ergebnisse von  $\text{tr}(\rho_A^2)$  und der Entropie  $S(\rho_A)$ , können dann gegenübergestellt werden. Die Entropie wird dabei geeigneterweise durch Diagonalisieren der Dichtematrix  $\rho_A$  berechnet, denn es gilt

$$S(\rho_A) = -\text{tr}[\rho_A \ln \rho_A] = -\sum_{i=1}^2 \lambda_i \ln \lambda_i \quad , \quad (5.15)$$

wobei mit  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  die Eigenwerte der  $(2 \times 2)$ -Dichtematrix  $\rho_A$ , die aus dem Zustand in Gl. (5.4) berechnet wird, bezeichnet wurden. Das Ergebnis für die Eigenwerte lautet

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} = & \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ 1 - 4 \sum_{j,m} |\tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}|^2 \sin^2(\tau \sqrt{j+m+1}) \sum_{j,m} |\tilde{b}_{j,m}|^2 \cos^2(\tau \sqrt{j+m}) \right. \\ & \left. + 4 \left| \sum_{j,m} \tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \tilde{b}_{j,m}^* \sin(\tau \sqrt{j+m+1}) \cos(\tau \sqrt{j+m}) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (5.16) \end{aligned}$$

Auch hier werden die Koeffizienten  $\tilde{b}_{j,m}$  durch Gl. (5.9) ersetzt, um dem kohärenten Feld-Anfangszustand Rechnung zu tragen.

Die Frage der Gleichwertigkeit der beiden Maße soll hier etwas genauer untersucht werden. Da die Ausdrücke  $\text{tr}(\rho_A^2)$  und  $S(\rho_A)$  beide invariant unter unitären Transforma-

tionen sind, kann zu deren Berechnung die Dichtematrix  $\rho_A$  auf Diagonalform gebracht werden. Da es sich im Unterraum der Atomzustände bei  $\rho_A$  um eine  $(2 \times 2)$ -Matrix handelt erhält man zwei Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die allerdings wegen der Forderung  $\text{tr}(\rho_A) = 1$  der Bedingung  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  unterliegen. Somit gibt es offensichtlich nur einen unabhängigen Eigenwert der mit  $\lambda$  bezeichnet werden soll. Der zweite Eigenwert kann dann aus  $1 - \lambda$  gewonnen werden. Nachstehend werden beide Maße als Funktion des Eigenwertes  $\lambda$  angegeben,

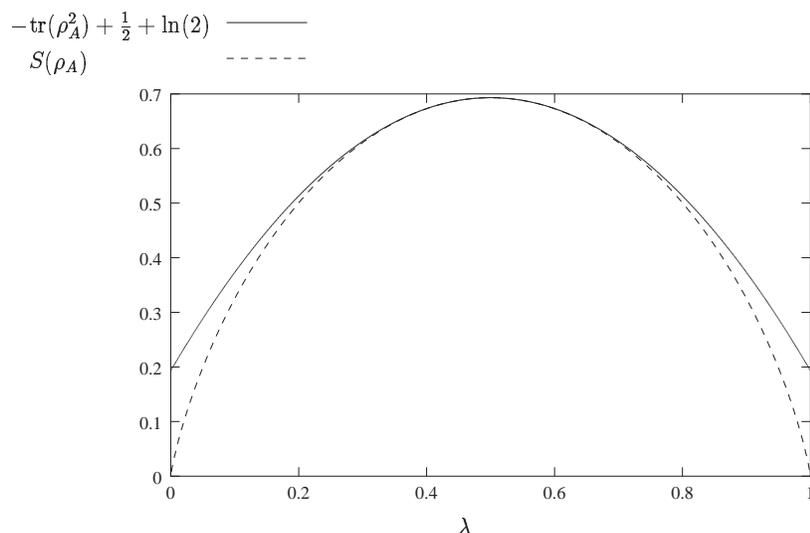
$$\text{tr}(\rho_A^2) = \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 \quad , \quad (5.17)$$

$$S(\rho_A) = -\lambda \ln(\lambda) - (1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) \quad . \quad (5.18)$$

Der Eigenwert ist auf den Wertebereich  $0 \leq \lambda \leq 1$  beschränkt. Die Frage, wie weit beide Ausdrücke für das Zwei-Niveau-System ein äquivalentes Maß für die Reinheit eines Zustandes sind, kann durch folgende Überlegung beantwortet werden. Für das Zwei-Niveau-System hängen die Ausdrücke in Gl. (5.17) nur von einem Parameter  $\lambda$  ab. Wird z.B. der Ausdruck  $\text{tr}(\rho_A^2) = \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 = \text{const.}$  festgehalten, so liegen die Werte von  $\lambda$  eindeutig fest. Dadurch wird allerdings auch die Entropie eindeutig festgelegt und sowohl die Variation von  $\text{tr}(\rho_A^2)$ , als auch die Variation von  $S(\rho_A)$  nach  $\lambda$  mit der Nebenbedingung  $\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 = \text{const.}$  verschwindet für beide Ausdrücke. Dadurch liefert die Entropie für das Zwei-Niveau-System nicht mehr Information als der Ausdruck  $\text{tr}(\rho_A^2)$ .

Zur Beurteilung der funktionalen Abhängigkeit der Maße von  $\lambda$  wird  $-\text{tr}(\rho_A^2) + \frac{1}{2} + \ln(2)$  mit  $S(\rho_A)$  in Abb. 5.8 verglichen. Dabei handelt es sich nur um eine geeignete Nullpunktverschiebung und Invertierung des Vorzeichens der Funktion  $\text{tr}(\rho_A^2)$ , um eine bessere graphische Vergleichbarkeit der beiden Funktionen miteinander zu erreichen. Es zeigt sich, dass in dem aufgetragenen Wertebereich die beiden Maße sogar nahezu die gleiche funktionale Abhängigkeit vom Eigenwert  $\lambda$  aufweisen. Es ist allerdings wichtig sich klar zu machen, dass dies nicht notwendig so sein muss. Die notwendige Bedingung, dass beide Maße die gleiche Information über das System liefern ist vielmehr darin begründet, dass durch Festhalten der einen Funktion auch die andere nicht mehr variiert werden kann und damit in dem Ausdruck für die Entropie keine zusätzliche Information über das System enthalten ist.

Für höher-dimensionale Systeme gilt diese Aussage allerdings nicht mehr. Dies tritt in der vorliegenden Arbeit z.B. dann auf, wenn das Zwei-Moden-Feld untersucht wird. Da die beiden Moden mit beliebig vielen Photonen besetzt sein können, kann die Dimension des Moden-Raumes beliebig groß werden. Die beiden Maße der Spur und der



**Abb. 5.8:** Vergleich von  $\text{tr}(\rho_A^2)$  und  $S(\rho_A)$  als Funktion des Eigenwertes  $\lambda$ .

Entropie, werden dann voneinander abweichen und unterschiedliche Interpretationen zur Folge haben. Es stellt sich heraus, dass dann die Entropie die bessere Größe ist, um die Reinheit des Systems zu charakterisieren. Leider kann aber die Entropie für große quantenmechanische Systeme oft nicht berechnet werden, da dazu die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von entsprechend hoher Ordnung bestimmt werden müssen.

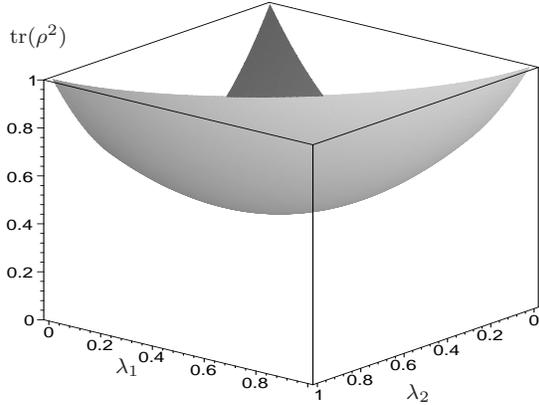
Um einen Eindruck zu gewinnen, warum nur im Spezialfall des  $(2 \times 2)$ -Unterraumes die beiden Maße übereinstimmen, soll noch folgendes Beispiel angeführt werden. Betrachtet wird der nächst größere Fall, nämlich eine beliebige dreidimensionale Dichtematrix  $\rho$ . Dabei seien die drei reellen Eigenwerte der Dichtematrix mit  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  bezeichnet. Wiederum sind durch die Forderung an die Spur  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ , nur zwei Eigenwerte unabhängig. Die Spur sowie die Entropie ergeben sich als Funktion der Eigenwerte zu

$$\text{tr}(\rho^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2 \quad , \quad (5.19)$$

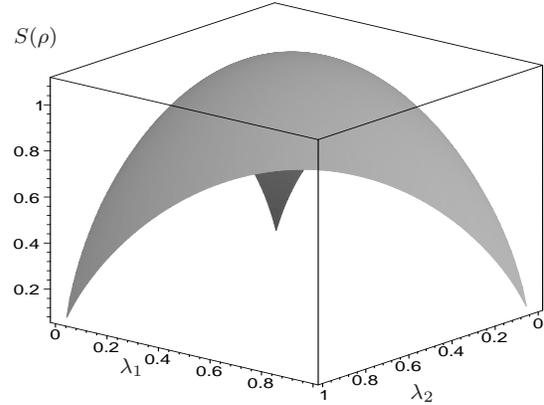
$$S(\rho) = -\lambda_1 \ln(\lambda_1) - \lambda_2 \ln(\lambda_2) - (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \ln(1 - \lambda_1 - \lambda_2) \quad . \quad (5.20)$$

In Abb. 5.9 und Abb. 5.10 werden beide Funktionen illustriert. Dabei zeigt sich eindrucksvoll warum nun beide Maße nicht mehr äquivalent sind.

Die Funktion  $\text{tr}(\rho^2)$  in Abb. 5.9 liefert einerseits für drei Wertetripel von  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  den Wert  $\text{tr}(\rho^2) = 1$ , nämlich für  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ . Daneben gibt es aber noch unendlich viele Eigenwerte, die auf der Kurve  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2 = 1$  liegen und offensichtlich auf  $\text{tr}(\rho^2) = 1$  führen. Für dieses Maß erfüllt eine unendliche Klasse



**Abb. 5.9:** Spur  $\text{tr}(\rho^2)$  für eine beliebige dreidimensionale Dichtematrix  $\rho$  als Funktion der Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .



**Abb. 5.10:** Entropie  $S(\rho)$  für eine beliebige dreidimensionale Dichtematrix  $\rho$  als Funktion der Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

von reinen Zuständen das Kriterium  $\text{tr}(\rho^2) = 1$ . In Abb. 5.10 für die Entropie  $S(\rho)$  hingegen, gibt es nur die drei Wertetripel  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  die auf  $S(\rho) = 0$  führen und damit zu reinen Zuständen gehören. Die daneben in Abb. 5.9 existierende große Klasse der scheinbar reinen Zustände, die auf der Kurve  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)^2 = 1$  liegen, haben alle eine von null verschiedene Entropie und würden damit nicht mehr als reine Zustände bezeichnet werden. In diesem Sinne ist die von-Neumann-Entropie zur Definition der Reinheit eines Zustandes ein schärferes Kriterium als  $\text{tr}(\rho^2)$ . Als Korrelations- oder Verschränkungsmaß für mehr als zwei Dimensionen, kann somit  $\text{tr}(\rho_A^2)$  nur näherungsweise verwendet werden, was mit der Aussage in [62] übereinstimmt.

Zusammenfassend sei nochmal die eigentliche Fragestellung des Kapitels betrachtet. Es soll die Verschränkung der zwei Systeme, Atom und Zwei-Moden-Feld, charakterisiert werden. Dazu kann das Maß  $\text{tr}(\rho_A^2)$  berechnet werden. Über die Reinheit des Atomsystems kann geschlossen werden, ob Verschränkung mit den Moden vorliegt oder nicht. Tritt der Fall  $\text{tr}(\rho_A^2) = 1$  auf, so kann mit Sicherheit gefolgert werden, dass das Atom-Zwei-Moden-Feld keinen verschränkten Zustand bilden kann. Liegt der andere Extremfall  $\text{tr}(\rho_A^2) = 1/2$  vor, so ist das Atom in einem unpolarisierten Gemisch aus  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$ . Kann dann aber geschlossen werden, dass Atom und Zwei-Moden-Feld einen verschränkten Zustand bilden? Das würde nur gehen, wenn sichergestellt ist, dass zur gleichen Zeit auch das Zwei-Moden-Feld in einem Gemisch vorliegt und Zeitent-

wicklungen wie sie in Gl. (5.3) gegeben sind, betrachtet werden. Dazu müsste dann aber die Entropie des Zwei-Moden-Feldes untersucht werden, da es sich ja i.A. um ein hochdimensionales System handelt.

Die Frage kann aber auf elegante Weise, unter Zuhilfenahme des Theorems von Araki und Lieb [67], trotzdem nur mit dem Maß  $\text{tr}(\rho_A^2)$  geklärt werden. Das Theorem von Araki und Lieb liefert für zwei Quantensysteme (hier Atom und Zwei-Moden-Feld) A und F eine Ungleichung zwischen der Entropie des Gesamtsystems und den Entropien der Teilsysteme in der folgenden Weise

$$|S(\rho_A) - S(\rho_F)| \leq S(\rho) \leq S(\rho_A) + S(\rho_F) \quad . \quad (5.21)$$

Diese Ungleichung kann nun auf vorstehenden Fall angewendet werden. Da das Gesamtsystem zur Zeit  $t = 0$  in einem reinen Zustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$  ist, dem die Dichtematrix  $\rho = |g\rangle|\eta, 0\rangle\langle g|\langle\eta, 0|$  zugeordnet wird und die Entropie des Gesamtsystems  $S(\rho)$  offensichtlich invariant gegenüber unitären Transformationen ist, gilt für alle Zeiten  $t$   $S(\rho) = 0$ . Damit folgt aus der linken Seite der Ungleichung (5.21), dass die Entropien für die Teilsysteme  $S(\rho_A)$  und  $S(\rho_F)$  für alle Zeiten gleich sein müssen. Die Reinheit des Atomsystems folgt der des Feldsystems und umgekehrt. Wenn also  $\text{tr}(\rho_A^2) = 1/2$  für das Atom liefert, so kann mit Sicherheit geschlossen werden, dass dann auch das Zwei-Moden-Feld in einem maximal gemischten Zustand ist (die Äquivalenz von  $\text{tr}(\rho_A^2)$  und der Entropie  $S(\rho_A)$  wurde ja bereits gezeigt). Das Maß  $\text{tr}(\rho_A^2)$  kann somit direkt als Verschränkungsmaß für die beiden Teilsysteme Atom-Zwei-Moden-Feld interpretiert werden.

