Neoklassische Wachstumstheorie

Autor:
Privatdozent Dr. Thomas Christiaans
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Universität Siegen
Hölderlinstraße 3
57076 Siegen

Thomas Christiaans

Neoklassische Wachstumstheorie

Darstellung, Kritik und Erweiterung

Mit 23 Abbildungen

2004

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbiografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

URN der Onlineversion:
urn:nbn:de:hbz:467-914

Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt
Satz und Layout: Thomas Christiaans, gesetzt mit LaTeX

ISBN 3-8334-2242-4

Vorwort

Das Wirtschaftswachstum ist der wesentliche Bestimmungsgrund für den Wohlstand der Nationen. Ob ein Land heute reich oder arm ist, hängt vom Wachstum seines Nationaleinkommens in der Vergangenheit ab. Der zukünftige Reichtum eines Landes wird durch das gegenwärtige und das künftige Wachstum bestimmt. Daher ist es nicht verwunderlich, daß die Theorie des wirtschaftlichen Wachstums seit dem Ende der 1980er Jahre eine bemerkenswerte Wiederbelebung erfahren hat. Der Großteil der Literatur läßt sich dabei der neoklassischen Wirtschaftstheorie zuordnen.

In diesem Buch werden die grundlegenden Modelle der neoklassischen Wachstumstheorie dargestellt, in Teilen kritisiert und darauf aufbauend erweitert. Die zentralen Kritikpunkte beziehen sich auf den Ansatz der dynamischen Optimierung in Erklärungsmodellen einerseits und auf die Skaleneffekte in der Theorie des endogenen Wachstums andererseits.

Auf der Basis des neoklassischen Paradigmas werden einfache Modelle des Wirtschaftswachstums entwickelt, die diese Kritik berücksichtigen und die mit den sogenannten stilisierten Fakten über das Wachstum vereinbar sind. Die gängige Konsumhypothese der Neoklassik wird durch den Ansatz von Faustregeln ersetzt, wobei Modelle ohne Skaleneffekte mit endogenem technischem Fortschritt im Mittelpunkt stehen. In bezug auf einige der stilisierten Fakten erweist sich die Betrachtung offener Volkswirtschaften als unumgänglich. In diesem Zusammenhang wird die Frage untersucht, welche Ansatzpunkte für die Wachstumspolitik im Rahmen von Modellen des semi-endogenen Wachstums bestehen.

Dieses Buch ist vom Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Siegen im Jahre 2003 als Habilitationsschrift angenommen worden. Die vorliegende Fassung entspricht bis auf die Korrektur einiger Druckfehler und Formulierungen sowie einer Aktualisierung des Literaturverzeichnisses inhaltlich der eingereichten Fassung. Wegen seiner zentralen Ausrichtung auf die Theorie des semi-endogenen Wachstums und der ausführlichen Erörterung der erforderlichen mathematischen Grundlagen (gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Optimierung) im wachstumstheoretischen Kontext ist es auch als fortgeschrittenes Lehrbuch geeignet.

Für seine langjährige Unterstützung meiner wissenschaftlichen Entwicklung danke ich insbesondere dem Erstgutachter, meinem akademischen Lehrer Herrn Univ.-Prof. Dr. Walter Buhr, Universität Siegen. Dem Zweitgutachter, Herrn Univ.-Prof. Dr. Karl-Josef Koch, Universität Siegen, möchte ich ebenfalls herzlich danken. Meinen ehemaligen Kollegen, insbesondere Herrn Privatdozent Dr. Hagen Bobzin, bin ich für ihre ständige Bereitschaft zur Diskussion verbunden.

Siegen, im November 2004 — Thomas Christiaans

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Verzeichnis der häufig verwendeten Symbole

Das folgende Verzeichnis beschränkt sich auf die wiederkehrenden Symbole, deren Bedeutung nicht immer wieder neu erläutert wird. Die Symbole, die nur in bestimmten Abschnitten auftreten, werden an entsprechender Stelle erklärt. In einigen Abschnitten kann sich die Bedeutung solcher lokal auftretenden Symbole ändern, wobei aber keine Verwechslungsgefahr besteht.

Die Vektoren erscheinen in Fettdruck. Im Ausdruck $y = f(\mathbf{x})$ bezeichnet beispielsweise y den Funktionswert der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$. Die partielle Ableitung nach x_j lautet $\partial y/\partial x_j = f_{x_j}(\mathbf{x})$. Ist von (partieller) Differenzierbarkeit einer Funktion auf abgeschlossenen Mengen die Rede, so ist darunter an den Rändern des Definitionsbereichs jeweils einseitige (partielle) Differenzierbarkeit zu verstehen. Zeitableitungen werden durch einen Punkt gekennzeichnet.

Ein Ausdruck wie $\mathbf{x}(t)$ kann verschiedene Bedeutungen haben. Streng genommen muß man den Wert einer Funktion an einer Stelle t, zum Beispiel bezeichnet mit $\mathbf{x}(t)$, von der Funktion selbst, zum Beispiel $\mathbf{x}\colon [0, T] \to R^n$, unterscheiden. Hier wird aber – wie in der ökonomischen Literatur allgemein üblich – mit $\mathbf{x}(t)$ oder einfach $\mathbf{x}$ auch die Funktion bezeichnet, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht. Ebenso wird die Kurve $\{\mathbf{x}(t) \mid 0 \le t \le T\}$ im R^n gelegentlich einfach mit $\mathbf{x}(t)$ bezeichnet. (Die Schreibweise $\{\mathbf{x}(t) \mid 0 \le t \le T\}$ ist zu lesen als: *Die Menge aller Punkte* $\mathbf{x}(t)$*, für die die Bedingung* $0 \le t \le T$ *gilt.*)

Variablen

A	Index des technischen Fortschritts
C	Konsum
c	(niveauangepaßter) Pro-Kopf-Konsum
c	effektiver Pro-Kopf-Konsum
f	Pro-Kopf-Produktionsfunktion
F	Produktionsfunktion
g_x	Wachstumsrate der Variablen x
I	Investition (brutto oder netto)
K	Kapitalstock
k	(niveauangepaßte) Kapitalintensität
k	effektive Kapitalintensität
L	Bevölkerung (proportional zum Arbeitseinsatz)
n	Wachstumsrate der Bevölkerung
p	relativer Preis von Gut 1 in Einheiten von Gut 2
S	Ersparnis
s	marginale Sparquote
r	Zinssatz
w	Reallohnsatz
Y	Nationaleinkommen (oder Output des Endprodukts)
y	(niveauangepaßtes) Pro-Kopf-Einkommen
y	effektives Pro-Kopf-Einkommen
α	Produktionselastizität des Kapitals im Cobb-Douglas-Fall
δ	Abschreibungsrate
σ_x	Produktionselastizität des Faktors x
ρ	Diskontrate

Mathematische Symbole

$C^n(X)$	Menge aller auf der Menge X n-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C^0(X)$	Menge aller auf der Menge X stetigen Funktionen
$\bar{C}[0,\infty)$	Menge aller auf dem Intervall $[0,\infty)$ stückweise stetigen Funktionen
lim	Grenzwert
$\lim_{\mathbf{x}\to\hat{\mathbf{x}}^+}$	rechtsseitiger Grenzwert
$\lim_{\mathbf{x}\to\hat{\mathbf{x}}^-}$	linksseitiger Grenzwert
$\liminf$	Limes inferior
$\limsup$	Limes superior
R^n	Euklidischer n-dimensionaler Raum
sgn	Vorzeichenfunktion
(a,b)	offenes Intervall von a bis b
$[a,b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b (analog sind halboffene Intervalle gekennzeichnet)
$\{a,b\}$	Menge mit den Elementen a und b
$\subset$	Teilmenge
$\cap$	Schnittmenge
$\forall$	für alle
$\exists$	es gibt
$\boldsymbol{\phi}(t,\mathbf{x}_0)$	Lösung einer Differentialgleichung mit Startwert $\mathbf{x}_0$
$\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x})$	Fluß einer Differentialgleichung
$\mathbf{Df}(\mathbf{x})$	Jacobi-Matrix
$\dot{x}$	$= dx/dt$ (Zeitableitung)
$\lVert\mathbf{x}\rVert$	Euklidische Norm des Vektors $\mathbf{x}$

Vektoren

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$	$x_i \geqq y_i,\ \forall i = 1,\ldots,n$
$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$	$x_i \geqq y_i,\ \forall i = 1,\ldots,n$ und $x_i > y_i$ für mindestens ein i
$\mathbf{x} > \mathbf{y}$	$x_i > y_i,\ \forall i = 1,\ldots,n$
$\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$	$x_i \neq y_i$ für mindestens ein i
$\mathbf{x}$	Spaltenvektor
$\mathbf{x}'$	Zeilenvektor
$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$	$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (Skalarprodukt)

Kapitel 1:

Erklärungsansätze des Wirtschaftswachstums

Nach ihrem Höhepunkt in den fünziger und sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts ist die neoklassische Wachstumstheorie vorübergehend zu einer Spezialdisziplin der mathematischen Wirtschaftstheorie geworden, die sich während dieser Zeit dem Interesse der breiteren Mehrheit der Ökonomen entzogen hat. Diese Situation hat sich gegen Ende der achtziger Jahre durch eine bemerkenswerte Wiederbelebung der neoklassischen Wachstumstheorie geändert. Die zeitweise geringe Bedeutung der wachstumstheoretischen Forschung ist angesichts der realökonomischen Auswirkungen des Wirtschaftswachstums erstaunlich, die anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht werden können. Die durchschnittliche Wachstumsrate des Nationaleinkommens pro Kopf der Bevölkerung betrage 6 %, wie es für die sogenannten *Tigerstaaten* in Südostasien seit 1960 in etwa zutrifft. Dann verdoppelt sich das Nationaleinkommen pro Kopf in weniger als zwölf Jahren und es verachtfacht sich in knapp 36 Jahren. Wenn die Wachstumsrate dagegen mit 3 % nur halb so groß ist, hat sich das Nationaleinkommen pro Kopf nach 36 Jahren noch nicht einmal verdreifacht. Eine Verdoppelung der Wachstumsrate entscheidet also, über den Zeitraum einer Generation betrachtet, darüber, ob ein Land arm oder reich ist. Der Vergleich mit Ländern wie Peru oder der Elfenbeinküste, deren durchschnittliche Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens für den gleichen Zeitraum in der Nähe von null liegt, zeigt die Bedeutung des Wachstums ebenso wie die Betrachtung längerer Zeiträume noch drastischer auf. Die Auswirkungen etwa von Konjunkturschwankungen erscheinen im Vergleich dazu eher gering.

Ein zentrales Ergebnis der älteren neoklassischen Wachstumstheorie ist, daß die langfristige Wachstumsrate des Nationaleinkommens wirtschaftspolitisch praktisch nicht beeinflußbar ist. Angesichts der Bedeutung der Wachstumsraten für den Wohlstand verwundert es daher nicht, daß die Renaissance der Wachstumstheorie mit Modellen des endogenen Wachstums einherging, in denen gerade diese Vorhersage aufgehoben wird. Allerdings sind diese Theorien des endogenen Wachstums in neuerer Zeit kritisiert worden, da sie in der Regel Skaleneffekte beinhalten, die empirisch nicht haltbar sind, und auf Grenzfällen von Parameterwerten basieren, die die Modelle strukturell instabil machen. Die Beseitigung dieser Skaleneffekte hat zur Entwicklung der Theorie des semi-endogenen Wachstums geführt, die mit der Theorie des endogenen Wachstums die endogene Erklärung des technischen Fortschritts gemein hat, sich aber durch die fehlende Möglichkeit der wirtschaftspolitischen Beeinflußbarkeit der Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens unterscheidet. Wie in der älteren neoklassischen Theorie ist die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens durch die Produktionstechnik und die Wachstumsrate der Bevölkerung festgelegt, so daß in wesentlichen Belangen eine Rückkehr zu den Aussagen der älteren neoklassischen Wachstumstheorie erfolgt.

An dieser Stelle wird auf eine Besonderheit aufmerksam gemacht, die das geringe Interesse an der Wachstumstheorie insbesondere in Deutschland zu einem großen Teil erklären kann. Trotz der keynesianischen Revolution, die in der deutschen Wirtschaftspolitik bis in die frühen achtziger Jahre bestimmend gewesen ist, ist die neoliberale Ordnungspolitik unter den deutschen Wissenschaftlern stets verbreitet gewesen. Nach neoliberaler Auffassung ist das Wirtschaftswachstum ... *in einer freiheitlichen Wirtschaftsordnung kein Ziel, ..., sondern das unbekannte Ergebnis der ökonomischen Aktivitäten von Millionen Haushalten, Unternehmen und staatlichen Stellen* (Woll, 1984, S. 98). Als Ansatzpunkt für die Wachstumspolitik sieht der Neoliberalismus daher die Verwirklichung der marktwirtschaftlichen Prinzipien, die zu hoher Produktionseffizienz und daher auch zu einem größtmöglichen Wachstum führe. Eine direkte Einflußnahme auf das Wirtschaftswachstum wird abgelehnt. Diese Auffassung ist mit dem Ergebnis der älteren neoklassischen Wachstumstheorie vereinbar, daß die langfristige Wachstumsrate wirtschaftspolitisch nicht zu beeinflussen ist. In diesem Zusammenhang muß auch darauf hingewiesen werden, daß eine funktionierende marktwirtschaftliche Ordnung in der neoklassischen Wachstumstheorie grundsätzlich unterstellt wird, so daß diejenige Wachstumsrate, die nicht beeinflußbar ist, als die maximale Wachstumsrate bei Vollbeschäftigung der Faktoren und effizienter Produktion zu verstehen ist.

Obwohl im vorliegenden Zusammenhang die Verwendung dynamischer Optimierungsansätze kritisiert wird und an einer Stelle auch ein Modell mit einem keynesianischen Bestandteil analysiert wird, sind alle in diesem Buch betrachteten Modelle als *neoklassisch* zu bezeichnen. So werden grundsätzlich substitutionale Produktionsfunktionen verwendet und ein funktionierender Preismechanismus unterstellt, der das kurzfristige Gleichgewicht auf dem Gütermarkt und den Faktormärkten garantiert. In diesem Sinne ist diese Variante der Wachstumstheorie eine dynamische, makroökonomische Fortführung der statischen, mikroökonomischen neoklassischen Theorie des allgemeinen Gleichgewichts. Anders als in der keynesianischen Makroökonomik spielt nicht die Nachfrageseite, sondern die Angebotsseite die entscheidende Rolle bei der Bestimmung der gesamtwirtschaftlichen Produktionsmenge. Die Instabilität des Wachstums in der postkeynesianischen Wachstumstheorie wird durch die Vorhersage eines stabilen Wachstumspfades ersetzt.

Wie bereits angedeutet, werden Probleme der Unterbeschäftigung durch den neoklassischen Ansatz von vornherein ausgeschlossen. Die Vernachlässigung alternativer Theorien hier bedeutet nicht, daß sie von vornherein als ungeeignet angesehen werden, sondern erfolgt aus Gründen der Eingrenzung der Analyse. Die neoklassische Wachstumstheorie stellt allein schon vom Umfang der Forschungsarbeiten her die Hauptströmung in der Gegenwart dar. Hinsichtlich neuerer keynesianischer Ansätze wird zum Beispiel auf Khan et al. (1990), van Marrewijk und Verbeek (1993a) und das *Minisymposium on Thirlwall's Law and Economic Growth in an Open-Economy Context* im Journal of Post Keynesian Economics (1997, 19/3) verwiesen. Eine weitere Alternative bietet der evolutorische Ansatz, zu dem Nelson (1995) einen Überblick gibt.

Für die Neoklassik spricht insbesondere, daß der Untersuchungsgegenstand der Wachstumstheorie die langfristige Entwicklung der Volkswirtschaften ist. Die Vernachlässigung von Phänomenen wie der Unterbeschäftigung bedeutet letztlich, daß sich die Neoklassik mit dem langfristigen Wachstum des Produktionspotentials befaßt, unter Abstraktion von kurzfristigen Schwankungen des Auslastungsgrades. Tatsächlich werden die langfristigen Wachstumsraten sowohl in der älteren neoklassischen Theorie als auch in der neueren Theorie des semi-endogenen Wachstums allein durch die Produktionstechnik, also die Angebotsseite bestimmt. Die Nachfrageseite spielt lediglich in der Theorie des endogenen Wachstums eine wesentliche Rolle in bezug auf die langfristigen Wachstumsraten.

Innerhalb der mathematischen Modelltheorie, zu der die im wesentlichen auf Solow (1956) zurückgehende neoklassische Wachstumstheorie ebenso gehört wie die von Harrod (1939) und Domar (1946) begründete postkeynesianische Theorie, lassen sich im wesentlichen zwei Typen der Modellbildung ausmachen. In diesem Buch werden ausschließlich kleine Modelle betrachtet, die einer analytischen Betrachtung zugänglich sind. Die Annahmen in solchen Modellen sollten immer so einfach wie eben möglich sein, ohne das zu betrachtende Problem zu eliminieren. Solche Ansätze können kaum etwa zu quantitativen Vorhersagen genutzt werden, was aber auch gar nicht ihr Sinn ist. Vielmehr geht es darum, Denkmodelle zu entwickeln, die die generellen Möglichkeiten für die Art und die Ursachen spezifischer Wachstumsprozesse aufzeigen, und anhand derer man sich bei der Analyse spezieller Anwendungen orientieren kann. Baut man solche Modelle weiter aus, so gelangt man zum zweiten Ansatz, der Computersimulation größerer Modelle. Hier kann besonderer Wert auf die Realitätsnähe der Annahmen gelegt werden, wobei die Größe der Modelle nur durch die Rechenkapazität der Computer und die Interpretierbarkeit der Ergebnisse beschränkt ist. Die Analyse muß sich dann insbesondere nicht auf die langfristigen Gleichgewichte beschränken, die ansonsten im Mittelpunkt stehen. Ein Beispiel für ein solches Simulationsmodell liefern Buhr (2001) und Bobzin (2001). Beide Typen der Modellbildung ergänzen sich und sind daher letztlich weniger als Alternativen denn als Komplemente anzusehen.

Neben der mathematischen Modelltheorie existieren in der Literatur zwei weitere methodische Ansätze. Die historisch-deskriptive Wachstumsanalyse, die in Lewis (1955) einen prominenten Vertreter hat, und die empirisch-statistische Wachstumsanalyse, zu deren bekanntesten Werken Kuznets (1973) gehört. Obwohl in diesem Buch ausschließlich die mathematische Modelltheorie behandelt wird, sollten diese alternativen Ansätze, insbesondere die empirisch-statistische Wachstumsforschung, als Ergänzung zur Modelltheorie berücksichtigt werden. Denn unabhängig von den Vorhersagen bezüglich der Beeinflußbarkeit des Wachstums durch die Wirtschaftspolitik, dem verwendeten Paradigma und dem methodischen Standpunkt muß sich jedes Modell daran messen lassen, ob es mit dem empirischen Befund zum Wirtschaftswachstum vereinbar ist, der in den sogenannten stilisierten Fakten gewissermaßen konzentriert wird. Ein wesentliches Problem der älteren neoklassischen Wachstumstheorie besteht in der fehlenden Erklärung des langfristigen technischen

Fortschritts. Die Renaissance der Wachstumstheorie basiert unter anderem auf Ansätzen, die den technischen Fortschritt endogen erklären können. Hinsichtlich der Theorie des endogenen Wachstums ist bereits auf die empirisch nicht haltbaren Skaleneffekte hingewiesen worden. Die Theorie des semi-endogenen Wachstums beseitigt diese Skaleneffekte und kommt damit einer Erklärung der stilisierten Fakten näher, impliziert jedoch im Widerspruch zu den Fakten generell eine in der Wachstumsrate der Bevölkerung steigende Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens (das *Bevölkerungspuzzle*). Außerdem kann der Zusammenhang zwischen dem Außenhandel und dem Wirtschaftswachstum nicht mit den in aller Regel für geschlossene Volkswirtschaften formulierten Modellen der Theorie des semi-endogenen Wachstums erklärt werden.

Ausgehend von den bisherigen Erörterungen läßt sich das Ziel dieser Arbeit eingrenzen. Auf der Basis des neoklassischen Paradigmas soll eine möglichst einfache Theorie des Wirtschaftswachstums entwickelt werden, die mit den stilisierten Fakten vereinbar ist, was eine endogene Erklärung des technischen Fortschritts voraussetzt. Dabei soll die Kritik am Ansatz der dynamischen Optimierung ebenso wie die Kritik an den Skaleneffekten der Theorie des endogenen Wachstums berücksichtigt werden. Dementsprechend wird die gängige Konsumhypothese der Neoklassik durch den Ansatz von Faustregeln ersetzt, wobei Modelle des semi-endogenen Wachstums im Mittelpunkt stehen. Dabei stellt sich heraus, daß in bezug auf einige der stilisierten Fakten eine Betrachtung offener Volkswirtschaften unumgänglich ist. Am Ende des Buches stehen daher zwei mit Faustregeln formulierte Modelle des semi-endogenen Wachstums in offenen Volkswirtschaften, die zumindest eine teilweise Erklärung des Bevölkerungspuzzles und des Zusammenhangs zwischen dem Außenhandel und dem Wirtschaftswachstum ermöglichen. Dabei zeigt sich auch, daß die Ineffektivität der Wachstumspolitik in bezug auf die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in einem Modell des semi-endogenen Wachstums durch den internationalen Handel zum Teil beseitigt wird.

Das Buch ist einschließlich dieser Einleitung und einer kritischen Würdigung in sechs Kapitel gegliedert, wobei die Kapitel 2 bis 5 den Hauptteil darstellen. Alle Kapitel sind grundsätzlich so geschrieben, daß sie unabhängig voneinander gelesen werden können. Soweit Bezüge zu jeweils anderen Kapiteln erforderlich sind, werden Querverweise gegeben.

Das Kapitel 2 stellt die zentralen analytischen Hilfsmittel dar, deren gründliches Verständnis für die moderne Wachstumstheorie unabdingbar ist. Tatsächlich sind die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und die Theorie der dynamischen Optimierung in stetiger Zeit schon weniger als *Hilfsmittel* denn als *Sprache* der modernen Wachstumstheorie zu bezeichnen. Daher ist dieses Kapitel, in dem zahlreiche Ergebnisse hergeleitet werden, die später unmittelbare Anwendungen und Implikationen haben, mehr als ein mathematischer Anhang und steht dementsprechend am Anfang der Erörterungen. Um eine systematische Darstellung zu gewährleisten, werden auch einige Ergebnisse diskutiert, die in den folgenden Kapiteln keine unmittelbare Anwendung finden. Diese Ergebnisse haben allerdings eine mittelbare Bedeutung, da die kritische Evaluation der gängigen Vorgehensweise hinsichtlich der Modellierung der Konsumentscheidungen in der neoklassischen Wachstumstheorie im Kapitel 3 auf der Stabilitätstheorie von Gleichgewichten basiert. Während es in der statischen Theorie zum Beispiel selbstverständlich ist, die Stabilität von Marktgleichgewichten aufgrund von dynamischen Anpassungsprozessen an diese Gleichgewichte zu analysieren, fehlt eine Diskussion der Stabilität der kurzfristigen Marktgleichgewichte in der dynamischen Theorie nahezu vollständig. Von den kurzfristigen Marktgleichgewichten zu unterscheiden sind die langfristigen Gleichgewichte (stationäre Zustände), deren Stabilität in der Wachstumstheorie häufig schlicht unterstellt wird. Aufgrund dieser Problematik ist eine tiefergehende Diskussion der Stabilitätstheorie gerechtfertigt, die die Unterschiede zwischen der statischen und der dynamischen Wirtschaftstheorie herausarbeitet. In der dynamischen Wirtschaftstheorie spielt dabei die Theorie der optimalen Kontrolle eine herausragende Rolle, die daher ebenfalls ausführlich dargestellt wird, wobei insbesondere auch das Problem der Transversalitätsbedingungen im Fall eines unendlichen Planungshorizontes diskutiert wird.

Obwohl im Kapitel 2 auf formale Beweise weitgehend verzichtet werden muß, wird versucht, die wichtigsten Ergebnisse heuristisch zu beweisen oder zumindest durch Beispiele plausibel zu machen. Dadurch ist die Darstellung in sich abgeschlossen, so daß sich die mathematischen Voraussetzungen für das Verständnis des Buches in Grenzen halten. Lediglich die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung und Grundkenntnisse der linearen Algebra werden vorausgesetzt. Auch diejenigen Leser, die sich mit den mathematischen Methoden auskennen, sollten sich zumindest die Abschnitte 2.1.1, 2.2.4, 2.3.3 und 2.4 ansehen, die unmittelbare Implikationen für die spätere Argumentation haben.

Im Kapitel 3 werden das neoklassische Grundmodell von Solow (1956) und seine wichtigsten Erweiterungen dargestellt. Hierzu gehört insbesondere die Theorie des optimalen Wachstums, die in neuerer Zeit weniger als normative denn als positive Theorie im Mittelpunkt des Interesses steht. Dabei wird unterstellt, daß die Haushalte ihre Konsumentscheidung auf der Grundlage der dynamischen Optimierung fassen. Diese Praxis wird ausführlich kritisiert, wobei anhand von Beispielen gezeigt wird, wie extrem die Auswirkungen geringfügiger Planungsfehler bei der Berechnung der optimalen Lösungen sind. Aufgrund dieser erheblichen Abweichungen erscheint der Ansatz der dynamischen Optimierung in der positiven Wachstumstheorie fragwürdig. Als Alternative wird deshalb die Verwendung von einfachen Faustregeln zur Modellierung der Konsumentscheidungen der Haushalte vorgeschlagen. In diesem Zusammenhang wird eine solche Faustregel analysiert, die eine Verallgemeinerung der klassischen Sparfunktion darstellt und sowohl einfach anzuwenden ist als auch normativ gute Ergebnisse beinhaltet.

Den Gegenstand des Kapitels 4 bilden die neuen Theorien des endogenen und des semi-endogenen Wachstums. Ausgehend von den an den empirischen Daten gemessenen Mängeln des neoklassischen Grundmodells werden andere Erklärungsansätze wie etwa das Modell des endogenen technischen Fortschritts von Romer (1990) dargestellt. Die Kritik an diesem Ansatz durch Jones (1995) hat zur Entwicklung von

Modellen des semi-endogenen Wachstums beziehungsweise von Wachstumsmodellen ohne Skaleneffekte geführt. Diese beiden Modelltypen werden exakt definiert. In diesem Zusammenhang werden die generellen Bedingungen für exponentielles Wachstum dargestellt und es wird gezeigt, daß die Semi-Endogenität des Wachstums und die Abwesenheit von Skaleneffekten zwar logisch voneinander unabhängig sind, daß aber ausschließlich Modelle des semi-endogenen Wachstums ohne Skaleneffekte robust gegenüber Parameteränderungen sind. Schließlich wird ein einfaches Modell dieser Art formuliert, das auf dem learning by doing basiert und das die stilisierten Fakten über das Wirtschaftswachstum mit wenigen Ausnahmen gut erklären kann. Als Folgerung aus der Analyse im Kapitel 3 wird dieses Modell unter Verwendung einer Faustregel für die Konsumentscheidungen formuliert. Schließlich wird argumentiert, daß die verbleibenden Mängel mit Bezug zur Erklärung der stilisierten Fakten nur unter Berücksichtigung des Außenhandels beseitigt werden können.

Dementsprechend beschäftigt sich das Kapitel 5 mit dem Wirtschaftswachstum in offenen Volkswirtschaften. Zunächst werden die generellen Ansatzpunkte für den Einfluß des Außenhandels und des Bevölkerungswachstums auf das Wachstum des Nationaleinkommens diskutiert. Die Berücksichtigung des Außenhandels in der älteren neoklassischen Wachstumstheorie sowie in der Theorie des endogenen Wachstums wird jeweils kurz zusammengefaßt. Schließlich werden zwei Modelle des semi-endogenen Wachstums unter Verwendung von Faustregeln eingehend analysiert. Das wesentliche Problem der Theorie des semi-endogenen Wachstums mit Bezug zu den stilisierten Fakten besteht in dem bereits genannten Bevölkerungspuzzle. Dieses Defizit kann beseitigt werden, indem man eine Beschränkung der Weltexportnachfrage in einem von importierten Zwischenprodukten abhängigen Land unterstellt. Da die Voraussage von mit der Wachstumsrate der Bevölkerung steigenden Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens insbesondere für Länder mit wirtschaftlich geringem Entwicklungsstand problematisch ist, die verstärkt auf Importe angewiesen sind, ist diese Erklärung naheliegend.

Zum Abschluß wird der Zusammenhang zwischen dem Außenhandel und dem Wirtschaftswachstum anhand des Problems der Industrialisierung einer kleinen offenen Volkswirtschaft im Rahmen eines Zwei-Sektoren-Modells untersucht. Die Industrialisierung wird hier als eine spezielle Art der internationalen Arbeitsteilung aufgefaßt, wodurch Bedingungen für eine positive oder negative Beziehung zwischen dem Außenhandel und dem Wachstum aufgrund des internationalen Spezialisierungsmusters abgeleitet werden können. Da das Außenhandelsmuster unter bestimmten Umständen wirtschaftspolitisch beeinflußt werden kann, gilt die Ineffektivität der Wirtschaftspolitik in bezug auf die Wachstumsrate in einer offenen Volkswirtschaft mit semi-endogenem Wachstum nicht mehr in der strengen Form.

Die Auswahl der aus der Literatur dargestellten Modelle ist zwar naturgemäß subjektiv geprägt, vermittelt aber doch einen Überblick über die zentralen Ansatzpunkte der neoklassischen Wachstumstheorie. Wer über die wahre Flut an Veröffentlichungen seit dem Ende der achtziger Jahre informiert ist, weiß, daß sich die Darstellung in einem Buch auf einen kleinen Bruchteil der Literatur beschränken muß.

Kapitel 2:
Mathematische Methoden der Wachstumstheorie

2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1.1 Einführende Beispiele

Exponentielles Wachstum Moderne Volkswirtschaften sind komplexe dynamische Systeme. Die theoretische Volkswirtschaftslehre kann sich daher nicht auf die Analyse statischer Modelle beschränken, insbesondere dann nicht, wenn es um Bereiche wie die Wachstumstheorie geht, deren Untersuchungsgegenstand inhärent dynamisch ist. Die mathematische Behandlung dynamischer Modelle basiert auf zwei alternativen Darstellungsmöglichkeiten. Bei der Modellierung mit **Differenzengleichungen** wird unterstellt, daß die Zeit in diskreten Schritten abläuft, während die Verwendung von **Differentialgleichungen** auf der Tatsache basiert, daß die Zeit eine stetige Variable ist, und der Annahme, daß die ökonomischen Variablen sich auch stetig in der Zeit ändern. Offenbar sind beide Ansätze nicht völlig unproblematisch.

Mit Bezug zur Auswahl unter den beiden Methoden führt Gandolfo (1981, S. 4–7) verschiedene Argumente an, die für die Verwendung von Differentialgleichungen sprechen. Die wichtigsten Argumente lauten: (1) Auch wenn individuelle Entscheidungen in diskreten Abständen getroffen werden, sind die Entscheidungen einer großen Anzahl an Individuen in einer Volkswirtschaft nicht synchronisiert. Daher kann eine stetige Betrachtungsweise mit den aggregierten Daten vereinbar sein. (2) Es gibt keine natürliche diskrete Zeiteinheit. Die Betrachtung von Jahren, Monaten oder Tagen ist in dieser Hinsicht völlig willkürlich. Diskrete Modelle müssen daher eigentlich immer daraufhin überprüft werden, ob ihre wesentlichen Implikationen von der gewählten Länge der Perioden abhängen. Wenn die Implikationen davon tatsächlich unabhängig sind, so dürfen sie sich auch nicht verändern, wenn die Periodenlänge gegen null geht, das heißt, wenn man von Differenzengleichungen zu Differentialgleichungen übergeht. (3) Zwar sind Differenzengleichungen numerisch leichter zu handhaben, doch sind Differentialgleichungen analytisch leichter zugänglich (obwohl explizite analytische Lösungen nur in den seltensten Fällen möglich sind).

Das wesentliche Argument für die Verwendung diskreter Modelle besteht darin, daß ökonometrische Methoden in der Regel auf diskreten Modellen aufbauen. Dieses Argument wird allerdings seit einiger Zeit durch die Entwicklung stetiger ökonometrischer Methoden entkräftet (vgl. zum Beispiel Wymer, 1972; Gandolfo, 1981, 1993).

Offenbar haben beide Methoden ihre Vorteile. Während beispielsweise in der (betont empirisch ausgerichteten) Konjunkturtheorie die Verwendung von Differenzengleichungen überwiegt, haben sich die Differentialgleichungen weitgehend zum Standard in der Wachstumstheorie entwickelt. Aus diesem Grund werden hier ausschließlich Differentialgleichungen betrachtet.

Das erste Beispiel für eine Differentialgleichung drängt sich durch die Definition der **Wachstumsrate** g_Y des Nationaleinkommens Y in stetiger Zeit auf:

$$g_Y := \frac{dY}{dt}\frac{1}{Y} = \frac{\dot{Y}}{Y}.$$

Dabei ist $\dot{Y}$ eine Kurzschreibweise für die Ableitung dY/dt von Y nach der Zeit t. Ist es möglich, aus der Kenntnis der Wachstumsrate auf den Zeitpfad des Nationaleinkommens zu schließen? Im einfachsten Fall einer konstanten Wachstumsrate $g_Y = n$ wird die obige Gleichung in die Form

$$\frac{dY}{dt} = nY \tag{2.1}$$

gebracht. Die Gleichung (2.1) stellt ein Beispiel für eine **lineare, homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten** dar.

Bemerkung 2.1. In stetiger Zeit bezeichnet $Y(t)$ streng genommen nicht das Nationaleinkommen, sondern die **Rate des Nationaleinkommens** beziehungsweise die **Produktionsrate** oder die **Momentanproduktion**, da in einem Zeitpunkt keine positive Menge produziert werden kann. Das Nationaleinkommen ist eine Stromgröße und ergibt sich etwa für den Zeitraum eines Jahres als das bestimmte Integral

$$\int_{t-1}^{t} Y(\tau)\, d\tau.$$

Wie allgemein üblich wird im folgenden $Y(t)$ trotzdem einfach als *Nationaleinkommen* bezeichnet. Wenn zum Beispiel die Produktionsrate $Y(\tau)$ für den Zeitraum von $t-1$ bis t konstant gleich $Y(t)$ ist, gilt

$$\int_{t-1}^{t} Y(\tau)\, d\tau = [t-(t-1)]Y(t) = Y(t).$$

In diesem Fall stimmt die Produktionsrate $Y(t)$ mit dem Nationaleinkommen für den Zeitraum $[t-1, t]$ (zum Beispiel ein Jahr) numerisch überein. $\diamondsuit$

Der Zeitpfad des Nationaleinkommens kann mittels des Verfahrens der **Trennung der Veränderlichen** aus (2.1) hergeleitet werden. Die beiden Veränderlichen Y und t werden getrennt, indem zunächst mit dem **Differential** dt multipliziert und durch Y dividiert wird.

$$\frac{1}{Y}\, dY = n\, dt$$

Stimmen zwei stetige Funktionen auf einem bestimmten Intervall überein, so können sich ihre Stammfunktionen nur durch eine Konstante C_1 unterscheiden. Die Integration der Gleichung liefert damit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{Y}\, dY &= \int n\, dt + C_1 \\ \iff \ln|Y| &= nt + C_1. \end{aligned}$$

Wendet man die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus auf beide Seiten an, so folgt für $Y > 0$

$$Y(t) = e^{nt+C_1} = e^{nt} e^{C_1}.$$

Mit $C := \exp(C_1)$ ergibt sich die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.1):

$$Y(t) = Ce^{nt}. \tag{2.2}$$

Eine **spezielle Lösung** erhält man durch die Bestimmung der Konstanten C aus einer **Randbedingung**. Liegt beispielsweise der Startwert von $Y(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ fest, so wird (2.1) in Verbindung mit

$$Y(0) = Y_0$$

als **Anfangswertproblem** bezeichnet. Setzt man diesen Wert in die allgemeine Lösung (2.2) der Differentialgleichung ein, so erhält man

$$Y_0 = Ce^0 = C,$$

und damit die spezielle Lösung

$$Y(t) = Y_0 e^{nt}. \tag{2.3}$$

Um die Abhängigkeit der Lösung von t und Y_0 zu betonen, wird sie als Funktion $\phi(t, Y_0)$ dargestellt:[1]

$$\phi(t, Y_0) = Y_0 e^{nt}.$$

Man kann diese Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung (2.1) überprüfen. Aus dem später angegebenen Satz 2.1 folgt ferner, daß es keine weitere Lösung gibt. Das Nationaleinkommen wächst also **exponentiell**, wenn die Wachstumsrate konstant ist.

Umgekehrt folgt aus dem exponentiellen Wachstum einer Größe unmittelbar, daß sie eine konstante Wachstumsrate aufweist. Zum Beweis muß lediglich die Wachstumsrate von $Y(t)$ anhand der Gleichung (2.3) berechnet werden, wobei man die Konstante n erhält. Das heißt, eine Variable wächst genau dann exponentiell, wenn ihre Wachstumsrate konstant und positiv ist. In der Wachstumstheorie werden häufig sogenannte **langfristige Gleichgewichte** betrachtet, die durch die Konstanz aller Wachstumsraten definiert sind. Inwieweit ein exponentielles Wachstum des Nationaleinkommens überhaupt möglich ist, stellt daher eine der zentralen Fragen der Wachstumstheorie dar. Hierauf wird später im Abschnitt 4.4.4 ausführlich eingegangen.

---

[1] Für $Y < 0$ ergibt sich aus $|Y| = e^{nt+C_1}$, daß $-Y = e^{nt}e^{C_1}$ beziehungsweise $Y(t) = Ce^{nt}$ mit $C = -e^{C_1}$. Daher lautet die spezielle Lösung für $Y_0 < 0$ ebenfalls $\phi(t, Y_0) = Y_0 e^{nt}$. Dieser Fall ist natürlich wenig sinnvoll, wenn Y wie hier das Nationaleinkommen bezeichnet. Im allgemeinen müssen aber auch negative Werte berücksichtigt werden.

Ein weiteres für die Wachstumstheorie wichtiges Beispiel ist die zeitkontinuierliche Verzinsung eines Kapitalstocks K. Angenommen, der auf ein Jahr bezogene Zinssatz ist konstant gleich r. Ferner werden die Zinsen dem zum Zeitpunkt $t = 0$ angelegten Kapital K_0 im Jahr h-mal zugeschrieben. Dann beträgt der Kapitalstock im Jahr t

$$K(t) = K_0 \left(1 + \frac{r}{h}\right)^{ht}.$$

Diesen Ausdruck kann man umformen zu

$$K(t) = K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{h/r}\right)^{h/r}\right]^{rt}.$$

Geht man nun auf eine kontinuierliche Zinszuschreibung über, so bedeutet das formal, daß $h \to \infty$ und damit auch $(h/r) \to \infty$. Der Grenzwert des Terms in den eckigen Klammern ist nichts Anderes als die Zahl e. Also erhält man die Formel für die kontinuierliche Zinszuschreibung mit dem auf ein Jahr bezogenen Zinssatz r als

$$K(t) = K_0 \left[\lim_{(h/r)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h/r}\right)^{h/r}\right]^{rt} = K_0 e^{rt}. \tag{2.4}$$

Man erkennt im Vergleich mit der vorhergehenden Betrachtung des mit der konstanten Rate n wachsenden Nationaleinkommens unmittelbar, daß der Zinssatz gleich der Wachstumsrate des Kapitalstocks unter der Voraussetzung der kontinuierlichen Wiederanlage ist.

Da (2.4) die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{K} = rK, \quad K(0) = K_0$$

ist, liegt die Verallgemeinerung auf einen nicht konstanten Zinssatz $r(t)$ nahe. In diesem Fall ist die Veränderung des Kapitalstocks bei kontinuierlicher Wiederanlage durch

$$\dot{K} = r(t)K, \quad K(0) = K_0$$

gegeben. Die Lösung dieser Differentialgleichung kann man symbolisch ebenfalls durch Trennung der Veränderlichen berechnen:

$$K(t) = K_0 e^{\int_0^t r(\tau)\, d\tau}.$$

Eine konkrete Funktionsform ergibt sich natürlich nur für eine spezifizierte Zinssatzfunktion $r(t)$. Umgekehrt folgt für den Barwert eines Kapitalstocks $K(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$K_0 = K(t) e^{-\int_0^t r(\tau)\, d\tau}. \tag{2.5}$$

Wachstumsraten Die Verwendung von Wachstumsraten spielt eine wesentliche Rolle in der Wachstumstheorie. Man kann diese Wachstumsraten häufig durch Logarithmierung bequem berechnen, da die Ableitung des natürlichen Logarithmus einer Variablen nach der Zeit unter Verwendung der Kettenregel gerade ihre Wachstumsrate ergibt:

$$\frac{d \ln Y}{dt} = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{\dot{Y}}{Y} = g_Y.$$

Angenommen, das Nationaleinkommen Y wird mittels einer makroökonomischen Produktionsfunktion

$$Y = F(K, L)$$

produziert, wobei K der Kapitalstock und L der Arbeitseinsatz ist.

Bemerkung 2.2. Für den Arbeitseinsatz wird üblicherweise unterstellt, daß er proportional zur Bevölkerungsgröße ist. Wenn zum Beispiel die Anzahl der Erwerbstätigen konstant die Hälfte der Gesamtbevölkerung ist und die Arbeitszeit jedes Erwerbstätigen pro Zeiteinheit auf eins normiert wird, ist der **numerische Wert** der gesamten Arbeitszeit pro Zeiteinheit gleich der halben Bevölkerungsgröße:

$$\begin{aligned}\frac{\text{Arbeitseinsatz}}{\text{Zeiteinheit}} &= \text{Anzahl der Erwerbstätigen} \times \frac{\text{Arbeitszeit pro Erwerbstätigem}}{\text{Zeiteinheit}}\\ &= \frac{\text{Bevölkerungsgröße}}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times \text{Bevölkerungsgröße},\end{aligned}$$

wobei die **Bestandsgrößen** Bevölkerung und Erwerbstätige als Durchschnittswerte anzusetzen sind. Ohne weitere Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann man den Anteil der Erwerbstätigen auch auf eins normieren, so daß die Arbeitszeit pro Zeiteinheit numerisch gleich der Bevölkerungsgröße ist. Die Variable L wird daher als Bevölkerung interpretiert, obwohl mit Bezug zu der Produktionsfunktion der (numerisch gleiche) Arbeitseinsatz pro Zeiteinheit (eine **Stromgröße**) zu betrachten ist. Entsprechende Anmerkungen gelten in bezug auf die Bestandsgröße Kapitalstock, die in eine numerisch gleiche Stromgröße Kapitalnutzung pro Zeiteinheit umzurechnen ist. Schließlich ist zu beachten, daß die Bemerkung 2.1 analog anzuwenden ist. In einem Zeitpunkt ist zum Beispiel streng genommen von der *Rate der Kapitalnutzung* zu sprechen. Integriert man diese Rate über den Zeitraum eines Jahres, so erhält man die Kapitalnutzung pro Jahr. ♢

Die logarithmische Ableitung der Produktionsfunktion ergibt:

$$\frac{d \ln Y}{dt} = \frac{1}{F}(F_K \dot{K} + F_L \dot{L}),$$

wobei partielle Ableitungen durch Subskripte gekennzeichnet werden. Erweitert man die beiden Summanden auf der rechten Seite mit K/K beziehungsweise L/L und bezeichnet die partiellen Produktionselastizitäten der Faktoren mit $\sigma_K := F_K K/F$ beziehungsweise $\sigma_L := F_L L/F$, so folgt daraus

$$g_Y = \sigma_K g_K + \sigma_L g_L.$$

Die Wachstumsrate von Y ist also gleich der mit den partiellen Produktionselastizitäten gewichteten Summe der Wachstumsraten der Faktoren.

Für den Fall einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ erhält man (wie immer bei rechnerischen Produkten) durch die logarithmische Ableitung das Ergebnis unmittelbar:

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha) g_L,$$

wobei die Berechnung dadurch vereinfacht wird, daß der natürliche Logarithmus eines Produktes gleich der Summe der natürlichen Logarithmen ist. Unterstellt man weiter, daß g_L konstant gleich n ist und daß $g_Y = g_K$ gilt, so folgt daraus $g_Y = n$. Wenn g_Y konstant gleich n ist, ergibt die logarithmische Ableitung unmittelbar, daß auch die Wachstumsrate von $\dot{Y}$ konstant gleich n ist:

$$\dot{Y} = nY \quad \Longrightarrow \quad g_{\dot{Y}} = g_Y = n.$$

Angenommen, die Arbeit L, die mit der konstanten Rate n wächst, wird auf zwei Produktionsrichtungen verteilt: $L = L_1 + L_2$. Dann gilt

$$n = g_L = g_{L_1} \frac{L_1}{L} + g_{L_2} \frac{L - L_1}{L}.$$

Wenn man unterstellt, daß auch g_{L_1} und g_{L_2} konstant sind, folgt daraus, daß $g_{L_1} = g_{L_2} = n$. Denn wenn zum Beispiel $g_{L_1} > n$ wäre, so würde L_1/L exponentiell wachsen und $L - L_1$ in endlicher Zeit gegen null gehen, so daß die Gleichung nicht erfüllt ist. Wenn man anstelle der Konstanz von g_{L_1} fordert, daß L_1/L konstant ist, folgt daraus ebenfalls unmittelbar $g_{L_1} = g_{L_2} = n$.

2.1.2 Klassifikation und Existenzsätze

Klassifikation von Differentialgleichungen Durch eine **Differentialgleichung** wird der Zusammenhang zwischen einer gesuchten Funktion einer oder mehrerer Veränderlichen (Variablen), diesen Veränderlichen und den Ableitungen der gesuchten Funktion nach diesen Variablen beschrieben. Hängt die gesuchte Funktion nur von einer Veränderlichen ab, so bezeichnet man die Gleichung als **gewöhnliche Differentialgleichung**, andernfalls als **partielle Differentialgleichung**. In der Wachstumstheorie werden nahezu ausschließlich die gewöhnlichen Differentialgleichungen verwendet, die in der allgemeinsten Form durch

$$F[t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}] = 0$$

implizit angegeben werden können. Dabei bezeichnet t die unabhängige Veränderliche, die hier als Zeit interpretiert wird. Mit $x(t)$ wird die gesuchte Funktion und mit $\dot{x}(t) := dx(t)/dt$ ihre erste Ableitung nach t bezeichnet. Entsprechend sind $\ddot{x}(t)$ und $x^{(n)}(t)$ die zweite beziehungsweise n-te Ableitung nach t. Im folgenden wird einfach von *Differentialgleichungen* gesprochen, wenn *gewöhnliche Differentialgleichungen* gemeint sind.

Die höchste der auftauchenden Ableitungen $x^{(n)} := d^n x/dt^n$ bestimmt die **Ordnung** n der Differentialgleichung. Ist die Differentialgleichung nach der Ableitung der höchsten Ordnung aufgelöst, so bezeichnet man sie als **explizite** Differentialgleichung:

$$x^{(n)} = f[t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}]. \tag{2.6}$$

Dieser Fall wird im folgenden ausschließlich betrachtet.

Unter der **Integration** oder **Lösung** einer Differentialgleichung versteht man die Bestimmung einer Funktion $x(t)$, die die Gleichung (2.6) für ein bestimmtes Intervall $t \in (\alpha, \beta)$ erfüllt. Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung hat die Form

$$x = x(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

wobei $C_1, C_2, \ldots, C_n$ beliebige Konstanten sind. Bei jeder Wahl der Konstanten ergibt sich eine **spezielle Lösung** der Differentialgleichung. Beispielsweise fordert das **Anfangswertproblem** die Suche nach einer speziellen Lösung, die den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ genügt. Allgemeiner fordert ein **Randwertproblem** die Suche nach einer speziellen Lösung, die insgesamt n Anfangs- und/oder Endbedingungen genügt; die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n beliebige Konstanten, die durch diese n Randbedingungen festgelegt werden können. Eine Differentialgleichung kann auch **singuläre Lösungen** besitzen, die sich nicht aus der allgemeinen Lösung für spezielle Parameterwerte ergeben.

Beispiel 2.1. Die Differentialgleichung $\dot{x} = 3x^{2/3}$ hat die allgemeine Lösung $x(t) = (t+C)^3$, die man durch Trennung der Veränderlichen ermitteln kann. Für das Anfangswertproblem mit $x_0 = 0$ folgt wegen $0 = (0+C)^3$ mit $C = 0$ die spezielle Lösung $\phi(t, 0) = t^3$, die man durch Einsetzen verifizieren kann. Da die Differentialgleichung für $x(t) \equiv 0$ offenbar erfüllt ist, ist $\phi(t, 0) \equiv 0$ aber auch eine Lösung des Anfangswertproblems. Daher werden, weil C eine beliebige Konstante ist, durch

$$\phi(t, 0, K) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, K] \\ (t-K)^3 & t \in (K, \infty) \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen durch alle positiven $K \in R$ definiert, die das Anfangswertproblem erfüllen. Man beachte, daß $\phi(t, 0, K)$ stetig differenzierbar ist und daß die singuläre Lösung $x(t) \equiv 0$ nicht durch eine spezielle Wahl der Konstanten C aus der allgemeinen Lösung $x(t) = (t+C)^3$ hervorgeht. $\Diamond$

Jede explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form (2.6) läßt sich in ein äquivalentes **System von n Differentialgleichungen** erster Ordnung umformen. Dazu werden die neuen gesuchten Funktionen $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \ddot{x}, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$

eingeführt.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

Dieses System ist zu (2.6) in dem Sinne äquivalent, daß $x(t) = x_1(t)$ eine Lösung von (2.6) ist, wenn $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ Lösungen des Systems sind, und daß $x_1(t) = x(t), x_2(t) = \dot{x}(t), \ldots, x_n(t) = x^{(n)}(t)$ Lösungen des Systems sind, wenn $x(t)$ eine Lösung von (2.6) ist. Folglich reicht es aus, anstelle von einzelnen Differentialgleichungen höherer Ordnung Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zu betrachten. In vielen Anwendungen treten derartige Systeme ohnehin unmittelbar auf. Man sagt auch, das System von n Differentialgleichungen erster Ordnung habe die Ordnung n. Entsprechend hat ein System von zum Beispiel einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer Differentialgleichung dritter Ordnung die Ordnung 5. Wie in der allgemeinen Lösung einer einzelnen Differentialgleichung n-ter Ordnung n Konstanten auftreten, treten sie auch in der allgemeinen Lösung eines Systems n-ter Ordnung auf.

Beispiel 2.2. Gegeben ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 3x - 2\dot{x}.$$

Mit $x_1 = x$ und $x_2 = \dot{x}$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= 3x_1 - 2x_2.
\end{aligned}
$$

Ein Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß es oft einfacher ist, ein System zweiter Ordnung graphisch zu analysieren, als die entsprechende Differentialgleichung zweiter Ordnung. Umgekehrt kann auch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung durch eine Differentialgleichung höherer Ordnung ersetzt werden. ◊

Die allgemeine Form eines Systems von n Differentialgleichungen erster Ordnung lautet

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f^1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= f^2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\dot{x}_n &= f^n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

oder, in Vektorschreibweise,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{2.7}$$

mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ und $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^n)'$. Im weiteren Verlauf wird (2.7) oftmals einfach als Differentialgleichung statt als System von Differentialgleichungen bezeichnet. Diese Bezeichnung ergibt sich daraus, daß (2.7) eine **Funktion** $\mathbf{f}\colon T \times X \to R^n$ darstellt, wobei $T \times X$ den Definitionsbereich von $\mathbf{f}$ bezeichnet. $T \subset R$ ist ein offenes Intervall und $X \subset R^n$ eine offene Teilmenge des R^n.

Einen wichtigen Spezialfall, der in der allgemeinen Wirtschaftstheorie und auch speziell in der Wachstumstheorie von zentraler Bedeutung ist, stellen die **autonomen** Differentialgleichungen dar, bei denen die Funktion $\mathbf{f}$ nicht explizit von t abhängt. Im folgenden wird unterstellt, daß die Funktion $\mathbf{f}\colon X \to R^n$ mit $X \subset R^n$ stetig differenzierbar ist, in Symbolen also $\mathbf{f} \in C^1(X)$. Allgemein bezeichnet $C^i(X)$ die Menge der auf X definierten i-mal stetig differenzierbaren Funktionen. (Für $i = 0$ sind die Funktionen stetig.) Als **Anfangswertproblem** formuliert ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen existiert eine eindeutige Lösung für dieses Anfangswertproblem. Diese Lösung ist eine Funktion $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$, die nur vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ und der seit $t_0 = 0$ vergangenen Zeit abhängt, nicht aber vom Anfangszeitpunkt selbst. Für $t_0 \neq 0$ kann man die Lösung daher allgemeiner schreiben als $\boldsymbol{\phi}(t - t_0, \mathbf{x}_0)$. Im folgenden gilt ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit durchgehend $t_0 = 0$, so daß die Darstellung $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ für die Lösung eines autonomen Systems zutrifft. Die Lösung des nichtautonomen Systems (2.7) hängt dagegen auch vom Anfangszeitpunkt selbst ab, so daß sich eine Funktion $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ ergibt.

Bemerkung 2.3. Zur **Schreibweise** ist die folgende Anmerkung erforderlich. Obwohl die Lösung eines Anfangswertproblems grundsätzlich mit $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ bezeichnet wird, ist es in den Anwendungen oft einfacher, die Lösung selbst einfach als $\mathbf{x}(t)$ zu schreiben, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht. ◊

Beispiel 2.3. Gegeben sind die beiden Anfangswertprobleme (zwei einzelne Differentialgleichungen, kein System)

$$\dot{x} = x, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.9}$$

$$\dot{x} = tx, \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.10}$$

Beide Lösungen können durch die bereits mehrfach angewendete Methode der Trennung der Veränderlichen berechnet werden. Die Lösung des autonomen Problems (2.9) lautet

$$\phi(t - t_0, x_0) = x_0 e^{(t - t_0)},$$

die Lösung des nichtautonomen Problems (2.10) ist

$$\phi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{(t^2 - t_0^2)/2}.$$

Die Lösung des nichtautonomen Problems hängt also im Gegensatz zu derjenigen des autonomen Problems nicht nur von $t - t_0$ ab, sondern gesondert von t und von t_0. ◊

Die **Bedeutung autonomer Differentialgleichungen** ergibt sich daraus, daß das Ziel der positiven Wirtschaftstheorie die **Erklärung ökonomischer Zusammenhänge** ist. In nichtautonomen Differentialgleichungen spielt die vergangene Zeit eine wesentliche Rolle hinsichtlich der Größe der abhängigen Variablen. Eine wirkliche Erklärung ökonomischer Tatbestände kann aber nicht auf der Variablen *Zeit* beruhen, sondern bedarf der Analyse von Ursache und Wirkung. Daraus ergibt sich, daß letztlich nur autonome Systeme von Differentialgleichungen den Anforderungen der Wirtschaftstheorie gerecht werden können. Eine bedeutende Ausnahme von dieser Regel stellt die Berücksichtigung der Diskontierung dar. Denn eine positive Zeitpräferenzrate der Individuen bedeutet, daß etwa zukünftiger Konsum weniger hoch bewertet wird als gegenwärtiger Konsum. Über die Berücksichtigung von Diskontraten und Zinssätzen findet die Zeit daher in manchen Fällen doch expliziten Eingang in die in der Wirtschaftstheorie betrachteten Differentialgleichungen. Häufig ist es allerdings durch eine einfache Transformation möglich, die entstehenden nichtautonomen Systeme in autonome zu überführen (vgl. den Satz 2.16).

Das autonome System (2.8) spielt auch in der Theorie der Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, weil es als **dynamisches System** betrachtet werden kann. Dazu wird die unabhängige Variable t (wie hier ohnehin) als Zeit interpretiert.

Definition 2.1. [2] *Ein **dynamisches System** ist eine C^1-Funktion $\boldsymbol{\phi} : R \times X \to X$ mit $X \subset R^n$ offen, wenn die durch $\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$ definierte Funktion $\boldsymbol{\phi}_t : X \to X$ die Bedingungen*

(a) $\boldsymbol{\phi}_0 : X \to X$ *ist die Identitätsabbildung und*

(b) $\boldsymbol{\phi}_t \circ \boldsymbol{\phi}_s = \boldsymbol{\phi}_{t+s}$, $\forall\, t, s \in R$ *erfüllt.*

Zu beachten ist, daß diese Definition erfordert, daß $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$ für alle $t \in R$ definiert ist. Sofern $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$ die Lösung eine Differentialgleichung ist, gilt diese Eigenschaft allerdings nur unter bestimmten Annahmen, etwa im Fall linearer Differentialgleichungen. Trotzdem ist die Definition sinnvoll, weil ein dynamisches System ein physikalisches Problem wie etwa ein schwingendes Pendel beschreiben soll, wofür es auch für die gesamte Zukunft definiert sein muß. Diese Idee läßt sich unmittelbar auf die Wirtschaftstheorie übertragen. Wenn eine Differentialgleichung ein ökonomisches Phänomen beschreibt, muß man prinzipiell davon ausgehen können, daß die Lösung entweder für alle t definiert ist, oder man muß Bedingungen angeben können, wie sich das Phänomen strukturell zu einem späteren Zeitpunkt ändert, so daß das eine System von Differentialgleichungen durch ein anderes mit definierter Lösung ersetzt wird. Im Abschnitt 2.1.2 werden Bedingungen für die Existenz der Lösungen angegeben.

Während die Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen für alle t nicht ohne weiteres gegeben ist, kann man umgekehrt zu jedem dynamischen System ein

[2] Vgl. zum Beispiel Hirsch und Smale (1974, S. 160) und Perko (1996, S. 180). Die Schreibweise $\boldsymbol{\phi}_t \circ \boldsymbol{\phi}_s$ bezeichnet die Verknüpfung beider Funktionen, gelesen als $\boldsymbol{\phi}_t$ nach $\boldsymbol{\phi}_s$, da $\boldsymbol{\phi}_t$ nach $\boldsymbol{\phi}_s$ angewendet wird.

entsprechendes System von Differentialgleichungen wie folgt angeben:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x})\Big|_{t=0}.$$

Beispiel 2.4. Gegeben sei die Funktion $\phi\colon R \times R \to R$ mit $\phi_t(x) = xe^{at}$. Die Abbildung $\phi_t = e^{at}$ erfüllt die Anforderungen (a) und (b) der Definition 2.1, denn $\phi_0(x) = e^0 x = x$, das heißt ϕ_0 ist der Identitätsoperator und $e^{at}e^{as}x = e^{a(t+s)}x$, so daß $\phi_t \circ \phi_s = e^{at} \circ e^{as} = e^{a(s+t)} = \phi_{t+s}$ gilt. ϕ ist also ein dynamisches System auf $X = R$.

Die entsprechende Differentialgleichung erhält man durch die Ableitung nach t an der Stelle $t = 0$:

$$f(x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)\Big|_{t=0} = axe^{at}|_{t=0} = ax,$$

also

$$\dot{x} = ax.$$

$\lozenge$

Wenn die Lösung des Systems (2.8) auf ganz R eindeutig existiert, wird auch (2.8) selbst vielfach als dynamisches System bezeichnet.

Beispiel 2.5. Die Lösung von $\dot{x} = ax$ mit $x(0) = x_0$ erhält man durch das Verfahren der Trennung der Veränderlichen als $\phi(t, x_0) = x_0 e^{at}$. Also beschreibt $\dot{x} = ax$ mit $x(0) = x_0$ ein dynamisches System auf $X = R$. Dagegen wird durch die Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ kein dynamisches System definiert. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet nämlich

$$\phi(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

und ist daher nur für $t \in [0, 1/x_0)$ definiert, wenn $t_0 = 0$ ist. $\lozenge$

$X \subset R^n$ ist der **Zustandsraum** des dynamischen Systems. Jedem **Zustand** $\mathbf{x}$ entspricht ein Punkt im n-dimensionalen Raum. Die Lösungskurven in Abhängigkeit von $\mathbf{x}_0$ werden als **Trajektorien** oder **Orbits** bezeichnet. Für jedes feste t ordnet die Abbildung $\boldsymbol{\phi}_t$ einem Punkt $\mathbf{x}_0$ einen anderen Punkt $\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0)$ zu. Im Laufe der Zeit bewegt sich jeder Punkt entlang der Trajektorie, die durch ihn verläuft. Dadurch erhält man eine einparametrige Familie von Funktionen $\boldsymbol{\phi}_t\colon X \to R^n$ für alle $t \in R$, die als **Fluß** des dynamischen Systems oder der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ bezeichnet wird. Diese Differentialgleichung definiert auch ein **Vektorfeld** $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$, das im zweidimensionalen Fall geometrisch dadurch dargestellt werden kann, daß man jeden Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit dem Punkt $\mathbf{x} \in X$ als Anfangspunkt in ein Diagramm im (x_1, x_2)-Raum einzeichnet. Die Trajektorien verlaufen dann tangential zu den Vektoren des Vektorfeldes.

Existenz der Lösungen Da nichtlineare Systeme von Differentialgleichungen in aller Regel nicht explizit lösbar sind, ist es von zentraler Bedeutung, über ein allgemeines Theorem über die Existenz und gegebenenfalls die Eindeutigkeit von Lösungen zu verfügen. Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}: X \to R^n, \quad X \subset R^n \quad \text{offen}, \\ \mathbf{f} \in C^1(X), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Zunächst wird noch einmal genau definiert, was unter der Lösung einer Differentialgleichung zu verstehen ist.

Definition 2.2. *(a) Die Funktion $\boldsymbol{\phi}(t)$ heißt **Lösung der** Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (ohne die Anfangsbedingung) auf einem Intervall I, wenn sie für alle $t \in I$ stetig differenzierbar ist, $\boldsymbol{\phi}(t) \in X$ ist und $\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t))$ gilt.*

*(b) Die Funktion $\boldsymbol{\phi}(t)$ ist eine **Lösung des Anfangswertproblems** (2.11) auf einem Intervall I, wenn $\boldsymbol{\phi}(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung auf I ist und $t_0 \in I$ sowie $\boldsymbol{\phi}(t_0) = \mathbf{x}_0$ gilt.*

Um die Abhängigkeit von der Anfangsbedingung auszudrücken, wird die Lösung des Anfangswertproblems häufig als $\boldsymbol{\phi}(t - t_0, \mathbf{x}_0)$ geschrieben. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann dabei $t_0 = 0$ gesetzt werden. Wenn nicht ein spezieller Startwert $\mathbf{x}_0$ von Interesse ist, wird die Lösung häufig auch als $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x})$ dargestellt, wobei $\mathbf{x} \in X$ dann irgendein Startwert ist. In diesem Fall sollte die Lösung natürlich nicht im selben Zusammenhang in der vereinfachten Schreibweise $\mathbf{x}(t)$ angegeben werden.

Der grundlegende Satz über die Existenz und Eindeutigkeit kann nun angegeben werden.

Satz 2.1 (Existenz und Eindeutigkeit) *Sei X eine offene Teilmenge des R^n, die $\mathbf{x}_0$ enthält, und $\mathbf{f} \in C^1(X)$. Dann gibt es ein $a > 0$, so daß das Anfangswertproblem (2.11) eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{\phi}(t - t_0, \mathbf{x}_0)$ auf dem Intervall $(t_0 - a, t_0 + a)$ hat.*

Beweis: Der Beweis ist in den meisten Büchern über gewöhnliche Differentialgleichungen enthalten, vgl. zum Beispiel Hirsch und Smale (1974, S. 163–167) oder Perko (1996, S. 74–76). □

Bemerkung 2.4. Der Satz 2.1 gilt analog auch für nichtautonome Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, wobei es ausreicht, daß $\mathbf{f}$ stetig in $(\mathbf{x}, t)$ und stetig differenzierbar in $\mathbf{x}$ ist. ♢

Bemerkung 2.5. Der historisch erste Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer stetig differenzierbaren Differentialgleichung stammt von Cauchy. Der Satz 2.1 wird daher auch als **Satz von Cauchy** bezeichnet. Die Voraussetzung $\mathbf{f} \in C^1(X)$ ist stärker als nötig. Tatsächlich reicht es aus, daß $\mathbf{f}$ lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Die Funktion $\mathbf{f}$ heißt **Lipschitz-stetig** auf X, wenn eine Konstante

$K > 0$ existiert, so daß[3]

$$\| \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \| \leq K \| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \|$$

für alle $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in X$. **F** heißt **lokal Lipschitz-stetig** auf X, wenn für jedes $\mathbf{x}_0 \in X$ eine Umgebung $X_0 \subset X$ existiert, auf der **f** Lipschitz-stetig ist. Wenn $\mathbf{f} \in C^1$ ist, ist **f** lokal Lipschitz-stetig, aber nicht umgekehrt. Aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit folgt dagegen die Stetigkeit. Der mit einer Lipschitz-Bedingung formulierte Satz wird manchmal als **Satz von Cauchy-Lipschitz** bezeichnet. Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen kann ein Existenzintervall für die Lösung angegeben werden; der entsprechende Satz heißt **Satz von Picard-Lindelöf** (vgl. zum Beispiel Amann, 1995, S. 116). ♢

Bemerkung 2.6. Ist **f** weder differenzierbar noch Lipschitz-stetig, aber stetig, so gilt der Existenz-Teil des Satzes 2.1 weiter; lediglich die Eindeutigkeit ist dann nicht sichergestellt. Diese Version heißt **Satz von Peano**. Die Funktion im Beispiel 2.1 ist für $x = 0$ nicht Lipschitz-stetig. ♢

Aus dem Satz 2.1 folgt nicht ohne weiteres, daß durch (2.11) ein dynamisches System gemäß der Definition 2.1 gegeben ist, da die Lösung nur für ein Intervall $I = (t_0 - a, t_0 + a)$ sichergestellt ist. Die Differentialgleichung aus dem Beispiel 2.5 existiert etwa nur für $t < 1/x_0$. Für dieses Problem gibt es mehrere Lösungsansätze. Wenn sich in einem konkreten Fall zum Beispiel herausstellt, daß die Lösung zwar nicht für alle $t \in R$, aber doch für alle $t \geqq 0$ existiert, so betrachtet man anstelle des Flusses $\boldsymbol{\phi}_t : X \to R^n$ für alle $t \in R$ den sogenannten **positiven Halbfluß** $\boldsymbol{\phi}_t : X \to R^n$ für alle $t \geqq 0$. In vielen Anwendungen reicht es aus, daß die Lösung für alle $t \geqq 0$ existiert. Der folgende Satz gibt eine Bedingung dafür an.

Satz 2.2. *Sei X eine offene Teilmenge des R^n und P eine kompakte Teilmenge[4] von X, die $\mathbf{x}_0$ enthält. Wenn jede Trajektorie $\mathbf{x} : [0, b] \to X$ mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ des Systems (2.11) vollständig in P liegt, dann gibt es auch eine Lösung $\mathbf{x} : [0, \infty) \to X$ mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}(t) \in P$ für alle $t \geqq 0$.*

Beweis: Hirsch und Smale (1974, S. 172). □

Eine Menge wie P im Satz 2.2, in der die Trajektorien für alle $t \geqq 0$ verbleiben, heißt positiv invariante Menge. Da dieser Begriff wichtig ist, wird er formal definiert.

Definition 2.3. *Eine Menge $M \subset X$ heißt **positiv invariant** für den Fluß eines dynamischen Systems, wenn für jedes $\mathbf{x} \in M$ die Lösung $\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x})$ für alle $t \geqq 0$ definiert ist und in M liegt.*

---

[3] Mit der Metrik $\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \| = \sqrt{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}$ wird der euklidische Abstand der Punkte $\mathbf{x}$ und $\hat{\mathbf{x}}$ gemessen. Eine **Umgebung** eines Punktes $\hat{\mathbf{x}} \in X$ ist eine Menge, die eine ϵ-Umgebung enthält. Eine ϵ-**Umgebung** von $\hat{\mathbf{x}} \in X$ oder offene Kugel um $\hat{\mathbf{x}} \in X$ ist die Menge $\{\mathbf{x} \in X \mid \| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \| < \epsilon\}$.

[4] Eine Teilmenge des R^n ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Selbst wenn die Voraussetzungen des Satzes 2.2 nicht gegeben sind, ist es in einem gewissen Sinne immer möglich, zu einem System von Differentialgleichungen (2.11) ein dynamisches System zu finden. Dazu werden die Zeiteinheiten anders festgesetzt, um ein topologisch äquivalentes System zu (2.11) zu erhalten, das eine Lösung für alle $t \in R$ hat. Ein entsprechendes globales Existenztheorem findet sich zum Beispiel bei Perko (1996, S. 182).

2.1.3 Explizite Lösungen

Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen Im Zusammenhang mit den Beispielen im Abschnitt 2.1.1 ist die Trennung der Veränderlichen bereits erläutert worden. In diesem Abschnitt wird dieses wohl wichtigste Verfahren zur expliziten Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen allgemein dargestellt. Die **Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen** hat die Form

$$\dot{x} = g(t) f(x).$$

Die autonomen Differentialgleichungen erster Ordnung stellen einen Spezialfall dieser Gleichungen für $g(t) \equiv 1$ dar. Das entsprechende Anfangswertproblem lautet

$$\dot{x} = g(t) f(x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.12}$$

Zur Lösung der Differentialgleichung betrachtet man die Ableitung $\dot{x}$ als Verhältnis zweier Differentiale dx und dt. Mit $\dot{x} = dx/dt$ folgt für $f(x) \neq 0$

$$\frac{1}{f(x)}\, dx = g(t)\, dt.$$

Die Integration beider Seiten liefert

$$\int \frac{1}{f(x)}\, dx = \int g(t)\, dt + C, \tag{2.13}$$

wobei C eine Konstante ist. Diese Gleichung stellt die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung $\dot{x} = g(t) f(x)$ in **impliziter Form** dar. Sofern die Integrale auf beiden Seiten geschlossen dargestellt werden können und eine explizite Auflösung nach x möglich ist, erhält man die allgemeine Lösung in **expliziter Form** $x(t, C)$. Die Konstante C wird für das Anfangswertproblem durch die Anfangsbedingung festgelegt, um zur **speziellen Lösung** $\phi(t, t_0, x_0)$ in expliziter Form zu gelangen. Bei **autonomen** Differentialgleichungen, das heißt für $g(t) \equiv 1$, kann ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit $t_0 = 0$ gesetzt werden, was die Darstellung $\phi(t, x_0)$ ermöglicht.

Aus dem Satz 2.1 folgt, daß es genau eine lokale Lösung des Anfangswertproblems (2.12) gibt, wenn die Funktionen g und f stetig differenzierbar sind. Wenn im relevanten Bereich $f \neq 0$ ist, reicht im vorliegenden Fall die Stetigkeit auch für die Eindeutigkeit aus. Ein Beweis für diese Aussage, der zugleich eine strenge Begründung für das hier heuristisch hergeleitete Lösungsverfahren gibt, findet sich bei Heuser (1993a, S. 515 f.).

Lineare Differentialgleichungen Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung lautet

$$\dot{x} = a(t)x + s(t), \tag{2.14}$$

wobei $a(t)$ und $s(t)$ stetige Funktionen der Zeit t sind. Das zugehörige Anfangswertproblem ist

$$\dot{x} = a(t)x + s(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.15}$$

Der Ausdruck $s(t)$ wird als **Störglied (Störterm, Störfunktion)** bezeichnet. Ist $s(t) \equiv 0$, so liegt eine **homogene** Differentialgleichung vor, andernfalls eine **inhomogene**. Sind $a(t)$ und $s(t)$ konstant, ist die Differentialgleichung autonom, andernfalls **nichtautonom**.

Zunächst wird die allgemeine Lösung $x^h(t)$ des homogenen Teils $\dot{x} = a(t)x$ und dann eine spezielle Lösung $x^p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung (2.14) ermittelt. Denn die **allgemeine Lösung** $x(t,C)$ von (2.14) ergibt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Teils und der speziellen Lösung, die auch **partikuläre Lösung** genannt wird:

$$x(t,C) = x^h(t) + x^p(t).$$

Der Beweis ist eine einfache Rechnung. Angenommen, $x^p(t)$ ist eine Lösung von (2.14) und $x^h(t)$ ist die allgemeine Lösung des homogenen Teils. Dann folgt aus $x(t,C) = x^h(t) + x^p(t)$, daß

$$\dot{x}(t,C) - a(t)x(t,C) = \underbrace{\dot{x}^h(t) - a(t)x^h(t)}_{=0} + \underbrace{\dot{x}^p(t) - a(t)x^p(t)}_{=s(t)} = s(t).$$

Also ist $x(t,C)$ eine Lösung von (2.14). Zieht man umgekehrt von irgendeiner vorgegebenen Lösung $x(t,C)$ von (2.14) eine beliebige spezielle Lösung $x^p(t)$ ab, so ist $x^h(t) = x(t,C) - x^p(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\dot{x}^h(t) - a(t)x^h(t) = \underbrace{\dot{x}(t,C) - a(t)\dot{x}(t,C)}_{=s(t)} \underbrace{-\dot{x}^p(t) + a(t)x^p(t)}_{=-s(t)} = 0.$$

Also kann jede Lösung von (2.14) als Summe irgendeiner speziellen Lösung und einer Lösung des homogenen Teils dargestellt werden.

Die Lösung des homogenen Teils erhält man wie zuvor durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int a(t)\,dt + C_1 \quad \Longrightarrow \quad x^h(t) = Ce^{\int a(t)\,dt}.$$

Also muß nur noch eine partikuläre Lösung von (2.14) gefunden werden. Dazu stehen mehrere Verfahren zur Verfügung. Wenn $a(t)$ und $s(t)$ bekannte elementare Funktionen sind, können sogenannte spezielle Lösungsansätze ausprobiert werden. Die bekannteste allgemeinere Methode ist das klassische Verfahren der **Variation der Konstanten**, das im folgenden erläutert wird.