Aus der Abbildung 5.1 lässt sich ablesen, dass außer zur Zeit  $\tau = 0$  für spätere Zeitpunkte immer eine Verschränkung von Atom und Zwei-Moden-Feld vorliegt. Um einen maximal verschränkten Zustand zu erzeugen, muss die Wechselwirkung zu den Zeitpunkten an denen  $\text{tr}(\rho_A^2) = 1/2$  erreicht, abgeschaltet werden. Das kann z.B. durch Anlegen eines externen Feldes geschehen, das den Zwei-Niveau-Übergang verstimmt. Des Weiteren ist ein Einstellen der Durchfluggeschwindigkeit der Atome durch den Resonator denkbar, so dass sie genau die vorgegebene Wechselwirkungszeit im Resonator verweilen. Zu den experimentellen Realisierungen, siehe auch Kap. 7. Die Wechselwirkungszeiten an denen  $\text{tr}(\rho_A^2)$  ein Minimum aufweist, können wiederum durch einen Minimisierungsalgorithmus numerisch berechnet werden. Dabei sind die zu bestimmenden Parameter die normierte Kopplungskonstante  $\gamma_1$ , und die Wechselwirkungszeit.

### 5.1.3 Einfangende Feldzustände

Bisher wurde für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$  aus Atom und Feld, untersucht, wie sich die Zeitabhängigkeit der Verschränkung verhält. Dies konnte durch das Maß  $\text{tr}(\rho_A^2)$  charakterisiert werden. Es soll nun die Fragestellung diskutiert werden, ob es Anfangszustände des Feldes gibt, die nicht auf einen verschränkten Zustand zwischen Atom und Zwei-Moden-Feld führen. Gibt es in der Klasse der allgemeinen Feldzustände in Gl. (5.2) spezielle Zustände, die als Ausgangspunkt für eine Verschränkung von Atom und Feld-Freiheitsgraden ungeeignet sind? Dabei wäre ein Feldzustand als ungeeignet zu bezeichnen, wenn während der gesamten Zeitentwicklung das Atom im Grundzustand  $|g\rangle$  verbliebe. Falls dies der Fall ist, wäre das Atom zu allen Zeiten in dem reinen Zustand  $|g\rangle$  und folglich würde sich nach den Betrachtungen des vorausgegangenen Abschnitts keine Verschränkung ausbilden.

Es soll also die Frage geklärt werden, ob solche Feldzustände im Zwei-Moden-JCM existieren. Ist dies der Fall, so bezeichnet man diese Zustände des Feldes als einfangende Feldzustände, engl. „trapping field-states“. Das Atom beteiligt sich nicht an der Zeitentwicklung (das Feld offensichtlich dann auch nicht (da ja die Entropien von Atom und Feld gleich sind)) und ist somit in dem Anfangszustand für alle Zeiten gefangen. Die Forderungen für die Existenz eines einfangenden Feldzustandes lassen sich mathematisch wie folgt formulieren. Die Definition soll analog der von [68] erfolgen.

Es werden Eigenzustände zum Wechselwirkungsoperator  $H_{\text{int}}$  gesucht, die zum Eigenwert 0 gehören, also  $H_{\text{int}}|\Psi_{\text{AF}}\rangle = 0$ . Für solch einen Eigenzustand ist dann die Zeitentwicklung stationär und trivial durch den Phasenfaktor  $\exp(-iH_0t/\hbar)$  gegeben. Einfangende Feldzustände werden also aus der Forderung

$$H_{\text{int}}|\Psi_{\text{AF}}\rangle = \sigma_+(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2)|g\rangle|\Psi_{\text{F}}\rangle = 0 \quad (5.22)$$

bestimmt, wobei  $|\Psi_{\text{F}}\rangle$  wie in Gl. (5.2) angesetzt wird. Daraus ergibt sich die Forderung an das Zwei-Moden-Feld

$$(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2)|\Psi_{\text{F}}\rangle = 0 \quad . \quad (5.23)$$

Der Hermitesch konjugierte Term

$$\sigma_-(\gamma_1^* a_1^\dagger + \gamma_2^* a_2^\dagger)|g\rangle|\Psi_{\text{F}}\rangle = 0 \quad , \quad (5.24)$$

der in Gl. (5.22) auf der linken Seite enthalten ist, trägt in dieser Betrachtung nichts bei, da wegen  $\sigma_-|g\rangle = 0$  der gesamte Term trivialerweise verschwindet. Um Folgerungen aus

Gl. (5.23) zu ziehen, bietet es sich wiederum an, den Ausdruck im Quasi-Moden-Bild auszuwerten. Es ergibt sich dort die einfache Operatorgleichung

$$A_1|\Psi_F\rangle = 0 \quad , \quad (5.25)$$

aus der  $|\Psi_F\rangle$  wie folgt bestimmt werden kann. Es handelt sich also um die Suche nach dem Quasi-Moden-Vakuum-Zustand zu  $A_1$ . Dazu wird  $|\Psi_F\rangle$  in der allgemeinen Form wie in Gl. (5.2) angesetzt und der Quasi-Moden-Vernichter angewendet

$$A_1|\Psi_F\rangle = \sum_{j,m} \tilde{b}_{j,m} \sqrt{j+m} |j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\rangle\rangle = 0 \quad . \quad (5.26)$$

Für die nichttriviale Lösung muß dann  $m = -j$  gelten und man erhält als Lösung den Zustand

$$|\Psi_F\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_{j,-j} |j, -j\rangle\rangle \quad . \quad (5.27)$$

In der Focknotation lässt sich dieser durch

$$|\Psi_F\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_{\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}} |0, n\rangle\rangle \quad , \quad (5.28)$$

ausdrücken. Alle Zustände dieser Form, in der Quasi-Mode 1 unbesetzt ist, führen also auf einen einfangenden Feldzustand bezüglich der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung und folglich sind solche Anfangszustände ungeeignet, um Verschränkung zu erzeugen. Dabei zeigt sich wiederum, dass im Quasi-Moden-Bild nur Mode 1 an der Wechselwirkung teilnimmt. Die Form der einfangenden Feldzustände kann also im Quasi-Moden-Bild schon fast erraten werden. Dieser Zustand kann noch zurück in das Moden-Bild transformiert werden. Dabei werden folgende Transformationen benutzt:

$$|0, n\rangle\rangle = \sum_{k=0}^n D_{k-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}}^{(\frac{n}{2})} |k, n-k\rangle \quad , \quad (5.29)$$

$$\tilde{b}_{\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}} = \sum_{m=-\frac{n}{2}}^{n/2} \tilde{b}_{\frac{n}{2}, m} D_{-\frac{n}{2}, m}^{(\frac{n}{2})\dagger} \quad . \quad (5.30)$$

Schließlich ergibt sich unter Verwendung von  $\tilde{b}_{j,m} = b_{j+m, j-m}$

$$|\Psi_F\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n b_{\ell, n-\ell} D_{-\frac{n}{2}, \ell-\frac{n}{2}}^{(\frac{n}{2})\dagger} D_{k-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}}^{(\frac{n}{2})} |k, n-k\rangle \quad . \quad (5.31)$$

Eine weitere Frage, die es zu beantworten gilt ist, ob auch alle Überlagerungen der Atom-Anfangszustände von der Form  $|\Psi_A(0)\rangle = \alpha|e\rangle + \beta|g\rangle$ , auf einen verschränkten

Zustand führen. Gibt es also einfangende Atomzustände, analog zu den einfangenden Feldzuständen, die vorstehend betrachtet wurden? Die Antwort lautet, nur näherungsweise. In einer semiklassischen Beschreibung des Zwei-Moden-JCMs (in der das Feld klassisch behandelt wird) zeigt sich, dass Zustände der Form

$$|\Psi_A^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi}|e\rangle \pm |g\rangle) \quad , \quad (5.32)$$

einfangende Zustände sind [69]. In dem hier betrachteten Fall, wobei Atom und Feldsystem quantisiert behandelt werden, ist dieser Zustand kein einfangender Zustand mehr [65]. Es existieren auch keine anderen einfangenden Atomzustände für diese Modell.

## 5.2 Einfluss von Verstimmung auf die Atom-Feld-Verschränkung

Bisher wurde die resonante Wechselwirkung zwischen Atom und Feld untersucht. Dabei wurde die Verstimmung  $\Delta = 0$  angenommen. Es soll nun der Einfluss der Verstimmung  $\Delta \neq 0$  auf die Erzeugung verschränkter Atom-Feld-Zustände untersucht werden.

### 5.2.1 $\text{tr}(\rho_A^2)$ mit Verstimmung $\Delta \neq 0$

Die Zeitentwicklung der Anfangszustände in den Gln. (5.1, 5.2), für den Spezialfall  $\alpha = 0, \beta = 1$ , ergibt sich analog zu dem Zustand in Gl. (5.4) zu

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left[ \tilde{b}_{j,m} \cos(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) |g; j, m\rangle + \tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \frac{\sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{i\sqrt{j+m+1+\delta^2}} \sqrt{j+m+1} |e; j, m\rangle \right] \quad , \quad (5.33)$$

wobei wiederum der Parameter  $\delta$  über  $\delta = \Delta/2g$  mit der Verstimmung  $\Delta$  zusammenhängt. Es zeigt sich, dass die Betrachtung von kleinen Verstimmungs-Werten die Erzeugung von Verschränkung nicht behindert. Es ist allerdings zu erwarten, dass bei großen Werten der Verstimmung  $\Delta$ , eine Abkopplung des Zwei-Niveau-Systems vom Zwei-Moden-Feld stattfindet. Die Zeitentwicklung wird dann quasi abgeschaltet. Dieser Effekt wird auch benutzt, um definierte Wechselwirkungszeiten der Atome mit den

Moden zu erhalten. Dies äußert sich auch in dem Ausdruck  $\text{tr}(\rho_A^2)$  im Vergleich zu Gl. (5.11), wie in folgender Gleichung zu sehen ist:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\rho_A^2)e^{2\bar{n}} &= \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1}}{(2j+1)!} \left( d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \right)^2 \frac{\sin^2(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{j+m+1+\delta^2} (j+m+1) \right|^2 \\
&+ \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j}}{(2j)!} \left( d_{j,m}^{(j)} \right)^2 \left[ \cos^2(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\delta^2 \sin^2(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{j+m+\delta^2} \right] \right|^2 \\
&+ 2 \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1/2}}{\sqrt{(2j)!(2j+1)!}} d_{j,m}^{(j)} d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\delta \sin(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{\sqrt{j+m+\delta^2}\sqrt{j+m+1+\delta^2}} \sqrt{j+m+1} \right|^2 \\
&+ 2 \left| \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1/2}}{\sqrt{(2j)!(2j+1)!}} d_{j,m}^{(j)} d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\cos(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{\sqrt{j+m+1+\delta^2}} \sqrt{j+m+1} \right|^2 .
\end{aligned} \tag{5.34}$$

In Gl. (5.34) sieht man, dass für  $\delta \gg 1$  nur noch ein Beitrag vom zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung übrig bleibt. Dies ist aber gerade die quadrierte Wahrscheinlichkeit, das Atom im Grundzustand vorzufinden. Offensichtlich verharrt dann das Atom für alle Zeiten im Grundzustand.

Zur Veranschaulichung der Effekte wird hier angenommen, dass beide Moden gleich stark an das Atom koppeln, woraus sich für den in Abschnitt 3.5 vorgestellten experimentellen Aufbau der Wert

$$g/2\pi = \sqrt{|g_1|^2 + |g_2|^2}/2\pi = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} 25 \text{ kHz} \quad , \tag{5.35}$$

für die effektive Kopplungskonstante ergibt. Es werden nun fünf Spezialfälle für die Verstimmung betrachtet. Zum Einen, geringe Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz, mittlere Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz,  $\Delta/2\pi = 250$  kHz und  $\Delta/2\pi = 500$  kHz sowie große Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz. Dies ergibt die fünf dimensionslosen Werte

$$\delta = 0.14, \quad \delta = 1.4, \quad \delta = 3.5, \quad \delta = 7, \quad \delta = 14 \quad . \tag{5.36}$$

Als experimentelle Realisierung, könnte man sich zwei Ein-Moden-Resonatoren, die orthogonal zueinander aufgebaut sind, vorstellen. Siehe dazu in Kap. 7 den in Abb. 7.2 vorgeschlagenen Aufbau für eine Realisierung im Mikrowellenbereich, oder den in Abb. 7.1 abgebildeten Aufbau, der vorwiegend im optischen Frequenzbereich Anwendung findet. Die Abbildungen 5.11, 5.12 zeigen das Verhalten von  $\text{tr}(\rho_A^2)$  für die verschiedenen Verstimmungen.

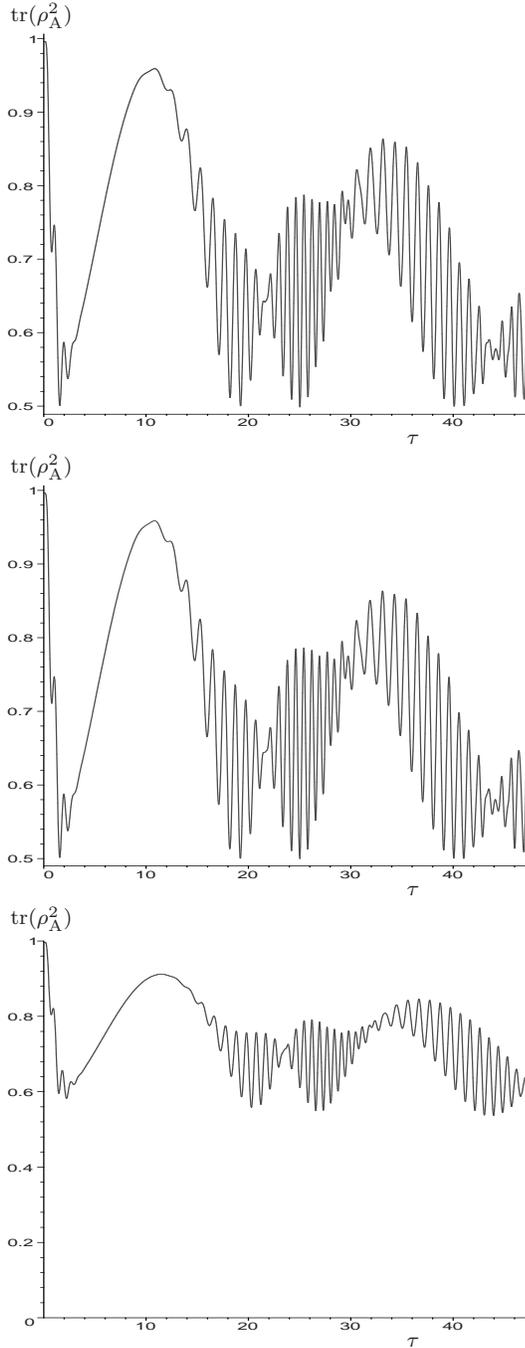
### 5.2.2 Inversion mit Verstimmung

Die Observable Inversion wird nachstehend ebenfalls mit Verstimmung untersucht. Der analytische Ausdruck lautet:

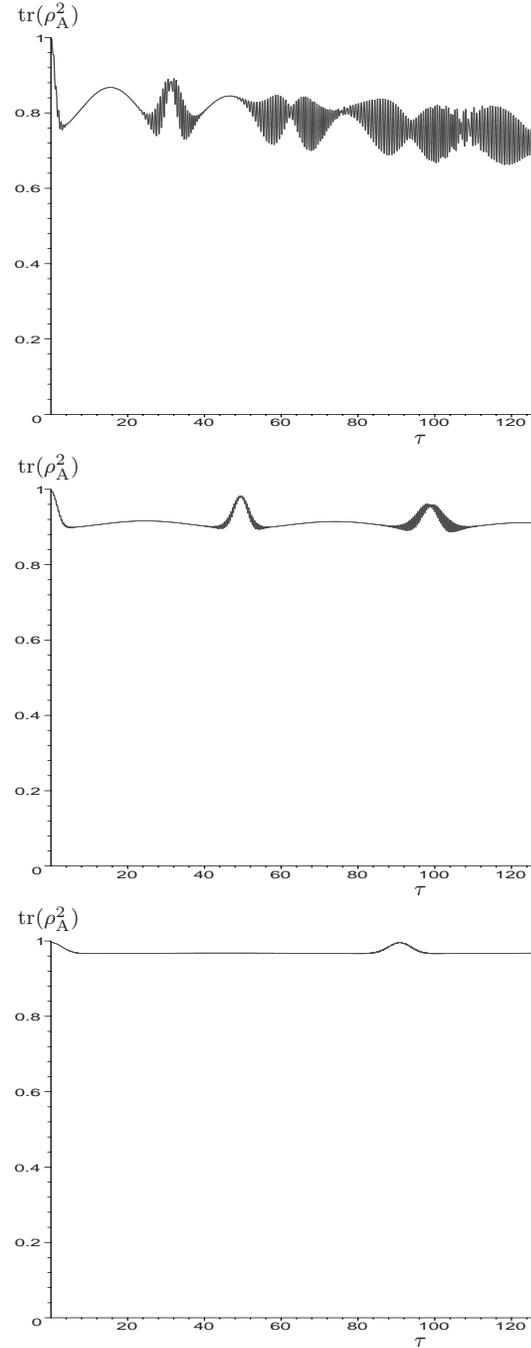
$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^{(g)} \rangle &= \sum_{j,m} |\tilde{b}_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}|^2 \frac{\sin^2(\tau \sqrt{j+m+1+\delta^2})}{j+m+1+\delta^2} (j+m+1) \\ &\quad - \sum_{j,m} |\tilde{b}_{j,m}|^2 \left[ \cos^2(\tau \sqrt{j+m+\delta^2}) + \delta^2 \frac{\sin^2(\tau \sqrt{j+m+\delta^2})}{j+m+\delta^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen deutlich das Verhalten, dass die Inversion für geringe Verstimmung praktisch nicht, für mittlere Verstimmung gering und für starke Verstimmung stark verändert wird. Dies sieht man direkt an dem analytischen Ausdruck in Gl. (5.37). Dabei wird der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung mit dem Faktor  $\approx 1/\delta^2$  unterdrückt. Der erste Term auf der rechten Seite ist allerdings auch gerade die Wahrscheinlichkeit, das Atom im angeregten Zustand zu finden. Damit bleibt für Werte von  $\delta^2 \gg 1$  nur noch der zweite Term auf der rechten Seite übrig, der die Wahrscheinlichkeit das Atom im Grundzustand zu finden ist. Da für den Anfangszustand des Atoms zur Zeit  $\tau = 0$  ebenfalls der Grundzustand  $|g\rangle$  gewählt wurde, verbleibt das Atom offenbar bei großer Verstimmung in diesem Zustand. Somit verhält sich das wechselwirkende System aus Atom und Feld bei großer Verstimmung wie ein nicht-wechselwirkendes System.

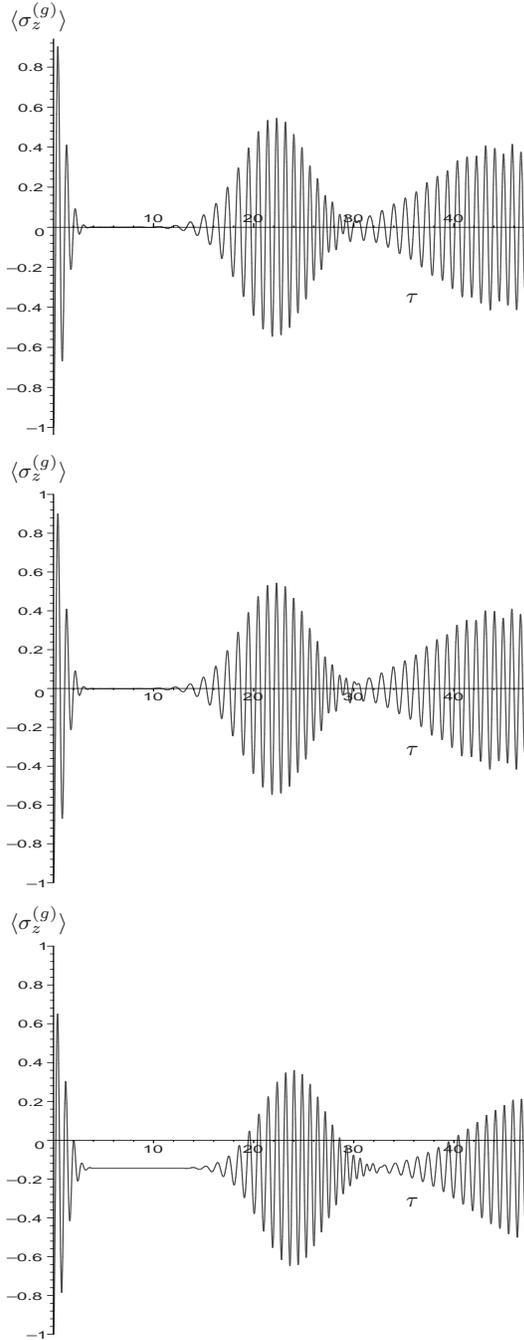
Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich auch eine natürliche Skala, wann Verstimmungs-Effekte berücksichtigt werden müssen. Um  $\delta^2 > 1$  zu erreichen muß  $\Delta > 2g$  werden. Sobald die Verstimmung  $\Delta$  größer als zweimal die Vakuum-Rabifrequenz wird, treten diese Effekte in Erscheinung. Die Verstimmung äußert sich offensichtlich dann in einer Unterdrückung der Wechselwirkung, wobei die Frequenz der verbleibenden Zeitentwicklung erhöht wird.



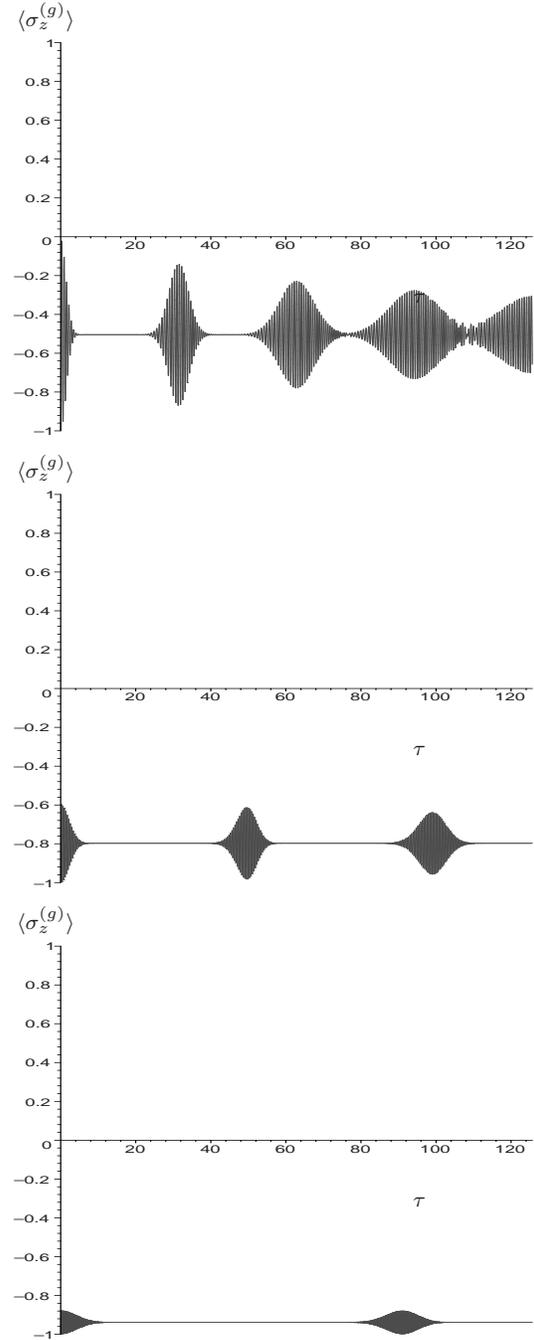
**Abb. 5.11:** Oben: Spur  $\text{tr}(\rho_A^2)$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz.



**Abb. 5.12:** Oben:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung und Parameter wie links stehend,  $\Delta/2\pi = 250$  kHz und verlängerter Zeitbereich. Mitte:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\text{tr}(\rho_A^2)$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz.



**Abb. 5.13:** Oben:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz.



**Abb. 5.14:** Oben:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz,  $\bar{n} = 25$  sowie die Kopplungen  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz.

### 5.2.3 Polarisation mit Verstimmung

Abschließend wird auch die Observable Polarisation mit Verstimmung untersucht. Die Komponenten der Polarisation sind definiert durch (siehe auch Abschnitt 6.3)

$$\langle \sigma_x^{(g)} \rangle = 2\text{Re}\{\langle \sigma_+^{(g)} \rangle\} \quad , \quad \langle \sigma_y^{(g)} \rangle = 2\text{Im}\{\langle \sigma_+^{(g)} \rangle\} \quad .$$

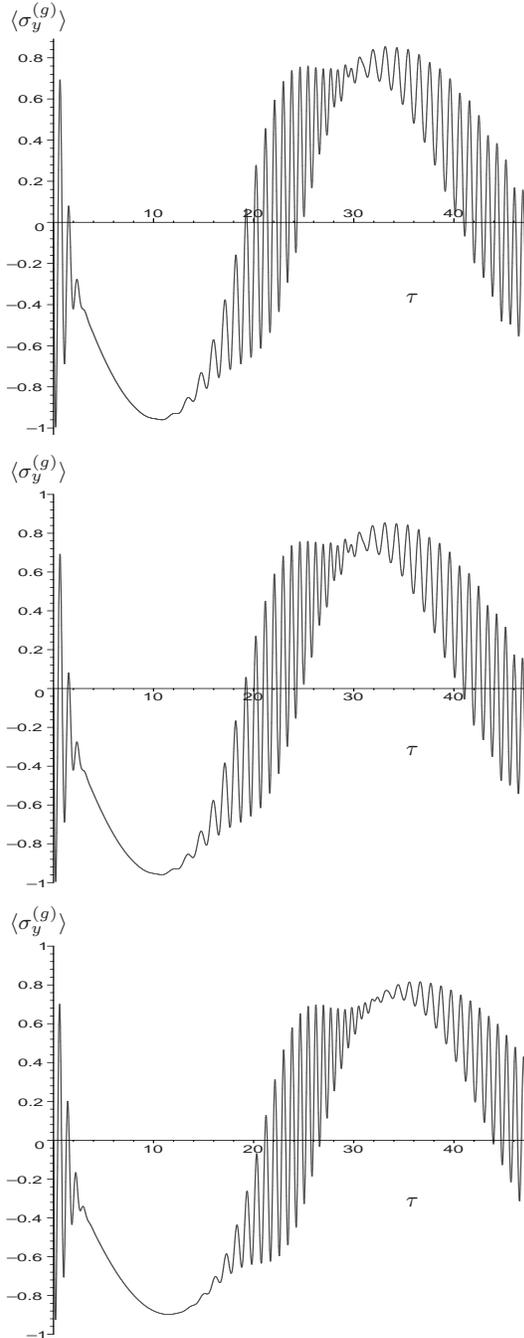
Für den Atom-Feld Anfangszustand  $|g; \eta, 0\rangle$  ergeben sich  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  und  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  zu

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^{(g)} \rangle &= 2e^{-\bar{n}} \delta \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1/2}}{\sqrt{(2j)!(2j+1)!}} d_{j,m}^{(j)} d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \frac{\sin(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{\sqrt{j+m+\delta^2} \sqrt{j+m+1+\delta^2}} \sqrt{j+m+1} \quad , \quad (5.38) \end{aligned}$$

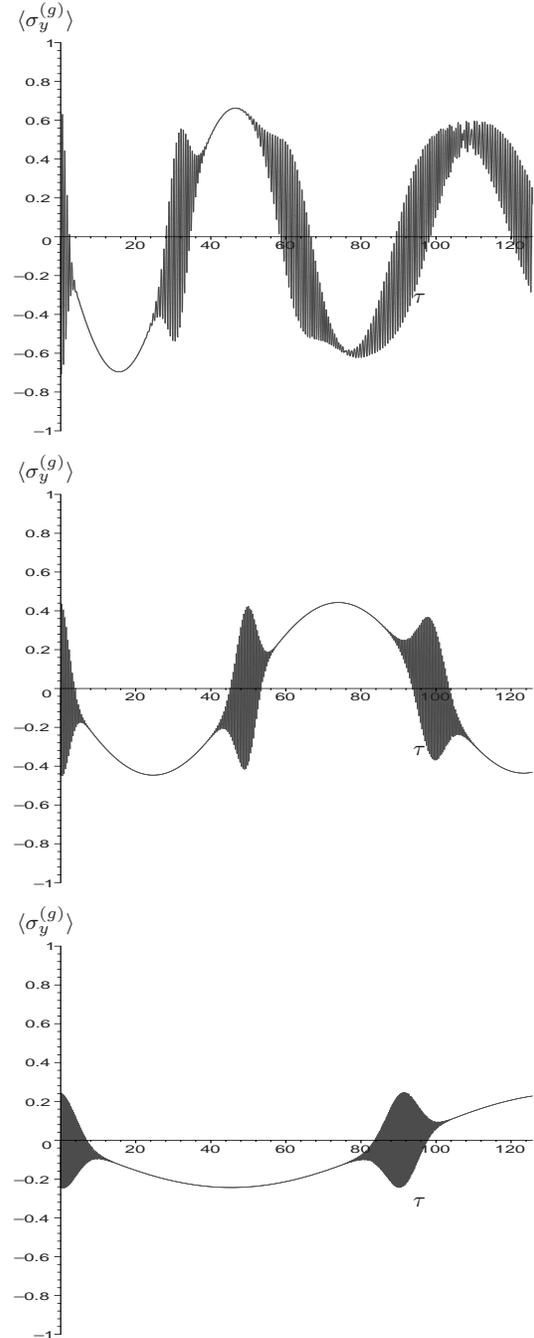
$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^{(g)} \rangle &= -2e^{-\bar{n}} \sum_{j,m} \frac{\bar{n}^{2j+1/2}}{\sqrt{(2j)!(2j+1)!}} d_{j,m}^{(j)} d_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^{(j+\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \frac{\cos(\tau\sqrt{j+m+\delta^2}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1+\delta^2})}{\sqrt{j+m+1+\delta^2}} \sqrt{j+m+1} \quad . \quad (5.39) \end{aligned}$$

Dies wird wiederum in den Abbildungen 5.15 und 5.16 für  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  und in den Abbildungen 5.17 und 5.18 für  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  veranschaulicht. Es zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie für die Inversion. Die Polarisation  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  wird umso stärker unterdrückt, je größer die Verstimmung ist. Für  $\Delta/2\pi = 1$  MHz oszilliert der Erwartungswert der einhüllenden Schwingung mit kleiner Amplitude um 0. Die Frequenz der darunter liegenden Oszillation nimmt jedoch stark zu.