Diese Methode hat ihren Namen, weil man $Ce^{\int a(t)\,dt}$, die allgemeine Lösung des homogenen Teils von (2.14), verwendet und die darin auftretende Konstante C als differenzierbare Funktion von t auffaßt. Diese Funktion $C(t)$ wird dann so bestimmt, daß

$$x^p(t) = C(t)e^{\int a(t)\,dt}$$

eine partikuläre Lösung der gestörten Gleichung (2.14) ergibt. Setzt man diesen Ansatz in (2.14) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
& \dot{C}(t)e^{\int a(t)\,dt} + a(t)C(t)e^{\int a(t)\,dt} = a(t)C(t)e^{\int a(t)\,dt} + s(t) \\
\Longleftrightarrow \quad & \dot{C}(t)e^{\int a(t)\,dt} = s(t) \\
\Longleftrightarrow \quad & \dot{C}(t) = s(t)e^{-\int a(t)\,dt}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion auf der rechten Seite nach Voraussetzung stetig ist, kann diese Gleichung integriert werden:

$$C(t) = \int \dot{C}(t)\,dt = \int s(t)e^{-\int a(t)\,dt}\,dt.$$

Damit erhält man als partikuläre Lösung

$$x^p(t) = e^{\int a(t)\,dt} \int s(t)e^{-\int a(t)\,dt}\,dt$$

und als allgemeine Lösung von (2.14)

$$x(t,C) = e^{\int a(t)\,dt}\left[C + \int s(t)e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right]. \tag{2.16}$$

Wenn die Funktionen $a(t)$ und $s(t)$ nicht explizit gegeben sind, stellt sich die Frage, wie die spezielle Lösung des Anfangswertproblems (2.15) unter Verwendung der Integraldarstellung ausgedrückt werden kann. Dazu ersetzt man die unbestimmten Integrale in (2.16) durch die bestimmten Integrale mit der veränderlichen oberen Grenze t und der unteren Grenze t_0:

$$x(t,C) = e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}\left[C + \int_{t_0}^t s(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(z)\,dz}\,d\tau\right], \tag{2.17}$$

wobei z und τ symbolische Integrationsvariablen sind. Für $t = t_0$ und $x(t_0) = x_0$ folgt damit $C = x_0$, so daß man die folgende spezielle Lösung von (2.15) erhält:

$$\phi(t,t_0,x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}\left[x_0 + \int_{t_0}^t s(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(z)\,dz}\,d\tau\right]. \tag{2.18}$$

Für den Spezialfall mit **konstantem Koeffizienten** $a(t) = a$ kann man die Integrale bezüglich dz berechnen. Damit ergibt sich nach einigen Umformungen schließlich

$$\phi(t,t_0,x_0) = x_0e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t s(\tau)e^{-a(\tau-t)}\,d\tau. \tag{2.19}$$

Wenn auch $s(t)$ konstant gleich b ist, folgt

$$\phi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)} - b\left[\frac{1}{a}e^{-a(\tau-t)}\right]_{t_0}^{t} = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}. \tag{2.20}$$

In ökonomischen Anwendungen wird vielfach anstelle des Anfangswertproblems (2.15) ein **Endwertproblem** mit $x(T) = x_T$ formuliert. Um die Lösung zu erhalten, muß in (2.17) lediglich t_0 durch T ersetzt werden. Man erhält dann $C = x_T$ und damit die spezielle Lösung des Endwertproblems

$$\phi(t, T, x_T) = e^{\int_T^t a(z)\,dz}\left[x_T + \int_T^t s(\tau)e^{-\int_T^\tau a(z)\,dz}\,d\tau\right].$$

Beachtet man schließlich, daß sich bei Vertauschung der Integrationsgrenzen das Vorzeichen eines bestimmten Integrals ändert, und unterstellt wieder einen konstanten Koeffizienten a, so ergibt sich die spezielle Lösung

$$\phi(t, T, x_T) = x_T e^{a(t-T)} - \int_t^T s(\tau)e^{-a(\tau-t)}\,d\tau, \tag{2.21}$$

die manchmal als **Vorwärtslösung** bezeichnet wird, weil zum Beispiel ausgehend vom Zeitpunkt $t = 0$ die Lösung für $x(t)$ in Abhängigkeit von den zukünftigen Werten der Störfunktion $s(t)$ ausgedrückt wird.

Die Bernoullische Differentialgleichung Die sogenannte *Bernoullische Differentialgleichung* hat die allgemeine Form

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^n, \tag{2.22}$$

wobei n eine reelle Zahl ungleich 0 oder 1 ist (in diesen Fällen würde sich (2.22) auf eine lineare Differentialgleichung reduzieren) und $a(t)$ beziehungsweise $b(t)$ stetige Funktionen der Zeit sind.

Die Lösung dieser Gleichung erhält man, indem sie durch eine Variablentransformation in eine lineare Differentialgleichung überführt wird. Dazu wird (2.22) zunächst auf beiden Seiten mit $(1-n)x^{-n}$ multipliziert:

$$(1-n)x^{-n}\dot{x} = (1-n)a(t)x^{1-n} + (1-n)b(t),$$

Setzt man $y := x^{1-n}$, so folgt direkt $\dot{y} = (1-n)x^{-n}\dot{x}$, also

$$\dot{y} = (1-n)a(t)y + (1-n)b(t),$$

eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in y, die mit den bereits bekannten Methoden gelöst werden kann. Die allgemeine Lösung von (2.22) ergibt sich wegen $y = x^{1-n}$ aus der allgemeinen Lösung für y gemäß $x(t, C) = y(t, C)^{1/(1-n)}$.

Beispiel 2.6. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{k} = sak^{\alpha} - nk, \quad s, a, n > 0,\ 0 < \alpha < 1. \tag{2.23}$$

Die Multiplikation mit $(1-\alpha)k^{-\alpha}$ liefert

$$(1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k} = (1-\alpha)sa - n(1-\alpha)k^{1-\alpha}.$$

Setzt man $y = k^{1-\alpha}$ und damit $\dot{y} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$, so ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = (1-\alpha)sa - n(1-\alpha)y$$

mit der Lösung

$$y(t, y_0) = \left(y_0 - \frac{sa}{n}\right)e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{sa}{n}.$$

Die Rücksubstitution von $y = k^{1-\alpha}$ ergibt schließlich:

$$k(t, k_0) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{sa}{n}\right)e^{-n(1-\alpha)t} + \frac{sa}{n}\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{2.24}$$

Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen das langfristige Gleichgewicht

$$\hat{k} = (sa/n)^{1/(1-\alpha)}.$$

Dieses Beispiel hat eine unmittelbare ökonomische Interpretation, denn die Differentialgleichung (2.23) ist die später abgeleitete fundamentale Gleichung (3.2) des neoklassischen Wachstumsmodells von Solow (1956) für den Fall einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $Y = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

In diesem Zusammenhang sei auf ein Problem aufmerksam gemacht. Die Funktion (2.23) ist an der Stelle $k = 0$ nicht stetig differenzierbar und erfüllt auch keine Lipschitz-Bedingung. Daher gilt der Eindeutigkeitsteil des Satzes 2.1 nicht. Tatsächlich ist (2.24) auch eine Lösung für den Startwert $k_0 = 0$, obwohl in diesem Punkt $\dot{k} = 0$ gilt und daher $k(t, 0) \equiv 0$ auch eine Lösung ist. Ökonomisch sinnvoll für $k_0 = 0$ ist lediglich $k(t, 0) \equiv 0$, weil ohne Kapital ($K = k = 0$) mit der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion nichts produziert werden kann. $\Diamond$

Lineare Systeme zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten Soweit Differentialgleichungen höherer Ordnung beziehungsweise Systeme von Differentialgleichungen betroffen sind, ist eine explizite Lösung in aller Regel ausgeschlossen. Eine bedeutende Ausnahme stellen die linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten dar. Das allgemeine **lineare, autonome und homogene** System zweier Differentialgleichungen lautet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Bezeichnet man die Elemente der Matrix A mit a_{ij}, $i, j = 1, 2$ (was durch die Kurzschreibweise $A = (a_{ij})$ ausgedrückt wird), und setzt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$, so ergibt sich in kompakter Vektorschreibweise

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Mit $\mathbf{b} = (b_1, b_2)'$ lautet das entsprechende nichtautonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{2.26}$$

wobei hier eine Beschränkung auf den Fall eines konstanten Störgliedes $\mathbf{b}$ erfolgt. Aus dem Satz 2.1 ergibt sich die Existenz einer eindeutigen, lokalen Lösung für das zur Gleichung (2.26) gehörige Anfangswertproblem. Im linearen Fall mit konstanten Koeffizienten gilt darüber hinaus ein **globales Existenztheorem** (vgl. zum Beispiel Perko, 1996, S. 17). Im folgenden wird gezeigt, wie diese Lösung für den Fall eines Systems zweiter Ordnung explizit berechnet wird.

Da die Vektorschreibweise für eine kompakte und lesbare Darstellung unerläßlich ist, wird, wenn $x_1^i(t)$ und $x_2^i(t)$ die Komponenten einer Lösung von (2.26) sind, die Lösung als $\mathbf{x}^i(t) = (x_1^i(t), x_2^i(t))'$ geschrieben.

Definition 2.4. *Zwei Funktionen $\mathbf{x}^1(t)$ und $\mathbf{x}^2(t)$ heißen **linear abhängig** auf einem Intervall (t_0, t_1), wenn es zwei Konstanten C_1 und C_2 gibt, die nicht beide gleich null sind, so daß $C_1\mathbf{x}^1(t) + C_2\mathbf{x}^2(t) = 0$ für alle $t \in (t_0, t_1)$. Andernfalls heißen die Funktionen linear unabhängig.*

Aus $C_1\mathbf{x}^1(t) + C_2\mathbf{x}^2(t) = 0$ folgt für $C_2 \neq 0$ direkt

$$\mathbf{x}^2(t) = \frac{C_1}{C_2}\mathbf{x}^1(t) \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

im Fall der linearen Abhängigkeit. Das heißt, $\mathbf{x}^2(t)$ unterscheidet sich auf dem Intervall (t_0, t_1) nur durch eine multiplikative Konstante von $\mathbf{x}^1(t)$. Für $C_2 = 0$ könnte lineare Abhängigkeit nur mit der Gleichgewichtslösung $\mathbf{x}^1(t) = 0 \; \forall t \in (t_0, t_1)$ bestehen. Man kann zeigen, daß die allgemeine Lösung $\mathbf{x}^h(t)$ des homogenen Teils von (2.26) als Linearkombination zweier beliebiger linear unabhängiger Lösungen $\mathbf{x}^1(t)$ und $\mathbf{x}^2(t)$ des homogenen Teils dargestellt werden kann. Für die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (2.26) gilt wie im Fall einer skalaren linearen Differentialgleichung erster Ordnung, daß sich die **allgemeine Lösung** aus der Summe der allgemeinen Lösung $\mathbf{x}^h(t)$ des homogenen Teils und einer speziellen (partikulären) Lösung $\mathbf{x}^p(t)$ der gesamten Gleichung ergibt. Daher ist es naheliegend, zunächst wieder die allgemeine Lösung des homogenen Teils zu ermitteln.[5]

Der einfachste Fall liegt vor, wenn die Matrix $A = (a_{ij})$ diagonal ist, das heißt wenn $a_{12} = a_{21} = 0$ gilt. Dann reduziert sich das System auf zwei voneinander unabhängige Gleichungen

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1,$$
$$\dot{x}_2 = a_{22}x_2,$$

[5] Beweise dieser Aussagen finden sich in den meisten Standardbüchern über gewöhnliche Differentialgleichungen, vgl. zum Beispiel Heuser (1993c) und Gandolfo (1996).

deren allgemeine Lösungen bereits im Abschnitt 2.1.1 angegeben worden ist (Methode der Trennung der Veränderlichen):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{a_{11}t}, \\ x_2(t) &= C_2 e^{a_{22}t}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei die Konstanten C_1 und C_2 durch die Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_{10}$ und $x_2(0) = x_{20}$ bestimmt werden können. Für $t = 0$ in (2.27) ergibt sich $x_{10} = C_1$ und $x_{20} = C_2$.

Wenn A nicht diagonal ist, besteht ein naheliegender Ansatz darin, Lösungen der Form $x_1(t) = k_1 e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = k_2 e^{\lambda t}$ wie im eindimensionalen Fall auszuprobieren. Durch Substitution in (2.25) ergibt sich

$$\begin{aligned} k_1 \lambda e^{\lambda t} &= a_{11} k_1 e^{\lambda t} + a_{12} k_2 e^{\lambda t}, \\ k_2 \lambda e^{\lambda t} &= a_{21} k_1 e^{\lambda t} + a_{22} k_2 e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}[(a_{11} - \lambda) k_1 + a_{12} k_2] &= 0, \\ e^{\lambda t}[a_{21} k_1 + (a_{22} - \lambda) k_2] &= 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $x_1(t) = x_2(t) = 0 \ \forall t$ eine Lösung von (2.25), die sich für die Startwerte $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und damit $k_1 = k_2 = 0$ ergibt. Wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ sind, wenn k_1 und k_2 nicht beide gleich null sind, $x_1(t) = k_1 e^{\lambda t}$ und $x_2(t) = k_2 e^{\lambda t}$ genau dann Lösungen von (2.25), wenn die Klammerausdrücke im obigen Gleichungssystem beide gleich null sind:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) k_1 + a_{12} k_2 &= 0, \\ a_{21} k_1 + (a_{22} - \lambda) k_2 &= 0, \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise also, wenn

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Dieses Gleichungssystem in k_1 und k_2 hat genau dann nichttriviale Lösungen (k_1 und k_2 nicht beide gleich null), wenn die Zeilen beziehungsweise Spalten der Matrix auf der linken Seite linear abhängig sind, was genau dann der Fall ist, wenn ihre Determinante gleich null ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.29}$$

Man nennt (2.29) die **charakteristische Gleichung** des Systems (2.25) linearer Differentialgleichungen. In allgemeiner Matrixdarstellung lautet die charakteristische Gleichung

$$|A - \lambda I| = 0,$$

wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet, bei der die Elemente der Hauptdiagonalen gleich eins und alle anderen Elemente gleich null sind.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung für λ heißen **Eigenwerte** der Matrix A. Die zu einem Eigenwert gehörigen nichttrivialen Lösungswerte für k_1 und k_2 von (2.28) bilden einen **Eigenvektor**. Da $A-\lambda I$ eine singuläre Matrix ist, wenn λ ein Eigenwert ist, ist der zugehörige Eigenvektor nicht eindeutig. Die charakteristische Gleichung (2.29) lautet ausgeschrieben

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0; \tag{2.30}$$

sie ist also eine quadratische Gleichung zweiten Grades, die die Lösungen

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\right] \tag{2.31}$$

hat. Anhand dieser Formel ist zu erkennen, daß die beiden Eigenwerte unterschiedlich und reell, gleich und reell oder konjugiert komplex sein können. Diese Fälle treten ein, wenn die **Diskriminante**, $\Delta(A):=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$, positiv, gleich null oder negativ ist. Im folgenden wird **ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit unterstellt, daß $a_{12}\neq 0$ ist**. Denn wenn $a_{12}=0$ ist, kann man die gesamte Analyse unter der Annahme $a_{21}\neq 0$ analog durchführen, und wenn $a_{12}=a_{12}=0$ ist, erhält man das bereits gelöste diagonale System.

Im **Fall zweier unterschiedlicher reeller Eigenwerte** λ_1 und λ_2, also für $\Delta(A)>0$, kann man den Eigenwert λ_1 in (2.28) einsetzen und zum Beispiel $k_1^1=1$ wählen, um daraus $k_2^1=(\lambda_1-a_{11})/a_{12}=a_{21}/(\lambda_1-a_{22})$ zu bestimmen und so den ersten Eigenvektor zu erhalten. Folglich ist

$$\begin{aligned} x_1^1(t)&=e^{\lambda_1 t},\\ x_2^1(t)&=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

eine Lösung von (2.25). Analog ergibt sich mit dem zweiten Eigenwert λ_2 die Lösung

$$\begin{aligned} x_1^2(t)&=e^{\lambda_2 t},\\ x_2^2(t)&=\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte λ_1 und λ_2 unterschiedlich sind, sind die Lösungen $\mathbf{x}^1(t)$ und $\mathbf{x}^2(t)$ linear unabhängig, so daß sich die **allgemeine Lösung** von (2.25) als Linearkombination ergibt:

$$\begin{aligned} x_1(t)&=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},\\ x_2(t)&=C_1\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}e^{\lambda_1 t}+C_2\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Im **Fall zweier gleicher reeller Eigenwerte** $\lambda_0 := \lambda_1 = \lambda_2$, also für $\Delta(A) = 0$, können mit der vorstehenden Methode keine zwei linear unabhängigen Lösungen gefunden werden. In diesem Fall führt der Ansatz $x_1(t) = (k_{11} + k_{12}t)e^{\lambda_0 t}$, $x_2(t) = (k_{21} + k_{22}t)e^{\lambda_0 t}$ zum Ziel. Durch Substitution in (2.25) folgt

$$\begin{aligned}
k_{12}e^{\lambda_0 t} + \lambda_0(k_{11} + k_{12}t)e^{\lambda_0 t} &= a_{11}(k_{11} + k_{12}t)e^{\lambda_0 t} + a_{12}(k_{21} + k_{22}t)e^{\lambda_0 t},\\
k_{22}e^{\lambda_0 t} + \lambda_0(k_{21} + k_{22}t)e^{\lambda_0 t} &= a_{21}(k_{11} + k_{12}t)e^{\lambda_0 t} + a_{22}(k_{21} + k_{22}t)e^{\lambda_0 t}.
\end{aligned}$$

Die Division durch $e^{\lambda_0 t} \neq 0$ ergibt nach Umstellung

$$\begin{aligned}
k_{12} - (a_{11} - \lambda_0)k_{11} - a_{12}k_{21} &= [(a_{11} - \lambda_0)k_{12} + a_{12}k_{22}]t,\\
k_{22} - a_{21}k_{11} - (a_{22} - \lambda_0)k_{21} &= [a_{21}k_{12} + (a_{22} - \lambda_0)k_{22}]t;
\end{aligned}$$

diese Gleichungen müssen für alle $t \in R$ erfüllt sein, wenn eine Lösung vorliegt. Das kann nur dann der Fall sein, wenn die Terme auf der rechten Seite in eckigen Klammern und damit auch die Terme auf der linken Seite gleich null sind. Man erhält damit vier Gleichungen in den vier Unbekannten k_{ij}, $i, j = 1, 2$, die folgendermaßen umgeformt werden können:

$$\begin{aligned}
k_{22} &= \frac{(\lambda_0 - a_{11})}{a_{12}}k_{12} & k_{22} &= \frac{a_{21}}{(\lambda_0 - a_{22})}k_{12}\\
k_{21} &= \frac{a_{21}k_{11} - k_{22}}{(\lambda_0 - a_{22})} & k_{21} &= \frac{(\lambda_0 - a_{11})k_{11} + k_{12}}{a_{12}}
\end{aligned}$$

Da λ_0 ein Eigenwert von A ist, gilt $(\lambda_0 - a_{11})/a_{12} = a_{21}/(\lambda_0 - a_{22})$, so daß die beiden Gleichungen in der ersten Zeile übereinstimmen. Ersetzt man in der dritten Gleichung k_{22} durch die erste Gleichung und verwendet wieder die Bedingung $(\lambda_0 - a_{11})/a_{12} = a_{21}/(\lambda_0 - a_{22})$, so erkennt man, daß auch die beiden Gleichungen in der zweiten Zeile übereinstimmen, weil $\lambda_0 = (a_{11} + a_{22})/2$ im Falle zwei gleicher reeller Eigenwerte ist. Also liegen nur zwei unabhängige Gleichungen vor, mit denen man k_{21} und k_{22} in Abhängigkeit von k_{11} und k_{12} ausdrücken kann. Setzt man diese Werte unter Verwendung von $\lambda_0 = (a_{11} + a_{22})/2$ in die Lösungsansätze ein, so folgt schließlich die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von zwei Konstanten k_{11} und k_{12}. Mit $C_1 := k_{11}$ und $C_2 := k_{12}$ lautet die Lösung

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= (C_1 + C_2t)e^{\lambda_0 t},\\
x_2(t) &= \left(\frac{(a_{22} - a_{11})C_1 + 2C_2}{2a_{12}} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}}C_2t\right)e^{\lambda_0 t}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Für $\Delta(A) < 0$ schließlich sind die **Eigenwerte konjugiert komplex**, das heißt $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, wobei $\alpha = (a_{11} + a_{22})/2$, $\beta = \sqrt{-\Delta(A)}$ und $i = \sqrt{-1}$. Da die Eigenwerte unterschiedlich sind, kann das Ergebnis für die allgemeine Lösung aus dem ersten Fall zweier unterschiedlicher reeller Eigenwerte übernommen werden, wobei die komplexen Darstellungen für die Eigenwerte eingesetzt werden und anstelle der Konstanten C_1 und C_2 die Konstanten A_1 und A_2 verwendet werden:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + A_2 e^{(\alpha-i\beta)t}, \\ x_2(t) &= A_1 \frac{(\alpha+i\beta)-a_{11}}{a_{12}} e^{(\alpha+i\beta)t} + A_2 \frac{(\alpha-i\beta)-a_{11}}{a_{12}} e^{(\alpha-i\beta)t}. \end{aligned}$$

Diese Lösung beinhaltet komplexe Zahlen. Gesucht wird aber ein reelle Lösung des reellen Differentialgleichungssystems. Zunächst wird $e^{\alpha t}$ ausgeklammert:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}\left(A_1 e^{i\beta t} + A_2 e^{-i\beta t}\right), \\ x_2(t) &= e^{\alpha t}\left(A_1 \frac{(\alpha+i\beta)-a_{11}}{a_{12}} e^{i\beta t} + A_2 \frac{(\alpha-i\beta)-a_{11}}{a_{12}} e^{-i\beta t}\right). \end{aligned}$$

Mit der Eulerschen Formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$ (bzw. $e^{-it} = \cos t - i \sin t$) erhält man für $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}\left[A_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + A_2(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))\right] \\ &= e^{\alpha t}\left[(A_1 + A_2)\cos(\beta t) + (A_1 - A_2)\, i \sin(\beta t)\right]. \end{aligned}$$

Nun werden A_1 und A_2, die beliebige Konstanten sind, als konjugiert komplexe Zahlen gewählt. Dann sind $C_1 := A_1 + A_2$ und $C_2 := (A_1 - A_2)i$ reelle Zahlen, so daß sich eine reelle Lösung $x_1(t)$ ergibt. Verfährt man mit $x_2(t)$ analog, so erhält man schließlich als allgemeine reelle Lösung:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}\left[C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)\right], \\ x_2(t) &= e^{\alpha t}\left[\frac{(\alpha-a_{11})C_1 + \beta C_2}{a_{12}}\cos(\beta t) + \frac{(\alpha-a_{11})C_2 - \beta C_1}{a_{12}}\sin(\beta t)\right]. \end{aligned} \tag{2.34}$$

In bezug auf die allgemeine Lösung des **inhomogenen Systems** (2.26) ist die Bestimmung einer partikulären Lösung erforderlich, deren Summe mit der allgemeinen Lösung des homogenen Teils die gesuchte allgemeine Lösung ergibt. In vielen Fällen kann eine partikuläre Lösung durch den Ansatz einer bestimmten Funktionsform, die von der Art des Störgliedes abhängt, mit Hilfe der **Methode der unbestimmten Koeffizienten** ermittelt werden. Da das Störglied in (2.26) konstant ist, kann eine konstante partikuläre Lösung angesetzt werden, wenn $|A| \neq 0$ ist. Setzt man die Konstanten c_1 und c_2 in (2.26) ein, so folgt

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = -b_1, \tag{2.35}$$

$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = -b_2. \tag{2.36}$$

Für $|A| \neq 0$ ist dieses Gleichungssystem unter Verwendung der Cramerschen Regel eindeutig nach den unbestimmten Koeffizienten c_1 und c_2 auflösbar, so daß die partikuläre Lösung lautet:

$$\mathbf{x}^p(t) = \begin{pmatrix} c_1^p \\ c_2^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b_1 a_{22} + b_2 a_{12}}{|A|} \\ \frac{-b_1 a_{11} + b_2 a_{21}}{|A|} \end{pmatrix},$$

wobei $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$ die Determinante von A ist.

Die so berechnete partikuläre Lösung entspricht einer **Gleichgewichtslösung** des dynamischen Systems (2.26), das heißt einem Zustand, in dem das System verharrt. Dadurch wird auch die Bedeutung von $|A| \neq 0$ deutlich. Wenn $|A| = 0$ ist, hat das Gleichungssystem (2.35) keine eindeutige Lösung, weil beide Gleichungen zwei parallele Geraden mit der Steigung $-a_{11}/a_{12} = -a_{21}/a_{22}$ beschreiben, die entweder keinen Schnittpunkt haben (wenn $-b_1/a_{12} \neq -b_2/a_{22}$) oder übereinstimmen (wenn $-b_1/a_{12} = -b_2/a_{22}$). Im ersten Fall existiert kein Gleichgewicht, im zweiten existiert ein Kontinuum an Gleichgewichten.

Die spezielle Lösung des mit (2.26) verbundenen **Anfangswertproblems** ergibt sich schließlich aus der Bestimmung der beiden verbleibenden Konstanten C_1 und C_2 mittels der Startwerte $x_1(0) = x_{10}$ und $x_2(0) = x_{20}$.

Weitere Methoden Für einige weitere spezielle Typen von Differentialgleichungen existieren zwar ebenfalls explizite Lösungsmethoden, doch stößt man damit schnell an die Grenzen des Möglichen. Zu nennen sind hier insbesondere die Systeme linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da hierfür im folgenden keine Anwendungen bestehen, wird darauf nicht weiter eingegangen.[6]

Obwohl zum Beispiel Gleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

prinzipiell durch das Verfahren der Trennung der Veränderlichen gelöst werden können, ist die **geschlossene Integration**, das heißt die Darstellung der Lösung durch elementare Funktionen (etwa rationale, Exponential-, und Winkelfunktionen sowie deren Verknüpfungen und Umkehrungen), selbst in diesem Fall in aller Regel nicht möglich.

- Zum einen ist das Integral auf der linken Seite der Gleichung

  $$\int \frac{1}{f(x)}\, dx = \int dt + C_1$$

  vielfach nicht geschlossen darstellbar. Das gilt schon für so unverfänglich anmutende Integrale wie $\int (1/\ln x)\, dx$.

- Selbst wenn diese Schwierigkeit nicht auftritt und $F(x)$ eine Stammfunktion der linken Seite ist, müßte die Gleichung

  $$F(x) = t + C_1$$

  nach x aufgelöst werden, was ebenfalls unmöglich sein kann.

[6] Vgl. dazu und zu weiteren Möglichkeiten der expliziten Lösung etwa Gandolfo (1996), Heuser (1993c), Hirsch und Smale (1974) und Perko (1996).

- In der Wirtschaftstheorie scheidet eine explizite Lösung vielfach von vornherein aus, da nicht spezielle Funktionsformen vorgegeben sind, sondern nur eine bestimmte Klasse von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften.

Für die meisten Differentialgleichungen oder Systeme höherer Ordnung ist darüber hinaus gar kein Lösungsverfahren bekannt. Aus diesen Gründen steht die qualitative Analyse von Differentialgleichungen im folgenden im Mittelpunkt. Diese Betonung der qualitativen Methoden bedeutet nicht, daß quantitative Aussagen nicht wünschenswert sind. Tatsächlich können aber in den meisten Fällen eben keine expliziten Lösungen gefunden werden. In gewisser Hinsicht ist die qualitative Analyse sogar informativer als die Bestimmung einer expliziten Lösung, wenn ein **globales Phasendiagramm** angefertigt werden kann, das für jeden Startwert Aussagen über die Entwicklung der Lösung in der Zeit erlaubt. Eine explizite Lösung ist dagegen unter Umständen nur **lokal** gültig.

2.1.4 Grundzüge der qualitativen Theorie

Differentialgleichungen erster Ordnung Die autonomen Differentialgleichungen sind der Gegenstand der qualitativen Theorie beziehungsweise der Theorie der dynamischen Systeme. Das einfachste Beispiel ist die früher diskutierte Gleichung (2.1), die eine lineare, homogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten ist:

$$\dot{x} = ax. \tag{2.37}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (2.37) ist durch die Methode der **Trennung der Veränderlichen** berechnet worden:

$$x(t) = Ce^{at}$$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ ergibt sich die spezielle Lösung

$$\phi(t, x_0) = x_0 e^{at}.$$

Die Gleichung

$$\dot{x} = ax + b \tag{2.38}$$

ist eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann ebenfalls durch **Trennung der Veränderlichen** oder als Spezialfall von (2.16) berechnet werden:

$$x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}.$$

Die spezielle Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = x_0$ lautet gemäß (2.20)

$$\phi(t, x_0) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Die qualitativen Eigenschaften können direkt anhand der Differentialgleichung selbst anstelle ihrer Lösung analysiert werden. Die Abbildung 2.1 stellt die **Phasendiagramme** von (2.37) für $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$ dar.[7] Die Pfeile auf der x-Achse verdeutlichen die Bewegung der Variablen x in der Zeit t. Beispielsweise ist für $a > 0$

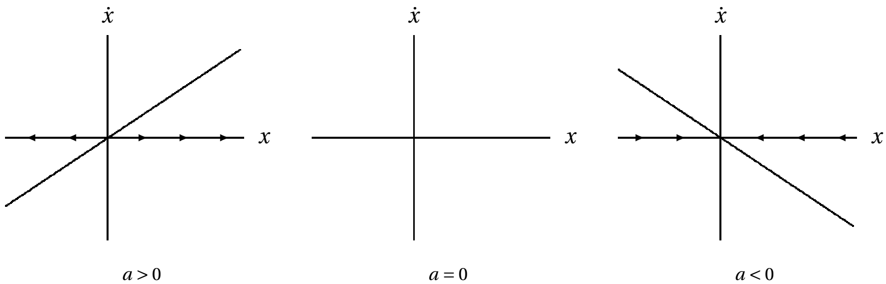

Abbildung 2.1
Phasendiagramme für (2.37)

links von $x = 0$ immer $\dot{x} < 0$, so daß sich eine Bewegung in Richtung kleinerer x-Werte ergibt. Rechts von $x = 0$ ist $\dot{x} > 0$, so daß x immer größer wird. In Schnittpunkten mit der x-Achse ist $\dot{x} = 0$, das System befindet sich hier in einem **Gleichgewicht (stationären Punkt, kritischen Punkt)**. Ein Gleichgewicht heißt **(asymptotisch) lokal stabil**, wenn es für Startwerte in der Nähe des Gleichgewichts asymptotisch erreicht wird, und **(asymptotisch) global stabil**, wenn es für alle Startwerte im Definitionsbereich asymptotisch erreicht wird. Offenbar ist das Gleichgewicht für $a < 0$ asymptotisch global stabil, für $a > 0$ aber nicht. Für $a = 0$ ist das System für alle x im Gleichgewicht. Diese Gleichgewichte x sind **stabil (im Sinne von Lyapunov)**, aber nicht asymptotisch stabil. Für $a > 0$ ist das Gleichgewicht **instabil**, da für jeden nicht gleichgewichtigen Startwert von x die Bewegung vom Gleichgewicht weg verläuft.

Die Abbildung 2.2 stellt die **Phasendiagramme** von (2.38) für $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$ mit $b > 0$ dar (die Abwandlung für $b < 0$ ist offensichtlich). Sofern $a \neq 0$ ist, entsprechen die qualitativen Eigenschaften der Gleichung (2.38) offenbar denen der Gleichung (2.37), wobei lediglich der Gleichgewichtspunkt an anderer Stelle liegt. Für $a = 0$ und $b \neq 0$ ergibt sich allerdings ein bedeutender Unterschied, da (2.38) dann kein Gleichgewicht besitzt, während in (2.37) für $a = 0$ alle $x \in R$ Gleichgewichtspunkte sind. Der Fall $a = 0$ enthält darüber hinaus auch für die Gleichung (2.37) selbst eine besondere Bedeutung. Offenbar ändert sich das qualitative Verhalten der Lösungen von (2.37) nicht, wenn a **innerhalb** des positiven oder des negativen Bereichs verändert wird. Dagegen ergibt sich ein radikaler Wechsel des Verhaltens bei einer Änderung an der Stelle $a = 0$. Man sagt auch, $a = 0$ sei ein **Bifurkations-Punkt**

[7] Streng genommen liefert die Abbildung 2.1 eine Darstellung der Differentialgleichung (2.37). Das Phasendiagramm ist eigentlich nur die x-Achse selbst, auf der die Bewegung des Systems durch die Pfeile dargestellt wird. In der Wirtschaftstheorie ist es aber üblich, die gesamte Darstellung 2.1 als Phasendiagramm zu bezeichnen.

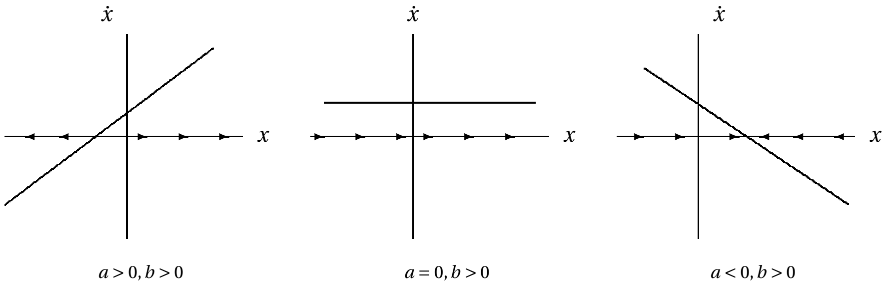

Abbildung 2.2
Phasendiagramme für (2.38)

der durch $a \in R$ parametrisierten Familie von Gleichungen $\dot{x} = ax$. Für $a \neq 0$ nennt man die Gleichung $\dot{x} = ax$ **strukturell stabil** in dem Sinne, daß sich das qualitative Verhalten bei kleinen Änderungen von a nicht ändert.

Die Analyse mittels eines Phasendiagramms ist auch bei nichtlinearen autonomen Differentialgleichung erster Ordnung möglich. Dabei kann gezeigt werden, daß die explizite Kenntnis der Differentialgleichung für viele Fragestellungen gar nicht erforderlich ist, sondern daß bestimmte qualitative Informationen über den Funktionsverlauf vielfach ausreichen. Prinzipiell wird in einem Koordinatensystem einfach die Funktion

$$\dot{x} = f(x)$$

abgetragen. Als Beispiel wird die Gleichung

$$\dot{x} = -x^3$$

betrachtet, die in der Abbildung 2.3 dargestellt ist. Das eindeutige Gleichgewicht liegt

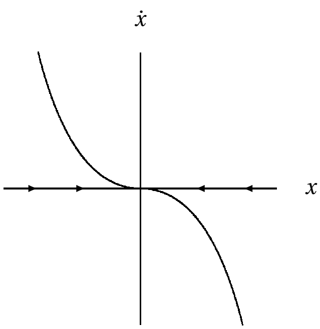

Abbildung 2.3
Das Phasendiagramm für $\dot{x} = -x^3$

bei $\hat{x} = 0$. Links von diesem Wert ist $\dot{x} > 0$ und rechts davon ist $\dot{x} < 0$, also steigt x für

$x < \hat{x}$ und es fällt für $x > \hat{x}$. Daraus folgt direkt, daß $\hat{x}$ global stabil ist.[8] Man beachte, daß $f'(0) = -3\hat{x}^2 = 0$ ist.

Allgemein gilt, daß ein Gleichgewicht genau dann asymptotisch stabil ist, wenn $f(x)$ die x-Achse von links nach rechts von oben schneidet, das heißt, wenn die Funktion $f(x)$ im Gleichgewicht fällt. Analytisch heißt das, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität darin besteht, daß $f'(x) < 0$ in einer punktierten ϵ-Umgebung von $\hat{x}$ sein muß.[9] Die Bedingung $f'(\hat{x}) < 0$ ist daher zwar hinreichend, aber nicht notwendig für asymptotische Stabilität. Im folgenden wird $f'(\hat{x}) < 0$ deshalb als **fast notwendige (und hinreichende)** Bedingung für asymptotische Stabilität bezeichnet.[10]

Wenn das Gleichgewicht eindeutig ist, das heißt, wenn $f(x) = 0$ nur für $\hat{x}$ gilt, ist $f'(x) < 0$ in einer punktierten ϵ-Umgebung von $\hat{x}$ aufgrund der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ auch notwendig und hinreichend für die globale Stabilität, da $\dot{x}$ dann für $x < \hat{x}$ immer positiv und für $x > \hat{x}$ immer negativ ist. Im Falle nichteindeutiger Gleichgewichte läßt sich die lokale Stabilität anhand des Phasendiagramms beurteilen. In der Abbildung 2.4 sind die Gleichgewichte $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_3$ instabil, während $\hat{x}_2$ und $\hat{x}_4$ lokal stabil sind.

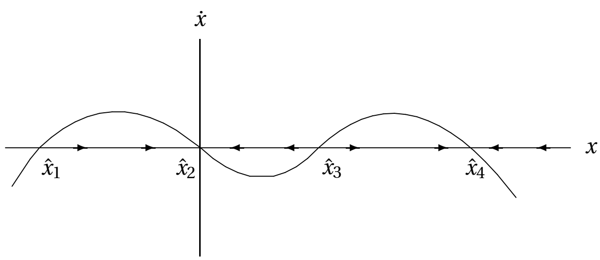

Abbildung 2.4
Stabilität und Instabilität im Falle mehrerer Gleichgewichte

Anhand dieser Abbildung ist auch eine weitere wichtige Eigenschaft autonomer Differentialgleichungen erster Ordnung erkennbar. Unabhängig davon, wo auf der x-Achse der Startwert x_0 liegt, muß die Lösung der Differentialgleichung monoton verlaufen. Wenn also x_0 kein Gleichgewicht ist, verläuft $\phi_t(x_0)$ entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend. Diese Eigenschaft impliziert, daß nichttriviale **Zyklen** ausgeschlossen sind. Ein nichttrivialer Zyklus ist dadurch definiert, daß er kein Gleichgewicht ist, und daß es Werte t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt, für die $\phi_{t_1}(x_0) = \phi_{t_2}(x_0)$ gilt. Daß es keine nichttrivialen zyklischen Lösungen für Differenti-

[8] Streng genommen muß noch formal gezeigt werden, daß die Lösung nicht vor dem Gleichgewicht stehen bleibt, das heißt im vorliegenden Fall, daß $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x_0) = \hat{x}$ impliziert, daß $\hat{x} = 0$ ist. Allgemein folgt diese Eigenschaft für skalare Gleichungen aus dem später angegebenen Satz 2.7 (c).