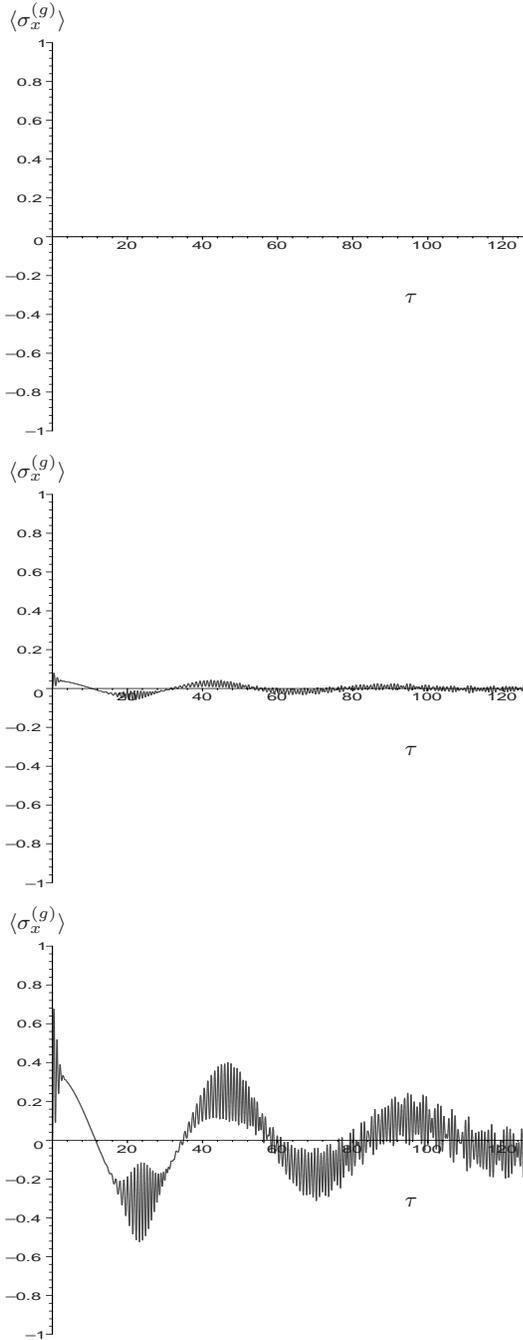
Die Komponente  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  verhält sich etwas anders. Ohne Verstimmung ist ihr Erwartungswert 0. Durch vergrößern der Verstimmung ergibt sich dann ein ähnliches Verhalten wie bei  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$ . Schließlich ist das Verhalten für große Verstimmung, bis auf die Phasenlage der Schwingung, identisch mit  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$ .



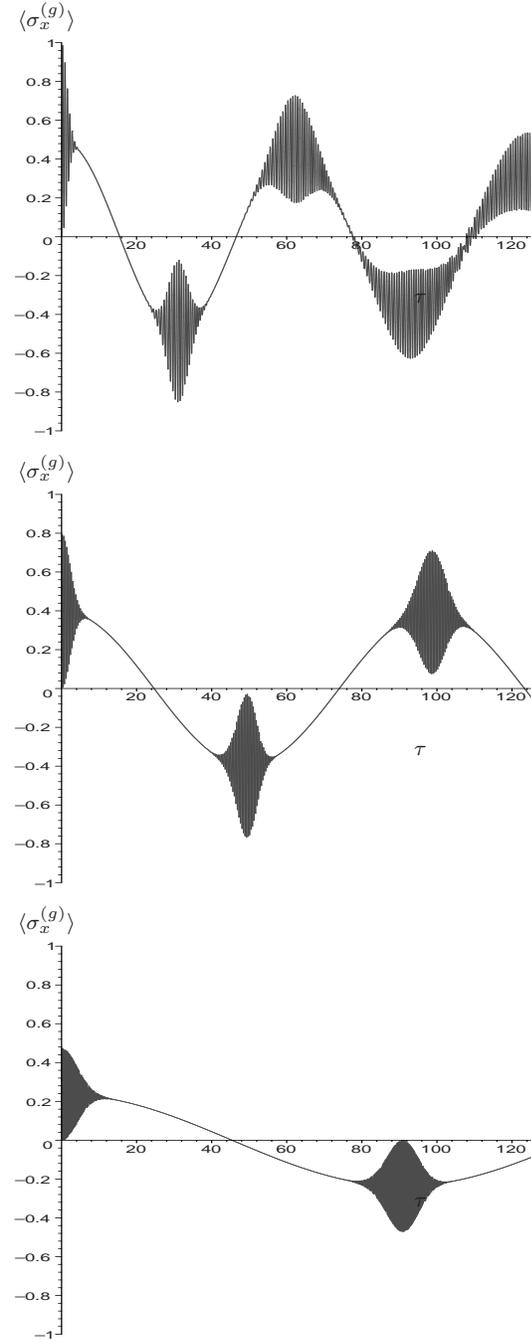
**Abb. 5.15:** Oben:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  als Funktion der Zeit  $\tau$  für den Anfangszustand  $|g\rangle|\eta, 0\rangle$ ,  $\bar{n} = 25$  sowie  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz.



**Abb. 5.16:** Oben:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz,  $\bar{n} = 25$  sowie die Kopplungen  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_y^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz.



**Abb. 5.17:** Oben:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  zum Vergleich ohne Verstimmung. Mitte:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 10$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 100$  kHz.



**Abb. 5.18:** Oben:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 250$  kHz,  $\bar{n} = 25$  sowie die Kopplungen  $g_1 = g_2$ . Mitte:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 500$  kHz. Unten:  $\langle \sigma_x^{(g)} \rangle$  mit Verstimmung  $\Delta/2\pi = 1$  MHz.

# 6. ZEITENTWICKLUNG DES ZWEI-NIVEAU-SYSTEMS

Im vorangegangenen Kapitel wurden bereits Observablen des Atoms im Rahmen der Diskussion zur Verschränkung von Atom und Feldmoden untersucht. In diesem Kapitel werden die Atomobservablen systematisch eingeführt und untersucht. Dabei werden die Observablen Inversion und das induzierte Dipolmoment des Atoms diskutiert.

## 6.1 Inversion

Der Inversionsoperator kann für ein Zwei-Niveau-System ( $|e\rangle, |g\rangle$ ) folgendermaßen definiert werden:

$$\sigma_z := |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad . \quad (6.1)$$

Die Bedeutung dieses Operators wird direkt klar, wenn er auf die beiden Niveaustände angewendet wird:

$$\sigma_z |e\rangle = |e\rangle \quad , \quad (6.2)$$

$$\sigma_z |g\rangle = -|g\rangle \quad . \quad (6.3)$$

Offenbar liefert dieser Operator den Wert  $+1$  wenn sich das Atom im angeregten Niveau befindet und  $-1$  wenn es sich im Grundzustand befindet. Die Erwartungswerte werden dann den Wertebereich  $-1 \leq \langle \sigma_z \rangle \leq 1$  haben. Der Operator zeigt also auf einer Skala zwischen  $-1$  und  $1$  in welchem Anregungsniveau sich das Atom befindet.

Ausgehend von dem Anfangszustand des Atom-Feld-Systems  $|a; \xi\rangle$ ,  $a = e, g$ , werden die Erwartungswerte für  $\langle \sigma_z^{(a)} \rangle$  berechnet. Weitere Spezialfälle können dann durch konkrete Wahl der Entwicklungskoeffizienten in den Feldzuständen  $|\xi\rangle$  realisiert werden. Die Berechnung von Atomobservablen kann im Quasi-Moden-Bild analog zum Ein-Moden-Fall erfolgen. Dazu wird die reduzierte Atomdichtematrix gemäß

$$\rho_A^{(a)}(t) = \text{tr}_F [U |a; \xi\rangle\langle a; \xi| U^\dagger] \quad , \quad (6.4)$$

berechnet. Der Feldzustand  $|\xi\rangle$  kann wie folgt in das Quasi-Moden-Bild transformiert werden:

$$|\xi\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} |j, m\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j}^j \tilde{b}_{j,m} D_{m',m}^{(j)\dagger} |j, m'\rangle \quad , \quad (6.5)$$

wobei auf der rechten Seite die Transformation in Gl. (2.34) verwendet wurde. Damit ergibt sich der Zustand  $|\xi\rangle$  zu

$$|\xi\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m'=-j}^j \tilde{b}_{j,m'} |j, m'\rangle \quad , \quad (6.6)$$

wobei die Definition der Quasi-Moden-Entwicklungskoeffizienten durch

$$\tilde{b}_{j,m'} = \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} D_{m',m}^{(j)\dagger} \quad , \quad (6.7)$$

eingeführt wurde. Die Zeitentwicklung des Zustandes  $U|a; \xi\rangle$  lautet dann im Falle  $a = e$ ,

$$\begin{aligned} U|e; \xi\rangle &= U_{ee}|e; \xi\rangle + U_{ge}|g; \xi\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m'=-j}^j \tilde{b}_{j,m'} \cos(\tau\sqrt{j+m'+1}) |e; j, m'\rangle \\ &\quad - i \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m'=-j}^j \tilde{b}_{j,m'} \sin(\tau\sqrt{j+m'+1}) |g; j + \frac{1}{2}, m' + \frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (6.8)$$

und für den Fall  $a = g$ ,

$$\begin{aligned} U|g; \xi\rangle &= U_{eg}|e; \xi\rangle + U_{gg}|g; \xi\rangle \\ &= -i \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m'=-j}^j \tilde{b}_{j,m'} \sin(\tau\sqrt{j+m'}) |e; j - \frac{1}{2}, m' - \frac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m'=-j}^j \tilde{b}_{j,m'} \cos(\tau\sqrt{j+m'}) |g; j, m'\rangle \quad . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Der Erwartungswert für die Inversion ergibt für den ersten Fall (Atom-Feld-Anfangszustand  $|e; \xi\rangle$ ) ein sehr kompaktes Ergebnis

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left| \tilde{b}_{j,m} \right|^2 \cos(2\tau\sqrt{j+m+1}) \quad , \quad (6.10)$$

wobei  $|\tilde{b}_{00}|^2 = 1$  ist. Für den Atom-Feld-Anfangszustand  $|g; \xi\rangle$  ergibt sich

$$\langle \sigma_z^{(g)} \rangle = - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left| \tilde{b}_{j,m} \right|^2 \cos(2\tau \sqrt{j+m}) \quad . \quad (6.11)$$

Als Spezialfall der vorstehenden Ergebnisse soll als Anfangszustand für das Atom-Feld-System zur Zeit  $\tau = 0$  der Zustand  $|e; N, 0\rangle = |e; N/2, N/2\rangle_S$  gegeben sein. Um den Erwartungswert für die Inversion zu berechnen, müssen nur die Entwicklungskoeffizienten, die in Gl. (6.10) und Gl. (6.11) auftreten, geeignet gewählt werden. Da der Anfangszustand des Atom-Feldes nur einen Term enthält, bedeutet dies, dass in der Entwicklung in Gl. (2.34) nur der eine Koeffizient  $\tilde{b}_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}} = 1$  von null verschieden ist. Das bedeutet für die Koeffizienten in Gl. (6.7), dass  $\tilde{b}_{\frac{N}{2}, m} = D_{m, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})\dagger}$  gesetzt werden muss. Damit lassen sich die Erwartungswerte in Gl. (6.10) und Gl. (6.11) explizit wie folgt, für die beiden Fälle  $a = e$ ,

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \sum_{m=-N/2}^{N/2} \left| D_{\frac{N}{2}, m}^{(\frac{N}{2})} \right|^2 \cos(2\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 1}) \quad (6.12)$$

sowie für den Fall, dass sich das Atom zu Beginn im Grundzustand aufhält, d.h.  $a = g$ ,

$$\langle \sigma_z^{(g)} \rangle = - \sum_{m=-N/2}^{N/2} \left| D_{\frac{N}{2}, m}^{(\frac{N}{2})} \right|^2 \cos(2\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m}) \quad , \quad (6.13)$$

angeben.