[9] Eine **punktierte ϵ-Umgebung** eines Punktes ist eine ϵ-Umgebung, die den Punkt selbst nicht enthält.

[10] Man beachte, daß aufgrund der Stetigkeit der ersten Ableitung aus $f'(\hat{x}) < 0$ folgt, daß diese Ungleichheit auch in einer ϵ-Umgebung gilt.

algleichungen erster Ordnung gibt, läßt sich formal wie folgt beweisen. Wenn x_0 ein Gleichgewicht ist, ist die Aussage trivial. Also sei angenommen, x_0 sei kein Gleichgewicht und die Lösung $\phi_t(x_0)$ sei nicht monoton. Dann ist $\dot{\phi}_t(x_0)|_{t=0} = f(x_0) \neq 0$, und $\dot{\phi}_t(x_0)$ kann nur dann das Vorzeichen wechseln, wenn es ein $t_1 > 0$ mit $f(\phi_{t_1}(x_0)) = 0$ gibt. Dann wird die Lösung aber in dieser Position verharren, so daß kein Vorzeichenwechsel und damit auch keine zyklische Lösung möglich ist.[11]

Systeme zweiter Ordnung Betrachtet wird das nichtlineare **autonome System in der Ebene**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}\colon X \to R^2, \\ X \subset R^2 \quad \text{offen}, \quad \mathbf{f} = (f^1, f^2)' \in C^1(X). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Wenn **f** ein oder mehrere Gleichgewichte hat, besteht der erste Schritt bei der Analyse des Systems (2.39) häufig in der Betrachtung eines mittels einer **Taylorreihe** erster Ordnung um einen Gleichgewichtspunkt $\hat{\mathbf{x}}$ linearisierten Systems:[12]

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}_{=\mathbf{0}} + A(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{2.40}$$

wobei

$$A = \mathbf{Df}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f^1_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) & f^1_{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \\ f^2_{x_1}(\hat{\mathbf{x}}) & f^2_{x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen von **f** bezeichnet und $\mathbf{b} := -A\hat{\mathbf{x}}$ gesetzt worden ist. Durch die Transformation der Variablen gemäß $\mathbf{y} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ erhält man das System

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

mit dem Gleichgewicht $\hat{\mathbf{y}} = 0$. Bezeichnet man die Elemente der Matrix A gemäß $a_{ij} \equiv f^i_{x_j}(\hat{\mathbf{x}})$, $i, j = 1, 2$, so ergibt sich in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß (2.39) mehrere Gleichgewichte haben kann und daß entsprechend viele unterschiedliche linearisierte Systeme gebildet werden müssen.

Zur Diskussion der Stabilität von Gleichgewichten werden zunächst exakte Definitionen benötigt.

---

[11] Hier wird implizit unterstellt, daß $f \in C^1$ ist. Aufgrund des im Abschnitt 2.1.2 angegebenen Eindeutigkeitssatzes ist es daher noch nicht einmal möglich, daß ein Gleichgewicht überhaupt erreicht wird. Eine Lösung, die außerhalb eines Gleichgewichts startet, kann dieses Gleichgewicht allenfalls asymptotisch erreichen, das heißt, daß sie ihm für wachsende t immer näher kommt.

[12] Vgl. zur Approximation durch eine Taylorreihe ein beliebiges Lehrbuch der Analysis oder etwa Blume und Simon (1994).

Definition 2.5 (Stabilität) *(a) Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ heißt **stabil (im Sinne von Lyapunov)**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$ impliziert, daß $\|\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{x}}\| < \epsilon$ für alle $t \geqq 0$.*

*(b) Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ heißt **attraktiv**, wenn jede Trajektorie, die nahe genug bei $\hat{\mathbf{x}}$ startet, mit wachsender Zeit gegen $\hat{\mathbf{x}}$ strebt, wenn es also ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$ impliziert, daß $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$. Gilt $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$ für alle $\mathbf{x} \in X$, so heißt $\hat{\mathbf{x}}$ **global attraktiv**.*

*(c) Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ heißt **(asymptotisch) lokal stabil**, wenn es stabil im Sinne von Lyapunov und attraktiv ist.*

*(d) Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ heißt **(asymptotisch) global stabil**, wenn es stabil im Sinne von Lyapunov und global attraktiv ist.*

*(e) Ein Gleichgewicht, das nicht stabil im Sinne von Lyapunov ist, heißt **instabil**.*

Bemerkung 2.7. In der mathematischen Literatur werden Gleichgewichte, die stabil im Sinne von Lyapunov sind, oft verkürzt als *stabil* bezeichnet. Weil die asymptotische Stabilität für die Wirtschaftstheorie von größerem Interesse ist, bezieht sich der Begriff *Stabilität* hier in der Regel auf asymptotisch stabile Gleichgewichte. Beide Sprechweisen kollidieren nicht, wenn asymptotisch stabile Gleichgewichte **lokal** oder **global stabil** genannt werden. Diese Ausdrucksweise ergibt sich, wenn in den Definitionen die Begriffe in Klammern weggelassen werden. ♢

Bemerkung 2.8. Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ heißt **isoliert**, wenn es in einer offenen Kugel um $\hat{\mathbf{x}}$ kein weiteres Gleichgewicht gibt. In Fällen, in denen Gleichgewichte nicht isoliert sind, gibt es dagegen ein Kontinuum an Gleichgewichten, von denen keines asymptotisch stabil im Sinne der angegebenen Definition sein kann. Hier spielt das Konzept der **Quasistabilität** eine wichtige Rolle (vgl. Uzawa, 1961b). ♢

Die asymptotische Stabilität des Gleichgewichts $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ von (2.41) (beziehungsweise $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$) hängt offenbar davon ab, ob die Lösung des homogenen Teils der Differentialgleichung (2.40) für alle Startwerte gegen null geht. Anhand der expliziten Lösungen (2.32), (2.33) und (2.34) ist zu erkennen, daß das genau dann der Fall ist, wenn alle Realteile der Eigenwerte der charakteristischen Gleichung (2.29) beziehungsweise (2.30) negativ sind. Diese Aussage gilt für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten beliebiger Ordnung (vgl. zum Beispiel Perko, 1996, S. 56).

Satz 2.3. *Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ eines linearen Systems von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstantem Störglied ist genau dann asymptotisch global stabil, wenn die Realteile aller Eigenwerte der Koeffizientenmatrix negativ sind.*

Die Berechnung der Eigenwerte ist insbesondere für höherdimensionale Systeme aufwendig. Das **Routh-Hurwitz-Kriterium** erlaubt die Bestimmung der Vorzeichen der Realteile ohne explizite Berechnung der Eigenwerte. Da hier nur Systeme zweiter Ordnung Anwendung finden, wird das Kriterium lediglich für diesen Fall angegeben.[13]

Satz 2.4 (Routh-Hurwitz) *Die Realteile der Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.30) sind genau dann beide negativ, wenn*

$$a_{11} + a_{22} < 0 \quad \textit{und} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{2.42}$$

Die Eigenwerte des linearen Systems zweiter Ordnung bestimmen nicht nur die Stabilität, sondern auch den Typ des Gleichgewichts. Diese Gleichgewichtstypen lassen sich anhand der **Spur** $\mathrm{Sp}(A) = a_{11} + a_{22}$, der **Determinante** $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ und der **Diskriminante** $\Delta(A) := \mathrm{Sp}(A)^2 - 4|A|$ klassifizieren, denn gemäß (2.31) ist

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}(A) \pm \sqrt{\mathrm{Sp}(A)^2 - 4|A|}\right]. \tag{2.43}$$

Wenn der Fall $|A| = 0$, in dem kein eindeutiges Gleichgewicht existiert, ausgeschlossen wird, gilt:[14]

Fall	sgn($\lvert A\rvert$)	sgn(Sp(A))	Gleichgewichtstyp
$\Delta > 0$	+	−	stabiler Knoten
	+	+	instabiler Knoten
	−	+, 0, −	Sattelpunkt
$\Delta = 0$	+	−	stabiler Knoten
	+	+	instabiler Knoten
$\Delta < 0$	+	−	stabiler Spiralpunkt
	+	+	instabiler Spiralpunkt
	+	0	Zentrum

Man beachte, daß in der Tabelle **stabil** jeweils **asymptotisch global stabil** bedeutet, und daß ein Zentrum **stabil im Sinne von Lyapunov**, aber nicht asymptotisch stabil ist. Die Namensgebung bezieht sich auf die graphische Gestalt der Trajektorien in der Nähe der jeweiligen Gleichgewichte, die hier nicht weiter dargestellt werden kann. Die wichtigsten Fälle werden später für den allgemeineren Fall nichtlinearer Systeme diskutiert.

Ein Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}$ des nichtlinearen Systems (2.39) heißt **hyperbolisch**, wenn die Realteile aller Eigenwerte von $A = \mathbf{Df}(\hat{\mathbf{x}})$ ungleich null sind. Die qualitativen Eigenschaften eines hyperbolischen Gleichgewichts entsprechen denjenigen des in diesem Gleichgewicht linearisierten Systems.

[13] Die allgemeinen Routh-Hurwitz-Bedingungen findet man zum Beispiel in Takayama (1985, S. 310).

[14] Vgl. zum Beispiel Gandolfo (1996, S. 358) und Perko (1996, S. 25). Ein Spiralpunkt wird in der englischsprachigen Literatur häufig als *focus* bezeichnet. Hirsch und Smale (1974, S. 92 ff.) verwenden eine abweichende Klassifikation.

Um dieses Resultat genauer zu formulieren, sind weitergehende mathematische Begriffe erforderlich. Anschaulich gesprochen heißen zwei autonome Systeme von Differentialgleichungen **topologisch konjugiert** in einer Umgebung eines Gleichgewichts, wenn der Fluß des einen Systems eine verzerrte, aber nicht zerrissene Darstellung des anderen ist (genauer: wenn es einen die Orientierung erhaltenden Homöomorphismus der Trajektorien des einen Systems auf diejenigen des anderen gibt).

Satz 2.5 (Hartman-Grobman) *Sei* $\hat{\mathbf{x}} \in X$ *ein hyperbolisches Gleichgewicht von (2.39). Dann sind (2.39) und (2.40) in einer Umgebung von* $\hat{\mathbf{x}}$ *topologisch konjugiert.*

Beweis: Vgl. Perko (1996, S. 121) oder Amann (1995, S. 287). □

Das Hartman-Grobman-Theorem gilt nicht nur für Systeme zweiter Ordnung, sondern auch für höherdimensionale Systeme. Für das System (2.39) zweiter Ordnung folgt insbesondere, daß das Verhalten der Trajektorien in fast allen Fällen lokal dem Verhalten im linearen System entspricht, außer wenn $|A| = 0$ oder $\Delta < 0$ mit $\mathrm{Sp}(A) = 0$, da nur in diesen Fällen Eigenwerte mit verschwindendem Realteil auftreten können. Aus dem Hartman-Grobman-Theorem folgt, daß hyperbolische Gleichgewichte des nichtlinearen Systems genau dann lokal stabil sind, wenn die Routh-Hurwitz-Bedingung für das linearisierte System erfüllt ist. Wenn ein oder beide Realteile gleich null sind, ist das Gleichgewicht nicht hyperbolisch, so daß das Theorem nicht angewendet werden kann. Allerdings gilt über die Aussage des Hartman-Grobman-Theorems hinaus, daß das Gleichgewicht des nichtlinearen Systems immer dann instabil ist, wenn wenigstens eine Realteil positiv ist (vgl. Hirsch und Smale, 1974, S. 187). Zusammengefaßt gilt auch für Systeme höherer Ordnung

Satz 2.6. *Sei* $X \subset R^n$ *offen und* $\mathbf{f}: X \to R^n$ *stetig differenzierbar. Sei* $\hat{\mathbf{x}}$ *ein Gleichgewicht von* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. *Wenn die Realteile der Eigenwerte von* $\mathbf{Df}(\hat{\mathbf{x}})$ *alle negativ sind, dann ist* $\hat{\mathbf{x}}$ *lokal stabil. Wenn* $\hat{\mathbf{x}}$ *ein stabiles Gleichgewicht von* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ist, dann hat kein Eigenwert von* $\mathbf{DF}(\hat{\mathbf{x}})$ *einen positiven Realteil.*

Die Linearisierung des Systems (2.39) liefert lediglich Informationen über die lokalen Eigenschaften des nichtlinearen Systems. Die globalen dynamischen Eigenschaften ebener autonomer Systeme lassen sich häufig anhand von Phasendiagrammen analysieren. Dazu werden in der x_1-x_2-Ebene zunächst die $\dot{x}_1 = 0$- und die $\dot{x}_2 = 0$-**Isoklinen** eingezeichnet, die die geometrischen Orte aller Kombinationen von x_1 und x_2 sind, bei denen x_1 beziehungsweise x_2 konstant ist. Die Schnittpunkte der Isoklinen sind daher die Gleichgewichte. Die Steigungen dieser Isoklinen sind mit Hilfe der Regel der impliziten Differentiation zu berechnen. Zum Beispiel folgt aus $\dot{x}_1 = f^1(x_1, x_2) = 0$, daß

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_1=0} = -\frac{f^1_{x_1}(x_1, x_2)}{f^1_{x_2}(x_1, x_2)}\Big|_{\dot{x}_1=0}.$$

In der Abbildung 2.5 werden einige Beispiele angegeben.

- Das Gleichgewicht in der Abbildung 2.5 (a) ist ein stabiler **Knoten**, dem sich alle Trajektorien asymptotisch nichtzyklisch nähern. Würden die Trajektorien die entgegengesetzte Orientierung haben, so läge ein instabiler Knoten vor.

- Die Abbildung 2.5 (b) zeigt einen **Sattelpunkt**, der immer instabil ist, aber zwei stabile Arme (die **stabile Mannigfaltigkeit**) hat.

- In der Abbildung 2.5 (c) liegt ein stabiler **Spiralpunkt** vor, dem sich die Trajektorien – von denen nur eine eingezeichnet ist – asymptotisch zyklisch nähern. Mit umgekehrter Orientierung liegt ein instabiler Spiralpunkt vor.

- Die Abbildung 2.5 (d) zeigt ein **Zentrum**. Die Trajektorien – von denen wiederum nur eine eingezeichnet ist – sind geschlossene Kurven um das Gleichgewicht. Ein Zentrum ist stabil im Sinne von Lyapunov, aber nicht asymptotisch stabil.

Bemerkung 2.9. Die Bezeichnung der Grundtypen lehnt sich an die Bezeichnung in linearen Systemen an. Für nichtlineare Systeme ist es ohne weiteres jedoch nicht möglich, diese Grundtypen anhand der Eigenwerte der in einem Gleichgewicht ausgewerteten Jacobi-Matrix zu klassifizieren, selbst dann nicht, wenn das Hartman-Grobman-Theorem gilt. Denn ein stabiler Spiralpunkt und ein stabiler Knoten können topologisch konjugiert sein. Anhand der Eigenwerte ist daher lediglich eine grobe Klassifikation möglich. Demnach bezeichnet man **hyperbolische Gleichgewichte** als **Quelle**, wenn die Realteile aller Eigenwerte positiv sind, als **Senke**, wenn die Realteile aller Eigenwerte negativ sind, und als **Sattelpunkt**, wenn es sowohl positive als auch negative Realteile gibt. Eine weitergehende Klassifikation der Grundtypen für nichtlineare Systeme muß geometrisch erfolgen. Im Falle von Sattelpunkten etwa wird geometrisch ein **topologischer Sattel** lokal durch die qualitativen Eigenschaften der Abbildung 2.5 (b) definiert. Für Systeme zweiter Ordnung kann man allgemein beweisen, daß ein hyperbolisches Gleichgewicht genau dann ein topologischer Sattel ist, wenn es ein Sattelpunkt ist (vgl. ausführlich Perko, 1996, S. 136–153), weshalb in der Klassifikation der Abbildung einfach von einem *Sattelpunkt* die Rede ist. $\Diamond$

Bei der Konstruktion von Phasendiagrammen sind folgende Regeln zu beachten: (1) Wenn im betrachteten Bereich das Gleichgewicht eindeutig ist, so teilen die beiden Isoklinen die Phasenebene in vier Bereiche ein, in denen sich die Richtung der Trajektorien qualitativ nicht ändert. Die orthogonalen Richtungspfeile in der Abbildung 2.5 beschreiben diese Richtung, der die Trajektorien folgen müssen. Die Pfeile erhält man, indem man zum Beispiel von der $\dot{x}_2 = 0$-Isokline aus eine Bewegung in x_1-Richtung ausführt. In der Abbildung 2.5 (b) ist in diesem Bereich etwa $\dot{x}_2 > 0$, weil für die genannte Bewegung $dx_1 > 0$ und $dx_2 = 0$ gilt sowie annahmegemäß $f^2_{x_1} > 0$ ist. Aus dem Differential $d\dot{x}_2 = f^2_{x_1} dx_1 + f^2_{x_2} dx_2$ folgt also $d\dot{x}_2 > 0$ und damit, ausgehend von $\dot{x}_2 = 0$, daß $\dot{x}_2 > 0$. Die Vorzeichen von $\dot{x}_1$ beziehungsweise $\dot{x}_2$ sind auf beiden

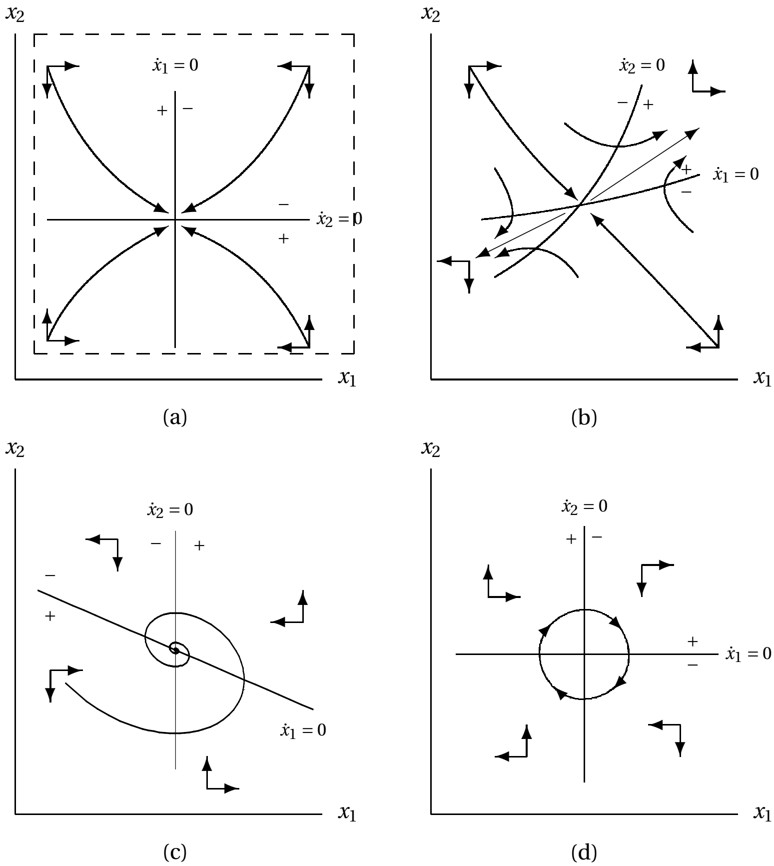

Abbildung 2.5
Phasendiagramme: Wichtige Grundtypen

Seiten der Isoklinen eingetragen. (2) Da die absoluten Werte von $\dot{x}_1$ beziehungsweise $\dot{x}_2$ nicht bekannt sind, ist nicht bestimmt, an welchem der beiden orthogonalen Richtungspfeile eine Trajektorie näher liegt. In der Nähe des Gleichgewichtes nimmt die Geschwindigkeit jedoch ab. (3) Wenn die Trajektorien die Isoklinen schneiden, dann müssen sie entweder eine Steigung von 0 (bei der $\dot{x}_2 = 0$-Isokline, da hier x_2 konstant ist) oder eine Steigung von ∞ (bei der $\dot{x}_1 = 0$-Isokline, da hier x_1 konstant ist) haben.

Wenn die Richtungspfeile wie in der Abbildung 2.5 (a) orientiert sind, dann läßt sich die **globale asymptotische Stabilität** eines Gleichgewichtes mit Hilfe eines Phasendiagramms beweisen. Im Fall dieser Abbildung basiert ein exakter Beweis darauf, daß man ein Rechteck (wie das gestrichelt dargestellte) einzeichnen kann, auf dessen Rand das Vektorfeld nach innen zeigt, so daß keine Trajektorie das Rechteck verlassen kann. Aus dem Satz 2.2 folgt daher, daß die Lösung für alle $t \geqq 0$ existiert. Die Isoklinen $\dot{x}_1 = 0$ und $\dot{x}_2 = 0$ sowie die Koordinatenachsen begrenzen vier offene Mengen, in denen die Trajektorien monoton verlaufen, also ihre Richtung nicht ändern. Diese Mengen sind allesamt positiv invariant, da die Null-Isoklinen aufgrund der eingezeichneten Richtungspfeile und der Eindeutigkeit der Lösungen (derzufolge sich zwei Trajektorien nicht berühren können) nicht überschritten werden können. Zusammen mit der Monotonie folgt, daß keine **Zyklen (periodische Lösungen)** oder sogenannte **Graphiken** (die aus Gleichgewichten und diese Gleichgewichte verbindenden Trajektorien bestehen) existieren. Da man zeigen kann, daß alle Trajektorien, die in einer kompakten Teilmenge von X verbleiben, gegen ihre sogenannten ω-Grenzmengen konvergieren und diese ω-Grenzmenge für Systeme zweiter Ordnung nur aus Gleichgewichten, Zyklen und Graphiken bestehen kann, folgt damit die Konvergenz gegen das einzige Gleichgewicht in der Abbildung 2.5 (a).[15]

Da das Konzept der ω-Grenzmengen noch benötigt wird, erfolgt eine exakte Definition, wobei im folgenden angenommen wird, daß durch (2.39) ein dynamisches System definiert wird, so daß die Lösung für alle $t \in R$ existiert.

Definition 2.6. *Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in X$ heißt **$\boldsymbol{\omega}$-Grenzpunkt** von $\mathbf{x} \in X$ (oder der Trajektorie durch x), wenn es eine Folge $t_q \to \infty$ für $q \to \infty$ gibt, so daß $\lim_{q\to\infty} \boldsymbol{\phi}_{t_q}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$. Die Menge aller ω-Grenzpunkte von $\mathbf{x}$ heißt **$\boldsymbol{\omega}$-Grenzmenge**.*[16]

Der folgende Satz gibt die wesentlichen Eigenschaften der ω-Grenzmengen an. Die Konvergenz einer Funktion gegen eine Menge ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Konvergenz gegen einen Punkt und bedeutet anschaulich, daß die Funktionswerte für große t der Menge beliebig nahe kommen.

Satz 2.7. *(a) Die ω-Grenzmenge einer Trajektorie ist eine abgeschlossene, positiv invariante Teilmenge von X.*

(b) Eine abgeschlossene, positiv invariante Menge M enthält die ω-Grenzmengen aller $\mathbf{x} \in M$.

(c) Liegt eine Trajektorie in einer kompakten Teilmenge von X, so ist ihre ω-Grenzmenge eine nichtleere, zusammenhängende und kompakte Teilmenge von X und die Trajektorie konvergiert gegen die ω-Grenzmenge.

Beweis: Vgl. zum Beispiel Perko (1996, S. 191–192). □

Insbesondere der Teil (c) des Satzes beinhaltet eine wichtige Implikation für das langfristige Verhalten der Lösungen von nichtlinearen Differentialgleichungen: Wenn Tra-

[15] Beweise für die hier skizzierte Argumentation findet man in Hirsch und Smale (1974) sowie in Perko (1996).

[16] Analog werden **$\boldsymbol{\alpha}$-Grenzpunkte** und **$\boldsymbol{\alpha}$-Grenzmengen** mit Folgen $t_q \to -\infty$ für $q \to \infty$ definiert.

jektorien beschränkt sind, so konvergieren sie gegen ihre ω-Grenzmengen. Die Voraussetzung der Kompaktheit dient lediglich dazu, die Beschränktheit der Trajektorie nachzuweisen.

Leider sind die für die Abbildung 2.5 (a) skizzierten Schlüsse in vielen Fällen nicht möglich. So ist im Fall der Abbildungen 2.5 (c) und 2.5 (d) aufgrund der Richtungspfeile allein nicht zu entscheiden, ob ein stabiler oder ein instabiler Spiralpunkt oder ein Zentrum vorliegt. Tatsächlich kann sogar ein Knoten vorliegen. Ferner können in nichtlinearen Systemen auch **Grenzzyklen** existieren (vgl. etwa Hirsch und Smale, 1974; Perko, 1996). Solange keine Eigenwerte mit verschwindendem Realteil auftreten, kann zumindest die lokale Stabilität unter Verwendung der Routh-Hurwitz-Bedingungen überprüft werden. Andernfalls müssen in der Regel andere Methoden verwendet werden, etwa die im nächsten Abschnitt kurz dargestellten Lyapunov-Funktionen.

2.2 Stabilitätsanalyse in statischen und dynamischen Modellen

2.2.1 Lyapunovs zweite Methode

Lyapunov-Funktionen Um einige typische Beispiele für die Stabilitätsanalyse in statischen und dynamischen ökonomischen Modellen darzustellen, wird zunächst ein grundlegendes Verfahren der Stabilitätstheorie diskutiert, die **zweite oder direkte Methode von Lyapunov**.[17] Dabei wird sich herausstellen, daß die Stabilität von Optima und Gleichgewichten in statischen Modellen zumindest eher gewährleistet ist als in dynamischen Modellen.

Betrachtet wird das autonome C^1-System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}: X \to R^n, \quad X \subset R^n \quad \text{offen.} \tag{2.44}$$

Die Lösung $\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x})$ existiere für alle $\mathbf{x} \in X$ und für alle $t \in R$. Das Prinzip der zweiten Methode zum Nachweis der Stabilität eines Gleichgewichts soll anhand eines einfachen Beispiel verdeutlicht werden, das auch explizit lösbar ist:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Dieses System hat ein eindeutiges Gleichgewicht $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$. Lyapunovs Grundidee besteht darin, den Abstand der Lösung vom Gleichgewicht zu messen und zu untersuchen, ob dieser Abstand entlang der Trajektorien abnimmt. Der euklidische Abstand der Lösung $\mathbf{x}(t) \equiv \boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}_0)$ der Gleichungen (2.45) vom Gleichgewicht $\hat{\mathbf{x}}' = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$ ist

$$d(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{x}})) := \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

[17] Lyapunovs hier nicht dargestellte **erste Methode** basiert auf der (näherungsweisen) Lösung von Differentialgleichungen mittels Potenzreihen, die im folgenden nicht von grundlegender Bedeutung ist.

wobei die Abhängigkeit der x_i von t zur Vereinfachung der Notation vernachlässigt worden ist. Dieser Abstand ändert sich in der Zeit gemäß

$$\begin{aligned}\dot{d}(\mathbf{x}(t),\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}(2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2)\\ &\overset{(2.45)}{=} (x_1^2+x_2^2)^{-1/2}(x_1x_2-x_2x_1)=0\end{aligned}$$

für alle t und unabhängig vom Startwert $\mathbf{x}_0$. Das heißt, der Abstand der Lösungen von (2.45) vom Gleichgewicht ist konstant. Die Trajektorien sind daher Kreise um den Ursprung (beziehungsweise der Ursprung selbst). Das Gleichgewicht ist demnach stabil (im Sinne von Lyapunov), aber nicht asymptotisch stabil.

Als weiteres Beispiel werden die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1+x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1-x_2\end{aligned} \tag{2.46}$$

betrachtet. Für die Veränderung des Abstands gilt jetzt

$$\begin{aligned}\dot{d}(\mathbf{x}(t),\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-1/2}(2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2)\\ &\overset{(2.46)}{=} (x_1^2+x_2^2)^{-1/2}(-x_1^2-x_2^2)\\ &= -(x_1^2+x_2^2)^{1/2}<0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x}(t)\neq(0,0)'.\end{aligned}$$

Der Abstand vom Gleichgewicht $(0,0)$ wird also für alle Startwerte kontinuierlich kleiner, so daß das Gleichgewicht asymptotisch global stabil ist.[18]

Betrachtet man die Stabilitätsdefinitionen 2.5, so fällt auf, daß es für die Stabilität eines Gleichgewichts gar nicht erforderlich ist, daß der euklidische Abstand kontinuierlich kleiner wird. Der direkte Ansatz des euklidischen Abstands kann daher häufig nicht verwendet werden, um die Stabilität eines Systems nachzuweisen. Genau hier setzt Lyapunov mit seiner zweiten Methode an. Es reicht aus, ein verallgemeinertes Konzept des Abstands zu verwenden, das durch die **Lyapunov-Funktionen** formalisiert wird.

Definition 2.7. *Sei $U\subset X\subset R^n$ eine offene Menge, die $\hat{\mathbf{x}}$ enthält, wobei $\hat{\mathbf{x}}$ ein Gleichgewicht und $\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x})$ der Fluß von (2.44) ist. Gegeben sei eine $C^1(U)$-Funktion $V: U\to R$ mit (a) $V(\hat{\mathbf{x}})=0$ und (b) $V(\mathbf{x})>0$ für $\mathbf{x}\neq\hat{\mathbf{x}}$. Unter Verwendung der Kettenregel erhält man die **Ableitung von** V **entlang einer Trajektorie** gemäß*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}))\bigg|_{t=0} = V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

[18] Strenggenommen muß allerdings noch gezeigt werden, daß $\mathbf{x}(t)$ für $t\to\infty$ tatsächlich gegen $(0,0)$ konvergiert. Ein wesentlicher Schritt im Beweis des folgenden Satzes 2.8, bezogen auf das vorliegende Beispiel, beruht auf dem Nachweis, daß nur der Punkt $(0,0)$ ein ω-Grenzpunkt ist. Unter Verwendung von Satz 2.7 (c) folgt dann die Konvergenz.

*Wenn (c) $\dot{V}(\mathbf{x}) \leqq 0$ für alle $\mathbf{x} \in U$, heißt V **Lyapunov-Funktion** für (2.44). Gilt (d) $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in U \setminus \{\hat{\mathbf{x}}\}$, so ist V eine **strenge Lyapunov-Funktion** für (2.44).*

Dabei ist $V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ der **Gradient** von V. Im folgenden ist $\dot{V}(\mathbf{x})$ **grundsätzlich** als Ableitung entlang einer Trajektorie zu verstehen. Man beachte, daß eine strenge Lyapunov-Funktion nur dann existieren kann, wenn $\hat{\mathbf{x}}$ ein isoliertes Gleichgewicht ist, weil für jedes andere Gleichgewicht $\tilde{\mathbf{x}}$ wegen $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ ebenfalls gilt:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = V_{\mathbf{x}}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0.$$

Das grundlegende Resultat der Stabilitätstheorie ist der

Satz 2.8 (Lyapunov) *Sei $\hat{\mathbf{x}}$ ein Gleichgewicht von (2.44), das heißt $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, und $U \subset X$ sei eine offene Menge, die $\hat{\mathbf{x}}$ enthält.*

(a) Wenn es eine Lyapunov-Funktion auf U gibt, ist $\hat{\mathbf{x}}$ stabil (im Sinne von Lyapunov).

(b) Wenn es eine strenge Lyapunov-Funktion auf U gibt, ist $\hat{\mathbf{x}}$ asymptotisch lokal stabil.

> *Beweis:* Vgl. zum Beispiel Perko (1996, S. 130–131) oder La Salle und Lefschetz (1967, S. 39–40). □

Die Ermittlung von Lyapunov-Funktionen ist allerdings ein trial and error-Prozeß, der oft nur mit viel Mühe und Glück zum Ziel führt.

Die Lyapunovsche Methode kann auch verwendet werden, um das in Anwendungen besonders wichtige **Attraktionsgebiet** (also die Menge der Startwerte, für die die Lösung gegen ein Gleichgewicht konvergiert) eines stabilen Gleichgewichts zu bestimmen. Man bedenke, daß δ in den Stabilitätsdefinitionen 2.5 unter Umständen so klein sein kann, daß eine lokale Stabilitätsaussage praktisch irrelevant ist.

Satz 2.9 (Stabilität und Attraktionsgebiet) *Sei $\hat{\mathbf{x}}$ ein Gleichgewicht von (2.44). Für $l > 0$ sei V eine strenge Lyapunov-Funktion auf der nichtleeren Menge $U_l := \{\mathbf{x} \in X \mid V(\mathbf{x}) < l\}$, die $\hat{\mathbf{x}}$ enthält. Wenn U_l beschränkt ist, ist $\hat{\mathbf{x}}$ asymptotisch stabil. U_l ist positiv invariant und gehört zum Attraktionsgebiet von $\hat{\mathbf{x}}$.*

> *Beweis:* Vgl. zum Beispiel La Salle und Lefschetz (1967, S. 58). □

Satz 2.10 (Globale Stabilität) *Sei $\hat{\mathbf{x}}$ ein Gleichgewicht des Systems (2.44) mit dem Zustandsraum $X = R^n$. Wenn es eine strenge Lyapunov-Funktion auf R^n gibt mit $V(\mathbf{x}) \to \infty$ für $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, dann ist $\hat{\mathbf{x}}$ asymptotisch global stabil.*

> *Beweis:* Vgl. zum Beispiel La Salle und Lefschetz (1967, S. 65). □

Die wesentliche Voraussetzung im Satz 2.10 ist neben der Existenz einer strengen Lyapunov-Funktion die Beschränktheit der Lösungen für $t \geqq 0$, die durch die Bedingung $V(\mathbf{x}) \to \infty$ für $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ gewährleistet wird.

Gradientensysteme Eine spezielle Art dynamischer Systeme mit wichtigen Anwendungen in der **statischen Wirtschaftstheorie** stellen die sogenannten Gradientensysteme dar, für die häufig eine strenge Lyapunov-Funktion existiert. Sei $X \subset R^n$ eine offene Menge und $\mathcal{V} \in C^2(X)$. Dann heißt ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv -\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \tag{2.47}$$

Gradientensystem[19] auf X. Die Funktion $\mathcal{V}$ heißt **Potentialfunktion**. Das Minuszeichen in der Definition eines Gradientensystems ist traditionell bedingt.

Die **Richtungsableitung** einer Funktion $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ in der Richtung $\mathbf{h}$ mit $\|\mathbf{h}\| = 1$ ist definiert als $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$. Sie mißt die Änderung einer Funktion, wenn sich die Variablen ausgehend vom Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung des Vektors $\mathbf{h}$ ändern. Die Richtungsableitung ist maximal, wenn man sich in Richtung des Gradienten selbst bewegt, das heißt wenn $\mathbf{h}$ in dieselbe Richtung wie der Gradient zeigt. Also zeigt der Gradient einer Funktion, wenn er nicht gleich dem Nullvektor ist, in die Richtung des stärksten Funktionsanstiegs (vgl. zum Beispiel Blume und Simon, 1994, S. 319–322). Ein Punkt $\hat{\mathbf{x}} \in X$ heißt **regulär**, wenn $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$. Wegen $\dot{\mathbf{x}} = -\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ zeigt das Vektorfeld eines Gradientensystems an regulären Punkten in die Richtung des geringsten Funktionsanstiegs von $\mathcal{V}$. Das Vektorfeld ist orthogonal zu der Niveaumenge $\{\mathbf{x} \in X \mid \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}})\}$. **Singuläre** Punkte, die durch $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ definiert sind, stellen offenbar Gleichgewichte eines Gradientensystems dar.

Die Zeitableitung $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = d\mathcal{V}(\boldsymbol{\phi}_t(\mathbf{x}))/dt|_{t=0}$ der Funktion $\mathcal{V}$ entlang der Trajektorien ist

$$\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}).$$

Diese Ableitung ist, da alle partiellen Ableitungen jeweils quadriert werden, an regulären Punkten negativ und an singulären Punkten gleich null. Wenn nun $\hat{\mathbf{x}}$ ein isoliertes Minimum von $\mathcal{V}$ ist, so folgt also, daß $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) < 0$ in einer Umgebung von $\hat{\mathbf{x}}$ und $\dot{\mathcal{V}}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$. Außerdem ist $\hat{\mathbf{x}}$ dann auch ein isoliertes Minimum der Funktion $V(\mathbf{x}) := \mathcal{V}(\mathbf{x}) - \mathcal{V}(\hat{\mathbf{x}})$ mit $V(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, die ebenfalls die abgeleitete Beziehung für die Zeitableitung erfüllt. Damit erfüllt $V(\mathbf{x})$ alle Anforderungen an eine strenge Lyapunov-Funktion. Also ist $\hat{\mathbf{x}}$ nach dem Satz 2.8 (b) asymptotisch stabil.

Die Jacobi-Matrix des Gradientensystems (2.47) lautet

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = -\mathcal{V}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}).$$

Da $\mathcal{V} \in C^2$ ist, ist diese Matrix reell und symmetrisch. Daraus folgt, daß die Eigenwerte der in einem Gleichgewicht ausgewerteten Jacobi-Matrix eines Gradientensystems reell sind (vgl. zum Beispiel Blume und Simon, 1994, S. 621). Wenn in einem Gleichgewicht kein Eigenwert gleich null ist, gibt es also nur positive und negative reelle Eigenwerte. Für planare Gradientensysteme folgt, daß das Gleichgewicht nur ein Sattelpunkt oder ein Knoten sein kann.

[19] Eine ausführliche Darstellung von Gradientensystemen findet sich in Hirsch und Smale (1974, S. 199–209).