Um den Zeitverlauf veranschaulichen zu können, sollen als Beispiele zuerst die Atom-Feld-Anfangszustände  $|e; 1, 0\rangle = |e; 1/2, 1/2\rangle_S$  sowie  $|g; 1, 0\rangle = |g; 1/2, 1/2\rangle_S$  gewählt werden. Es ergibt sich explizit für den Erwartungswert aus Gl. (6.12)

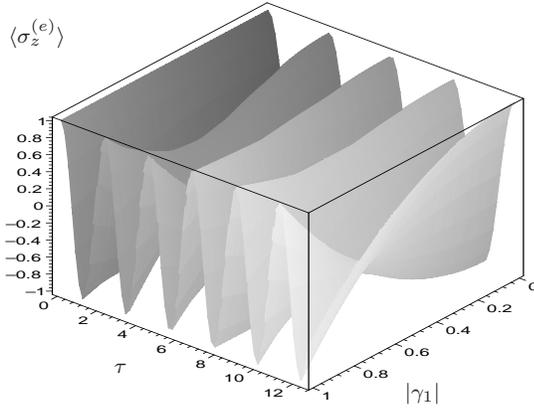
$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^{(e)} \rangle &= \left| D_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \right|^2 \cos(2\tau) + \left| D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \right|^2 \cos(2\tau\sqrt{2}) \\ &= |\gamma_2|^2 \cos(2\tau) + |\gamma_1|^2 \cos(2\tau\sqrt{2}) \quad . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Der Erwartungswert oszilliert mit der Überlagerung der beiden Frequenzen  $2g$  und  $2g\sqrt{2}$ . Aus Gl. (6.13) ergibt sich

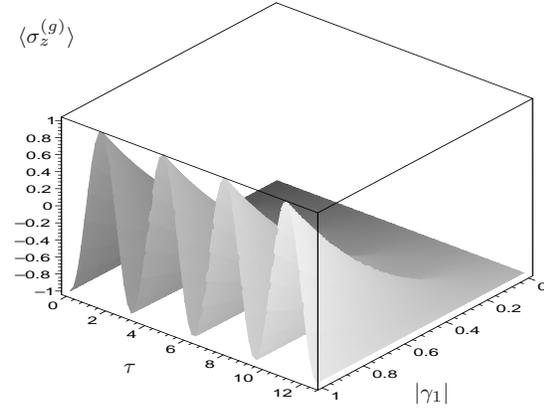
$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^{(g)} \rangle &= - \left| D_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \right|^2 - \left| D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} \right|^2 \cos(2\tau) \\ &= -|\gamma_2|^2 - |\gamma_1|^2 \cos(2\tau) \quad . \end{aligned} \quad (6.15)$$

In diesem Erwartungswert tritt nur die eine Oszillationsfrequenz  $2g$  auf.

Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen beide Erwartungswerte als Funktion von  $\gamma_1$  und  $\tau$ . Es läßt sich an den beiden Spezialfällen bereits erkennen, dass die Zahl der Überlagerungsfrequenzen mit  $N + 1$  für den Anfangszustand  $|e; N, 0\rangle$  bzw. mit  $N$  für den Anfangszustand  $|g; N, 0\rangle$  ansteigt.

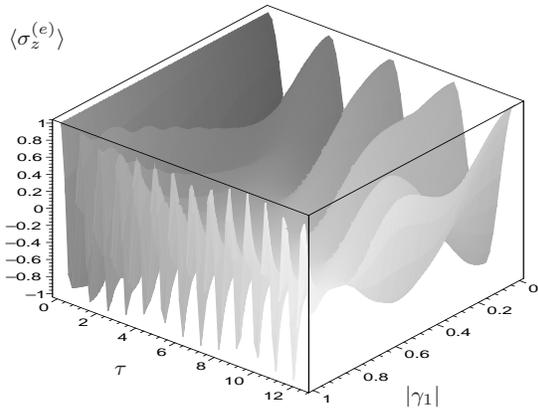


**Abb. 6.1:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

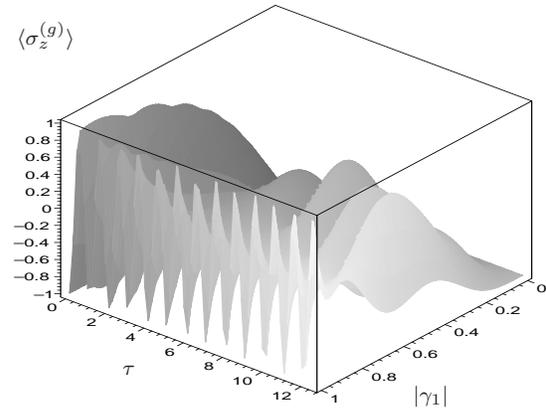


**Abb. 6.2:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 1, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

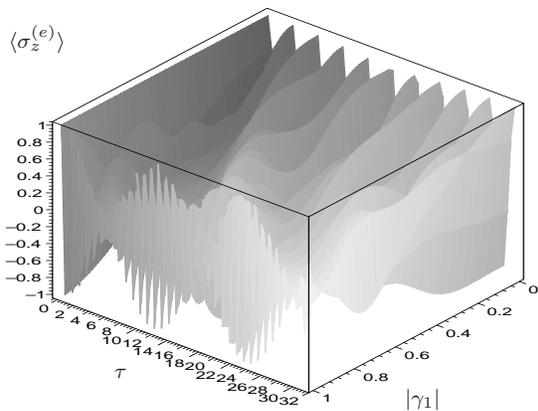
Für größere  $N$  im Anfangszustand, werden folglich mehr Frequenzen zur Überlagerung gebracht und es ergibt sich eine deutlich schnellere Oszillation. Die Abb. 6.3 und Abb. 6.4 lassen des Weiteren erkennen, dass die Amplituden der Oszillationen mit fortschreitender Zeit abnehmen. Dies sind bereits Anzeichen eines neuen Phänomens, dass die Oszillationen in Abhängigkeit von der Wechselwirkungszeit kollabieren und wieder aufleben. Dieses „collapse- und revival“-Phänomen ist ein reines Quantenphänomen. Durch den diskreten Charakter der Summen dephasieren nach einiger Zeit die oszillierenden Terme. Einige Zeit später können die Terme wieder gegenseitig in Phase kommen und die anfänglich kohärenten Oszillationen leben wieder auf. Dies geschieht allerdings nicht perfekt, da die Oszillationsfrequenzen inkommensurabel sind. Man kann diesen Effekt als typischen Quanteneffekt bezeichnen, der aus der Diskretheit und Inkommensurabilität der Summenterme folgt. Abb. 6.5 sowie Abb. 6.6 zeigen einen längeren Zeitbereich, auf dem sich diese Eigenschaft besser erkennen läßt. Je mehr Photonen im Anfangszustand vorhanden sind umso mehr Frequenzen tragen in den Erwartungswerten bei. Daher werden für große  $N$  die Einhüllenden der kolla-



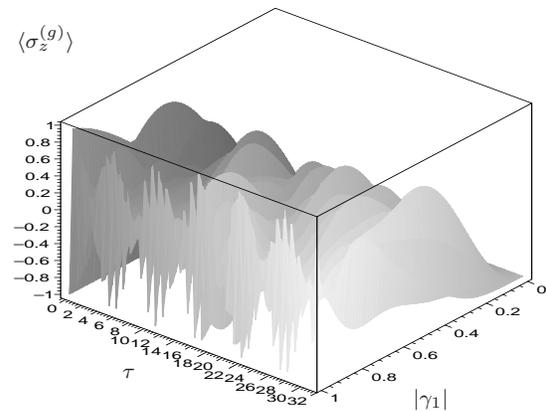
**Abb. 6.3:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.4:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$  ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

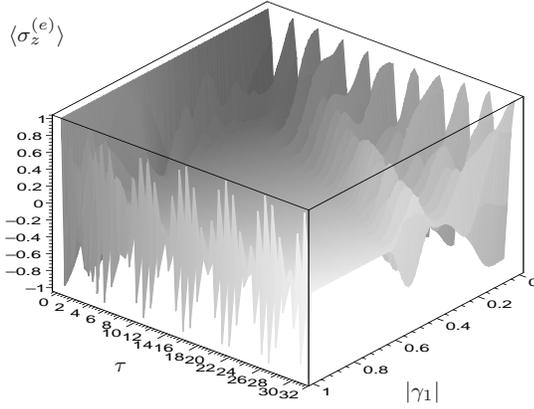


**Abb. 6.5:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

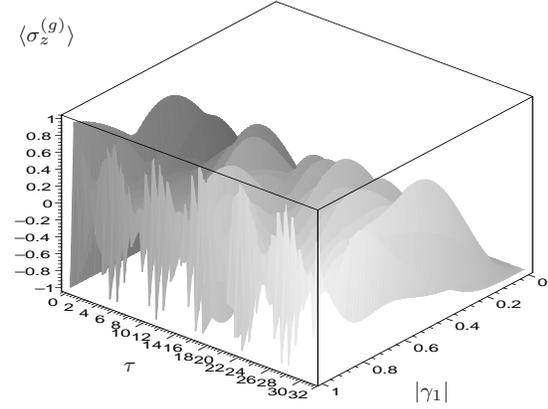


**Abb. 6.6:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 10, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

bierenden und wiederauflebenden Oszillationen immer schärfer. Die Abbildungen 6.7 und 6.8 für  $N = 100$  zeigen das deutlich. Außerdem zeigt sich im Falle von  $N = 500$ , der in den Abbildungen 6.9 und 6.10 dargestellt ist, dass die Frequenz der „collapse“ und „revivals“ stark zugenommen hat und des Weiteren die Einhüllenden noch schärfer ausgeprägt sind. Um die Zeitabhängigkeit des Effektes deutlicher hervorzuheben wird



**Abb. 6.7:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 100, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.8:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 100, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .

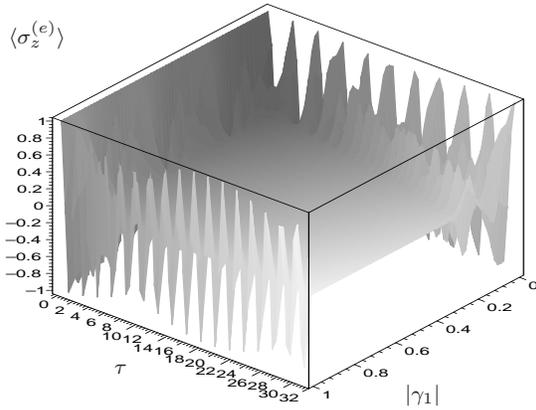
in der Abb. 6.11 die Kopplungskonstante auf einen festen Wert  $\gamma_1 = 1/\sqrt{2}$  gesetzt, was gleicher Kopplung beider Moden an das Atom bedeutet ( $g_1 = g_2$ ).

## 6.2 Vergleich mit dem Ein-Moden-JCM

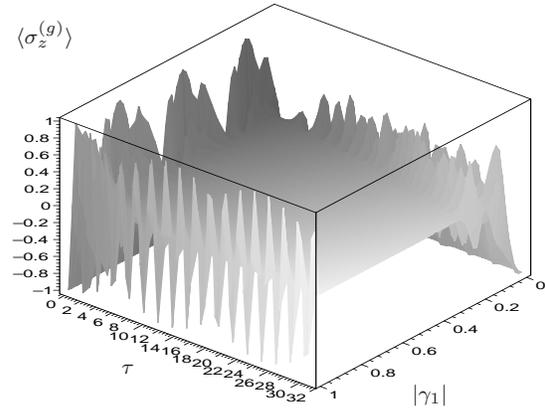
An dieser Stelle ist es angebracht, die Unterschiede zwischen dem Ein-Moden-JCM und dem Zwei-Moden-JCM genauer herauszuarbeiten. Wenn im Ein-Moden-JCM von dem Atom-Feld-Anfangszustand  $|e; \xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |e; n\rangle$  ausgegangen wird, so ergibt der Erwartungswert für die Inversion

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \cos(2\tau\sqrt{n+1}) \quad . \quad (6.16)$$

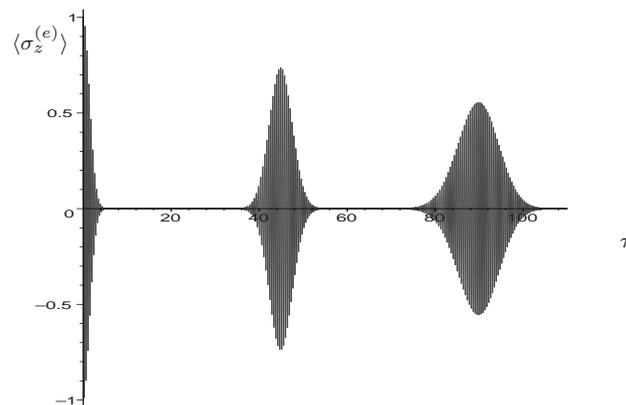
Dies bedeutet, dass jede Besetzungszahl der Mode eine Rabi-Frequenz  $\omega_n = 2g\sqrt{n+1}$  in der Gl. (6.16) beiträgt. Für den Atom-Feld-Anfangszustand  $|e; N\rangle$ , ( $b_n = \delta_{n,N}$ ),



**Abb. 6.9:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 500, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.10:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(g)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|g; 500, 0\rangle$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$  und der Kopplung  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.11:** Erwartungswert der Inversion  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$ , ausgehend von dem Anfangszustand  $|e; 100, 0\rangle$  und fester Kopplungskonstante  $|\gamma_1| = 1/\sqrt{2}$ , als Funktion der Wechselwirkungszeit  $\tau = gt$ .

erhält man für die Inversion

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \cos(2\tau\sqrt{N+1}) \quad . \quad (6.17)$$

Im Zwei-Moden-JCM lässt sich vermöge der Definition

$$|b_n|^2 := \sum'_{j=n/2}^{\infty} \left| \tilde{b}_{j,n-j} \right|^2, \quad n := j + m \quad , \quad (6.18)$$

der Erwartungswert  $\langle \sigma_z^{(e)} \rangle$  in Gl. 6.10 formal wie im Ein-Moden-JCM in Gl. (6.16) schreiben:

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum'_{j=n/2}^{\infty} \left| \tilde{b}_{j,n-j} \right|^2 \cos(2\tau\sqrt{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \cos(2\tau\sqrt{n+1}) \quad . \quad (6.19)$$

Die Vakuum Rabi-Oszillation ergibt sich aus dem Erwartungswert für den Anfangszustand  $|e; 0, 0\rangle = |e; 0, 0\rangle_S$  zu

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \cos(2\tau) \quad .$$

Sie ist identisch mit dem Ein-Moden-JCM.

Wird der Anfangszustand  $|e; N, 0\rangle = |e; N/2, N/2\rangle_S$  betrachtet, so ergibt sich, da  $\tilde{b}_{\frac{N}{2}, \frac{N}{2}} = 1$  und somit  $\tilde{b}_{\frac{N}{2}, m} = D_{m, \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})\dagger}$  folgt, der Erwartungswert zu

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \sum_{n=0}^N \left| \tilde{b}_{\frac{N}{2}, n - \frac{N}{2}} \right|^2 \cos(2\tau\sqrt{n+1}) = \sum_{n=0}^N \left| D_{\frac{N}{2}, n - \frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})} \right|^2 \cos(2\tau\sqrt{n+1}) \quad . \quad (6.20)$$

Der Vergleich mit dem Ergebnis des Ein-Moden-JCMs in Gl. (6.17) zeigt deutlich den Unterschied zum Zwei-Moden-JCM. Während im Ein-Moden-JCM für das vorstehende Beispiel die Mode nur eine Rabi-Frequenz beisteuert, erhält man im Zwei-Moden-JCM eine Überlagerung aus  $N+1$  Rabi-Frequenzen. Das „collapse- und revival“-Phänomen, das im Ein-Moden-JCM erst auftritt wenn man von einer Überlagerung des Atom-Feld-Anfangszustandes ausgeht, erhält man im Zwei-Moden-JCM bereits für einen nicht überlagerten Anfangszustand mit  $N$  Photonen in den Moden. Die größere Komplexität der Zeitentwicklung von Observablen gegenüber dem Ein-Moden-JCM zeigt sich für die Inversion somit deutlich.