Alle ω-Grenzpunkte eines Gradientensystems sind Gleichgewichte. Denn ist $\hat{\mathbf{x}}$ ein ω-Grenzpunkt einer Trajektorie, so kann man zeigen, daß $\mathcal{V}$ entlang einer Trajektorie, die bei $\hat{\mathbf{x}}$ startet, konstant ist, daß also $\dot{\mathcal{V}}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ ist. Daraus folgt, daß $\hat{\mathbf{x}}$ ein singulärer Punkt ist, der seinerseits ein Gleichgewicht darstellt. Der folgende Satz faßt die Ergebnisse zusammen.

Satz 2.11. *Für das Gradientensystem (2.47) gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Die Trajektorien verlaufen an regulären Punkten orthogonal zu den Niveaumengen der Funktion $\mathcal{V}$ und in Richtung des geringsten Funktionsanstiegs.

(b) Singuläre Punkte der Potentialfunktion sind Gleichgewichte. Wenn ein singulärer Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ ein isoliertes Minimum von $\mathcal{V}$ ist, ist er ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

(c) Alle Eigenwerte der in einem Gleichgewicht ausgewerteten Jacobi-Matrix sind reell.

(d) Alle ω-Grenzpunkte sind Gleichgewichte.

Beispiel 2.7. Ein Standardbeispiel ist die Potentialfunktion

$$\mathcal{V}(x_1, x_2) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

die gemäß der Definition (2.47) das Gradientensystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)\\ \dot{x}_2 &= -2x_2\end{aligned}$$

ergibt. Die Eigenschaften dieses Systems werden in der Abbildung 2.6 dargestellt. Die Analyse

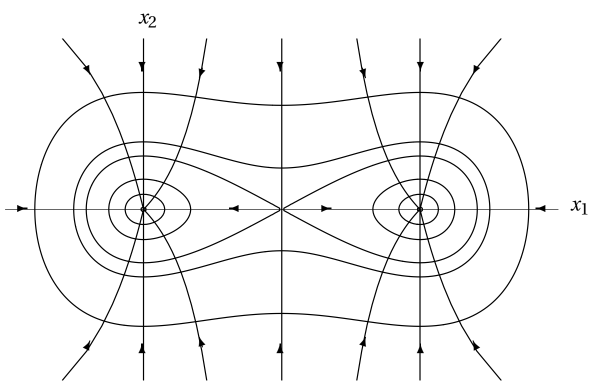

Abbildung 2.6
Das Phasendiagramm des Gradientensystems $\dot{x}_1 = -2x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)$, $\dot{x}_2 = -2x_2$.

kann in den folgenden Schritten erfolgen. (1) Anhand der Differentialgleichungen werden die

Gleichgewichte $(0,0)$, $(0.5,0)$ und $(1,0)$ bestimmt und die jeweiligen Eigenwerte berechnet. In der Mitte liegt ein Sattelpunkt. Die beiden äußeren Gleichgewichte sind Minima der Potentialfunktion und daher gemäß Satz 2.11 stabile Knoten. (2) Die Niveaulinien der Potentialfunktion werden eingezeichnet, wobei darauf zu achten ist, daß spezielle Werte nicht übersehen werden. Zum Beispiel beträgt der Wert der Potentialfunktion beim Sattelpunkt $\mathcal{V}(0.5,0) = 1/16$. Die Niveaulinie beschreibt hier eine liegende *Acht*. (3) In Abstimmung mit dem Satz 2.11 können Trajektorien eingezeichnet werden. (4) Die Menge

$$\mathcal{V}^{-1}([0,c]) = \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid 0 \le \mathcal{V}(x_1,x_2) \le c\}$$

ist für eine beliebige Konstante $c \geqq 0$ kompakt und positiv invariant, weil 0 das Minimum von $\mathcal{V}$ ist und alle Trajektorien in Richtung fallender Werte von $\mathcal{V}$ verlaufen. Jede Trajektorie gelangt in einen solchen Bereich. Denn für einen beliebigen Punkt $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ kann man den entsprechenden Bereich durch die Wahl von $c = \mathcal{V}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ definieren. Nach dem Satz 2.11 (d) in Verbindung mit dem Satz 2.2 ist demnach jede Trajektorie für alle $t \ge 0$ definiert und konvergiert gegen ein Gleichgewicht (gemäß Satz 2.7 (c) sind die ω-Grenzmengen zusammenhängend). Da der Sattelpunkt $(0.5,0)$ nur von Startwerten auf dem stabilen Arm, der der Vertikalen über und unter diesem Punkt entspricht, erreicht wird, konvergieren alle anderen Trajektorien links davon gegen $(0,0)$ und rechts davon gegen $(1,0)$. $\Diamond$

2.2.2 Anpassung an statische Optima

Die Gradientenmethode Die **Gradientenmethode** ist ein algorithmisches Suchverfahren zur Bestimmung der Lösungen statischer Optimierungsprobleme, das in den meisten Darstellungen des Operations Research diskutiert wird (vgl. zur praktischen Durchführung zum Beispiel Neumann, 1975, S. 274–296). Ihre Relevanz rührt daher, daß sie eine Möglichkeit bietet, sich dem tatsächlichen Optimum zu nähern, ohne es exakt berechnen zu können. Als erstes Beispiel sei eine Unternehmung bei vollständiger Konkurrenz gegeben, die den Vektor ihrer Faktoreinsatzmengen $\mathbf{v}$ wählt, um den Gewinn

$$\pi(\mathbf{v}) = pf(\mathbf{v}) - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}$$

zu maximieren, wobei p der gegebene Absatzpreis, f die substitutionale Produktionsfunktion und $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ der Vektor der gegebenen Faktorpreise ist. Angenommen, die Unternehmung kann das Gewinnmaximum, das bei $\hat{\mathbf{v}}$ liegt, nicht exakt bestimmen, kennt aber jeweils die Höhe der Grenzproduktivitäten der einzelnen Faktoren. Dann kann sie die Faktoreinsatzmengen in der Zeit gemäß

$$\dot{\mathbf{v}} = \pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = pf_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) - \mathbf{q}$$

anpassen. Wenn ein eindeutiges Gewinnmaximum bei $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} > \mathbf{0}$ existiert, hat die Funktion $\mathcal{V}(\mathbf{v}) \equiv -\pi(\mathbf{v})$ an dieser Stelle ein eindeutiges, isoliertes Minimum, das nach dem Satz 2.11 asymptotisch stabil ist. Betrachtet man die Veränderung des Gewinns,

$$\dot{\pi}(\mathbf{v}) = \pi_{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}} = (pf_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) - \mathbf{q})\cdot(pf_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) - \mathbf{q}),$$

so erkennt man, daß $\dot{\pi} > 0$ während des Anpassungsprozesses, der erst endet, wenn $\dot{\pi} = 0$ (was strenggenommen nie der Fall ist). Die Faktoreinsatzmengen werden also solange angepaßt, wie der Gewinn steigt.

Ein Gewinnmaximum ist zum Beispiel dann eindeutig, wenn die Produktionsfunktion streng konkav ist. Unter der Annahme, daß ein Maximum an der Stelle $\hat{\mathbf{v}} > \mathbf{0}$ im Inneren des Definitionsbereichs existiert, ist $\hat{\mathbf{v}}$ ein singulärer Punkt. Wegen der strengen Konkavität ist die Bedingung $\pi_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ notwendig und hinreichend für ein Gewinnmaximum, so daß kein weiterer singulärer Punkt von $\mathcal{V} = -\pi$ existieren kann. Daher impliziert der Satz 2.11 die globale Konvergenz gegen das Gewinnmaximum, wenn man unterstellt, daß die Nichtnegativitätsbeschränkungen $v_i \geqq 0$ nie binden (wie im Beispiel 2.7 muß gezeigt werden, daß die Trajektorien beschränkt sind). Im allgemeinen Fall ohne strenge Konkavität mit möglicherweise mehreren lokalen Gewinnmaxima stellt der Satz 2.11 sicher, daß der genannte Anpassungsmechanismus zu einem dieser lokalen Maxima führt (wenn man nicht gerade in einem singulären Punkt startet, der kein Gewinnmaximum ist), aber im allgemeinen nicht zum globalen Maximum.

Als weiteres Beispiel wird das Problem der Kostenminimierung einer Unternehmung bei vollständiger Konkurrenz auf den Beschaffungsmärkten betrachtet, das geschrieben werden kann als

$$C(x, \mathbf{q}) := \min_{\mathbf{v} \geq 0} \{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \mid f(\mathbf{v}) \geqq x\},$$

wobei x die gegebene Produktionsmenge bezeichnet und die anderen Symbole wie im vorhergehenden Beispiel zu verstehen sind. Die Formulierung eines Anpassungsprozesses als Gradientensystem ist hier aufgrund der Nebenbedingung nicht ohne weiteres möglich. Ein Ausweg besteht in der Verwendung der impliziten Funktion, die einen Faktor, zum Beispiel v_n, in Abhängigkeit von allen anderen Faktoren und der gegebenen Produktionsmenge x definiert: $x = f(\mathbf{v}_{-n}, v_n) \Rightarrow v_n = v_n(\mathbf{v}_{-n}, x)$ mit

$$\frac{dv_n}{dv_i} = -\left.\frac{f_{v_i}(\mathbf{v})}{f_{v_n}(\mathbf{v})}\right|_{f(\mathbf{v})=x}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

wobei $\mathbf{v}_{-n} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ ist. (Natürlich muß unterstellt werden, daß wenigstens einer der Faktoren, hier v_n, durchgehend eine positive Grenzproduktivität hat, so daß $f_{v_n} > 0$, und daß die Nebenbedingung $f(\mathbf{v}) \geqq x$ bindet.) Damit lassen sich die Gesamtkosten darstellen als

$$\mathfrak{C}(\mathbf{v}_{-n}, v_n(\mathbf{v}_{-n}, x)) := \sum_{i=1}^{n-1} q_i v_i + q_n v_n(\mathbf{v}_{-n}, x).$$

Der Anpassungsprozeß für die Faktoreinsatzmengen kann jetzt als Gradientensystem in R^{n-1} mit der Potentialfunktion $\mathfrak{C}(\mathbf{v}_{-n}, v_n(\mathbf{v}_{-n}, x))$ dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{v}}_{-n} = -\mathfrak{C}_{\mathbf{v}_{-n}}(\mathbf{v}_{-n}, v_n(\mathbf{v}_{-n}, x)) = q_n \frac{f_{\mathbf{v}_{-n}}}{f_{v_n}} - \mathbf{q}_{-n}.$$

Wenn ein eindeutiges Minimum im Inneren des Definitionsbereichs existiert und dieses Minimum der einzige singuläre Punkt der angegebenen Potentialfunktion ist, was für eine streng quasikonkave Produktionsfunktion gilt, kann wie zuvor mit dem Satz 2.11 die globale Konvergenz gegen dieses Minimum nachgewiesen werden. Bei Nichteindeutigkeit gelten analoge Ausführungen wie im Beispiel der Gewinnmaximierung.

Die Interpretation des beschriebenen Anpassungsprozesses wird durch die Betrachtung eines Faktors i deutlich. Aus

$$\dot{v}_i = q_n \frac{f_{v_i}}{f_{v_n}} - q_i$$

folgt, daß v_i erhöht (gesenkt) wird, wenn die mit dem Kehrwert des Faktorpreises gewichtete Grenzproduktivität des Faktors i größer (kleiner) als die gewichtete Grenzproduktivität des Faktors n ist:

$$\dot{v}_i \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f_{v_i}}{q_i} \gtreqless \frac{f_{v_n}}{q_n}.$$

Diese Anpassung kann als **Faustregel** für die Faktoren $i = 1, \dots, n-1$ interpretiert werden; der Faktor v_n wird jeweils gemäß $v_n = v_n(\mathbf{v}_{-n}, x)$ so angepaßt, daß die gewünschte Produktionsmenge erzeugt wird. Wenn alle gewichteten Grenzproduktivitäten übereinstimmen, ist das Kostenminimum erreicht. Zur Annäherung an das Kostenminimum ist daher die Kenntnis der Faktorpreise und der jeweiligen Grenzproduktivitäten ausreichend.

Im vorangegangenen Beispiel der Kostenminimierung ist angenommen worden, daß ein eindeutiges Kostenminimum im Inneren des Lösungsbereichs existiert und daß die Nichtnegativitätsbeschränkungen während des Anpassungsprozesses nicht wirksam werden. Die Nebenbedingung $f(\mathbf{v}) \geqq x$ ist als Gleichung durch Substitution in der Zielfunktion berücksichtigt worden. Wenn mehrere Nebenbedingungen vorliegen, die nicht alle binden müssen, und auch effektive Nichtnegativitätsbeschränkungen zu beachten sind, ist diese Methode nicht mehr anwendbar. Die Konvergenz der Gradientenmethode für allgemeine (nichtlineare) Optimierungsprobleme ist im zweiten Teil des Buches von Arrow et al. (1958) in einer Reihe von Aufsätzen von Arrow, Hurwicz, Uzawa, Marschak und Solow analysiert worden.

Betrachtet wird das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ &g^j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

wobei $\mathbf{x} \in R^n$ ist und alle auftretenden Funktionen reellwertig und stetig differenzierbar sind. Die zugehörige Lagrangefunktion lautet

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} y_j g^j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Ein Punkt $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \geqq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ heißt **Sattelpunkt** der Funktion L für $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$, wenn gilt

$$L(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) \leqq L(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \leqq L(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0},$$

wenn also ein Maximum von L bezüglich $\mathbf{x}$ und ein Minimum bezüglich $\mathbf{y}$ vorliegt.

Die folgende Version des **Kuhn-Tucker-Theorems** geht auf Uzawa (Kapitel 3 in Arrow et al., 1958) zurück.[20] Darin wird als Regularitätsbedingung die **Slater-Bedingung** verwendet:

$$\text{Es gibt ein} \quad \bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \text{so daß} \quad \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) > \mathbf{0} \qquad \text{(Slater-Bedingung)}$$

Satz 2.12. *(a) Wenn $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ ein Sattelpunkt von L für $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ ist, dann ist $\hat{\mathbf{x}}$ eine optimale Lösung von (2.48).*

(b) Seien f und $\mathbf{g}$ konkave Funktionen von $\mathbf{x}$ für $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ und $\mathbf{g}$ erfülle die Slater-Bedingung. Wenn $\hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$ das Problem (2.48) löst, dann gibt es ein $\hat{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}$, so daß $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ ein Sattelpunkt von L ist.

Beweis: Uzawa (1958b, S. 33–36). □

Unter den Voraussetzungen des Teils (b) des Satzes ist es also notwendig und hinreichend für ein Optimum, daß ein Sattelpunkt der Lagrangefunktion vorliegt. Dann ist die Lösung des Problems (2.48) äquivalent zur Bestimmung eines Sattelpunktes der Lagrangefunktion $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Für den Satz 2.12 ist die Differenzierbarkeit nicht erforderlich. Unterstellt man zusätzlich zu den in 2.12 (b) getroffenen Annahmen, daß alle involvierten Funktionen stetig differenzierbar sind, so sind die folgenden **Kuhn-Tucker-Bedingungen** notwendig und hinreichend für das Vorliegen eines Sattelpunktes von L und damit für ein Maximum (vgl. Takayama, 1985, S. 92):

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\mathbf{x}} &= \hat{f}_{\mathbf{x}} + \sum_{j=1}^{m} \hat{y}_j \hat{g}^j_{\mathbf{x}} \leqq \mathbf{0}, \quad && \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad && \hat{L}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0, \\ \hat{L}_{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{g}} \geqq \mathbf{0}, && \hat{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}, && \hat{L}_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

wobei die Abkürzung $\hat{L}_{\mathbf{x}} := L_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ verwendet worden ist (analog für die anderen Funktionen). Zu beachten ist, daß die Bedingung des komplementären Schlupfes $\hat{L}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ zu $\hat{L}_{x_i} \hat{x}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, äquivalent ist, da $\hat{L}_{x_i} \leqq 0$ und $\hat{x}_i \geqq 0$ für alle i gilt (analog für $\hat{L}_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$).

Da der Gradient immer in Richtung des stärksten Funktionsanstiegs zeigt, hier aber ein Maximum von L in bezug auf $\mathbf{x}$ und ein Minimum in bezug auf $\mathbf{y}$ gesucht wird, ist der Ansatz des folgenden **Arrow-Hurwicz-Gradientensystems** naheliegend

[20] Vgl. dazu und allgemein zur nichtlinearen Programmierung auch Takayama (1985, Kapitel 1). Die Originalarbeit ist Kuhn und Tucker (1951).

(vgl. Arrow und Hurwicz, 1958a, S. 118), wobei von nichtnegativen Startwerten ausgegangen wird:

$$\dot{x}_i = \begin{cases} 0 & : \quad L_{x_i} < 0 \quad \text{und} \quad x_i = 0 \\ L_{x_i} & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$
$$\dot{y}_j = \begin{cases} 0 & : \quad L_{y_j} > 0 \quad \text{und} \quad y_j = 0 \\ -L_{y_j} & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{2.50}$$

Wenn unter Beachtung der Nichtnegativitätsbedingungen $\dot{x}_i = 0$ und $\dot{y}_j = 0$ für alle i und j gilt, sind offenbar auch die notwendigen und hinreichenden Kuhn-Tucker-Bedingungen (2.49) erfüllt.

Das Problem bei diesem Ansatz besteht darin, daß das System (2.50) nicht (Lipschitz-) stetig ist und daher nicht die üblichen Sätze über die Existenz von Lösungen für Systeme von Differentialgleichungen angewendet werden können. Wenn in einem Zeitpunkt zum Beispiel $x_i > 0$ und $L_{x_i} < 0$ ist, gilt $\dot{x}_i = L_{x_i} < 0$. Wenn nun $x_i = 0$ eintritt, ändert sich $\dot{x}_i$ unstetig von $\dot{x}_i = L_{x_i} < 0$ auf $\dot{x}_i = 0$. Uzawa (1958a) unterstellt daher eine zusätzliche Regularitätsbedingung, die den Beweis der Existenz einer Lösung ermöglicht. Diese Bedingung ist umständlich zu formulieren, aber nicht sonderlich restriktiv. Daher wird hier einfach die Existenz einer eindeutigen Lösung postuliert.

Satz 2.13. *Sei $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ streng konkav und zweimal stetig differenzierbar in $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ und konvex und zweimal stetig differenzierbar in $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$. Die Funktion $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ habe einen Sattelpunkt $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ unter der Beschränkung $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, und das System (2.50) besitze eine eindeutige Lösung $(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))$ für jeden Startwert $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \geqq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, die stetig in den Anfangsbedingungen ist. Dann ist $\hat{\mathbf{x}}$ eindeutig bestimmt, und es gilt* $\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}$.

Beweis: Uzawa (1958a). □

Dieser Satz zeigt, daß auch bei Berücksichtigung von Nichtnegativitätsbeschränkungen in der nichtlinearen Programmierung die Gradientenmethode in vielen Fällen konvergiert. Wie im Fall der Nebenbedingungen in Gleichungsform kann diese Methode auch jetzt als **Faustregel** interpretiert werden. Liegt zum Beispiel wieder ein Problem der Kostenminimierung vor, so lautet diese Faustregel grob gesprochen, daß von einem Produktionsfaktor mehr eingesetzt werden soll, wenn die mit der Dualvariablen bewertete Grenzproduktivität größer als der Faktorpreis ist und umgekehrt, wobei sich der jeweilige Wert der Dualvariablen selbst endogen aus dem Gradientenprozeß ergibt. Ein weiteres Beispiel geben Arrow und Hurwicz (1958b), die zeigen, daß die Gradientenmethode auch als stabiler Prozeß der Ressourcenallokation verwendet werden kann.

Einschränkend ist anzumerken, daß auch die Optima von statischen Problemen nicht immer stabil sind. Während hier nur die Anpassung an einzelwirtschaftliche

Optima diskutiert worden ist, kann man zum Beispiel auch die Stabilität des statischen allgemeinen Gleichgewichts bei vollständiger Konkurrenz aufgrund geeigneter Mechanismen der Anpassung analysieren (vgl. zum Beispiel den Überblick bei Negishi, 1962). In diesem Fall sind restriktive Annahmen (wie etwa die Bruttosubstituierbarkeit der Güter) erforderlich, um die Konvergenz nachzuweisen, so daß auch hier sowohl Stabilität als auch Instabilität möglich ist. Wie für das Beispiel des Gradientenprozesses gilt jedoch, daß immerhin dynamische Mechanismen denkbar sind, die in die Nähe des Optimums beziehungsweise des Gleichgewichts von statischen Modellen führen, ohne dabei zu hohe Anforderungen an die Informationen der Akteure zu stellen.

Eine stabile Faustregel für ein Absatzmonopol Die im letzten Abschnitt dargestellte Gradientenmethode kann als Faustregel interpretiert werden. Allerdings erfordert diese Methode zum Beispiel beim Problem der Gewinnmaximierung die Kenntnis der Grenzproduktivitäten der Faktoren. In diesem Abschnitt wird ein Beispiel für ein (allerdings sehr einfaches) statisches Optimierungsproblem gegeben, dessen Lösung mit Hilfe einer Faustregel möglich ist, die nahezu ohne Informationen auskommt. Der Ansatz geht auf Baumol und Quandt (1964) zurück, die ein diskretes und ein stetiges Modell formuliert haben. Wie Buhr und Christiaans (2001) gezeigt haben, ist die Analyse des stetigen Modells allerdings nicht korrekt. Im folgenden wird die Version von Buhr und Christiaans (2001) dargestellt.

Der Gewinn π eines Monopolisten sei eine differenzierbare, streng konkave Funktion des Preises p mit

$$\pi = f(p), \quad \text{mit} \quad f''(p) < 0 \quad \forall p \geqq 0,$$

die ein Maximum bei $\hat{p} > 0$ mit $f'(\hat{p}) = 0$ aufweist. Diese Gewinnfunktion ist dem Monopolisten nicht genau bekannt, er kennt lediglich einige Funktionswerte. Er entscheidet nach der Faustregel: *Erhöhe den Preis, wenn der Gewinn nach einer vorausgegangenen Preiserhöhung gestiegen ist, und senke den Preis, wenn der Gewinn nach einer vorausgegangenen Preiserhöhung gefallen ist. Wenn sich der Gewinn nicht mehr geändert hat, behalte den Preis bei.* Anders ausgedrückt, der Preis bewegt sich in dieselbe Richtung wie in der vorhergehenden Periode, wenn der Gewinn gestiegen ist, und in die entgegengesetzte Richtung, wenn der Gewinn gefallen ist. Das besondere an dieser Regel ist, daß die einzige Information, die der Monopolist benötigt, sein eigener Gewinn ist. Formal kann man diese Faustregel mittels einer Differenzengleichung folgendermaßen ausdrücken:

$$p_{t+1} - p_t = g\left(\frac{\pi_t - \pi_{t-1}}{p_t - p_{t-1}}\right), \tag{2.51}$$

wobei $g \in C^1(R)$ eine vorzeichenerhaltende Funktion mit $g' > 0$ ist, das heißt,

$$g \gtreqless 0 \iff \frac{\pi_t - \pi_{t-1}}{p_t - p_{t-1}} \gtreqless 0.$$

Als stetige Version von (2.51), die die verbale Faustregel gut wiedergibt, wird die folgende Differentialgleichung mit einer Verzögerung verwendet:

$$\dot{p}(t+1) = \begin{cases} g(\dot{\pi}(t)/\dot{p}(t)) & \text{wenn} \quad \dot{p}(t) \neq 0 \\ g(\ddot{\pi}(t)/\ddot{p}(t)) & \text{wenn} \quad \dot{p}(t) = 0 \neq \ddot{p}(t) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.52}$$

Setzt man $\dot{\pi}(t) = f'(p)\dot{p}$ beziehungsweise $\ddot{\pi} = f''(p)\dot{p}^2 + f'(p)\ddot{p} = f'(p)\ddot{p}$ im Falle $\dot{p}(t) = 0$ ein und definiert $h(p) := g(f'(p))$, so wird die Fallunterscheidung eliminiert und man erhält die eine Gleichung[21]

$$\dot{p}(t+1) = h(p(t)).$$

Die Verzögerung in dieser Gleichung kann beseitigt werden, indem zunächst auf beiden Seiten $\dot{p}(t)$ subtrahiert wird:

$$\dot{p}(t+1) - \dot{p}(t) = h(p(t)) - \dot{p}(t).$$

Verringert man die Zeitverzögerung von einer Periode auf den Bruchteil θ dieser Periode, so ist es sinnvoll, daß die Änderung auf der rechten Seite ebenfalls nur den Bruchteil θ beträgt:

$$\dot{p}(t+\theta) - \dot{p}(t) = [h(p(t)) - \dot{p}(t)]\theta.$$

Die Division dieser Gleichung durch θ liefert nach der Bildung des Grenzwertes für $\theta \to 0$ den stetigen Anpassungsprozeß

$$\ddot{p} + \dot{p} = h(p). \tag{2.53}$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann als System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt werden, indem die neue Variable q durch $q = \dot{p}$ eingeführt wird:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= q, \\ \dot{q} &= h(p) - q. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Das eindeutige Gleichgewicht von (2.54) ist durch $(\hat{p}, 0)$ gegeben. Aus den Eigenschaften von f und g folgt

$$h(p) \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p \lesseqgtr \hat{p}, \quad \text{sowie} \quad h'(p) = g'(f'(p))f''(p) < 0. \tag{2.55}$$

---

[21]Tatsächlich lautet das Ergebnis dieser Substitution

$$\dot{p}(t+1) = \begin{cases} h(p(t)), & \text{wenn nicht} \quad \dot{p}(t) = \ddot{p}(t) = 0 \\ 0, & \text{wenn} \quad \dot{p}(t) = \ddot{p}(t) = 0 \end{cases}$$

In jedem Fall muß der Monopolist das System anfangs in Bewegung setzen, um eine sinnvolle Faustregel zu erhalten. Denn wenn er mit $\dot{p} = \ddot{p} = 0$ startet, bleibt das System in dieser Situation. Wenn dagegen anfangs $\dot{p} \neq 0$ ist, erkennt man anhand der stetigen Version (2.53), daß $\dot{p}(t) = \ddot{p}(t) = 0$ nur möglich ist, wenn $p(t) = \hat{p}$. Daher muß die Fallunterscheidung nicht weiter betrachtet werden.

Die lokale Stabilität des Gleichgewichts kann unmittelbar anhand des Routh-Hurwitz-Kriteriums nachgewiesen werden. In bezug auf eine Faustregel ist es allerdings wichtig, daß die Stabilität auch für größere Abweichungen vom Optimum gewährleistet ist. Darüber hinaus sollte im vorliegenden Beispiel auch die Nichtnegativitätsbeschränkung für den Preis beachtet werden. Beiden Aspekten kann unter Verwendung des Satzes 2.9 Rechnung getragen werden.

Aussage 2.1. *Das Gleichgewicht* $(\hat{p}, 0)$ *des Systems (2.54) ist asymptotisch stabil. Sein Attraktionsgebiet enthält die Menge* $U_l = \{(p,q) \in R^2 \mid V(p,q) < l\}$*, wobei die Zahl* $l > 0$ *durch* $l := -\int_{\hat{p}}^{0} h(s)\, ds > 0$ *definiert ist. Für alle Startwerte in* U_l *ist der Preis* $p(t)$ *positiv für alle* $t \geq 0$*.*

Beweis: Die Funktion

$$V(p,q) = \frac{1}{2}q^2 - \int_{\hat{p}}^{p} h(s)\, ds$$

ist eine geeignete Lyapunov-Funktion für $p > 0$. Denn gemäß (2.55) ist $V(p,q) > 0$ für alle $(p,q) \neq (\hat{p}, 0)$ und $V(\hat{p}, 0) = 0$. Die Zeitableitung ist

$$\dot{V}(p,q) = q\dot{q} - h(p)\dot{p} = q[h(p) - q] - h(p)q = -q^2 < 0$$

für alle $q \neq 0$. Also ist $(\hat{p}, 0)$ asymptotisch stabil. Sei $l = -\int_{\hat{p}}^{0} h(s)\, ds > 0$ und $U_l := \{(p,q) \in R^2 \;:\; V(p,q) < l\}$. Da V eine strenge Lyapunov-Funktion auf U_l ist, ist die Aussage bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß U_l beschränkt ist, so daß alle Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt sind, und daß für $(p,q) \in D$ gilt $p > 0$. Aus $V(p,q) < l$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q^2 + \int_{p}^{\hat{p}} h(s)\, ds &< \int_{0}^{\hat{p}} h(s)\, ds \\ \iff \quad \frac{1}{2}q^2 + \int_{p}^{\hat{p}} h(s)\, ds - \int_{0}^{p} h(s)\, ds - \int_{p}^{\hat{p}} h(s)\, ds &< 0 \\ \iff \quad \int_{0}^{p} h(s)\, ds &> \frac{1}{2}q^2 > 0, \end{aligned}$$

was wegen (2.55) impliziert, daß $p > 0$. Also folgt aus $V < l$, daß $p > 0$, und weil V entlang der Trajektorien abnimmt, gilt $p(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Damit ist auch die Beschränktheit von U_l weitgehend nachgewiesen,[22] weil p nach unten durch null beschränkt ist. Da $-\int_{\hat{p}}^{p} h(s)\, ds$ nichtnegativ ist, ist unmittelbar klar, daß q durch $V(p,q) < l$ beschränkt ist. Also bleibt lediglich nachzuweisen, daß p auch nach oben beschränkt ist. Diese Tatsache folgt wegen $h'(p) < 0$ und $h(p) < 0$ für $p > \hat{p}$ aus der folgenden Ungleichung:

$$\int_{\hat{p}}^{p} h(s)\, ds \leqq \int_{\hat{p}+\epsilon}^{p} \max_{s \in [\hat{p}+\epsilon, p]} h(s)\, ds = \int_{\hat{p}+\epsilon}^{p} h(\hat{p}+\epsilon)\, ds = (p - \hat{p} - \epsilon) h(\hat{p}+\epsilon),$$

die impliziert, daß $\int_{\hat{p}}^{p} h(s)\, ds$ für $p \to \infty$ gegen $-\infty$ divergiert und daher $V \to \infty$. Also muß p nach oben beschränkt sein, weil annahmegemäß $V < l$ gilt. □

[22] Dieser Hinweis fehlt in Buhr und Christiaans (2001).

Als Fazit bleibt festzuhalten, daß die durch (2.54) formalisierte Faustregel zumindest für Startwerte in $U_l = \{(p,q) \in R^2 \mid V(p,q) < \int_0^{\hat{p}} h(s)\; ds\}$ asymptotisch stabil ist, ohne die Nichtnegativitätsbeschränkung für p zu verletzen. Mit anderen Worten, wenn ein Monopol diese Faustregel verwendet, stehen die Chancen gut, dem Gewinnmaximum kurzfristig immer näher zu kommen und es langfristig zu erreichen, ohne daß die Gewinnfunktion überhaupt bekannt ist. Ergebnisse dieser Art stärken das Vertrauen in statische neoklassische Modelle, in denen unterstellt wird, daß die Wirtschaftssubjekte Optimierungslösungen verwenden. Wie sich im folgenden herausstellen wird, ist die Situation in dynamischen Modellen problematischer.

2.2.3 Hamilton-Systeme

Während Gradientensysteme wichtige Anwendungen in der statischen Wirtschaftstheorie haben, spielen die sogenannten Hamilton-Systeme in der dynamischen Wirtschaftstheorie eine herausragende Rolle.

Definition 2.8. *Seien X und Y zwei offene Teilmengen des R^n, dann heißt die Funktion*

$$H\colon X \times Y \to R, \quad H \in C^2(X \times Y)$$

*die **Hamiltonfunktion** des **Hamilton-Systems mit** n **Freiheitsgraden***

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= H_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= -H_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Aus offensichtlichen Gründen ist es sinnvoll, die Variablen in **x** und **y** einzuteilen. Eine wichtige Eigenschaft dieser Systeme mit **autonomer Hamiltonfunktion**, die nicht explizit von t abhängt, folgt unmittelbar aus der Zeitableitung der Hamiltonfunktion entlang der Trajektorien:

$$\dot{H} = H_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + H_{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} = H_{\mathbf{x}} \cdot H_{\mathbf{y}} - H_{\mathbf{y}} \cdot H_{\mathbf{x}} = 0$$

für alle t, das heißt, die Hamiltonfunktion ist entlang jeder Lösungskurve von (2.56) konstant. Diese Eigenschaft wird oft als **Konservierung der Energie** bezeichnet, weil die Hamiltonfunktion in der Physik als Gesamtenergie des Systems (2.56) interpretiert wird. Entsprechend werden autonome Hamilton-Systeme als **konservative Systeme** bezeichnet. Die Konstanz von H entlang der Lösungskurven bedeutet, daß die **Trajektorien** auf den durch $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ = konst. definierten Hyperflächen liegen. Für Hamilton-Systeme zweiter Ordnung mit einem Freiheitsgrad gilt auch die Umkehrung, daß jede Niveaulinie, die nicht durch einen singulären Punkt verläuft und für die der Gradient von H nicht verschwindet, eine Trajektorie ist (vgl. Knobloch und Kappel, 1974, S. 45).

Der Beweis des folgenden Satzes nach Kurz (1968) ist eine Verallgemeinerung eines klassischen Resultates von Poincaré.

Satz 2.14 (Poincaré-Kurz) *Sei λ ein Eigenwert der Jacobi-Matrix J des in einem Gleichgewicht $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ linearisierten Systems (2.56). Dann ist $-\lambda$ ebenfalls ein Eigenwert.*

Beweis: Die Jacobi-Matrix des Systems (2.56) in einem Gleichgewicht $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ lautet in der Form einer Blockmatrix

$$J = \begin{pmatrix} \hat{H}_{\mathbf{yx}} & \hat{H}_{\mathbf{yy}} \\ -\hat{H}_{\mathbf{xx}} & -\hat{H}_{\mathbf{xy}} \end{pmatrix},$$

wobei zum Beispiel $\hat{H}_{\mathbf{yx}}$ eine Abkürzung für die Matrix $H_{\mathbf{yx}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ ist. Ferner sei I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix (das heißt, alle Diagonalelemente sind gleich 1 und alle anderen Elemente gleich 0) und

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 0 hier für eine $(n \times n)$-Nullmatrix steht. Damit ist

$$\mathfrak{J}J = \begin{pmatrix} \hat{H}_{\mathbf{xx}} & \hat{H}_{\mathbf{xy}} \\ \hat{H}_{\mathbf{yx}} & \hat{H}_{\mathbf{yy}} \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Matrix, da H annahmegemäß eine C^2-Funktion und daher $\hat{H}_{\mathbf{xy}} = \hat{H}'_{\mathbf{yx}}$ ist. Wenn nun λ ein Eigenwert von J ist, dann gibt es ein $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, so daß $\lambda\mathbf{z} = J\mathbf{z}$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit $\mathfrak{J}$, so folgt

$$\begin{aligned}
& & \mathfrak{J}\lambda\mathbf{z} &= \mathfrak{J}J\mathbf{z} & & \\
&\iff & \mathfrak{J}\lambda\mathbf{z} &= J'\mathfrak{J}'\mathbf{z} & &\text{weil} \quad \mathfrak{J}J = (\mathfrak{J}J)' = J'\mathfrak{J}' \\
&\iff & \mathfrak{J}\lambda\mathbf{z} &= J'(-\mathfrak{J})\mathbf{z} & &\text{weil} \quad \mathfrak{J}' = -\mathfrak{J} \\
&\iff & -\lambda(\mathfrak{J}\mathbf{z}) &= J'(\mathfrak{J}\mathbf{z}) & & \\
&\iff & -\lambda\mathbf{w} &= J'\mathbf{w} & &\text{mit} \quad \mathbf{w} := (\mathfrak{J}\mathbf{z}) \neq \mathbf{0},
\end{aligned}$$

das heißt, $\mathbf{w}$ ist ein Eigenvektor von J' und $-\lambda$ der entsprechende Eigenwert. Da J und J' dieselben Eigenwerte haben, ist der Satz bewiesen. □

Für $n = 1$ liegt ein Hamilton-System zweiter Ordnung mit einem Freiheitsgrad vor:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_y(x, y) \\ \dot{y} &= -H_x(x, y). \end{aligned} \tag{2.57}$$

In diesem Fall lautet die Jacobi-Matrix in einem Gleichgewicht

$$J = \begin{pmatrix} \hat{H}_{yx} & \hat{H}_{yy} \\ -\hat{H}_{xx} & -\hat{H}_{xy} \end{pmatrix},$$

so daß $\mathrm{Sp}(J) = 0$ und $|J| = \hat{H}_{xx}\hat{H}_{yy} - \hat{H}^2_{xy}$. Die Eigenwerte sind demnach gemäß (2.43)

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-|J|}.$$

Daher sind drei Fälle denkbar: (1) $|J| = 0$ mit $\lambda_1 = -\lambda_2 = 0$, dann ist hieraus keine Aussage für das nichtlineare System möglich. (2) $|J| < 0$ mit $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$, wobei beide

Eigenwerte reell sind und folglich ein Sattelpunkt (und topologischer Sattel) vorliegt. (3) $|J| > 0$ mit $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$, wobei beide Eigenwerte rein imaginär sind. Das bedeutet, daß das Gleichgewicht im linearisierten System ein Zentrum ist. Wenn H analytisch ist, folgt daraus, daß das Gleichgewicht des nichtlinearen Systems entweder ein Zentrum oder ein Spiralpunkt ist (vgl. Perko, 1996, S. 170). Anhand der Matrix J ist zu erkennen, daß $|J| > 0$ nur möglich ist, wenn $\hat{H}_{xx}$ und $\hat{H}_{yy}$ beide positiv oder beide negativ sind. Anhand dieser Tatsache läßt sich beweisen, daß ein Spiralpunkt nicht möglich ist (Perko, 1996, S. 170).

In aller Regel sind die Gleichgewichte von Hamilton-Systemen mit einem Freiheitsgrad also Sattelpunkte oder Zentren. In der **dynamischen Wirtschaftstheorie** kommen derartige Systeme häufig vor, wobei die Hamiltonfunktion oftmals **konkav** in x und **konvex** in y ist. Das impliziert, daß $H_{xx} \leq 0$ und $H_{yy} \geq 0$. Damit folgt für die in einem Gleichgewicht ausgewertete Jacobi-Matrix $|J| = \hat{H}_{xx}\hat{H}_{yy} - \hat{H}_{xy}^2 \leq 0$. Wenn man den Grenzfall $|J| = 0$ ausschließt, ist also $|J| < 0$ und das betrachtete Gleichgewicht ist ein Sattelpunkt und folglich instabil.

Beispiel 2.8. Die autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = f(x)$$

mit $f \in C^1$ wird als **Newtonsche Differentialgleichung** bezeichnet. Mit der neuen Variablen $y = \dot{x}$ und für den Spezialfall $f(x) = -\sin(x)$ wird daraus das autonome Hamilton-System mit einem Freiheitsgrad

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

mit der Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \sin(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}y^2 - [\cos(\tau)]_0^x = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos(x).$$

Die Gleichgewichte des Systems liegen offenbar alle auf der x-Achse mit $y = 0$ und den Werten x, für die $\dot{y} = -\sin(x) = 0$ gilt, das heißt die Gleichgewichte sind $(0,0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, $(\pm 3\pi, 0)$, ... Wegen $\dot{y} = -H_x = -\sin(x)$ sind die Gleichgewichte allesamt kritische Punkte der Hamiltonfunktion und insbesondere der Potentialfunktion $1 - \cos(x)$, die in der Physik die Potentialenergie angibt.[23] Weil $f(x) = -\sin(x)$ zyklisch mit der Periode 2π ist, ist es ausreichend, einen Ausschnitt des Phasendiagramms zu betrachten, der auf der x-Achse von $-\pi$ bis π reicht; damit sind alle Möglichkeiten für den Wert von $\dot{y} = -\sin(x)$ erfaßt. Alle Möglichkeiten für $\dot{x} = y$ ergeben sich durch die in diesem Bereich auftretenden Werte von $y \in (-\infty, \infty)$.

Die Potentialfunktion wird im oberen Teil der Abbildung 2.7 dargestellt. An den Stellen ihrer Maxima und Minima liegen entsprechend im unteren Teil der Abbildung die Gleichgewichte auf der y-Achse. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

[23] Die Wahl von 0 als unterer Integrationsgrenze in der Definition der Hamiltonfunktion bewirkt, daß die Potentialenergie $1 - \cos(x) = 0$ für $x = 0$ ist. Die kinetische Energie wird durch $y^2/2$ beschrieben, und H gibt die Gesamtenergie an.

des Newtonsystems sind

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\cos(x)}.$$

In den Gleichgewichten ausgewertet ergibt sich also $\lambda_{1,2} = \pm 1$ für $x = -\pi$, $\lambda_{1,2} = \pm i$ für $x = 0$ und $\lambda_{1,2} = \pm 1$ für $x = \pi$. Also liegt bei $(-\pi, 0)$ und $(\pi, 0)$ jeweils ein topologischer Sattel und bei $(0, 0)$ ein Zentrum vor, was auch anhand der Niveaulinien der Hamiltonfunktion zu erkennen ist.

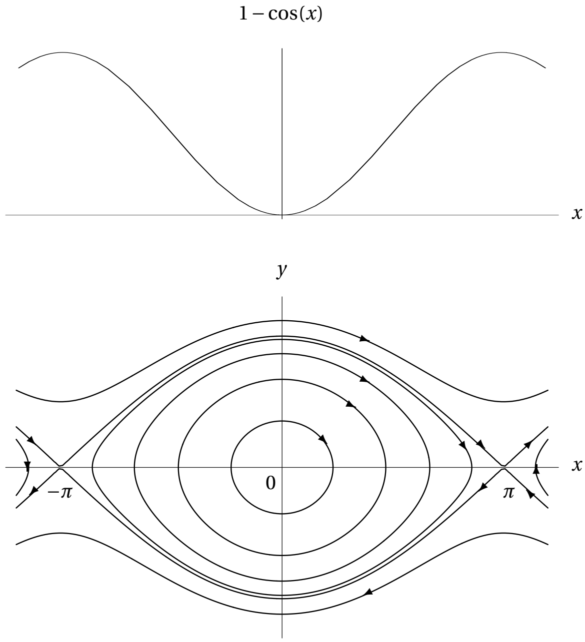

Abbildung 2.7
Die Potentialfunktion und das Phasendiagramm zum Beispiel 2.8

Diese im unteren Teil der Abbildung 2.7 dargestellten Niveaulinien der Hamiltonfunktion erhält man aus

$$\frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos(x) = k,$$

wobei k eine Konstante ist. Daraus folgt $y^2 = 2(k - 1 + \cos(x))$, woran zu erkennen ist, daß die Niveaulinien symmetrisch zur x-Achse verlaufen. Es reicht also aus, die Niveaulinien gemäß $y = \sqrt{2(k-1+\cos(x))}$ für den positiven Bereich zu bestimmen und anschließend an der x-Achse zu spiegeln. Für $k = 2$ ergibt sich, daß $y = \sqrt{2(1+\cos(x))}$, und damit folgt zum Beispiel die Existenz einer Niveaulinie, die die Wertepaare $(-\pi, 0)$, $(0, 2)$ und $(\pi, 0)$ enthält. Hier liegt also eine Trajektorie vor, die die beiden Gleichgewichte $(-\pi, 0)$ und $(\pi, 0)$ verbindet. Entsprechend erhält man im negativen Bereich durch Spiegelung an der x-Achse eine solche Trajektorie. Die Richtung der Trajektorien kann man anhand des Vektorfeldes bestimmen. So ist zum Beispiel $\dot{x} > 0$ für positive y-Werte und umgekehrt. Für $x \in (-\pi, 0)$ ist $-\sin(x)$ positiv und damit $\dot{y} > 0$, für $x \in (0,\pi)$ ist $\dot{y} < 0$. Der obere Teil der eben bestimmten Niveaulinie entspricht daher einer Trajektorie, die vom Punkt $(-\pi,0)$ aus (ohne in ihm zu starten, denn er ist ein Gleichgewicht) asymptotisch zum Punkt $(\pi,0)$ verläuft. Der untere Teil der Niveaulinie nimmt den umgekehrten Weg. Trajektorien deren α- und ω-Grenzmengen wie in diesem Fall jeweils unterschiedliche Gleichgewichte sind, heißen **heterokline Trajektorien**. Anhand des Phasendiagramms ist zu erkennen, daß die heteroklinen Trajektorien hier die Grenzen jeweils qualitativ unterschiedlich verlaufender Trajektorien bilden. Solche trennenden Trajektorien heißen **Separatrixen**. ♢

Bemerkung 2.10. Das Beispiel 2.8 mit $f(x) = -\sin(x)$ besitzt eine wichtige physikalische Interpretation als **ungedämpftes Pendel**, wobei sich die spezielle Form der hier verwendeten Gleichungen ergibt, wenn die Länge des Pendels numerisch der Gravitationskonstanten entspricht (vgl. zum Beispiel Hale und Koçak, 1991, S. 170). Die Variable x beschreibt dann den Winkel, um den das Pendel nach rechts von der (im Sinne von Lyapunov) stabilen Gleichgewichtslage abweicht, in der das Pendel senkrecht nach unten hängt, und y ist die Veränderung dieses Winkels in der Zeit. Der Ursprung in der Abbildung 2.7 entspricht der genannten stabilen Gleichgewichtsposition. Die Punkte $(\pm\pi,0)$ stellen die instabilen Gleichgewichte dar, in denen das Pendel senkrecht nach oben steht (nach rechts gedreht entspricht die Abweichung von der stabilen Lage dem Winkel π, nach links gedreht dem Winkel $-\pi$). Die heteroklinen Trajektorien, die die Sattelpunkte verbinden, repräsentieren die Bewegungen mit der Gesamtenergie $H = 2$, für die das Pendel die instabilen vertikalen Gleichgewichte für $t \to \pm\infty$ asymptotisch erreicht. Die innerhalb der Separatrixen gelegenen geschlossenen Trajektorien um den Ursprung entsprechen dem normalen Vor- und Zurückschwingen des ungedämpften Pendels mit $H < 2$, während die Trajektorien außerhalb der Separatrixen, wo $H > 2$ ist und von denen nur je eine eingezeichnet worden ist, die Bewegungen darstellen, in denen sich das Pendel über die instabile vertikale Position hinweg bewegt und immer weiter dreht. ♢

2.2.4 Sattelpunktdynamik in dynamischen Modellen

Während Gradientensysteme in der statischen Wirtschaftstheorie häufig als dynamische Anpassungsprozesse an statische Gleichgewichte oder Optima interpretiert werden können, beschreiben Hamilton-Systeme oder die später diskutierten gestörten Hamilton-Systeme die Dynamik der Anpassung an das langfristige Gleichgewicht in vielen dynamischen Modellen der Wirtschaftstheorie, in denen die Haushalte oder Unternehmen ihre Entscheidungen mit Verfahren der dynamischen Optimierung lösen. Im Unterschied zu den statischen Modellen, die um eine dynamische Anpassung an statische Gleichgewichte erweitert werden, ist der **Anpassungspfad** in dynamischen Modellen **selbst ein Gleichgewichtspfad**, der die Abfolge der kurzfristigen statischen Gleichgewichte auf dem Weg zum langfristigen Gleichgewicht beschreibt. Der Satz 2.14 legt es im Falle konkaver Probleme nahe, daß diese langfristigen Gleichgewichte häufig Sattelpunkte und in aller Regel instabil sind. Da sich die Trajektorien, die neben dem stabilen Arm des Sattelpunktes starten, selbst immer weiter von diesem stabilen Arm entfernen, ist auch der Pfad der kurzfristigen Gleichgewichte selbst instabil, zumindest wenn kein stabiler **metadynamischer Anpassungsprozeß** an diesen dynamischen Pfad spezifiziert werden kann. Auf die Problematik der Sattelpunktdynamik in dynamischen Optimierungsmodellen wird im Abschnitt 2.3 und im Kapitel 3 ausführlich eingegangen.

In der neoklassischen Wirtschaftstheorie kommt die Sattelpunktdynamik in einem weiteren, jedoch verwandten Zusammenhang vor. Langfristige Gleichgewichte, die Sattelpunkte sind, treten in monetären Modellen mit **rationalen Erwartungen** auf, die im deterministischen Kontext **vollkommener Voraussicht** entsprechen. Wie aus den vorangegangenen Ausführungen deutlich geworden ist, sind Sattelpunkte instabil. Daher wird häufig versucht, die Modelle so zu interpretieren, daß sich Stabilität ergibt. Im folgenden wird auf den Ansatz von Sargent und Wallace (1973) eingegangen. Das Modell besteht zwar nur aus einer Differentialgleichung und ist kein Hamilton-System, aber die dynamischen Implikationen sind mit denjenigen von Hamilton-Systemen vergleichbar.

Wie Sidrauski (1967) gezeigt hat, ergeben sich in aller Regel dynamisch instabile langfristige Gleichgewichte, wenn man Geld in neoklassische Wachstumsmodelle einführt und **kurzsichtig vollkommene Voraussicht (myopic perfect foresight)** der Haushalte unterstellt. Diese Begriffe sind wichtig genug, um sie formal zu definieren.

Definition 2.9. *Wenn g_x die tatsächliche Wachstumsrate einer Variablen x ist und die Erwartungen mit E bezeichnet werden, dann bedeutet*

(a) ***kurzsichtig vollkommene Voraussicht****, daß zu jedem Zeitpunkt t gilt*

$$Ex(t) = x(t) \quad \textit{und} \quad Eg_{x(t)} = g_{x(t)},$$

(b) und ***vollkommene Voraussicht****, daß zu jedem Zeitpunkt t der gesamte zukünftige Zeitpfad bekannt ist, also*

$$E\{x(\tau) \mid t \leqq \tau < \infty\} = \{x(\tau) \mid t \leqq \tau < \infty\}$$

Sidrauski (1967) hat ebenfalls gezeigt, daß die Instabilität beseitigt werden kann, indem man **adaptive Erwartungen** mit hinreichend langsamer Anpassung (**sluggish expectations**) unterstellt. Da die Neuklassiker jedoch von rationalen Erwartungen ausgehen, haben Sargent und Wallace (1973) als erste versucht, eine alternative Interpretation mit einer stabilen Lösung anzubieten, die nicht auf adaptiven Erwartungen basiert. Da das von Sargent und Wallace (1973) analysierte Modell ein Partialmodell des Geldmarktes ist und sich auf eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung beschränkt, ist ihr langfristiges Gleichgewicht zunächst als völlig instabil zu bezeichnen. Der Sattelpfad beziehungsweise die stabile Mannigfaltigkeit in Modellen mit zwei Differentialgleichungen schrumpft hier gewissermaßen auf einen Punkt beziehungsweise eine Mannigfaltigkeit der Dimension null zusammen. Das Modell eignet sich aufgrund dieser Einfachheit jedoch besonders gut, um die grundlegende Problematik zu verdeutlichen.

Die Nachfrage nach Realkasse wird durch die Funktion

$$\ln\left(\frac{M^d(t)}{P(t)}\right) = \alpha\pi(t)$$

beschrieben, wobei $M^d(t)$ die nachgefragte nominale Geldmenge, $P(t)$ das Preisniveau, $\pi(t)$ die erwartete Inflationsrate und $\boldsymbol{\alpha < 0}$ (!) einen konstanten Parameter bezeichnen. Die Nachfrage nach Realkasse sinkt also mit der erwarteten Inflationsrate, weil die nominale Geldmenge mit steigender Inflationsrate an Kaufkraft verliert. Im Geldmarktgleichgewicht ist das Angebot der nominalen Geldmenge $M(t)$ gleich der Nachfrage $M^d(t)$. Bei kurzsichtig vollkommener Voraussicht ist die erwartete Inflationsrate $\pi(t)$ gleich der tatsächlichen Inflationsrate

$$\frac{\dot{P}(t)}{P(t)} = \frac{d\ln P(t)}{dt}.$$

Unterstellt man kontinuierliche Markträumung und kurzsichtig vollkommene Voraussicht, so kann man diese Gleichgewichtsbedingungen in die Geldnachfragefunktion einsetzen, so daß

$$\ln M(t) - \ln P(t) = \alpha\frac{d\ln(P(t))}{dt}.$$

Mit den Definitionen $p(t) = \ln P(t)$ und $m(t) = \ln M(t)$ ergibt sich schließlich die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{p}(t) = \frac{1}{\alpha}[m(t) - p(t)], \quad \text{mit} \quad p(t_0) = p_0. \tag{2.58}$$

Das Preisgleichgewicht ist durch $\dot{p}(t) = 0$ beziehungsweise $m(t) = p(t)$ definiert. Die Instabilität des Modells ist am einfachsten zu erkennen, wenn ein konstantes Geldangebot $m(t) = m$ unterstellt wird. In diesem Fall liegt eine autonome Differentialgleichung vor, deren Gleichgewicht wegen $d\dot{p}/dp = -1/\alpha > 0$ instabil ist. Setzt man $p = x$, $1/\alpha = -a$ und $m/\alpha = b$, so erhält man die Gleichung (2.15) mit konstantem $s(t) \equiv b$, anhand deren Lösung (2.20) man die Lösung des Anfangswertproblems (2.58) direkt ablesen kann:

$$p(t) = (p_0 - m)e^{-(t-t_0)/\alpha} + m.$$

Wenn $p_0 \neq m$ ist, entfernt sich die Lösung wegen $\alpha < 0$ mit der Zeit immer weiter vom Gleichgewichtswert $\hat{p} = m$.

Für den allgemeinen Fall mit zeitabhängiger Funktion $m(t)$ ergibt sich die Lösung mit $m(t)/\alpha = s(t)$ direkt aus (2.19):

$$p(t) = p_0 e^{-(t-t_0)/\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t} m(\tau)e^{(\tau-t)/\alpha}\,d\tau. \tag{2.59}$$

Wegen $\alpha < 0$ divergiert der erste Term dieser Lösung für $t \to \infty$ gegen ∞. Der zweite Term divergiert zum Beispiel ebenfalls, wenn $m(t)$ eine konstante Funktion $m > 0$ ist.[24] Damit divergiert er aber erst recht, wenn $m(t)$ eine in t wachsende positive Funktion ist.[25]

Sargent und Wallace (1973) schlagen nun die folgende **Vorwärtslösung** von (2.58) vor:

$$p(t) = -\frac{1}{\alpha} \int_t^\infty m(\tau) e^{(\tau - t)/\alpha} \, d\tau. \tag{2.60}$$

Diese Lösung macht nur dann Sinn, wenn das uneigentliche Integral existiert, das heißt wenn es gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Ist zum Beispiel $m(t) = m$ konstant, so konvergiert das Integral genau dann, wenn $\alpha < 0$ ist. Man erhält dann

$$p(t) = -\frac{m}{\alpha} e^{-t/\alpha} \int_t^\infty e^{\tau/\alpha} \, d\tau = \lim_{T\to\infty} m\left(1 - e^{(T-t)/\alpha}\right) = m,$$

so daß die Lösung also wieder einfach $p(t) = m$ für alle t lautet. Ökonomisch impliziert diese Vorwärtslösung, daß der (tatsächliche und erwartete) Preispfad vom gesamten Zeitpfad der erwarteten zukünftigen Geldmengenpolitik bis in die unendliche Zukunft abhängt. Die Anforderungen an die Informationen der Wirtschaftssubjekte sind also extrem, denn anstelle der kurzsichtig vollkommenen Voraussicht tritt die vollkommene Voraussicht bezüglich der Variablen $m(t)$ und damit auch der Variablen $p(t)$, wobei diese Voraussicht beinhaltet, daß $p(t)$ nicht explodiert.

Aufgrund des allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen ist unmittelbar klar, daß die Lösung von Sargent und Wallace (1973) keine grundsätzlich andere als die Lösung (2.59) sein kann, sondern lediglich eine spezielle Lösung, die aus der allgemeinen Lösung durch eine bestimmte Randbedingung gewonnen wird. Tatsächlich kann man unmittelbar erkennen, daß sie sich für $T \to \infty$ und $\lim_{T\to\infty} |p_T| < \infty$ direkt aus (2.21) ergibt. Für $m(t) = m$ erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned} p(t) &= \lim_{T\to\infty} \left(p_T e^{(T-t)/\alpha} - \frac{m}{\alpha} e^{-t/\alpha} \int_t^T e^{\tau/\alpha} \, d\tau \right) \\ &= \lim_{T\to\infty} \left(p_T e^{(T-t)/\alpha} + m \left[1 - e^{(T-t)/\alpha} \right] \right) = m. \end{aligned}$$

---

[24] Wenn $m(t) = m$ konstant ist, kann man $me^{-t/\alpha}$ vor das Integral ziehen, so daß man

$$\frac{m}{\alpha} e^{-t/\alpha} \int_{t_0}^t e^{\tau/\alpha} \, d\tau = \frac{m}{\alpha} e^{-t/\alpha} \left[\alpha e^{\tau/\alpha} \right]_{t_0}^t = m\left(1 - e^{-(t-t_0)/\alpha}\right)$$

und damit die bereits für diesen Fall angegebene Lösung erhält. Für $t \to \infty$ divergiert dieser Ausdruck gegen $-\infty$. Die gesamte Lösung (2.59) divergiert für $t \to \infty$ nur dann nicht, wenn $p_0 = m$ ist, was schon aus der vorherigen expliziten Darstellung der Lösung für $m(t) = m$ folgt.

[25] Diese Aussage für uneigentliche Integrale folgt aus dem **Minorantenkriterium:** *Sind f und g zwei nichtnegative Funktionen mit $g(t) \le f(t)$ auf $[t_0, \infty)$, dann divergiert $\int_{t_0}^\infty f(t)\, dt$, wenn $\int_{t_0}^\infty g(t)\, dt$ divergiert,* vgl. zum Beispiel Heuser (1993a, S. 482). Weil das Integral hier für **jedes** $m > 0$ divergiert, divergiert es also auch für jede in t wachsende positive Funktion.

Als **Lösungen** einer Differentialgleichung werden normalerweise stetig differenzierbare oder zumindest stetige Funktionen bezeichnet, die die Differentialgleichung für ein Zeitintervall identisch erfüllen. Wie Sargent und Wallace (1973) bemerken, ist für ihre Lösung erforderlich, daß die Funktion $p(t)$ im Zeitpunkt t nicht stetig ist, sondern auf den stabilen Pfad springen kann. Stattdessen wird gefordert, daß $p(t)$ für alle t **rechtsseitig differenzierbar** ist. Nach Sargent und Wallace (1973) wird ihre Lösung dann durch die folgenden Annahmen impliziert: (1) $P(t)$ ist für alle t rechtsseitig differenzierbar, (2) die Öffentlichkeit erwartet, daß ein Prozeß der akzelerierenden Inflation oder Deflation bei konstantem Geldangebot irgendwann zu einem Ende kommt, und (3) $M(t)$ ist rechtsseitig unendlich oft differenzierbar. Man kann überprüfen, daß (2.60) diese Annahmen im Gegensatz zu (2.59) erfüllt. Wie Calvo (1977) nachweist, reichen diese Annahmen jedoch nicht aus, um die Eindeutigkeit der Lösung zu gewährleisten. Zum Beispiel ist $p(t) = m + \beta e^{-t/\alpha}$ für $0 \leq t < \bar{t}$ und $p(t) = m$ für $t \geq \bar{t}$ eine weitere Lösung, die die Annahmen (1), (2) und (3) erfüllt. Für den Spezialfall eines konstanten Geldangebots $m(t) = m$ zeigt er, daß man eine eindeutige Lösung erhält, wenn man zusätzlich fordert, daß $p(t)$ für alle $t > 0$ stetig und für $t = 0$ rechtsseitig stetig ist, da dann offenbar nur $p(t) = m$ eine Lösung ist, die alle Annahmen erfüllt.

Als Ergebnis bleibt festzuhalten, daß die Lösung bei vollständiger Voraussicht (bei Sargent und Wallace (1973) in der Annahme (2) enthalten, die ein nicht divergierendes Preisniveau beinhaltet) einfach nur deshalb stabil ist, weil unterstellt wird, daß $p(t)$ zum Beispiel bei einer Änderung der Geldpolitik auf den neuen Gleichgewichtswert springt, etwa auf $p(t) = m + \Delta m$ im Falle einer diskreten Änderung einer ansonsten konstanten Geldmenge. Auch wenn die Annahme einer diskreten Änderung des Preisniveaus prinzipiell gerechtfertigt sein kann, ist es praktisch wohl unmöglich, den neuen Gleichgewichtswert ohne Zeitverzögerung und mit unendlicher Genauigkeit zu treffen, wobei auch an die extremen Anforderungen bezüglich der verfügbaren Informationen bei vollkommener Voraussicht zu denken ist, die erforderlich sind, um den genauen Wert zu berechnen. Wird der Gleichgewichtswert nicht exakt getroffen, so wird sich direkt eine Entwicklung vom Gleichgewicht weg ergeben, weil das langfristige Gleichgewicht der zugrundeliegenden Differentialgleichung (2.58) eben trotz jeder alternativen Deutung instabil ist. Das Modell ist daher allenfalls zur Erklärung einer temporären Hyperinflation (oder Deflation) geeignet.

Wie bereits erwähnt, entsteht die Sattelpunktproblematik in einer Reihe neoklassischer Modelle. Ein gutes Beispiel für ein System zweiter Ordnung, in dem die stabile Mannigfaltigkeit die Dimension eins hat, ist das Modell des überschießenden Wechselkurses (Dornbusch, 1976), das auch in Gandolfo (1996, S. 397–401) dargestellt wird. Eine Diskussion des monetären neoklassischen Wachstumsmodells findet sich in Takayama (1993, S. 423–446), der die Darstellung von Sargent und Wallace (1973) ebenfalls kritisiert (S. 432) und darauf hinweist, daß man stabile Gleichgewichte durch alternative Annahmen erhält (etwa adaptive Erwartungen mit langsamer Anpassung wie bei Sidrauski, 1967). In Übereinstimmung damit bemerkt Turnovsky (2000, S. 86), daß die Instabilität im Modell von Sargent und Wallace durch die **Kombinati-**

on zweier Annahmen entsteht, nämlich die kurzfristige vollkommene Voraussicht einerseits und die kontinuierliche Markträumung andererseits. Ohne kontinuierliche Markträumung wird $m(t)$ in (2.58) als Geldnachfrage $m^d(t)$ interpretiert, woraus man $m^d(t) = p(t) + \alpha\dot{p}(t)$ erhält. Anstelle der kontinuierlichen Markträumung führt Turnovsky die Anpassungsgleichung $\dot{p}(t) = \theta[m - m^d(t)]$ ein, wobei $\theta > 0$ ist und m das konstante Geldangebot repräsentiert. Löst man diese Gleichung ebenfalls nach $m^d(t)$ auf und setzt die beiden Beziehungen gleich, so folgt schließlich

$$\dot{p}(t) = \frac{\theta}{\alpha\theta + 1}[m - p(t)],$$

wobei $\alpha < 0$ zu beachten ist. Das Gleichgewicht $p(t) = m$ ist jetzt stabil, wenn $-\alpha\theta < 1$ ist. Wenn also zum Beispiel die Anpassung an das Marktgleichgewicht nicht zu schnell ist (θ nicht zu groß ist), wird die Instabilität beseitigt.

Die Sattelpunktinstabilität tritt auch in nichtmonetären Wachstumsmodellen auf, wenn die Existenz heterogener Kapitalgüter berücksichtigt wird. Die Instabilität positiver (deskriptiver) Wachstumsmodelle ist zuerst von Hahn (1966) aufgezeigt worden und hat unter der Bezeichnung **Hahn-Problem** Eingang in die Literatur gefunden. Auf diese Problematik und ihren Zusammenhang mit der Theorie des optimalen Wachstums wird im Abschnitt 3.4.1 eingegangen. Modelle mit heterogenen Kapitalgütern werden jedoch nur am Rande behandelt. Die später entwickelten Ansätze einer positiven Theorie des Wirtschaftswachstums müssen daher so interpretiert werden, daß eine eventuelle Erweiterung auf mehrere Aktiva nur unter der Voraussetzung möglich ist, daß Erwartungsmechanismen (etwa adaptive Erwartungen mit langsamer Anpassung) oder Friktionen der Markträumung unterstellt werden, die die Stabilität der langfristigen Gleichgewichte nicht von vornherein gefährden.

2.3 Optimale Kontrolle

2.3.1 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Die intertemporale Maximierung des Konsumnutzens als dynamisches Optimierungsproblem Die gesamte neoklassische Wirtschaftstheorie basiert auf der Grundhypothese, daß die einzelnen Wirtschaftssubjekte danach trachten, ihre wie auch immer geartete Zielfunktion zu optimieren. In der statischen Theorie des Haushalts kommt das zum Beispiel durch die Maximierung einer Nutzenfunktion unter einer Budgetbeschränkung zum Ausdruck, wobei unterstellt wird, daß die Zeit keine Rolle spielt, weil nur eine einzige Periode isoliert betrachtet wird. Offenbar wird dadurch eine wichtige Entscheidungsvariable des Haushalts von vornherein vernachlässigt: die Wahl der Ersparnis.

Als Beispiel für ein dynamisches Optimierungsproblem kann die Nutzenmaximierung eines Haushalts unter entsprechenden Beschränkungen über einen Zeitraum dienen, der etwa sein gesamtes verbleibendes Leben abdeckt. Da die Ersparnis der Teil des Einkommens ist, der nicht zu Konsumzwecken ausgegeben wird, ergibt die Lösung eines solchen Ansatzes sowohl den optimalen Konsum als auch die optimale Ersparnis. Die verwendeten Annahmen werden häufig in der Wachstumstheorie getroffen. Die folgende additiv-separable Nutzenfunktion mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität verwendet zum Beispiel auch Romer (1990) in seinem Modell des endogenen Wirtschaftswachstums:

$$\int_0^T \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\,dt \quad \text{mit} \quad \theta > 0,$$

wobei $c = c(t)$ der Konsum im Zeitpunkt t ist, θ eine positive Konstante und ρ die konstante Diskontrate des Haushalts. Der Haushalt maximiert dieses **Nutzenfunktional**[26] unter der Nebenbedingung, daß sein in Konsumeinheiten gemessenes Reinvermögen $a(t)$ mit dem Anfangsbestand $a(0) = a_0$ am Ende des Planungshorizontes nichtnegativ ist: $a(T) \geqq 0$. Das Reinvermögen wird mit dem Zinssatz $r(t)$ verzinst. Unterstellt man, daß der Haushalt pro Periode eine Arbeitseinheit anbietet und dafür den Reallohnsatz $w(t)$ erhält, so ist der Strom seines (Momentan-) Einkommens in t gleich $w(t) + r(t)a(t)$. Zieht man davon den Konsum $c(t) \geqq 0$ ab, so erhält man als Veränderung des Reinvermögens die Ersparnis $\dot{a} = w + ra - c$, wobei die Zeitvariable der Einfachheit halber weggelassen worden ist.

Zusammengefaßt ergibt sich folgendes dynamische Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
&\max_{c\in\bar{C}[0,T]} \int_0^T \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\,dt, \quad \theta > 0, \\
&\text{u. d. N.} \\
&\dot{a} = w + ra - c, \quad a(0) = a_0,\ a(T) \geqq 0, \\
&c(t) \geqq 0.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Zu beachten ist, daß hier im Gegensatz zur statischen Optimierung, wo der optimale Wert einer oder mehrerer **Variablen** gesucht wird, eine optimale nichtnegative **Funktion** $c^* : [0,T] \to R$ gesucht wird, die stückweise stetig ist, das heißt die optimale Funktion aus allen Funktionen $c \in \bar{C}[0,T]$ mit $c(t) \geqq 0$ für alle $t \in [0,T]$. (Eine Funktion $c(t)$ heißt **stückweise stetig** auf $[0,T]$, wenn sie bis auf höchstens eine endliche Anzahl von Punkten stetig ist. An den Unstetigkeitsstellen müssen der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert existieren; Polstellen sind also ausgeschlossen.)

Die in (2.61) verwendete **Momentannutzenfunktion** $U(c) = (c^{1-\theta}-1)/(1-\theta)$ wird in der Literatur häufig verwendet. Deshalb werden ihre wesentlichen Eigenschaften

[26] Eine Abbildung von einem linearen Raum in die reellen Zahlen R heißt **Funktional**. Der Raum aller auf dem Intervall $[0,T]$ stückweise stetigen Funktionen $f : [0,T] \to R$ ist ein linearer Raum und wird mit $\bar{C}[0,T]$ bezeichnet. Die angegebene Nutzenfunktion heißt **additiv-separabel**, weil sie sich aus der Addition (dem Integral) der diskontierten **Momentannutzenfunktion** $(c^{1-\theta}-1)/(1-\theta)$ über alle t ergibt, die den momentanen Nutzen in jedem Zeitpunkt angibt. Läßt man alle stückweise stetigen Funktionen $c(t) \in \bar{C}[0,T]$ zu, so stellt das Integral eine Abbildung $\bar{C}[0,T] \to R$ dar; also liegt ein **Nutzenfunktional** vor.

hier dargestellt. Die **Elastizität des Grenznutzens** $-U''(c)c/U'(c)$ ist konstant gleich θ:

$$-\frac{U''(c)c}{U'(c)} = \frac{\theta c^{-1-\theta}c}{c^{-\theta}} = \theta.$$

Diese Elastizität des Grenznutzens entspricht dem Kehrwert der **intertemporalen Substitutionselastizität** σ, die – berechnet für zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 – die relative Veränderung des Quotienten $c(t_1)/c(t_2)$ im Verhältnis zur relativen Veränderung der Steigung der intertemporalen Indifferenzkurve, die ein konstantes Nutzenniveau bei alternativen Kombinationen des Konsums in t_1 und t_2 darstellt, angibt und wie folgt definiert ist:[27]

$$\sigma_{1,2} := -\frac{d[c(t_1)/c(t_2)]}{c(t_1)/c(t_2)} \Bigg/ \frac{d(U'[c(t_1)]/U'[c(t_2)])}{U'[c(t_1)]/U'[c(t_2)]}.$$

Strebt t_2 gegen t_1, so erhält man als Grenzwert den Ausdruck[28]

$$\sigma = -U'(c)/[U''(c)c],$$

für die intertemporale Substitutionselastizität, der mit der Inversen der Elastizität des Grenznutzens übereinstimmt. Da hier $\sigma = 1/\theta$ konstant ist, heißt $U(c) = (c^{1-\theta}-1)/(1-\theta)$ **Nutzenfunktion mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität**. Diese Nutzenfunktion ist für $\theta = 1$ nicht definiert. Berechnet man aber den Grenzwert der Funktion für $\theta \to 1$, so erhält man als Spezialfall die logarithmische Nutzenfunktion $U(c) = \ln(c)$ mit konstanter Substitutionselastizität in Höhe von eins, was mit der Regel von de l'Hôpital bewiesen werden kann:

$$\lim_{\theta\to 1} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} = \lim_{\theta\to 1} \frac{-c^{1-\theta}\ln(c)}{-1} = \ln(c),$$

wobei zu beachten ist, daß der erste Grenzwert auf den unbestimmten Ausdruck 0/0 führt, und daß $-c^{1-\theta}\ln(c)$ die Ableitung von $c^{1-\theta}-1$ nach θ ist.

Pontryagins Maximumprinzip für ein Standardmodell Zur Lösung dynamischer Optimierungsprobleme sind drei unterschiedliche Methoden bekannt: die klassische

[27] Bemerkenswert ist, daß $1/\sigma$ auch das **Arrow-Pratt-Maß** der relativen Risikoaversion ist. Zur Bedeutung von $1/\sigma$ in stochastischen Modellen mit Risiko vgl. zum Beispiel Varian (1992, Abschnitt 11.5).

[28] Setzt man die Beziehungen

$$d\left(\frac{c(t_1)}{c(t_2)}\right) = \frac{1}{c(t_2)}dc(t_1) - \frac{c(t_1)}{c(t_2)^2}dc(t_2)$$

und

$$d\left(\frac{U'(c(t_1))}{U'(c(t_2))}\right) = \frac{1}{U'(c(t_2))}U''(c(t_1))dc(t_1) - \frac{U'(c(t_1))}{U'(c(t_2))^2}U''(c(t_2))dc(t_2)$$

in die Formel für $\sigma_{1,2}$ ein und beachtet, daß $\lim_{t_2\to t_1} c(t_2) = c(t_1)$ sowie $\lim_{t_2\to t_1} U'(c(t_2)) = U'(c(t_1))$ (und ebenso für U''), so folgt das Ergebnis für σ nach wenigen Umformungen. (Die Argumentation gilt streng genommen nur für stetige Konsumpfade $c(t)$. Später wird gezeigt, daß die Lösung des Problems (2.61) einen stetigen Pfad beinhaltet.)

Variationsrechnung, die sogenannte **dynamische Programmierung** und die **Theorie der optimalen Kontrolle (Pontryagins Maximumprinzip)**. Das Maximumprinzip ist zum einen allgemeiner als die Variationsrechnung, weil es die Einbeziehung von Nebenbedingungen in Ungleichungsform ermöglicht. Zum anderen erlaubt es vielfach eine direktere **qualitative** ökonomische Interpretation von dynamischen Optimierungsproblemen als die Variationsrechnung, auch wenn es nicht möglich ist, ein Problem explizit zu lösen. Die Bedingungen der dynamischen Programmierung in stetiger Zeit implizieren die Bedingungen des Maximumprinzips und sind daher weniger allgemein als jene, die die Bedingungen der dynamischen Programmierung nur unter bestimmten Voraussetzungen implizieren. Außerdem ist die Ableitung von Lösungen anhand des Maximumprinzips einfacher, weil es ein System **gewöhnlicher Differentialgleichungen** im Gegensatz zu der **partiellen Differentialgleichung** der dynamischen Programmierung liefert. Allerdings ist der Ansatz der dynamischen Programmierung zum Beispiel für Probleme in diskreter Zeit und im Zusammenhang mit Differentialspielen von zentraler Bedeutung. Die Theorie der optimalen Kontrolle steht im folgenden im Mittelpunkt. Die dynamische Programmierung wird im Hinblick auf die wichtige Interpretation der Wertfunktion und einen heuristischen Beweis des Maximumprinzips zusätzlich knapp dargestellt.

Im folgenden werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen für ein einfaches Standardmodell der optimalen Kontrolle angegeben, das für zahlreiche ökonomische Anwendungen hinreichend allgemein ist. Gegeben ist ein Entscheidungsträger, der sein **Zielfunktional**

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T U(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt + S(T, \mathbf{x}(T)) \tag{2.62}$$

zu maximieren sucht. (Der Fall der Minimierung kann durch die Maximierung von $-J$ erfaßt werden.) Sowohl $\mathbf{u}$ als auch $\mathbf{x}$ sind Funktionen der Zeit t, was zur Vereinfachung der Notation in der Regel nicht explizit kenntlich gemacht wird.