Um den Charakter des Zwei-Moden-JCMs noch klarer zum Ausdruck zu bringen, ist es hilfreich sich des Quasi-Moden-Bildes zu bedienen. Wenn in Gl. (6.19) der Fall  $n=0$  betrachtet wird, so reduziert sich die Doppelsumme auf eine Einfachsumme,

$$\langle \sigma_z^{(e)} \rangle = \sum'_{j=0}^{\infty} \left| \tilde{b}_{j, -j} \right|^2 \cos(2\tau) \quad . \quad (6.21)$$

Die Koeffizienten  $\tilde{b}_{j,-j}$  sind die Entwicklungskoeffizienten des Anfangs-Feldzustandes zur Zeit  $\tau = 0$ , die im Quasi-Moden-Bild den folgenden Quasi-Modenzuständen vorstehen:

$$|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |0, 2\rangle, \dots, |0, N\rangle, \dots \quad (6.22)$$

Alle Quasi-Modenzustände die 0 Photonen in Quasi-Mode 1 haben, führen also auf die gleiche Vakuum-Rabi-Frequenz  $\omega_0 = 2g$ . Dies ist aber gerade die Aussage, dass sich das Zwei-Moden-JCM im Quasi-Moden-Fall wie ein effektives Ein-Moden-JCM verhält, denn nur Quasi-Mode 1 tritt in dem Wechselwirkungsoperator in Gl. (2.17) auf. Wird  $n = 1$  gesetzt so läuft die Summation über  $1/2 \leq j \leq \infty$  (hier sind für  $j$  sowohl halb als auch ganzzahlige Werte anzunehmen!). Die zu  $n = 1$  gehörenden Quasi-Modenzustände sind dementsprechend aus der Menge

$$|1, 0\rangle, |1, 1\rangle, |1, 2\rangle, \dots, |1, N\rangle, \dots \quad , \quad (6.23)$$

welche alle die gleiche Rabi-Frequenz  $\omega_1 = 2g\sqrt{2}$  besitzen. Die Einführung der neuen Variablen  $n := j + m$  entspricht letztlich nur einer Umordnung der Summenterme in dem Ausdruck in Gl. (6.19). Dabei wird aber der Charakter des Quasi-Moden-Bildes in den Vordergrund gerückt, was letztlich den Vergleich mit den Ergebnissen des Ein-Moden-JCMs leichter ermöglicht.

## 6.3 Atomares Dipolmoment und Polarisation

Unter bestimmten Bedingungen kann im Atom ein Dipolmoment induziert werden. Das induzierte Dipolmoment entsteht zwischen den zwei Atomniveaus  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  durch die Wechselwirkung mit den Feldmoden und ändert sich folglich in Abhängigkeit von der Wechselwirkungszeit. Zur Berechnung des induzierten Dipolmomentes werden zuerst die nicht-Hermiteschen Operatoren

$$d_- = \mathcal{D}_{ge}\sigma_- \quad , \quad d_+ = \mathcal{D}_{eg}\sigma_+ \quad , \quad (6.24)$$

eingeführt. Die statischen Dipolübergangsmatrixelemente  $\mathcal{D}_{ge}, \mathcal{D}_{eg}$  sind dabei wie folgt definiert

$$\mathcal{D}_{ge} = \langle \Psi_g | e\vec{x} | \Psi_e \rangle, \quad \mathcal{D}_{eg} = \langle \Psi_e | e\vec{x} | \Psi_g \rangle \quad , \quad (6.25)$$

wobei  $|\Psi_e\rangle$  und  $|\Psi_g\rangle$  die Anfangs- bzw. Endzustandswellenfunktionen der beiden Atomniveaus sind. Hierbei kann es sich für den Anfangszustand z.B. um die  $2p$ -Wellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom handeln, die bei einem Dipolübergang in die

1s-Wellenfunktion des Grundzustandes übergeht. Die zugehörigen Operatoren sind  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$ , definiert durch

$$\sigma_+ := |e\rangle\langle g| \quad , \quad \sigma_- := |g\rangle\langle e| \quad . \quad (6.26)$$

Für die Komponenten des induzierten atomaren Dipolmomentes werden die Hermiteschen Operatoren

$$d_x = d_- + d_+ \quad , \quad d_y = i(d_- - d_+) \quad , \quad (6.27)$$

gebildet. Deren Erwartungswerte ergeben sich dann zu

$$\langle d_x \rangle = \langle d_- \rangle + \langle d_+ \rangle = \langle d_- \rangle + \langle d_- \rangle^* = 2\text{Re}\langle d_- \rangle = 2\text{Re}\{\mathcal{D}_{ge}\langle \sigma_- \rangle\} \quad , \quad (6.28)$$

$$\langle d_y \rangle = i(\langle d_- \rangle - \langle d_+ \rangle) = i(\langle d_- \rangle - \langle d_- \rangle^*) = -2\text{Im}\langle d_- \rangle = -2\text{Im}\{\mathcal{D}_{ge}\langle \sigma_- \rangle\}. \quad (6.29)$$

Offensichtlich sind die Komponenten des induzierten atomaren Dipolmomentes proportional zum statischen Dipolmoment des Atoms (zur Berechnung statischer Dipolmomente im JCM siehe [31]). Für die weitere Diskussion werden nur die Hermiteschen Operatoren für die atomaren Kohärenzen  $\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-$  und  $\sigma_y = i(\sigma_- - \sigma_+)$  betrachtet, da deren Erwartungswerte den Komponenten des induzierten Dipolmomentes proportional sind. Im Folgenden werden die Kohärenzen auch oft als Polarisation des Atoms bezeichnet.

Um zu erkennen, wann sich ein induziertes Dipolmoment ausbildet, sollen zuerst die Eigenzustände von  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  betrachtet werden. Eigenzustand zu  $\sigma_x$  ist der auf eins normierte Zustand  $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ . Für den Eigenzustand zu  $\sigma_y$  findet man  $(|e\rangle + i|g\rangle)/\sqrt{2}$ . Die Hermiteschen Operatoren  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  messen also ob das Atom in einer kohärenten Überlagerung von  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  ist. Nur dann wird ein von null verschiedener Erwartungswert  $\langle \sigma_x \rangle$  oder  $\langle \sigma_y \rangle$  auftreten. Die Zeitentwicklung  $U$  führt allerdings nicht alle Anfangszustände des Atom-Feld-Systems in Zustände der Art

$$(\alpha|e\rangle + \beta|g\rangle) |\Psi_F\rangle \quad , \quad (6.30)$$

über. Den Anfangszustand  $|e; N, 0\rangle = |e; N/2, N/2\rangle_S$  führt die Zeitentwicklung über in

$$\begin{aligned} U |e; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle &= U_{ee} |e; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle + U_{ge} |g; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle \\ &= \cos(\tau\sqrt{N+1}) |e; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle - i \sin(\tau\sqrt{N+1}) |g; \frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}\rangle \quad , \end{aligned} \quad (6.31)$$

welcher keine kohärente Überlagerung im Atom aufweist. Der Atom-Feld-Anfangszustand  $|e\rangle(|N, 0\rangle + |N-1, 0\rangle)/\sqrt{2}$  liefert hingegen einen nicht verschwindenden Beitrag zu  $\langle\sigma_x\rangle$  da

$$\begin{aligned} U & |e\rangle(|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle + |\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\rangle) \\ &= U_{ee} |e; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle + U_{ge} |g; \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle + U_{ee} |e; \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\rangle + U_{ge} |g; \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\rangle \\ &= \left[ \cos(\tau\sqrt{N+1})|e\rangle - i \sin(\tau\sqrt{N})|g\rangle \right] |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle \\ &+ \cos(\tau\sqrt{N})|e\rangle |\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\rangle - i \sin(\tau\sqrt{N+1})|g\rangle |\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}\rangle \quad , \end{aligned} \quad (6.32)$$

in der Zeitentwicklung ein Beitrag der Form

$$\left[ \cos(\tau\sqrt{N+1})|e\rangle - i \sin(\tau\sqrt{N})|g\rangle \right] |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle \quad (6.33)$$

auftaucht, welcher eine kohärente Überlagerung im Atomsystem aufweist. Bei den Dipolmomenten ist also sorgfältig zwischen dem statischen Dipolmoment des Atoms, das ein nicht verschwindendes Dipolübergangsmatrixelement  $\mathcal{D}_{ge}$  zur Folge hat und dem durch das äußere Feld induzierten Dipolmoment zu unterscheiden. Das induzierte Dipolmoment ist proportional zum statischen Dipolmoment, aber nur vorhanden, wenn sich das Atom in einer kohärenten Überlagerung  $\alpha|e\rangle + \beta|g\rangle$  befindet.

In der folgenden Rechnung für  $\langle\sigma_+\rangle$  soll von dem allgemeinen Atom-Feld-Anfangszustand  $|e; \xi\rangle$  ausgegangen werden, mit  $|\xi\rangle = \sum_{j,m} \tilde{b}_{j,m} |j, m\rangle$ . Die Ergebnisse lauten

$$\langle\sigma_+^{(e)}\rangle = -i \sum_{j=1/2}' \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} \tilde{b}_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^* \cos(\tau\sqrt{j+m+1}) \sin(\tau\sqrt{j+m}) \quad , \quad (6.34)$$

$$\langle\sigma_-^{(e)}\rangle = i \sum_{j=1/2}' \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m}^* \tilde{b}_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \cos(\tau\sqrt{j+m+1}) \sin(\tau\sqrt{j+m}) \quad (6.35)$$

und für die Erwartungswerte im Zustand  $|g; \xi\rangle$

$$\langle\sigma_+^{(g)}\rangle = i \sum_{j=0}' \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m} \tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}^* \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) \quad , \quad (6.36)$$

$$\langle\sigma_-^{(g)}\rangle = -i \sum_{j=0}' \sum_{m=-j}^j \tilde{b}_{j,m}^* \tilde{b}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) \quad . \quad (6.37)$$

Daraus können die reellen Erwartungswerte für die Polarisation des Atoms berechnet werden. Die Komponenten der Dipolmomente lassen sich durch Summen- und Differenzbildung der vorstehenden Erwartungswerte gewinnen. Damit können die reellen

Erwartungswerte der Polarisation  $\langle \sigma_x^{(e)} \rangle$  und  $\langle \sigma_y^{(e)} \rangle$  für ein Atom, das sich zu Beginn der Wechselwirkung im Zustand  $|e\rangle$  befindet, berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^{(e)} \rangle &= \langle \sigma_+^{(e)} \rangle + \langle \sigma_-^{(e)} \rangle = \langle \sigma_-^{(e)} \rangle^* + \langle \sigma_-^{(e)} \rangle \\ &= -2 \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \text{Im}\{\tilde{b}_{j,m}^* \tilde{b}_{j-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\} \cos(\tau\sqrt{j+m+1}) \sin(\tau\sqrt{j+m}) \quad , \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^{(e)} \rangle &= i(\langle \sigma_-^{(e)} \rangle - \langle \sigma_+^{(e)} \rangle) = i(\langle \sigma_-^{(e)} \rangle - \langle \sigma_-^{(e)} \rangle^*) \\ &= -2 \sum_{j=1/2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \text{Re}\{\tilde{b}_{j,m}^* \tilde{b}_{j-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}\} \cos(\tau\sqrt{j+m+1}) \sin(\tau\sqrt{j+m}) \quad . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Befindet sich das Atom zur Zeit  $\tau = 0$  im Grundzustand, d.h. es soll der Atom-Feldzustand  $|g; \xi\rangle$  betrachtet werden, so lauten die Ergebnisse

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^{(g)} \rangle &= \\ &= -2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \text{Im}\{\tilde{b}_{j,m} \tilde{b}_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^*\} \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) \quad , \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^{(g)} \rangle &= \\ &= -2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \text{Re}\{\tilde{b}_{j,m} \tilde{b}_{j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}^*\} \cos(\tau\sqrt{j+m}) \sin(\tau\sqrt{j+m+1}) \quad . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Auch hier sollen die Ergebnisse nochmals für einen überschaubaren Spezialfall betrachtet werden. Um eine von null verschiedene atomare Polarisation zu erhalten, müssen im Feld-Anfangszustand wenigstens zwei verschiedene Besetzungszahlen auftauchen. Deshalb soll hier als Atom-Feld-Anfangszustand

$$|e\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, 0\rangle + |N+1, 0\rangle) \quad ,$$

gewählt werden. Die Ergebnisse hierfür lauten:

$$\langle \sigma_x^{(e)} \rangle = \sin(\varphi_1) \sum_{m=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N+1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} d_{\frac{N}{2}, m}^{(\frac{N}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 1}) \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 2}) \quad , \quad (6.42)$$

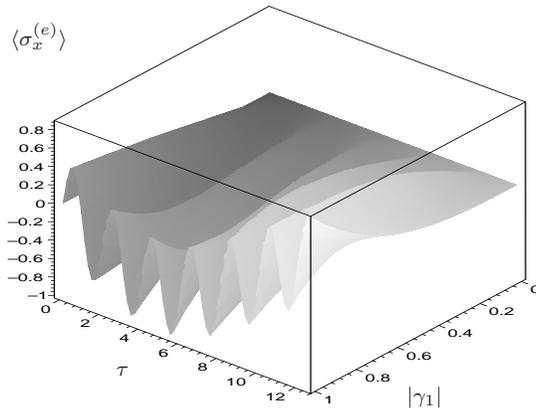
$$\langle \sigma_y^{(e)} \rangle = -\cos(\varphi_1) \sum_{m=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N+1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} d_{\frac{N}{2}, m}^{(\frac{N}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 1}) \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 2}) \quad (6.43)$$

sowie im Falle des Anfangszustandes  $|g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|N, 0\rangle + |N+1, 0\rangle)$

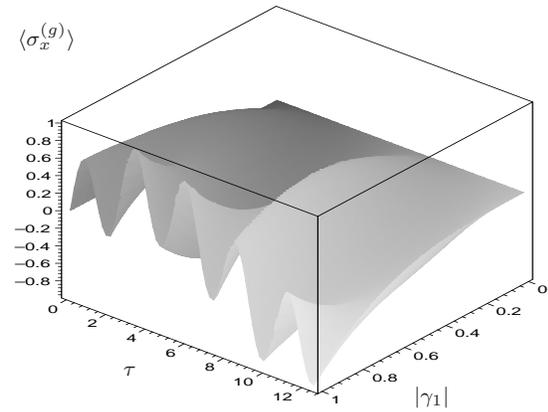
$$\langle \sigma_x^{(g)} \rangle = \sin(\varphi_1) \sum_{m=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N+1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} d_{\frac{N}{2}, m}^{(\frac{N}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 1}) \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m}) \quad , \quad (6.44)$$

$$\langle \sigma_y^{(g)} \rangle = -\cos(\varphi_1) \sum_{m=-N/2}^{N/2} d_{\frac{N+1}{2}, m+\frac{1}{2}}^{(\frac{N+1}{2})} d_{\frac{N}{2}, m}^{(\frac{N}{2})} \sin(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m + 1}) \cos(\tau \sqrt{\frac{N}{2} + m}) \quad . \quad (6.45)$$