Der Entscheidungsträger kann zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Werte eines Vektors $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in \Omega$ von **Kontrollvariablen** bestimmen, wobei $[0, T]$ der Planungszeitraum und $\Omega \subset R^m$ der Kontrollbereich ist, in dem die Werte der m Kontrollvariablen zu jedem Zeitpunkt liegen müssen. Der Kontrollbereich Ω kann, muß aber nicht offen sein. Der Planungshorizont T ist hier fest gegeben. Die Größe $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in R^n$ bezeichnet den **Zustandsvektor** zum Zeitpunkt t, der durch die Kontrollvariablen gemäß der **Gleichung der Zustandstransformation** (oder kurz **Zustandsgleichung**)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.63}$$

gesteuert wird, wobei die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ gegeben ist. Die Funktion $S(T, \mathbf{x}(T))$ gibt den **Rest-** oder **Schrottwert** des Zustands an. Man beachte, daß zum Beispiel $\mathbf{x}(t)$ im folgenden der Einfachheit halber sowohl den Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t als auch die Funktion $\mathbf{x}\colon [0, T] \to R^n$ oder die Zustandstrajektorie $\{\mathbf{x}(t) \mid 0 \leqq t \leqq T\}$ bezeichnen kann. Die Schreibweise $\mathbf{x}(t) \in R^n$ macht beispielsweise nur Sinn, wenn $\mathbf{x}(t)$ als Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t interpretiert wird.

Die Funktionen U und $\mathbf{f}$ seien stetig differenzierbar in $\mathbf{x}$ und stetig in $\mathbf{u}$ und in t; S sei stetig differenzierbar in $\mathbf{x}$ und T. Eine **Kontrolltrajektorie** $\mathbf{u}(t)$ heißt **zulässig**, wenn sie auf $[0,T]$ stückweise stetig in t ist und $\mathbf{u}(t) \in \Omega$ für alle $t \in [0,T]$ gilt. Setzt man eine derartige zulässige Kontrolltrajektorie in die Zustandsgleichung (2.63) ein, so erhält man zusammen mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ein System von Differentialgleichungen in den Zustandsvariablen $\mathbf{x}$, dessen Lösung einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Zustandspfad $\mathbf{x}(t)$ liefert. Dadurch erklärt sich auch die Schreibweise von J in Abhängigkeit von der Kontrolltrajektorie $\mathbf{u}(t)$, weil die Wahl dieser Kontrolltrajektorie die Zustandsvariable und damit letztlich auch den Wert des Zielfunktionals J bestimmt.

Für die Zustandsvariablen können auch **Endbedingungen** wie $x_i(T) \geqq x_{iT}$ oder $x_i(T) = x_{iT}$ berücksichtigt werden. Eine **zulässige Kontrolltrajektorie** $\mathbf{u}(t)$ muß dann neben den bereits angegebenen Eigenschaften auch die Bedingung erfüllen, daß die zugehörige Zustandstrajektorie den gegebenen Endbedingungen genügt.

Ähnlich der Methode der **Lagrangefunktion** in der statischen Optimierung wird in der Theorie der optimalen Kontrolle die **Hamiltonfunktion** zur Darstellung der Optimumbedingungen verwendet. Die Hamiltonfunktion für das vorliegende Standardproblem lautet

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 U(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}). \tag{2.64}$$

Dabei haben die **Kozustandsvariablen** $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t))$ eine ähnliche Rolle wie die Lagrangemultiplikatoren in der statischen Optimierung. Während $\boldsymbol{\lambda}(t)$ zeitabhängig ist, ist λ_0 eine nichtnegative Konstante, die gleich eins gesetzt werden kann, wenn sie ungleich null ist. Im folgenden wird unterstellt, daß die vorkommenden Vektoren jeweils passend **als Spalten- oder Zeilenvektor** interpretiert werden, was **zur Vereinfachung der Darstellung nicht** durch Transpositionszeichen **kenntlich gemacht** wird. Mit $\mathbf{0}$ wird der Nullvektor jeweils passender Dimension bezeichnet.

Die grundlegenden notwendigen Optimalitätsbedingungen für das durch

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{u}\in\tilde{C}[0,T]} \left\{ J(\mathbf{u}) = \int_0^T U(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\,dt + S(T,\mathbf{x}(T)) \right\}\\
&\qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\\
&\qquad \mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m \quad \forall t \in [0,T]\\
&\qquad x_i(T) = x_{iT},\ i = 1,\ldots,n_1\\
&\qquad x_i(T) \geqq x_{iT},\ i = n_1+1,\ldots,n_2\\
&\qquad x_i(T)\ \text{frei},\ i = n_2+1,\ldots,n
\end{aligned} \tag{2.65}$$

zusammengefaßte Standardproblem werden im folgenden Satz angegeben, wobei die Funktionen U, S und $\mathbf{f}$ die bereits getroffenen Annahmen bezüglich der Stetigkeit und Differenzierbarkeit in ihren Argumenten erfüllen. Zur Abkürzung werden folgende Schreibweisen vereinbart:

$$H_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t)) := \partial H(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))/\partial\mathbf{x}(t),$$
$$S_{\mathbf{x}}(T,\mathbf{x}^*(T)) := \partial S(T,\mathbf{x}^*(T))/\partial\mathbf{x}(T).$$

(Man beachte, daß man zum Beispiel $H(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$ nicht nach $\mathbf{x}(t)$ ableiten kann, sondern daß die Ableitung von $H(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$ nach $\mathbf{x}(t)$ an der Stelle $\mathbf{x}^*(t)$ gemeint ist.) Die notwendigen Bedingungen erfordern, daß die Hamiltonfunktion für alle $t \in [0,T]$ maximiert werden soll, was die Bezeichnung als **(Pontryagins) Maximumprinzip** erklärt.

Satz 2.15 (Pontryagins Maximumprinzip) *Die zulässige Kontrolltrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ mit der zugehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ löse das Kontrollproblem (2.65). Dann existieren eine Konstante $\lambda_0 \geqq 0$ und eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Kozustandstrajektorie $\boldsymbol{\lambda}(t) \in R^n$, so daß der Vektor $(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$ für kein $t \in [0,T]$ verschwindet und für alle $t \in [0,T]$, für die $\mathbf{u}^*(t)$ stetig ist, die Bedingungen*[29]

$$\mathbf{u}^*(t) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t)),$$
$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -H_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$$

erfüllt sind. Zum Endzeitpunkt gelten die Transversalitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(T) \quad \textit{frei},\ i = 1,\ldots,n_1,\\
&\lambda_i(T) \geqq \lambda_0 S_{x_i}(T,\mathbf{x}^*(T)) \quad \textit{und}\\
&\qquad\qquad [\lambda_i(T) - \lambda_0 S_{x_i}(T,\mathbf{x}^*(T))][x_i^*(T) - x_{iT}] = 0, \quad i = n_1+1,\ldots,n_2,\\
&\lambda_i(T) = \lambda_0 S_{x_i}(T,\mathbf{x}^*(T)),\ i = n_2+1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Beweis: Ein vollständiger Beweis würde den Rahmen sprengen. Später wird ein heuristischer Beweis mittels der dynamischen Programmierung angegeben. Vollständige Beweise für zum Teil erheblich allgemeinere Probleme findet man zum Beispiel im Original von Pontryagin et al. (1964), in Hestenes (1966) und in Berkovitz (1974). □

Bemerkung 2.11. Weil stückweise stetige Funktionen als zulässige Kontrolltrajektorien zugelassen sind, ist die optimale Lösung $\mathbf{u}^*(t)$ nicht eindeutig bestimmt, denn eine Änderung der Trajektorie an endlich vielen Stellen beeinflußt so weder ihre Zulässigkeit noch ihre Optimalität. Vereinbart man, daß der Wert der Kontrollvariablen bei allen Unstetigkeitsstellen gleich dem jeweiligen rechtsseitigen Grenzwert sein soll, wird diese Art der Mehrdeutigkeit ausgeschlossen. Die Maximierungsbedingung für die Hamiltonfunktion (2.64) des Satzes 2.15 gilt so für alle $t \in [0,T]$. ◊

[29] Die Schreibweise $\mathbf{u}^*(t) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$ bedeutet, daß die Funktion $H(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$ bei $\mathbf{u}^*(t)$ ihr Maximum annimmt.

Bemerkung 2.12. Ist die Hamiltonfunktion zweimal stetig differenzierbar in $\mathbf{x}$ und $\mathbf{u}$, streng konkav in $\mathbf{u}$ und ist Ω konvex, so ist $\mathbf{u}^*(t)$ durch die Maximierungsbedingung im Satz 2.15 zu jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmt und stetig für alle $t \in [0,T]$, vgl. Feichtinger und Hartl (1986, S. 84). Daher gelten die Optimumbedingungen des Satzes auch für $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ in diesem Fall für alle $t \in [0,T]$. Da $\mathbf{u}$ stetig ist, folgt daraus, daß $\mathbf{x}^*(t)$ und $\boldsymbol{\lambda}(t)$ stetig differenzierbar sind. Im Inneren von Ω ist deshalb auch $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}(t,\mathbf{x}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t))$ stetig differenzierbar. ♢

Bemerkung 2.13. Da alle Bedingungen des Satzes 2.15 unabhängig von der Multiplikation der Multiplikatoren $(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t))$ mit der gleichen positiven Konstanten sind, können diese Multiplikatoren auf $\lambda_0 = 1$ normiert werden, sofern nicht der **pathologische** Fall mit $\lambda_0 = 0$ auftritt. Im allgemeinen muß man dazu den Ansatz $\lambda_0 = 0$ in jedem speziellen Kontrollproblem zu einem Widerspruch führen. Für den Spezialfall ohne Endbedingungen kann allerdings generell gezeigt werden, daß $\lambda_0 \neq 0$ ist. In diesem Fall lauten die Transversalitätsbedingungen nämlich $\lambda_i(T) = \lambda_0 S_{x_i}(T,\mathbf{x}^*(T))$ für alle $i = 1,\dots,n$, das heißt mit $\lambda_0 = 0$ also $\boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}$. Dadurch wird demnach die Nichttrivialitätsbedingung $(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t)) \neq \mathbf{0}\,\forall t \in [0,T]$ verletzt. Folglich kann $\lambda_0 = 1$ in diesem Fall vorausgesetzt werden. Wenn dagegen Endbedingungen vorliegen, ist die vielfach übliche Vorgehensweise, den Multiplikator λ_0 von vornherein gleich eins zu setzen, unzulässig. Der Fall $\lambda_0 = 0$ wird als **pathologisch** bezeichnet, weil die Momentanzielfunktion U in bezug auf die notwendigen Bedingungen des Maximumprinzips dann gar keine Rolle spielt. ♢

Bemerkung 2.14. Wenn $\mathbf{u}^*(t)$ für alle $t \in [0,T]$ im Inneren von Ω liegt, impliziert die Bedingung der Maximierung von H die Bedingung

$$H_{\mathbf{u}}(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}(t)) = \mathbf{0}$$

für alle $t \in [0,T]$. Ist die Hamiltonfunktion darüber hinaus konkav in $\mathbf{u}$, so ist $H_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ auch hinreichend für ein Maximum, und die Maximierungsbedingung ist zu $H_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ äquivalent. ♢

Bemerkung 2.15. Die Differentialgleichungen für die Zustandsvariablen und die Kozustandsvariablen werden zusammen als **kanonisches Differentialgleichungssystem** bezeichnet. Mit $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*) = H_{\boldsymbol{\lambda}}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*,\lambda_0,\boldsymbol{\lambda})$ lautet das kanonische System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= H_{\boldsymbol{\lambda}}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*,\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}),\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= -H_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*,\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}$$

Die zweite Differentialgleichung wird auch als **Kozustandsgleichung** bezeichnet. Dabei ist $\mathbf{u}^*$ aufgrund der Maximumbedingung in Abhängigkeit von $\mathbf{x}$, λ_0, $\boldsymbol{\lambda}$ und t gegeben. Das kanonische System besteht daher aus $2n$ (nichtautonomen) Differentialgleichungen in $\mathbf{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ mit n Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0$ und n Endbedingungen für

$\lambda(T)$ und/oder $x(T)$, je nach Problemformulierung, so daß sich zumindest bei **gutartigen Problemen** prinzipiell eine eindeutige Lösung ergeben kann. Allerdings ist die analytische Bestimmung dieser Lösung natürlich nur in einfachen Ausnahmefällen möglich, zumal es sich um ein **Randwertproblem** handelt, das ungleich schwieriger als ein Anfangswertproblem zu handhaben ist. Die Lösung des kanonischen Differentialgleichungssystems ist im allgemeinen von t, t_0, $\mathbf{x}_0$, λ_0, T und den jeweiligen Endbedingungen abhängig. Das gilt dementsprechend auch für die optimale Kontrolle, die zum Beispiel für den Fall freier Endwerte und $\boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}$ geschrieben werden kann als $\mathbf{u}^*(t; t_0, T, \mathbf{x}_0)$. $\Diamond$

Einer der Vorteile des Maximumprinzips gegenüber der Variationsrechnung besteht in der problemlosen Berücksichtigung von Ungleichungsrestriktionen (die auch durch die Wahl des gegebenenfalls abgeschlossenen Kontrollbereichs Ω modelliert werden können). Das folgende Beispiel illustriert den wichtigen Spezialfall der **Bang-Bang-Lösung**, der zum Beispiel bei linearen Kontrollproblemen mit Beschränkungen für die Kontrollvariablen auftreten kann. Eine Bang-Bang-Lösung ist dadurch charakterisiert, daß sie von einer Grenze des zulässigen Intervalls zur anderen Grenze springt.

Beispiel 2.9. Zu maximieren ist das Zielfunktional $\int_0^T (x+u)\,dt + \frac{1}{2}x(T)$ mit der Zustandsgleichung $\dot{x} = T - u$ und der Anfangsbedingung $x(0) = 0$, wobei der Kontrollbereich $\Omega = [0,1]$ zu beachten ist. Da keine Endbedingung vorliegt, kann $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden, und die Hamiltonfunktion lautet:

$$H = x + u + \lambda(T - u).$$

Die Bildung der ersten Ableitung von H nach u liefert

$$H_u = 1 - \lambda(t) \gtreqless 0 \iff \lambda(t) \lesseqgtr 1.$$

Die zweite Ableitung ist $H_{uu} = 0$. Das bedeutet, daß zum Zeitpunkt t der größte (kleinste) mögliche Wert von $u(t)$ gewählt wird, wenn $\lambda(t) < 1$ ($\lambda(t) > 1$) ist. Daher wird H_u im linearen Fall auch als **Umschaltfunktion** bezeichnet. Wenn $\lambda(t) = 1$ ist, ist der optimale Wert von $u(t)$ unbestimmt.[30] Im Fall einer in u linearen Hamiltonfunktion ist es daher erforderlich, Beschränkungen für die Kontrollvariable vorzugeben, wenn man nicht unbeschränkte Lösungen erhalten will. Deshalb ist der Kontrollbereich $\Omega = [0,1]$ gewählt worden, was zur Folge hat, daß $u^*(t) = 1$, wenn $\lambda(t) < 1$, und $u^*(t) = 0$, wenn $\lambda(t) > 1$. Da die Kozustandsgleichung wie im letzten Beispiel $\dot{\lambda} = -H_x = -1$ lautet und die gleiche Transversalitätsbedingung gilt, ergibt sich wie zuvor $\lambda(t) = T + 1/2 - t > 0$ für $t \in [0, T]$. Damit gilt $\lambda(t) > 1$ für $t \in [0, T - \frac{1}{2})$ und $\lambda(t) < 1$ für $t \in (T - \frac{1}{2}, T]$, wobei $T > 1/2$ unterstellt wird. Damit ergibt sich – unter Beachtung von Bemerkung 2.11 – schließlich

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < T - \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für} \quad T - \frac{1}{2} \leqq t \leqq T. \end{cases}$$

[30] Wenn die Umschaltfunktion für ein Zeitintervall von positiver Länge verschwindet, so heißt das entsprechende Lösungsstück **singulärer Pfad**. Vgl. dazu ausführlich Feichtinger und Hartl (1986, Kap. 3).

Dieses Ergebnis kann in die Zustandsgleichung eingesetzt werden:

$$\dot{x} = \begin{cases} T & \text{für} \quad 0 \leqq t < T - \frac{1}{2} \\ T - 1 & \text{für} \quad T - \frac{1}{2} \leqq t \leqq T. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $x(t)$ und der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert die Integration dieser Differentialgleichung

$$x^*(t) = \begin{cases} tT & \text{für} \quad 0 \leqq t < T - \frac{1}{2} \\ T - \frac{1}{2} + (T-1)t & \text{für} \quad T - \frac{1}{2} \leqq t \leqq T. \end{cases}$$

◊

Als wichtige ökonomische Anwendung der Kontrolltheorie wird das zu Beginn diskutierte dynamische Entscheidungsproblem des Haushalts gelöst. Dieses Beispiel illustriert auch, daß es selbst bei einfachen Problemen mühsam sein kann, auf eine korrekte Anwendung des Maximumprinzips zu achten, etwa im Hinblick auf die Annahme $\lambda_0 = 1$.

Beispiel 2.10. Das Optimierungsproblem (2.61) wird der besseren Übersichtlichkeit halber hier noch einmal angegeben:

$$\begin{aligned} \max_{c \in \bar{C}[0,T]} \int_0^T & \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} \, dt, \quad \theta > 0, \\ & \text{u. d. N.} \\ & \dot{a} = w + ra - c, \quad a(0) = a_0, \; a(T) \geqq 0, \\ c(t) & \geqq 0. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Zur Vereinfachung wird unterstellt, daß der Reallohnsatz $w > 0$ und der Zinssatz $r > 0$ konstant sind. Damit das Problem eine sinnvolle Lösung hat, muß ferner angenommen werden, daß $a(T) > 0$ erreichbar ist, wenn nichts konsumiert wird. Andernfalls gibt es entweder gar keine Lösung, wenn $a(T) < 0$ wäre, auch wenn $c(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ ist, oder nur die triviale Lösung mit $a(T) = 0$ für $c(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Konkret muß also gefordert werden, daß die Lösung von $\dot{a} = w + ra$ einen Wert $a(T) > 0$ ergibt. Mit anderen Worten, a_0 darf nicht *zu negativ* sein. Da eine Endbedingung vorliegt, lautet die Hamiltonfunktion für das Problem (2.61)

$$H = \lambda_0 \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} + \lambda_1 (w + ra - c),$$

wobei der Konsum c die Kontrollvariable und das Reinvermögen a die Zustandsvariable ist. Für eine innere Lösung bezüglich c erhält man aus dem Satz 2.15 die folgenden Optimumbedingungen:

$$\begin{aligned} H_c = \lambda_0 c^{-\theta} e^{-\rho t} - \lambda_1 &= 0, \\ \dot{\lambda}_1 &= -r\lambda_1, \\ \lambda_1(T) \geqq 0, \quad \lambda_1(T) a(T) &= 0. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Um zu zeigen, daß $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden kann, wird angenommen, daß $\lambda_0 = 0$. Dann folgt aus der Bedingung $(\lambda_0, \lambda_1(t)) \neq (0,0)$, daß $\lambda_1(t) \neq 0$ für alle t, wegen der Stetigkeit von $\lambda_1(t)$ also entweder $\lambda_1(t) > 0$ für alle t oder $\lambda_1(t) < 0$ für alle t. Im ersten Fall erkennt man anhand der Hamiltonfunktion unmittelbar, daß nur $c(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ die optimale Lösung sein kann, denn für $\lambda_0 = 0 < \lambda_1$ ergibt sich das Maximum der Hamiltonfunktion bei $c = 0$. Annahmegemäß gilt aber $a(T) > 0$, wenn $c(t) = 0$ für alle t, so daß die Transversalitätsbedingung $\lambda_1(T) = 0$ impliziert und folglich $\lambda_0 = 0 < \lambda_1$ nicht möglich ist. Im zweiten Fall mit $\lambda_1(t) < 0 = \lambda_0$ würde die Maximierung der Hamiltonfunktion $c(t) = \infty$ für alle t implizieren. Setzt man dieses Ergebnis in die Zustandsgleichung $\dot{a} = w + ra - c$ ein und bildet das Integral von 0 bis T, so folgt

$$a(T) - a_0 = \int_0^T \dot{a}\, dt = \lim_{c\to\infty} \int_0^T (\underbrace{w + ra}_{<\infty} - c)\, dt = -\lim_{c\to\infty} Tc = -\infty,$$

also $a(T) < 0$, im Widerspruch zur Endbedingung $a(T) \geqq 0$. Für $\lambda_0 = 0$ gibt es also keine zulässige Lösung, die alle notwendigen Bedingungen erfüllt. Daher kann $\lambda_0 > 0$ auf eins normiert werden.

Als nächstes wird gezeigt, daß im Optimum $a(T) = 0$ gelten muß. Intuitiv liegt dieses Ergebnis nahe, weil ein positiver Wert von $a(T)$ impliziert, daß vorher mehr hätte konsumiert werden können. Formal läßt sich aus der Annahme $a(T) > 0$ ein Widerspruch herleiten. In diesem Fall ist aufgrund der Transversalitätsbedingung $\lambda_1(T) = 0$, so daß anhand der zweiten Gleichung in (2.66) zu erkennen ist, daß $\lambda_1(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ (man beachte, daß $\dot{\lambda}_1$ gemäß der Bemerkung 2.12 stetig ist, weil die Hamiltonfunktion für $\lambda_0 = 1$ streng konkav in c ist). Die Maximierung der Hamiltonfunktion impliziert dann $c(t) = \infty$ für alle $t \in [0, T]$, was im Zusammenhang mit der Zustandsgleichung $\dot{a} = w + ra - c$ wiederum $a(T) < 0$ impliziert, im Widerspruch zur Annahme $a(T) > 0$. Also muß $a(T) = 0$ sein. Das Argument zeigt auch, daß λ_1 für alle t positiv ist. Da H konkav in c ist, impliziert die erste Gleichung in (2.66), daß tatsächlich eine innere Lösung für c vorliegt, da das Maximum der Hamiltonfunktion im Inneren auftritt.

Differenziert man $c^{-\theta} e^{-\rho t} - \lambda_1 = 0$ nach t und ersetzt im Ergebnis $\dot{\lambda}_1$ durch $-r\lambda_1$ und schließlich λ_1 durch $c^{-\theta} e^{-\rho t}$, so ergibt sich

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \tag{2.67}$$

(Diese Vorgehensweise ist in vielen Modellen erfolgreich und daher nützlich.) Die Gleichung (2.67) wird häufig als **Keynes-Ramsey-Regel**[31] bezeichnet, die besagt, daß die Wachstumsrate des Konsums im Optimum positiv, gleich null oder negativ ist, wenn der Zinssatz größer, gleich oder kleiner der Diskontrate ρ des Haushalts ist.

Damit liegt ein System zweier linearer Differentialgleichungen $\dot{c} = (r - \rho)c/\theta$ und $\dot{a} = w + ra - c$ in c und a mit den beiden Randbedingungen $a(0) = a_0$ und $a(T) = 0$ vor. Die allgemeine Lösung der ersten Differentialgleichung mit einer unbestimmten Konstanten C_1 ist

$$c^*(t) = C_1 e^{[(r-\rho)t]/\theta}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die zweite Differentialgleichung ein, so liefert die Formel der Variation der Konstanten unter Verwendung der Anfangsbedingung $a(0) = a_0$ (nach einigen

[31] Ramsey (1928) schreibt eine verbale Erklärung Keynes zu.

mühsamen, aber einfachen Umformungen)

$$a^*(t) = e^{rt}\left[a_0 + \frac{w}{r} + C_1\frac{\theta}{(1-\theta)r-\rho} - \frac{w}{r}e^{-rt} - C_1\frac{\theta}{(1-\theta)r-\rho}e^{[(1-\theta)r-\rho]t/\theta}\right].$$

Die Konstante C_1 läßt sich durch Substitution von $a(T) = 0$ bestimmen:

$$0 = a_0 + \frac{w}{r}[1-e^{-rT}] + C_1\frac{\theta}{[(1-\theta)r-\rho]}[1-e^{[(1-\theta)r-\rho]T/\theta}],$$

also

$$C_1 = -\frac{(a_0 + \frac{w}{r}[1-e^{-rT}])}{[1-e^{[(1-\theta)r-\rho]T/\theta}]}\frac{[(1-\theta)r-\rho]}{\theta},$$

Setzt man diese Konstante in $c^*(t)$ und $a^*(t)$ ein, so erhält man schließlich den optimalen[32] Konsumpfad und den zugehörigen Pfad des Reinvermögens. Die sich ergebenden Formeln sind trotz des einfachen zugrundeliegenden Problems schon ziemlich unübersichtlich.

Einfachere explizite Lösungen ergeben sich für den Spezialfall mit $w = 0$ und $\theta = 1$. Die erste Annahme besagt, daß der Haushalt kein Arbeitseinkommen hat, die zweite impliziert eine Nutzenfunktion mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität von eins. Setzt man diese Werte ein, so lautet die explizite Lösung des Problems

$$c^*(t) = \frac{\rho a_0}{1-e^{-\rho T}}e^{(r-\rho)t},$$
$$a^*(t) = \frac{a_0 e^{rt}}{1-e^{-\rho T}}\left(e^{-\rho t} - e^{-\rho T}\right).$$

Man beachte, daß $\theta = 1$ direkt in die zuvor berechneten Lösungen eingesetzt werden kann, obwohl die Nutzenfunktion selbst für $\theta = 1$ nicht definiert ist. Das liegt daran, daß die Ableitung der Nutzenfunktion an der Stelle $\theta = 1$ gleich $1/c$ ist, also gleich der Ableitung von $U(c) = \ln(c)$. Diese Nutzenfunktion ergibt sich aus $U(c) = (c^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$, wenn man den Grenzwert für $\theta \to 1$ berechnet.

Diese Lösung ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn $a_0 > 0$ ist, da die Verzinsung des Reinvermögens die einzige Einkommensquelle des Haushalts ist. Für $a_0 = 0$ ist der Konsum in jedem Zeitpunkt gleich null; für $a_0 < 0$ ist er negativ (was nicht möglich ist). Dieses Problem stellt sich anders dar, wenn der Haushalt – wie anfangs unterstellt – auch ein Arbeitseinkommen hat. Dann gibt es eine untere negative Grenze für a_0, die nicht unterschritten werden darf, damit eine Lösung mit nichtnegativem Konsum existiert, was durch die Annahme $a(T) > 0$ für $c(t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$ sichergestellt worden ist. ◊

In der Ökonomik ist die Funktion $U(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ häufig in der Form

$$U(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = e^{-\rho t}U^c(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

gegeben, ähnlich wie im Beispiel 2.10. Die Zeitvariable t taucht so explizit nur über einen Diskontierungsfaktor $e^{-\rho t}$ in (2.62) auf. Wenn außerdem (2.63) autonom ist, ist es sinnvoll, die im Satz 2.15 verwendete Hamiltonfunktion (2.64) mit $e^{\rho t}$ zu multiplizieren, wobei ρ die nichtnegative Diskontrate ist. Die Funktion $\mathscr{H} := e^{\rho t}H$ heißt

[32] Streng genommen ergibt sich nur ein Pfad, der die notwendigen Bedingungen für ein Optimum erfüllt. Später werden hinreichende Bedingungen angegeben, die von diesem Pfad erfüllt werden.

Hamiltonfunktion in laufender Bewertung (current-value Hamiltonfunktion), in Unterscheidung zur im Satz 2.15 verwendeten Funktion H, die genauer als **Hamiltonfunktion mit Bezug zum Gegenwartswert (present-value Hamiltonfunktion)** bezeichnet wird. Werden die notwendigen Bedingungen gemäß dem Satz 2.15 unter den genannten Voraussetzungen mit Hilfe der current-value Hamiltonfunktion formuliert, so erhält man ein **autonomes** kanonisches System von Differentialgleichungen, in dem der Term $e^{-\rho t}$ nicht auftaucht. Konkret wird das Kontrollproblem (2.65) folgendermaßen neu formuliert:

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{u}\in\bar{C}[0,T]} \left\{ J(\mathbf{u}) = \int_0^T e^{-\rho t} U^c(\mathbf{x},\mathbf{u})\, dt + e^{-\rho T} S^c(\mathbf{x}(T)) \right\}\\
&\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^c(\mathbf{x},\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\\
&\mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m \quad \forall t \in [0,T]\\
&x_i(T) = x_{iT},\ i = 1,\dots,n_1\\
&x_i(T) \geqq x_{iT},\ i = n_1+1,\dots,n_2\\
&x_i(T)\ \text{frei},\ i = n_2+1,\dots,n
\end{aligned} \tag{2.65a}$$

Zu beachten ist, daß zwischen den Funktionen U, S und $\mathbf{f}$ aus (2.65) und U^c, S^c und $\mathbf{f}^c$ aus (2.65a) die Beziehungen $U = e^{-\rho t}U^c$, $S = e^{-\rho T}S^c$ und $\mathbf{f} = \mathbf{f}^c$ bestehen.

Multipliziert man jetzt die present-value Hamiltonfunktion

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 e^{-\rho t} U^c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{f}^c(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

mit $e^{\rho t}$, so erhält man mit $\boldsymbol{\lambda}^c(t) := e^{\rho t}\boldsymbol{\lambda}(t)$ die current-value Hamiltonfunktion

$$\mathscr{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}^c) = \lambda_0 U^c(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^c\cdot\mathbf{f}^c(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{2.68}$$

die nicht mehr explizit von t abhängt.

Die notwendigen Bedingungen des Satzes 2.15 lassen sich mit der current-value Hamiltonfunktion folgendermaßen neu fassen. Zunächst ändert die Multiplikation von H mit $e^{\rho t}$ nichts daran, daß $\mathbf{u}^*(t)$ die Funktion in jedem Zeitpunkt maximieren muß, so daß die Maximierungsbedingung im Satz 2.15 auch in bezug auf die current-value Formulierung gilt. Aus $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -H_{\mathbf{x}}$ erhält man mit $\boldsymbol{\lambda}(t) = e^{-\rho t}\boldsymbol{\lambda}^c(t)$ und folglich $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\rho e^{-\rho t}\boldsymbol{\lambda}^c(t) + e^{-\rho t}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^c(t)$ unter Verwendung von $-H_{\mathbf{x}} = -e^{-\rho t}\mathscr{H}_{\mathbf{x}}$ die neue Kozustandsgleichung

$$-\rho e^{-\rho t}\boldsymbol{\lambda}^c(t) + e^{-\rho t}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^c(t) = -e^{-\rho t}\mathscr{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}^c),$$

beziehungsweise nach Multiplikation mit $e^{\rho t}$:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^c(t) = \rho\boldsymbol{\lambda}^c(t) - \mathscr{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}^c),$$

Die adäquaten Transversalitätsbedingungen ergeben sich schließlich unmittelbar unter Verwendung von $\boldsymbol{\lambda}^c(T) := e^{\rho T}\boldsymbol{\lambda}(T)$ aus den im Satz 2.15 angegebenen Bedingungen. Zum Beispiel wird aus $\lambda_i(T) = \lambda_0 S_{x_i}(T,\mathbf{x}^*(T))$ durch Substitution von $\lambda_i(T) =$

$e^{-\rho T}\lambda_i^c(T)$ und $S_{x_i}(T,\mathbf{x}^*(T)) = e^{-\rho T}S^c_{x_i}(\mathbf{x}^*(T))$ die neue Transversalitätsbedingung $\lambda_i^c(T) = \lambda_0 S^c_{x_i}(\mathbf{x}^*(T))$.

Weil die current-value Formulierung in der Wirtschaftstheorie von zentraler Bedeutung ist, wird Satz 2.15 für das Problem (2.65a) in dieser Schreibweise noch einmal explizit als Satz angegeben.

Satz 2.16 (Maximumprinzip in laufender Bewertung) *Wenn die zulässige Kontrolltrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ mit der zugehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ das Kontrollproblem (2.65a) löst, dann existieren eine Konstante $\lambda_0 \geqq 0$ und eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Kozustandstrajektorie $\boldsymbol{\lambda}^c(t) \in R^n$, so daß der Vektor $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}^c(t))$ für kein $t \in [0,T]$ verschwindet und für alle $t \in [0,T]$, für die $\mathbf{u}^*(t)$ stetig ist, die Bedingungen*

$$\mathbf{u}^*(t) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} \mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}^c(t)),$$
$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^c(t) = \rho\boldsymbol{\lambda}^c(t) - \mathscr{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}^c(t))$$

erfüllt sind. Zum Endzeitpunkt gelten die Transversalitätsbedingungen

$$\begin{aligned}
&\lambda_i^c(T) \quad \textit{frei}, \ i = 1, \dots, n_1,\\
&\lambda_i^c(T) \geqq \lambda_0 S^c_{x_i}(\mathbf{x}^*(T)) \quad \textit{und}\\
&\qquad\qquad [\lambda_i^c(T) - \lambda_0 S^c_{x_i}(\mathbf{x}^*(T))][x_i^*(T) - x_{iT}] = 0, \quad i = n_1+1, \dots, n_2,\\
&\lambda_i^c(T) = \lambda_0 S^c_{x_i}(\mathbf{x}^*(T)), \ i = n_2+1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.16. Für den Fall ohne Restwertfunktion, $S \equiv 0$, lautet die Transversalitätsbedingung für $i = n_2+1, \dots, n$ in der **present-value** Formulierung $\lambda_i(T) = 0$. Mit $\lambda_i^c(t) = e^{\rho t}\lambda_i(t)$ ergibt sich daraus genau genommen in der **current-value** Formulierung die Transversalitätsbedingung

$$e^{-\rho T}\lambda_i^c(T) = 0,$$

eine Feststellung die hier wegen $e^{-\rho T} \neq 0$ zwar unwesentlich ist, aber bei Problemen mit unendlichem Zeithorizont Bedeutung erlangt. Wenn die Endbedingung $x_i(T) \geqq 0$ lautet für $i = n_1+1, \dots, n_2$ mit $S \equiv 0$, so ergibt sich die entsprechende Transversalitätsbedingung analog als

$$e^{-\rho T}\lambda_i^c(T) \geqq 0 \quad \text{und} \quad e^{-\rho T}\lambda_i^c(T)x_i^*(T) = 0.$$

◊

Zu beachten ist, daß t nun weder in der Zustandsgleichung noch in der Kozustandsgleichung auftaucht. Die current-value Formulierung liefert also, wie bereits angemerkt, ein **autonomes System** von Differentialgleichungen.

Beispiel 2.11. Nun soll kurz die Lösung des Optimierungsproblems (2.61) aus dem Beispiel 2.10 anhand der current-value Formulierung dargestellt werden. Da dieselben Annahmen wie zuvor getroffen werden, kann auch analog gezeigt werden, daß man $\lambda_0 = 1$ setzen und daher λ_1^c einfach mit λ^c bezeichnen kann. Damit lautet die current-value Hamiltonfunktion:

$$\mathscr{H} = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda^c (w + ra - c).$$

Aus dem Satz 2.16 ergeben sich die folgenden Optimumbedingungen für eine innere Lösung bezüglich c:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_c &= c^{-\theta} - \lambda^c = 0, \\ \dot{\lambda}^c &= \rho\lambda^c - r\lambda^c, \\ \lambda^c(T) &\geqq 0, \quad \lambda^c(T)a(T) = 0. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Differenziert man $c^{-\theta} - \lambda^c = 0$ nach t und ersetzt im Ergebnis $\dot{\lambda}^c$ durch $(\rho - r)\lambda^c$ und schließlich λ^c durch $c^{-\theta}$, so ergibt sich wieder die Keynes-Ramsey-Regel

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \tag{2.67}$$

Daß im Optimum $a(T) = 0$ gelten muß, kann analog zur present-value Formulierung in Beispiel 2.10 gezeigt werden. Damit liegen dieselben beiden Differentialgleichungen in c und a mit denselben Randbedingungen wie dort vor. Folglich stimmen auch die daraus zu ermittelnden Lösungen überein. ♢

Hinreichende Bedingungen Unter bestimmten weiteren Voraussetzungen (in erster Linie die Annahme der Konkavität) sind die notwendigen Bedingungen des Maximumprinzips auch hinreichend für die Optimalität. Die grundlegenden hinreichenden Bedingungen sind von Mangasarian (1966) angegeben worden. Da im folgenden stets $\lambda_0 = 1$ benötigt wird, wird λ_0 als Argument der Hamiltonfunktion vernachlässigt. Im Unterschied zu den notwendigen Bedingungen wird gefordert, daß U und $\mathbf{f}$ auch in $\mathbf{u}$ stetig differenzierbar sind. Diese **Annahme wird** im folgenden **durchgehend getroffen**.