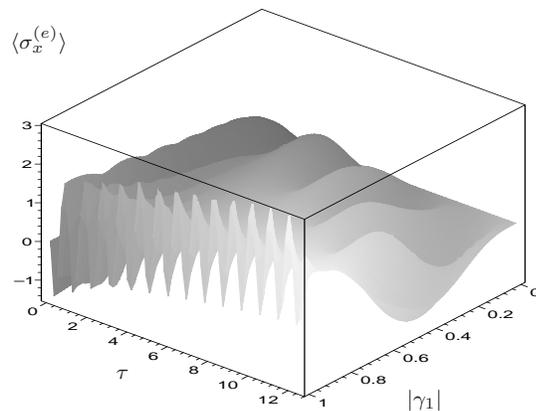
Dabei ist die Phase  $\varphi_1$  in Gl. (2.36) definiert. Die Abb. 6.12 und Abb. 6.13 zeigen die Abhängigkeit der Polarisation  $\langle \sigma_x^{(a)} \rangle$ ,  $a = e, g$ , von der Zeit und Kopplungskonstante  $|\gamma_1|$  für den Fall  $N = 1$ . Die Phase  $\varphi_1$  wird in den folgenden Abbildungen so gewählt, dass  $\sin \varphi_1 = 1$  gilt und damit die Oszillationsamplitude maximal wird. Die Abb. 6.14 und Abb. 6.15 zeigen die Abhängigkeit der Polarisation von der Zeit und Kopplungskonstante  $|\gamma_1|$  für den Fall  $N = 10$ . Die Phasenwahl ist dieselbe wie für den Fall  $N = 1$ . In den Abbildungen zeigt sich eine charakteristische Eigenschaft der Polarisation. Die Erwartungswerte setzen sich zusammen aus einer langsamen Grundschwingung, der eine hochfrequente Oszillation überlagert ist.



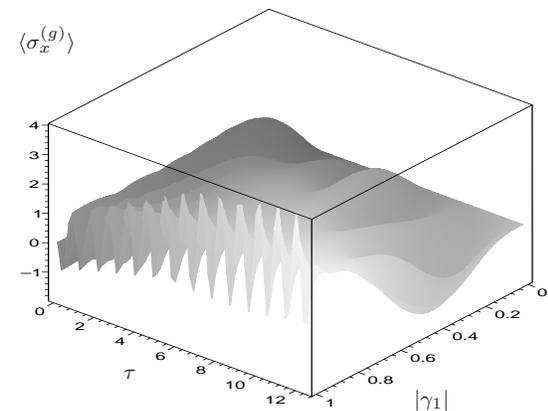
**Abb. 6.12:** Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand  $|e\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |2,0\rangle)$  als Funktion von  $\tau$  und  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.13:** Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand  $|g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |2,0\rangle)$  als Funktion von  $\tau$  und  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.14:** Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand  $|e\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|10,0\rangle + |11,0\rangle)$  als Funktion von  $\tau$  und  $|\gamma_1|$ .



**Abb. 6.15:** Erwartungswert der Polarisation, ausgehend von dem Anfangszustand  $|g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|10,0\rangle + |11,0\rangle)$  als Funktion von  $\tau$  und  $|\gamma_1|$ .

# 7. EXPERIMENTELLE REALISIERUNG DER ZWEI-MODEN-JCM- WECHSELWIRKUNG

In diesem Kapitel wird näher auf experimentelle Umsetzungen der vorstehenden Modellösungen eingegangen. Zuerst soll auf eine brauchbare Realisierung der Verschränkung von Feldmoden eingegangen werden. Ein wichtiges Augenmerk ist dabei auf die Modendefinition zu werfen. Da es sich bei der Verschränkung um ein nichtlokales Phänomen handelt, ist es für Zwecke der Quanteninformationstheorie notwendig, dass Verschränkung zwischen räumlich getrennten Systemen erzeugt wird. Dabei kann man z.B. zwei Systeme lokal wechselwirken lassen. Nach der Wechselwirkung, in der die beiden Systeme miteinander verschränkt werden, laufen die wechselwirkenden Partner auseinander und können dann an unterschiedlichen Orten detektiert werden. Dies ist das klassische Szenario, das schon Einstein, Podolsky und Rosen in dem berühmten Artikel „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“ [70] beschrieben haben.

In den vorstehenden Rechnungen wurde noch keine konkrete experimentelle Realisierung der beiden Feldmoden vorgeschlagen, außer dass es sich üblicherweise um zwei Polarisationsfreiheitsgrade handeln könnte, die meist durch einen Zwei-Moden-Resonator dargestellt werden. Wird das System durch einen Zwei-Moden-Resonator beschrieben, bedeutet das, dass die Verschränkung zwischen den Feldmoden, die verschiedene Polarisierungen aufweisen, erzeugt wird. Da aber die beiden Moden in einem Resonator lokalisiert sind, erreicht man es nicht, dass beide Moden räumlich getrennt werden können, um ein wirklich nichtlokales System zu erhalten. Ferner kann durch eine Redefinition der beiden Polarisationsmoden die Verschränkung zum Verschwinden gebracht werden, was sich in Gl. (3.52) ausdrückt, denn den Quasi-Moden-Zustand  $|N, 0\rangle\rangle$  würde man nicht mehr als verschränkten Zustand bezeichnen. Zur Verdeutli-

chung wird Gl. (3.52) für den Fall  $N = 1$  angeführt

$$|1, 0\rangle\rangle = D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} |1, 0\rangle + D_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} |0, 1\rangle \quad . \quad (7.1)$$

Die Wigner'schen D-Funktionen ergeben sich zu

$$D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} = |\gamma_1| e^{-i\varphi_1}, \quad D_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2})} = |\gamma_2| e^{-i\varphi_2} \quad . \quad (7.2)$$

Als Beispiel soll eine reelle Drehung um  $45^\circ$  angenommen werden. Es gilt dann  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/\sqrt{2}$ . Die Quasi-Moden und Moden-Operatoren in Gl. (2.15) sind dann durch

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2) \quad , \quad (7.3)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1 + a_2) \quad (7.4)$$

miteinander verbunden. Für die Erzeuger gilt dann offensichtlich

$$A_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + a_2^\dagger) \quad , \quad (7.5)$$

$$A_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1^\dagger + a_2^\dagger) \quad . \quad (7.6)$$

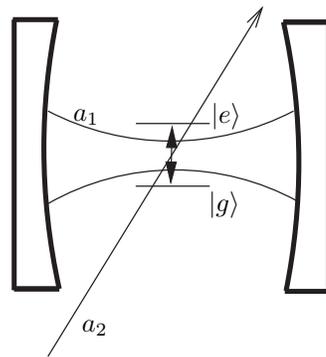
Die Operatoren  $a_1^\dagger$  und  $a_2^\dagger$  können sich nun beispielsweise auf die Erzeugung zweier linear vertikal und horizontal polarisierter Moden  $|\cdot\rangle = |\cdot\rangle_\uparrow |\cdot\rangle_\rightarrow$  beziehen. Dann wird aus dem Vakuumzustand  $|0, 0\rangle$  der folgende Zustand erzeugt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_\uparrow |0\rangle_\rightarrow + |0\rangle_\uparrow |1\rangle_\rightarrow) \quad . \quad (7.7)$$

Den Quasi-Moden  $A_1^\dagger$  und  $A_2^\dagger$  entsprechen dann um  $45^\circ$  gedrehte linear polarisierte Moden  $|\cdot\rangle\rangle_\nearrow$   $|\cdot\rangle\rangle_\searrow$  und es ergibt sich die Gleichung

$$|1\rangle\rangle_\nearrow |0\rangle\rangle_\searrow = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_\uparrow |0\rangle_\rightarrow + |0\rangle_\uparrow |1\rangle_\rightarrow) \quad . \quad (7.8)$$

Offensichtlich handelt es sich bei den zwei Quasi-Moden gegenüber der ursprünglichen Modenwahl um  $45^\circ$  gedrehte Moden. Insbesondere ist in obigem Beispiel nur die Quasi-Mode 1 besetzt. D.h. es handelt sich in der gedrehten Basis um ein einzelnes diagonal polarisiertes Photon, das man als nicht verschränkt bezeichnen muss. Offensichtlich ist es für die Beantwortung der Frage, ob ein Zustand verschränkt ist, wichtig, sich auf nichtlokale Modenfreiheitsgrade zu beziehen. Andernfalls läßt sich immer eine Redefinition der Moden finden, die den Grad der Verschränkung u.U. zum Verschwinden

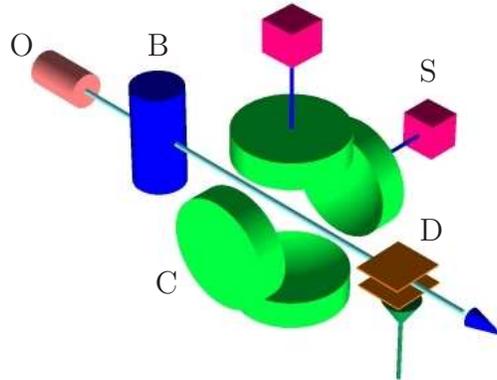


**Abb. 7.1:** Darstellung der experimentellen Realisierung der Zwei-Moden-Wechselwirkung zur Erzeugung von verschränkten Feldmoden. Dabei wechselwirkt ein Zwei-Niveau-System mit einer Resonatormode und gleichzeitig mit einer externen Mode. Dieser Aufbau wird durch den Zwei-Moden-JCM Hamiltonoperator beschrieben.

bringen kann. Zur Freiheit der Redefinition von Moden, die die ursprünglichen physikalischen Felder invariant lassen, siehe [71]. Wie der Grad von Verschränkung eines gegebenen Zustandes von den Redefinitionen der Moden abhängt, wird in dem Artikel von S.J. van Enk weitergehender untersucht [72].

Die Verschränkung zwischen Polarisationsfreiheitsgraden, die auf einen Resonator beschränkt sind, reicht also nicht aus, um eine sinnvolle Apparatur für Quanteninformationszwecke zu bauen. Ferner müssen die beiden Moden auch räumlich getrennt werden können. Dazu findet sich eine von Wilkens und Meystre vorgeschlagene Apparatur, die ursprünglich zur Messung von Quantenfeldern in Resonatoren gedacht war [73]. In diesem Artikel wurde allerdings die Beschreibung einer der Moden semiklassisch ausgeführt. Später wurde das Verfahren von Dutra und Knight auf zwei quantisierte Feldmoden, wie sie auch in der vorliegenden Arbeit verwendet werden, erweitert [74, 75]. Die vorgeschlagene Anordnung kann allerdings auch für die hier verfolgten Zwecke benutzt werden. Den schematischen Aufbau zeigt die Abb. 7.1.

Es handelt sich um einen Ein-Moden-Resonator, in den einzelne Atome gebracht werden. Zusätzlich zur Wechselwirkung des Atoms mit der Resonatormode wird das Atom durch ein externes Feld bestrahlt. Die Beschreibung der Wechselwirkung ist exakt dieselbe wie für einen Zwei-Moden-Resonator [75]. Allerdings erlaubt dieser Aufbau, dass sich die beiden Feldmoden nach der Wechselwirkung räumlich voneinander trennen lassen. Eine Redefinition der Polarisationsmoden ist somit nicht mehr sinnvoll möglich, da an den räumlich getrennten Moden jeweils nur noch lokale Transforma-



**Abb. 7.2:** Vorschlag für die experimentelle Realisierung der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung zur Erzeugung von verschränkten räumlich getrennten Feldmoden.

tionen vorgenommen werden können und nur klassische Kommunikation möglich ist, diese aber die nichtlokale Verschränkung nicht mehr beeinflussen kann. Das bedeutet, dass die räumlich getrennten Moden ein echtes ebit („entanglement bit“) [56] an Verschränkung aufweisen. Dies wird in dem Gebiet der Quanteninformation auch als Invarianz der Verschränkung unter LOCC (Local Operation and Classical Communication) bezeichnet.

In der Abb. 7.2 wird eine Skizze eines Zwei-Moden-Experimentes im Mikrowellenbereich gezeigt. Dabei wurde die in [20] beschriebene Anordnung um zwei zusätzliche um  $90^\circ$  versetzte Spiegel C erweitert. Es werden Rubidium-Atome, die aus dem Ofen O austreten, in dem Kasten B in angeregte zirkuläre Rydbergzustände  $|e\rangle$  mit der Hauptquantenzahl 51 versetzt. Die Atome mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $v_0 = 350$  m/s fliegen durch die auf  $T = 0.8$  K gekühlten supraleitenden Niob-Spiegelpaare, die einen Resonator für 50.099 GHz bilden. Dies entspricht auch der Übergangsfrequenz eines Rydbergüberganges von  $51 \rightarrow 50$ . Die zirkulären Rydberzustände haben eine vergleichsweise sehr lange Lebensdauer von 30 ms im angeregten Niveau. Deshalb können Relaxationsprozesse während der Wechselwirkung mit den Resonatormoden vernachlässigt werden. Zur weiteren Erklärung sei bemerkt, dass die mittlere Lebensdauer von 30 ms auf eine Zerfallsrate von 33 Hz führt, wogegen jede der Feldmoden

---

des Resonators, die die Atome zu einer Vakuum-Rabi-Oszillationsfrequenz zwischen den Zuständen  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  von  $\tilde{g}/2\pi = 25$  kHz anregt, die dominante Wechselwirkung darstellt. Die Atome werden nach dem Durchflug durch die Resonatoren im Detektor D (channeltron) durch zustandsselektive Ionisation gemessen und damit die Transferrate von  $|e\rangle$  nach  $|g\rangle$  bestimmt. An den Signalquellen S kann zusätzlich ein kohärentes Feld in die Resonatormoden eingekoppelt werden.

In dem abgeänderten Zwei-Moden-Resonator erscheint es möglich, jeweils eine Mode eines Resonatorpaares anzuregen, um zwei räumlich getrennte Feldmoden, die zueinander orthogonal polarisiert sind, zu erhalten. Unter Umständen lassen sich zwei zueinander orthogonal polarisierte kohärente Zustände aufbauen (leider sind in Mikromasern nur näherungsweise kohärente Zustände möglich, sog. cotangent states [76, 77, 78]), die dann auch für weitere Anwendungen, z.B. zur quantenoptischen Lithografie, durch eine Öffnung in den Spiegeln ausgekoppelt werden können. Es erscheint allerdings selbst mit den derzeit sehr weit entwickelten Techniken auf dem Gebiet der Resonator-QED unmöglich, verschränkte Fockzustände aus dem Resonator auszukoppeln, um sie für Anwendungen zugänglich zu machen. Alle denkbaren Auskoppelmechanismen führen zu einer rapiden Absenkung der Resonatorgüte und damit zu einer sofortigen Zerstörung der fragilen Fockzustände.



# ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden theoretischen Arbeit wurde das Zwei-Moden-JCM besonders im Hinblick auf die Erzeugung verschränkter Zustände untersucht. Um die Untersuchung sowohl im Resonanzfall als auch im Nichtresonanzfall in analytischer Form durchführen zu können, wurde zu Beginn ein algebraisches Lösungsverfahren ausgearbeitet. Der kompakte Formalismus, der in Kap. 2 eingeführt wurde, erlaubt es, alle Zeitentwicklungen und Erwartungswerte in analytisch exakter Form anzugeben.

In Kap. 3 wurden drei Verfahren zur Erzeugung von Verschränkung zwischen den beiden Feldmoden ausgearbeitet. Bei den drei Verschränkungsschemata handelt es sich zum Einen um ein Verfahren zur Verschränkung in einem einzigen Schritt. Dabei wurde herausgearbeitet, unter welchen Bedingungen sich  $N$  Photonen in zwei Feldmoden bei einem einzigen Durchflug eines Atoms durch einen Zwei-Moden-Resonator verschränken lassen. Ein weiteres Verfahren ist die bedingte Erzeugung von verschränkten  $N$ -Photonen-Zuständen, bei dem zu Beginn der Wechselwirkung die Feldmoden im Vakuum sind. Dabei wurde der  $N$ -Photonen-Zustand Schritt für Schritt aus dem Vakuumzustand des Zwei-Moden-Feldes aufgebaut. Dazu müssen mindestens  $N$  angeregte Atome durch den Resonator fliegen und nach Verlassen des Resonators im Grundzustand detektiert werden. Im dritten Verfahren wurde die Prämisse, dass der Endzustand der Atome gemessen wird, fallengelassen und damit die gesamte Dichtematrix des Feldes nach dem Durchflug von  $N$  Atomen durch den Resonator berechnet. Es zeigt sich, dass in einem Spezialfall die beiden letztgenannten Verfahren auf gleiche Ergebnisse führen. Die analytischen Ergebnisse wurden schließlich in einigen Beispielen graphisch veranschaulicht. Dabei wurde auch untersucht, wie die Erwartungswerte von den Modellparametern abhängen. Außerdem wurde der Grad der Verschränkung mit gängigen Verschränkungsmaßen charakterisiert. Dazu wurde  $\text{tr}(\rho_F^2)$  und die „concurrency“  $C(\rho_F)$  berechnet. Schließlich wurde der Einfluss der nichtresonanten Wechselwirkung der Atome mit den Feldmoden analytisch berechnet und an einem Beispiel veranschaulicht.

In Kap. 4 wurde die Felddynamik des Zwei-Moden-Feldes nicht nur unter dem Aspekt der Verschränkung behandelt. Dazu wurden die zeitabhängigen Photonenzahl-

Verteilungen für beide Moden als auch die Randverteilungen, d.h. die Verteilungsfunktionen der einzelnen Moden, berechnet. Außerdem wurde die Summenzahl-Verteilung sowie die Differenzanzahl-Verteilung beider Moden ausgeführt. Des Weiteren wurde die Verteilungsfunktion beider Moden im nichtresonanten Fall angegeben. Das Kapitel schließt mit einer Reihe von Beispielen, die graphisch dargestellt wurden.

In Kap. 5 wurde untersucht, wie sich die Verschränkung zwischen Atom und Feldmoden unter der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung aufbaut. Dazu wurde ein unverschränkter Produktzustand aus Atom und Zwei-Moden-Feld zeitentwickelt und der Endzustand auf Verschränkung untersucht. In diesem Zusammenhang wurden Anfangszustände gefunden, die sich nicht als Ausgangspunkt für eine Erzeugung von Verschränkung eignen, da sie auf einen unverschränkten Endzustand führen. Diese Klasse von Zuständen, sog. einfangende Feldzustände, konnte auf elegante Weise im Quasi-Moden-Bild berechnet werden. Zur Charakterisierung der Verschränkung wurde  $\text{tr}(\rho_A^2)$  berechnet und mit den Observablen Inversion und Polarisation verglichen. Es wurde gezeigt, dass für den betrachteten Fall die Verschränkungsmaße  $\text{tr}(\rho_A^2)$  und die Entropie  $S(\rho_A)$  gleichwertig sind. Das Kapitel schließt mit einer ausführlichen Diskussion der nichtresonanten Wechselwirkung zwischen Atom und Feldmoden.

Zudem wurde in Kap. 6 die Atomdynamik näher betrachtet. Dabei wurde das Kollaps- und Wiederaufleben-Phänomen der Observable Inversion und Polarisation für den Zwei-Moden-Fall untersucht und systematisch mit dem Ein-Moden-Fall verglichen.

Die Arbeit schließt in Kap. 7 mit einigen Bemerkungen zur experimentellen Realisierbarkeit der Zwei-Moden-JCM-Wechselwirkung in Resonator-QED-Experimenten. Dabei wurde zuerst auf die Definition der Moden im Hinblick auf die Brauchbarkeit für die Zwecke der Verschränkungserzeugung hingewiesen. Außerdem wurde ein Vorschlag für ein Zwei-Moden-Resonatorexperiment im Mikrowellenbereich mit räumlich getrennten Moden beschrieben.

# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. Einstein, Phys. Z. **18**, 121 (1917).
- [2] V.F. Weisskopf und E. Wigner, Z. Physik **63**, 54 (1930).
- [3] J. Schwinger, Phys. Rev. **51**, 648 (1937).
- [4] F. Bloch and A.J. Siegert, Phys. Rev. **57**, 522 (1940).
- [5] F. Bloch, Phys. Rev. **70**, 460 (1946); H.C. Torrey, Phys. Rev. **76**, 1060 (1949);  
R.K. Wangness and F. Bloch, Phys. Rev. **89**, 728 (1953).
- [6] I.I. Rabi, N.R. Ramsey, and J. Schwinger, Rev. Mod. Phys. **26**, 167 (1954).
- [7] A. Abragam, *The Principles of Nuclear Magnetism* (Oxford, London, 1961).
- [8] C.P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance* (Springer, Berlin, 1978).
- [9] R.H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [10] R.P. Feynman, F.L. Vernon, and R.W. Hellwarth, J. Appl. Phys. **28**, 49 (1957).
- [11] W.E. Lamb Jr, Phys. Rev. **137**, A1429 (1964); H. Haken, Z. Phys. **181**, 96 (1964);  
M. Lax and W.H. Louisell, IEEE J. Quant. Electron. **3**, 47 (1967).
- [12] H. Haken, *Handbuch der Physik, Band XXV/2C: Light and matter, ed. L. Genzel*  
(Springer, Berlin, 1970).
- [13] M. Sargent III, M.O. Scully and W.E. Lamb Jr., *Laser Physics* (Addison-Wesley,  
Massachusetts, 1974).
- [14] L. Allen and J.H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Wiley, New  
York, 1975).
- [15] E.T. Jaynes, *Microwave Laboratory Report No. 502*, Stanford University, (1958).

- 
- [16] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [17] H.-I. Yoo and J.H. Eberly, Phys. Rep. **118**, 239 (1985).
- [18] B.W. Shore and P.L. Knight, J. Mod. Opt. **40**, 1195 (1993).
- [19] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J.M. Raimond and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **72**, 3339 (1994).
- [20] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett **76**, 1800 (1996).
- [21] D. Meschede and H. Walther, Phys. Rev. Lett. **54**, 551 (1985).
- [22] J. Krause, M.O. Scully, T. Walther, and H. Walther, Phys. Rev. A **39**, 1915 (1989).
- [23] C.H. Bennett and G. Brassard, Sigact News **20**, 78 (1989).
- [24] D. Stucki, N. Gisin, O. Guinnard, G. Ribordy, and H. Zbinden, e-print quant-ph/0203118.
- [25] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, and N. Gisin, Nature **421**, 509 (2003).
- [26] J.I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [27] S. Gulde et al., Nature **421**, 48 (2003).
- [28] F. Schmidt-Kaler et al., Nature **422**, 408 (2003).
- [29] D. Leibfried et al., Nature **422**, 412 (2003).
- [30] M.O. Scully and H. Walther, Phys. Rev. A **39**, 5229 (1989).
- [31] C. Wildfeuer, Diplomarbeit (Universität Siegen, 1998).
- [32] P. Meystre and M. Sargent III *Elements of Quantum Optics* (Springer-Verlag Berlin, 1991).
- [33] G. Benivegna and A. Messina, J. Mod. Optics **41**, 907 (1994).
- [34] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1994).

- 
- [35] E.P. Wigner, *Group Theory* (Academic Press, New York, 1971).
- [36] A. Quattropani, Phys. kondens. Materie **5**, 318 (1966).
- [37] G. Benivegna and A. Messina, J. Phys. A **27**, L453 (1994).
- [38] S.M. Dutra and P.L. Knight, Phys. Rev. A **49**, 1506 (1994).
- [39] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger (Eds.), *The Physics of Quantum Information* (Springer Verlag, Berlin, 2000).
- [40] B. Yurke, S.L. McCall, and J.R. Klauder, Phys. Rev. A **33**, 4033 (1986).
- [41] M. Hillery and L. Mlodinow, Phys. Rev. A **48**, 1548 (1993).
- [42] C. Brif and A. Mann, Phys. Rev. A **54**, 4505 (1996).
- [43] J.P. Dowling, Phys. Rev. A **57**, 4736 (1998).
- [44] A.N. Boto, P. Kok, D.S. Abrams, S.L. Braunstein, C.P. Williams and J.P. Dowling, Phys. Rev. Lett. **85**, 2733 (2000).
- [45] B. Deb, G. Gangopadhyay, and D.S. Ray, Phys. Rev. A **51**, 2651 (1995).
- [46] M. Ikram, S.-Y. Zhu, and M.S. Zubairy, Opt. Commun. **184**, 417 (2000).
- [47] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. A **64**, 050301 (2001).
- [48] E. Solano, G.S. Agarwal, and H. Walther, e-print quant-ph/0202071.
- [49] J. Fiurášek, Phys. Rev. A **65**, 053818 (2002).
- [50] R.G. Unanyan and M. Fleischhauer, Phys. Rev. A **66**, 032109 (2002).
- [51] K. Vogel, V.M. Akulin, and W.P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **71**, 1816 (1993).
- [52] C. Wildfeuer and D.H. Schiller, Phys. Rev. A **67**, 053801 (2003).
- [53] E. Schrödinger, Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 555 (1935).
- [54] P.L. Knight, E. Roldan, and J.E. Sipe, e-print quant-ph/0304201.
- [55] W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).

- 
- [56] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J. Smolin, and W.K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [57] C.H. Bennett, H.J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [58] A.V. Thapliyal, *Phys. Rev. A* **59**, 3336 (1999).
- [59] R.F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [60] M. Lewenstein, D. Bruß, J.I. Cirac, B. Kraus, M. Kus, J. Samsonowicz, A. Sanpera, and R. Tarrach, *J. Mod. Optics* **47**, 2481 (2000).
- [61] J. von Neumann, *Gött. Nachr.*, 273 (1927).
- [62] S.J.D. Phoenix and P.L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2833 (1991).
- [63] J.P. Dowling, private communication.
- [64] S.J.D. Phoenix and P.L. Knight, *Ann. Phys. (N.Y.)* **186**, 381 (1988).
- [65] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3385 (1990).
- [66] P.K. Rekdal, B.-S.K. Skagerstam, and P.L. Knight, e-print quant-ph/0301148 (2003).
- [67] H. Araki and E. Lieb, *Commun. Math. Phys.* **18**, 160 (1970).
- [68] C.C. Gerry, *J. mod. Opt.* **46**, 1961 (1999).
- [69] K. Zaheer and M.S. Zubairy, *Phys. Rev. A* **39**, 2000 (1989).
- [70] A. Einstein, N. Rosen, and B. Podolsky, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [71] K.J. Blow, R. Loudon, S.H. Phoenix, and T.J. Shepherd, *Phys. Rev. A* **42**, 4102 (1990).
- [72] S.J. van Enk, *Phys. Rev. A* **67**, 022303 (2003).
- [73] M. Wilkens and P. Meystre, *Phys. Rev. A* **43**, 3832 (1991).
- [74] S.M. Dutra, P.L. Knight, and H. Moya-Cessa, *Phys. Rev. A* **48**, 3168 (1993).
- [75] S.M. Dutra and P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **49**, 1506 (1994).

- [76] J.J. Slosser, P. Meystre, and S.L. Braunstein, Phys. Rev. Lett. **63**, 934 (1989).
- [77] J.J. Slosser and P. Meystre, Phys. Rev. A **39**, 2000 (1989).
- [78] J.J. Slosser, P. Meystre, and E.M. Wright, Opt. Lett. **15**, 233 (1990).



# DANKSAGUNG

Als Erstes möchte ich Herrn Prof. Dr. D.H. Schiller für die Themenstellung und die gute Betreuung danken. Des Weiteren gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. H.D. Dahmen, der immer bereitwillig für Diskussionen zur Verfügung stand und so manchen Konferenzaufenthalt ermöglicht hat. Diesbezüglich gilt mein Dank auch dem amtierenden Dekan Prof. Dr. C. Grupen, der sich immer gerne für eine Unterstützung von Konferenzen eingesetzt hat. Schließlich sind in Diskussionen mit Herrn Prof. Dr. F.W. Bopp, Herrn Prof. Dr. A.-S. Marculescu, Herrn Priv. Doz. Dr. W. Häusler und Herrn Dr. H.-J. Besch so manche Ideen ausgereift.

Besonders gilt mein Dank meinen Kollegen Herrn Dr. R. Kretschmer, Herrn Priv. Doz. Dr. H. Anlauf, Herrn Dr. U. Werthenbach und Herrn Dipl.-Phys. T. Stroh, die bei fachlichen und technischen Problemen immer bereitwillig ihre Hilfe anboten.

Ich möchte allen anderen gegenwärtigen und ehemaligen Mitgliedern des Fachbereiches Physik, die mich in den vielen alltäglichen Aufgaben unterstützt haben, danken. Explizit möchte ich hier Frau A. Wied und Frau H. Voss nennen. Besonders möchte ich Herrn Dr. Norbert Sauer für die zahlreichen interessanten Diskussionen danken.

Ich danke auch meinen Eltern, die immer unterstützend hinter meinen Vorhaben stehen.