Satz 2.17. *Sei $\mathbf{u}^*(t)$ mit zugehöriger Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ eine zulässige Lösung des Problems (2.65), die die notwendigen Bedingungen des Satzes 2.15 mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt. Wenn Ω konvex ist, die Hamiltonfunktion $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ für alle $t \in [0, T]$ konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und S konkav in $\mathbf{x}$ ist, dann ist $(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*)$ eine optimale Lösung. Wenn $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ streng konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ist, ist $(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*)$ die einzige optimale Lösung.*

Beweis: Die hinreichenden Bedingungen sind erheblich einfacher zu beweisen, als die notwendigen Bedingungen. Vgl. zum Beispiel Feichtinger und Hartl (1986), Seierstad und Sydsæter (1987) und Seierstad und Sydsæter (1977). □

Bemerkung 2.17. Zu beachten ist, daß die Hamiltonfunktion gemeinsam konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sein muß. Die Konkavität in $\mathbf{x}$ für gegebenes $\mathbf{u}$ und in $\mathbf{u}$ für gegebenes $\mathbf{x}$ reicht nicht aus. ♢

Bemerkung 2.18. Die Konkavität der Hamiltonfunktion folgt in zahlreichen ökonomischen Anwendungen aus den Annahmen über U und $\mathbf{f}$. Sind diese Funktionen konkav, so ist die Hamiltonfunktion als positiv gewichtete Summe konkaver Funktionen auch konkav, wenn $\boldsymbol{\lambda} \geqq \mathbf{0}$ für alle $t \in [0,T]$. Ist U konkav und $\mathbf{f}$ konvex, so ist H konkav, wenn $\boldsymbol{\lambda} \leqq \mathbf{0}$ für alle $t \in [0,T]$. ♢

Bemerkung 2.19. Der Satz 2.17 gilt analog für die Formulierung der Hamiltonfunktion in laufender Bewertung. Konkret: Wenn $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ die Bedingungen des Satzes 2.16 mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt, die Hamiltonfunktion in laufender Bewertung $\mathscr{H}$ konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und S konkav in $\mathbf{x}$ ist, dann ist $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ eine optimale Lösung von (2.65a). Die Lösung ist eindeutig, wenn $\mathscr{H}$ streng konkav ist. ♢

Beispiel 2.12. Die Hamiltonfunktion im Beispiel 2.10 (beziehungsweise 2.11) ist konkav, weil die Nutzenfunktion konkav und die Zustandsgleichung linear ist. Da die notwendigen Bedingungen für $\lambda_0 = 1$ erfüllt werden und $\Omega = [0, \infty)$ konvex ist, kann der Satz 2.17 angewendet werden, wobei die optimale Lösung eindeutig ist. ♢

Bemerkung 2.20. Der Beweis des Satzes 2.17 läuft für die present-value Formulierung auf die Abschätzung

$$\Delta = J(\mathbf{u}^*) - J(\mathbf{u}) \geqq (S^*_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}(T)) \cdot (\mathbf{x}^*(T) - \mathbf{x}(T))$$

für alle zulässigen Kontrolltrajektorien $\mathbf{u}(t)$ mit zugehöriger Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ hinaus. Für den Fall ohne Restwertfunktion ($S \equiv 0$), der insbesondere für die später diskutierten Probleme mit unendlichem Zeithorizont von Bedeutung ist, ergibt sich daraus

$$\Delta \geqq \boldsymbol{\lambda}(T)) \cdot (\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}^*(T)).$$

Wie in der Bemerkung 2.16 erhält man analog für die current-value Formulierung die Abschätzung

$$\Delta \geqq e^{-\rho T} \boldsymbol{\lambda}^c(T) \cdot (\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}^*(T)).$$

Unter den getroffenen Annahmen (insbesondere Konkavität) folgt also aus

$$e^{-\rho T} \boldsymbol{\lambda}^c(T) \cdot (\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}^*(T)) \geqq 0, \tag{2.70}$$

daß $\Delta \geqq 0$ und damit daß $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ optimal ist. Man kann leicht überprüfen, daß die Endbedingungen und die notwendigen Transversalitätsbedingungen diese Ungleichung für einen endlichen Planungszeitraum sicherstellen. Bei Problemen mit unendlichem Planungszeitraum wird auf die Beziehung (2.70) zurückzukommen sein. ♢

Eine Verallgemeinerung der von Mangasarian (1966) angegebenen hinreichenden Bedingungen stellen die hinreichenden Bedingungen von Arrow (1968) dar,[33]

[33] Arrow (1968, S. 92) bezeichnet seine hinreichenden Bedingungen als *minor variation of a theorem of Mangasarian* und liefert keinen Beweis. Vgl. dazu und zu weiteren Literaturhinweisen Seierstad und Sydsæter (1977).

die auf der Konkavität der **maximierten Hamiltonfunktion** in $\mathbf{x}$ beruhen. Die maximierte Hamiltonfunktion für das Problem (2.65) ist definiert durch

$$H^0(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \max_{\mathbf{u} \in \Omega} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}),$$

wobei $\lambda_0 = 1$ nach wie vor unterstellt und daher nicht als Argument aufgeführt wird. Man beachte den Unterschied zwischen der maximierten Hamiltonfunktion H^0 und der entlang der optimalen Trajektorien ausgewerteten Funktion H^*. Während letztere durch Einsetzen von $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{u}^*(t)$ in H entsteht und daher eine Funktion von t ist, ausgewertet entlang des optimalen Pfades, wird in H^0 lediglich $\mathbf{u}$ durch die jeweils maximierende Wahl von $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ersetzt. Die Arrow-Bedingungen besagen im wesentlichen, daß unter den sonstigen Voraussetzungen des Satzes 2.17 die Konkavität der maximierten Hamiltonfunktion in $\mathbf{x}$ anstelle der Konkavität von H in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ für die Optimalität ausreicht, wobei im Falle der strengen Konkavität allerdings nur die Eindeutigkeit von $\mathbf{x}^*$ gewährleistet ist. Die Konkavität von H in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ impliziert dabei diejenige von H^0 in $\mathbf{x}$, aber nicht umgekehrt.

2.3.2 Dynamische Programmierung

Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung Im folgenden wird der Ansatz der **dynamischen Programmierung** als Alternative zur Lösung von dynamischen Optimierungsproblemen kurz dargestellt, wobei wieder das Standardproblem (2.65) betrachtet wird.[34] Grundlegend für das Verständnis der dynamischen Programmierung ist das **Bellmansche Optimalitätsprinzip** (Bellman, 1957), das besagt, daß eine optimale Lösung die Eigenschaft hat, daß, wie der aus den vorhergehenden Entscheidungen resultierende Zustand $\mathbf{x}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t auch sein mag, alle folgenden Entscheidungen, die von diesem Zustand zu diesem Zeitpunkt als Startbedingung ausgehend getroffen werden, ihrerseits optimal in bezug auf das verbleibende Teilproblem sein müssen. Da sich das Prinzip auf alle Zeitpunkte t bezieht, ist es offensichtlich **hinreichend** für die Optimalität einer Lösung.

Die **Wertfunktion** $V(t, \mathbf{x}(t))$ gibt den optimalen Wert des Zielfunktionals ausgehend vom Zeitpunkt $t \in [0, T]$ an, also den maximalen Wert für das zum Zeitpunkt t verbleibende Zeitintervall $[t, T]$:[35]

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \max_{\mathbf{u}(\tau) \in \Omega, \tau \geqq t} \left\{ \int_t^T U(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))\, d\tau + S(T, \mathbf{x}(T)) \right\}, \tag{2.71}$$

wobei alle Nebenbedingungen des Problems (2.65) zu beachten sind. (Im Falle der Diskontierung wird der verbleibende Wert jeweils auf den Zeitpunkt $t = 0$ bezogen.)

[34] Die Beweise in diesem Abschnitt folgen Berkovitz (1974) und Başar und Olsder (1995).

[35] Hier wird unterstellt, daß eine optimale Lösung existiert. Allgemeiner kann man die Wertfunktion durch den Austausch von $\max_{\mathbf{u}(\tau) \in \Omega, \tau \geqq t}$ durch $\sup_{\mathbf{u}(\tau) \in \Omega, \tau \geqq t}$ definieren.

Man erkennt anhand dieser Formulierung unmittelbar, daß das Bellmansche Optimalitätsprinzip auch **notwendig** für ein Optimum des Problems (2.65) ist, denn wenn zum Beispiel für das verbleibende Zeitintervall $[t, T]$ eine Kontrolle gewählt wird, die den Ausdruck auf der rechten Seite nicht maximiert, wird auch das Zielfunktional für den gesamten Zeitraum nicht maximiert.

Satz 2.18 (Notwendige Bedingungen) *Wenn die Wertfunktion $V(t,\mathbf{x})$ für das Problem (2.65) auf $[0, T] \times R^n$ existiert und stetig differenzierbar ist, dann erfüllt eine optimale Lösung $\mathbf{u}^*$ für alle $t \in [0, T]$ die Bedingung*

$$\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u}, V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})),$$

und $V(t,\mathbf{x})$ erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$-V_t(t,\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u}, V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})), \tag{2.72}$$
$$V(T,\mathbf{x}(T)) = S(T,\mathbf{x}(T)).$$

Beweis: Gemäß dem Bellmanschen Optimalitätsprinzip ist $V(t+\Delta t,\mathbf{x}(t+\Delta t))$ die Wertfunktion für den Teil der Lösung, der zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ mit dem Zustand $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ beginnt. Der optimale Wert des Zielfunktionals läßt sich daher als Summe

$$V(t,\mathbf{x}(t)) = \max_{\substack{\mathbf{u}(\tau)\in\Omega,\\ t\leqq\tau\leqq t+\Delta t}} \left\{\int_t^{t+\Delta t} U(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\, d\tau + V(t+\Delta t,\mathbf{x}(t+\Delta t))\right\}$$

darstellen. Da V annahmegemäß stetig differenzierbar ist, kann

$$\int_t^{t+\Delta t} U(\tau,\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\, d\tau$$

für sehr kleines Δt durch $U(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\Delta t$ approximiert werden:

$$V(t,\mathbf{x}(t)) = \max_{\mathbf{u}(t)\in\Omega} \{U(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\Delta t + V(t+\Delta t,\mathbf{x}(t+\Delta t))\} + o(\Delta t),$$

wobei die Optimierung über $\mathbf{u}(t)$ zum Zeitpunkt t erfolgt. Mit $o(\Delta t)$ werden die Terme höherer Ordnung bezeichnet, die für $\Delta t \to 0$ schneller gegen null konvergieren, als Δt (Landaus o), das heißt $\lim_{\Delta t\to 0} o(\Delta t)/(\Delta t) = 0$. Nach dem Satz von Taylor gilt

$$V(t+\Delta t,\mathbf{x}(t+\Delta t)) = V(t,\mathbf{x}(t)) + V_t(t,\mathbf{x}(t))\Delta t + V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}\Delta t + o(\Delta t).$$

Setzt man dieses Ergebnis in die vorhergehende Gleichung ein, dividiert durch Δt und beachtet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$, so folgt für $\Delta t \to 0$ die partielle Differentialgleichung

$$0 = \max_{\mathbf{u}(t)\in\Omega} \{U(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)) + V_t(t,\mathbf{x}(t)) + V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}(t))\cdot\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))\}.$$

Definiert man die Hamiltonfunktion H gemäß

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u}, V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})) = U(t,\mathbf{x},\mathbf{u}) + V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}),$$

so läßt sich, weil $V_t(t,\mathbf{x}(t))$ nicht von $\mathbf{u}(t)$ abhängt, die partielle Differentialgleichung in der Form

$$-V_t(t,\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))$$

schreiben. Die Randbedingung $V(T,\mathbf{x}(T)) = S(T,\mathbf{x}(T))$ folgt unmittelbar aus (2.71). □

Für den Satz 2.18 gilt die Bemerkung 2.11 analog. Die **partielle Differentialgleichung** (2.72) heißt **Hamilton-Jacobi-Bellman-(HJB)-Gleichung**. Der folgende Satz 2.19 gibt eine hinreichende Bedingung an. Wenn die Wertfunktion bekannt ist und eine zulässige Lösung, die allen Randbedingungen genügt, die HJB-Gleichung erfüllt, dann ist diese Lösung optimal.

Satz 2.19 (Hinreichende Bedingungen) *Wenn es auf $[0,T]\times R^n$ eine reelle, stetig differenzierbare Funktion $V(t,\mathbf{x})$ gibt, die die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung*

$$-V_t(t,\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))\,, \tag{2.73}$$

$$V(T,\mathbf{x}(T)) = S(T,\mathbf{x}(T)) \tag{2.74}$$

erfüllt, und wenn die durch

$$\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})) \tag{2.75}$$

bestimmte Kontrolltrajektorie zulässig ist, dann ist diese Kontrolltrajektorie mit der zugehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*$ eine optimale Lösung von (2.65).

Beweis: Zunächst ist zu beachten, daß (2.73) auch wie folgt geschrieben werden kann, da die linke Seite unabhängig von $\mathbf{u}$ ist:

$$\max_{\mathbf{u}\in\Omega}[V_t(t,\mathbf{x}) + H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))] = 0.$$

Seien $\mathbf{x}^*(t)$ und $\bar{\mathbf{x}}(t)$ die jeweils eindeutigen Zustandstrajektorien, die durch die zulässigen Lösungen $\mathbf{u}^*$ beziehungsweise $\bar{\mathbf{u}}$ auf dem Intervall $[0,T]$ erzeugt werden. Dann folgt aus (2.75) unmittelbar

$$0 = V_t(t,\mathbf{x}^*) + H\big(t,\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*)\big) \geqq V_t(t,\bar{\mathbf{x}}) + H(t,\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}},V_{\mathbf{x}}(t,\bar{\mathbf{x}}))\,.$$

Mit der Definition der Hamiltonfunktion $H = U + V_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}$ und unter Berücksichtigung von

$$\frac{dV(t,\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$$

läßt sich diese Ungleichung schreiben als

$$0 = U(t,\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*) + \frac{dV(t,\mathbf{x}^*)}{dt} \geqq U(t,\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}) + \frac{dV(t,\bar{\mathbf{x}})}{dt}.$$

Integriert man diese Ungleichung über das Intervall $[0,T]$, so folgt

$$\begin{aligned} V(0,\mathbf{x}_0) &= \int_0^T U(t,\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}^*(t)))\,dt + S(T,\mathbf{x}^*(T)) \\ &\geqq \int_0^T U(t,\bar{\mathbf{x}}(t),\bar{\mathbf{u}}(t,\bar{\mathbf{x}}(t)))\,dt + S(T,\bar{\mathbf{x}}(T)) \end{aligned}$$

wobei $\int_0^T dV/dt = V(T,\mathbf{x}(T)) - V(0,\mathbf{x}_0)$ und $V(T,\mathbf{x}(T)) = S(T,\mathbf{x}(T))$ nach (2.74) verwendet worden sind und $V(0,\mathbf{x}_0)$ auf allen Seiten der Ungleichungskette addiert worden ist. Der Wert des Zielfunktionals wird also durch die Kontrolltrajektorie $\mathbf{u}^*$ maximiert. □

Bemerkung 2.21. Die durch $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}^*)$ gegebene optimale Lösung hängt von t und $\mathbf{x}^*(t)$ ab. Dagegen ist die mittels des Pontryaginschen Maximumprinzips abgeleitete optimale Kontrolle $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}_0)$ im allgemeinen eine Funktion der Zeit t und des Anfangszustands $\mathbf{x}_0$. Die Funktion $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}^*)$ wird als Lösung in **Rückkopplung (feedback)** bezeichnet, die Lösung $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}_0)$ als Lösung in **offener Schleife (open loop)**. Im vorliegenden Zusammenhang deterministischer optimaler Kontrollprobleme ist diese Unterscheidung nicht von großer Bedeutung, weil man $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t,\mathbf{x}_0)$ in die Rückkopplungslösung einsetzen kann und so eine äquivalente Lösung in offener Schleife erhält. Eine optimale Lösung in Rückkopplung kann daher immer in eine optimale Lösung in offener Schleife umgeformt werden und umgekehrt. Die Unterscheidung erhält Bedeutung zum Beispiel im Zusammenhang mit Differentialspielen oder mit stochastischen Kontrollproblemen, weil diese Äquivalenz der Lösungen dann nicht mehr gilt. Natürlich setzt eine Rückkopplungslösung voraus, daß auch eine entsprechende **Informationsstruktur** vorliegt, die die Kenntnis des Zustands in jedem Zeitpunkt beinhaltet, was bei deterministischen Problemen durch die Kenntnis der Zustandsgleichung impliziert ist. Später wird anhand eines Beispiels gezeigt, daß eine Rückkopplungslösung auch dann vorzuziehen ist, wenn ungenaue Daten verwendet werden. ◊

Heuristischer Beweis des Maximumprinzips Die notwendigen Bedingungen der dynamischen Programmierung in stetiger Zeit gemäß Satz 2.18 implizieren unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen die Bedingungen des Maximumprinzips nach Satz 2.15.[36] Die folgenden zusätzlichen Annahmen werden benötigt. (1) Die Wertfunktion $V(t,\mathbf{x}(t))$ sei zweimal stetig differenzierbar in ihren Argumenten. (2) Die Menge aller $\mathbf{x}(t) \in R^n$, von denen aus als Startwert zum Zeitpunkt t eine optimale Lösung existiert, die die eventuell vorgegebenen Endwerte erreicht, sei offen. Diese Menge wird X_t genannt.

Später werden zur Ableitung der Transversalitätsbedingungen noch weitere Annahmen getroffen. Die Annahmen (1) und (2) reichen für den Hauptteil des Beweises aus. Definiert man

$$\boldsymbol{\lambda}(t) := V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}(t)), \tag{2.76}$$

so folgt die Bedingung der Maximierung der Hamiltonfunktion aus dem Satz 2.15 unmittelbar aus der Bedingung $\mathbf{u}^*(t,\mathbf{x}) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))$ im Satz 2.18. Die Ableitung von $\boldsymbol{\lambda}$ nach t ist

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) := V_{\mathbf{x}t}(t,\mathbf{x}(t)) + V_{\mathbf{xx}}(t,\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}, \tag{2.77}$$

[36] Vgl. zum folgenden zum Beispiel Arrow und Kurz (1970, Kap. 2), Berkovitz (1974, Kap. 5) und Feichtinger und Hartl (1986, Kap. 2).

wobei $V_{\mathbf{xx}}(t,\mathbf{x}(t))$ die Hesse-Matrix der Wertfunktion bezüglich $\mathbf{x}$ an der Stelle $(t,\mathbf{x}(t))$ ist. Um daraus die Kozustandsgleichung des Maximumprinzips abzuleiten, wird beachtet, daß aus der HJB-Gleichung

$$-V_t(t,\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}))$$

folgt, daß die Funktion

$$F(\mathbf{x}) := H\big(t,\mathbf{x},\mathbf{u}^*,V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x})\big) + V_t(t,\mathbf{x})$$

für jedes $t \in [0,T]$ ihr Maximum, null, an der Stelle $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ erreicht. Für jede andere zulässige Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ ist $\mathbf{u}^*$ im allgemeinen keine dazu passende optimale Kontrolle, so daß der Wert der Funktion F hier höchstens gleich null ist. Folglich erreicht F an der Stelle $\mathbf{x}^*$ ein Maximum. Wegen $\mathbf{x}(t) \in X_t$ für alle t folgt daraus, weil X_t annahmegemäß offen ist, daß $F_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ (für festes $\mathbf{u}^*$), also

$$H_{\mathbf{x}}\big(t,\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*)\big) + \Big(\big(H_{\boldsymbol{\lambda}}(t,\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*))\big)' V_{\mathbf{xx}}\Big)' + V_{t\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Beachtet man nun, daß $H_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}}$ wegen der Definition der Hamiltonfunktion und $V_{t\mathbf{x}} = V_{\mathbf{x}t}$ sowie $V_{\mathbf{xx}} = (V_{\mathbf{xx}})'$ aufgrund der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von V und damit $(\dot{\mathbf{x}}' V_{\mathbf{xx}})' = V_{\mathbf{xx}}\dot{\mathbf{x}}$, so ergibt sich

$$V_{\mathbf{x}t}(t,\mathbf{x}^*) + V_{\mathbf{xx}}(t,\mathbf{x}^*)\dot{\mathbf{x}} = -H_{\mathbf{x}}\big(t,\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,V_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*)\big).$$

Dieses Ergebnis kann in (2.77) eingesetzt werden, um die Kozustandsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\lambda})$$

zu erhalten.

Zu beachten ist, daß in der hier verwendeten Hamiltonfunktion λ_0 nicht auftaucht, weil $\lambda_0 = 1$ gilt. Für die Bedingungen des Satzes 2.15 gilt dagegen $\lambda_0 = 1$ im allgemeinen nur für den Fall ohne Endbedingungen. Daß für den vorliegenden Fall die Bedingungen des Maximumprinzips mit $\lambda_0 = 1$ gelten, ohne daß explizit auf den Fall ohne Endbedingungen verwiesen worden ist, liegt an den zusätzlichen Annahmen (1) und (2), die für die Gültigkeit des Satzes 2.15 nicht erforderlich sind.[37]

Schließlich sind noch die Transversalitätsbedingungen des Satzes 2.15 abzuleiten. Auch dafür wird ein heuristischer Ansatz verwendet, der Modifikationen der früher getroffenen Annahmen (1) (hier: V ist stetig differenzierbar) und (2) (hier: die Menge der Endwerte, für die eine optimale Lösung existiert, ist offen) und darüber hinaus eine innere Lösung bezüglich der optimalen Kontrolltrajektorie $\mathbf{u}^*(t)$ voraussetzt.[38] Mit Bezug zum Satz 2.15 sind drei Fälle zu unterscheiden. (1) Für vorgegebene Endwerte der Zustandsvariablen, also für $i = 1,\ldots,n_1$, sind keine Transversalitätsbedingungen erforderlich. (2) Im Falle vorgegebener Untergrenzen, also für $i = n_1+1,\ldots,n_2$,

[37] Vgl. hierzu auch Seierstad und Sydsæter (1987, S. 172).

[38] Ähnlich gehen Léonard und Long (1992, Kap. 4 und 7) vor.

sind Transversalitätsbedingungen mit komplementärem Schlupf zu beweisen. Das ist einfacher, nachdem der dritte Fall abgehandelt worden ist. (3) Die Darstellung beginnt daher mit dem Fall ohne vorgegebene Endwerte für die Zustandsvariablen, also mit $i = n_2 + 1, \dots, n$.

Das Optimierungsproblem (2.65) wird nun zweistufig gelöst, indem zunächst alle Endwerte willkürlich durch $\mathbf{x}(T) = \tilde{\mathbf{x}}_T$ vorgegeben werden. Zu beachten ist dabei, daß der optimale Wert natürlich von den vorgegebenen Endwerten und der Länge des Planungszeitraumes abhängt. Die Wertfunktion kann im Falle gegebener Endwerte zum Endzeitpunkt T daher auch genauer geschrieben werden als $V(t, \mathbf{x}(t), T, \tilde{\mathbf{x}}_T)$. Dann gibt $V(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T)$ den maximalen Wert des Problems für einen willkürlich vorgegebenen Wert $\tilde{\mathbf{x}}_T$ an. Für die Variablen $i = n_2 + 1, \dots, n$, für die ursprünglich kein Endzustand vorgegeben gewesen ist, kann diese Funktion jetzt noch bezüglich $\tilde{x}_{iT}$ maximiert werden, um die **optimalen Endwerte** zu erhalten. Da annahmegemäß die Menge der möglichen Endwerte, für die eine optimale Lösung existiert, offen ist, impliziert das die notwendige Bedingung für ein Maximum

$$V_{\tilde{x}_{iT}}(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = 0, \quad \text{für} \quad i = n_2 + 1, \dots, n. \tag{2.78}$$

Um diese Ableitung zu berechnen, ist zu beachten, daß die Wertfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ wegen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ unter Verwendung einer **beliebigen Zeitfunktion $\boldsymbol{\mu}(t)$** geschrieben werden kann als

$$V(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = \int_0^T \{U(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + \boldsymbol{\mu} \cdot [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) - \dot{\mathbf{x}}]\}\, dt + S(T, \tilde{\mathbf{x}}_T).$$

Die Regel der partiellen Integration liefert $\int_0^T \boldsymbol{\mu} \cdot \dot{\mathbf{x}}\, dt = [\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}]_0^T - \int_0^T \dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{x}\, dt$. Substituiert man $-\int_0^T \boldsymbol{\mu} \cdot \dot{\mathbf{x}}\, dt$ entsprechend und verwendet $H = U + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{f}$, so ergibt sich mit $[\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}]_0^T = \boldsymbol{\mu}(T) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_T - \boldsymbol{\mu}(0) \cdot \mathbf{x}_0$ die Wertfunktion

$$V(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = \int_0^T \{H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\mu}(t)) + \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \cdot \mathbf{x}^*(t)\}\, dt - \boldsymbol{\mu}(T) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_T + \boldsymbol{\mu}(0) \cdot \mathbf{x}_0 + S(T, \tilde{\mathbf{x}}_T).$$

Die optimalen Funktionen $\mathbf{x}^*(t)$ und $\mathbf{u}^*$ hängen jeweils von den gegebenen Anfangs- und Endwerten der Zustandstrajektorie ab. Diese Größen sind demnach Parameter im Integranden auf der rechten Seite. Weil t und die beliebige Funktion $\boldsymbol{\mu}(t)$ von diesen Parametern unabhängig sind, kann die Ableitung nach $\tilde{x}_{iT}$, sofern sie existiert, folgendermaßen entsprechend der Regel für die Ableitung eines Integrals nach einem Parameter berechnet werden:

$$V_{\tilde{x}_{iT}}(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = \int_0^T \left\{ H_{\mathbf{x}^*} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^*(t)}{\partial \tilde{x}_{iT}} + H_{\mathbf{u}^*} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*(t)}{\partial \tilde{x}_{iT}} + \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^*(t)}{\partial \tilde{x}_{iT}} \right\} dt - \mu_i(T) + S_{\tilde{x}_{iT}}(T, \tilde{\mathbf{x}}_T).$$

Unterstellt man eine innere Lösung für $\mathbf{u}^*(t)$, so folgt im Optimum $H_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ für alle t. Für die **optimale Kozustandstrajektorie** $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t)$ gilt $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -H_{\mathbf{x}^*}$. Mit diesen Ergebnissen folgt unmittelbar, daß das Integral auf der rechten Seite gleich null ist. Folglich gilt

$$V_{\tilde{x}_{iT}}(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = -\lambda_i(T) + S_{\tilde{x}_{iT}}(T, \tilde{\mathbf{x}}_T).$$

(Hinweis: Analog kann man anhand der Darstellung auch leicht erkennen, daß unter den getroffenen Annahmen $V_{\mathbf{x}_0}(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = \boldsymbol{\lambda}(0)$ ist.)

Die Optimumbedingung (2.78) impliziert damit die Transversalitätsbedingung für den Fall (3) ohne vorgegebene Endwerte, wobei jetzt $\tilde{\mathbf{x}}_T$ als Argument von S wieder durch den optimalen Wert $\mathbf{x}^*(T)$ ersetzt wird:

$$\lambda_i(T) = S_{x_i}(T, \mathbf{x}^*(T)), \quad \text{für} \quad i = n_2 + 1, \ldots, n.$$

Für den Fall (2) mit vorgegebenen Untergrenzen wird jetzt ein i aus $i = n_1 + 1, \ldots, n_2$ herausgegriffen. Wenn die Endbedingung $x_i(T) \geqq x_{iT}$ lautet, kann die Optimierung dargestellt werden, indem im ersten Schritt wieder angenommen wird, daß der Endwert willkürlich auf $\tilde{x}_{iT}$ festgelegt wird. Im zweiten Schritt wird nun wieder $\tilde{x}_{iT}$ so bestimmt, daß V unter der Nebenbedingung $\tilde{x}_{iT} \geqq x_{iT}$ maximal wird. Das impliziert

$$V_{\tilde{x}_{iT}}(0, \mathbf{x}_0, T, \tilde{\mathbf{x}}_T) = -\lambda_i(T) + S_{\tilde{x}_{iT}}(T, \tilde{\mathbf{x}}_T) \leqq 0,$$

mit Gleichheit, wenn im Optimum $\tilde{x}_{iT} > x_{iT}$ gilt. Analog muß $\tilde{x}_{iT} \geqq x_{iT}$ mit Gleichheit gelten, wenn $-\lambda_i(T) + S_{\tilde{x}_{iT}}(T, \tilde{\mathbf{x}}_T) < 0$ ist. Ersetzt man wieder $\tilde{\mathbf{x}}_T$ durch $\mathbf{x}^*(T)$ als Argument von S, so folgt also die Transversalitätsbedingung

$$\lambda_i(T) \geqq S_{x_i}(T, \mathbf{x}^*(T)) \quad \text{und}$$
$$[\lambda_i(T) - S_{x_i}(T, \mathbf{x}^*(T))][x_i^*(T) - x_{iT}] = 0, \quad i = n_1 + 1, \ldots, n_2.$$

Damit ist das Maximumprinzip gemäß Satz 2.15 unter den hier getroffenen zusätzlichen Voraussetzungen, insbesondere der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit der Wertfunktion, bewiesen. Zu beachten ist allerdings, daß diese Voraussetzungen in vielen Fällen nicht erfüllt sind, weshalb der gegebene Beweis heuristisch ist.[39] Das besondere Problem hierbei ist, daß die Gültigkeit der Annahmen im Einzelfall nicht anhand der Problemstellung beurteilt werden kann. Denn die Annahme $V \in C^2$ betrifft eine Funktion, die zunächst gar nicht bekannt ist. Es ist also gerade eine der Stärken des Pontryaginschen Ansatzes, daß er auch ohne diese Voraussetzung gültig ist.

---

[39] Eine eingehendere Analyse der Beziehungen zwischen der dynamischen Programmierung und dem Maximumprinzip liefern Clarke und Vinter (1987). Bedingungen, die die Differenzierbarkeit der Wertfunktion garantieren, sind von Benveniste und Scheinkman (1979) für den Fall der Variationsrechnung und von Seierstad (1982) für die Theorie der optimalen Kontrolle abgeleitet worden. Ein Beispiel, das zeigt, daß selbst im Falle harmlos aussehender Probleme die Wertfunktion unter Umständen nicht überall differenzierbar ist, geben Seierstad und Sydsæter (1987, S. 212).

Die Vorgehensweise in diesem Abschnitt führt unmittelbar auf die Interpretation der Kozustandsvariablen als **Schattenpreise**. Der Ansatzpunkt hierfür ist Gleichung (2.76). Wenn V differenzierbar ist, ist $\lambda_i(t)$ gleich der Ableitung der Wertfunktion nach der Zustandsvariablen $x_i(t)$ zum Zeitpunkt t. Wenn $x_i(t)$ zum Beispiel einen Kapitalstock repräsentiert, gibt $\lambda_i(t)$ also an, um wieviel sich der maximale Wert des Zielfunktionals für den verbleibenden Zeitraum erhöht, wenn der Kapitalstock zum Zeitpunkt t marginal erhöht wird. Eine solche Größe wird in der Wirtschaftstheorie als **Schattenpreis** bezeichnet. Denn wenn das Zielfunktional zum Beispiel in Geldeinheiten gemessen wird, gibt $\lambda_i(t)$ an, welchen Geldbetrag ein rationaler Agent maximal für eine von außen hinzugeführte Kapitaleinheit zu zahlen bereit ist, weil der (verbleibende) Wert seines Zielfunktionals um eben diesen Betrag steigt. (Die Dimension von $\lambda_i(t)$ ist in diesem Fall Geldeinheiten pro Kapitaleinheit.)

Bemerkung 2.22. Die gesamte Argumentation setzt die Differenzierbarkeit der Wertfunktion voraus. Wenn V nicht differenzierbar ist, so kann unter gewissen Voraussetzungen jedoch gezeigt werden, daß fast immer $\boldsymbol{\lambda}(t) \in \partial_{\mathbf{x}} V(t, \mathbf{x})$ ist, wobei $\partial_{\mathbf{x}} V(t, \mathbf{x})$ der **verallgemeinerte Gradient** von $V(t, \mathbf{x}(t))$ bezüglich $\mathbf{x}$ ist, vgl. Clarke und Vinter (1987). Die Interpretation als Schattenpreis ist daher mit gewissen Einschränkungen allgemein möglich, wobei der Schattenpreis bei fehlender Differenzierbarkeit nicht eindeutig ist. $\diamondsuit$

2.3.3 Unendlicher Planungshorizont

Notwendige und hinreichende Bedingungen In der Wirtschaftstheorie wird häufig unterstellt, daß der Planungszeitraum $T = \infty$ ist. Diese Annahme ist offensichtlich unrealistisch; so sind sich die Astronomen darüber einig, daß die Erde nur für einen endlichen Zeitraum existieren wird. Trotzdem gibt es manchmal gute Gründe, einen unendlichen Planungszeitraum zu unterstellen. In der Theorie des optimalen Wachstums stellt sich zum Beispiel für jeden endlichen Planungshorizont die Frage, wieviel Kapital zum Zeitpunkt T übrigbleiben soll, da ja die nachfolgenden Generationen auf diesen Kapitalstock angewiesen sind. Um eine wirklich optimale Lösung zu finden, müßte dieser zu hinterlassende Kapitalstock seinerseits optimal bestimmt werden. Die Annahme eines unendlichen Planungszeitraumes ist eine Fiktion, um diese Schwierigkeit zu umgehen. Tatsächlich vereinfacht sich die Analyse eines Modells unter dieser Annahme beträchtlich, was ein weiterer Grund für die häufige Verwendung dieses Ansatzes ist. Schließlich ermöglicht die Annahme $T = \infty$ eine konzeptionell saubere Diskussion langfristiger Gleichgewichte.

Den genannten Vorteilen stehen allerdings auch einige zusätzliche mathematische Probleme gegenüber. Zum einen ist der Begriff der Optimalität zu überdenken, wenn das zu maximierende Zielfunktional nicht konvergiert. Welche Lösung ist die beste, wenn viele Lösungen zu Werten des Zielfunktionals führen, die gleich unendlich sind? Zum anderen lassen sich nicht alle Ergebnisse der Kontrolltheorie einfach auf einen unendlichen Planungshorizont übertragen. Wenn keine Endbedingungen für die Zustandsvariablen vorliegen, gibt es abgesehen von Spezialfällen keine notwendigen Transversalitätsbedingungen.

Da autonome Modelle mit Diskontierung im Falle eines unendlichen Planungshorizontes im Mittelpunkt stehen, wird das Problem (2.65a) betrachtet. Da im Falle eines unendlichen Planungshorizontes die Formulierung eines Restwertes S offenbar wenig sinnvoll ist, lautet die adäquate Formulierung für $T = \infty$

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{u}\in\bar{C}[0,\infty)} \left\{ J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty e^{-\rho t} U(\mathbf{x},\mathbf{u})\, dt \right\} \\ &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ &\mathbf{u}(t) \in \Omega \subset R^m \quad \text{für alle} \quad t \in [0,\infty) \\ &\lim_{t\to\infty} x_i(t) = x_{i\infty},\ i = 1,\dots,n_1, \\ &\liminf_{t\to\infty} x_i(t) \geqq x_{i\infty},\ i = n_1+1,\dots,n_2, \\ &\lim_{t\to\infty} x_i(t) \text{ frei},\ i = n_2+1,\dots,n, \end{aligned} \tag{2.79}$$

wobei $x_{i\infty}$ eine Endbedingung für die Zustandsvariable i im Sinne eines Grenzwertes für $t \to \infty$ ist. Für $n_1 + 1,\dots,n_2$ ist es hierbei sinnvoll, den Grenzwert im Sinne des **Limes inferior** (vgl. zum Beispiel Seierstad und Sydsæter, 1987, S. 427–428) zu verwenden, da so zum Beispiel eine periodische Schwankung oberhalb des Wertes $x_{i\infty}$ zulässig ist. In solch einem Fall existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_i(t)$ nicht, und der entsprechende Pfad ist nicht zulässig, wenn die Endbedingung mit dem üblichen Grenzwert definiert wird.

Wenn die Problemformulierung sinnvoll sein soll, ist es erforderlich, daß das uneigentliche Integral in (2.79) für jede zulässige Lösung konvergiert. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß U von oben durch einen Wert $\bar{U}$ beschränkt und $\rho > 0$ ist, weil dann gilt:

$$J(\mathbf{u}) \leqq \int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{U}\, dt = \lim_{b\to\infty} \bar{U} \int_0^b e^{-\rho t}\, dt = \frac{\bar{U}}{\rho} \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-\rho b}) = \frac{\bar{U}}{\rho}. \tag{2.80}$$

In vielen Anwendungen divergiert das Integral allerdings. In diesem Fall müssen andere Optimalitätskriterien formuliert werden. Sei

$$\Delta(t) := \int_0^t e^{-\rho\tau} U(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\, d\tau - \int_0^t e^{-\rho\tau} U(\mathbf{x},\mathbf{u})\, d\tau,$$

wobei $(\mathbf{x},\mathbf{u})$ eine beliebige zulässige Lösung ist. Die bekanntesten Optimalitätskriterien für den unendlichen Planungszeitraum sind:

(1) Das **overtaking**-Kriterium von von Weizsäcker (1965), demzufolge der Wert des Zielfunktionals jeder anderen zulässigen Trajektorie von der optimalen Lösung $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ in endlicher Zeit eingeholt werden muß. Das heißt, $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ ist optimal, wenn es für jedes zulässige Paar $(\mathbf{x},\mathbf{u})$ ein t' gibt, so daß $\Delta(t) \geqq 0$ für alle $t \geqq t'$.

(2) Das **catching up**-Kriterium von Gale (1967), demzufolge $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ optimal ist, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein endlicher Zeitpunkt t' gefunden werden kann, so daß $\Delta(t)+\epsilon \geqq 0$ für alle $t \geqq t'$, das heißt wenn der optimale Wert des Zielfunktionals für alle $t \geqq t'$ um höchstens ϵ unter dem Wert aller anderen zulässigen Lösungen liegt. Anders ausgedrückt:

$$\liminf_{t\to\infty} \Delta(t) \geqq 0 \quad \text{für alle zulässigen} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

(3) Das **sporadically catching up**-Kriterium von Halkin (1974), wonach $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ optimal ist, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und jedes t' ein Wert $t'' \geqq t'$ gefunden werden kann, so daß $\Delta(t'') + \epsilon \geqq 0$ ist, das heißt wenn der optimale Wert des Zielfunktionals zum Zeitpunkt t'' um höchstens ϵ unter dem Wert aller anderen zulässigen Lösungen liegt. Anders ausgedrückt:

$$\limsup_{t\to\infty} \Delta(t) \geqq 0 \quad \text{für alle zulässigen} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Zwischen den einzelnen Kriterien besteht die folgende logische Beziehung, die direkt aus den angegebenen Definitionen und der allgemeinen Eigenschaft $\limsup \geqq \liminf$ folgt: Die Optimalität bezüglich des Kriteriums (1) impliziert die Optimalität bezüglich des Kriteriums (2), die die Optimalität bezüglich des Kriteriums (3) impliziert. Wenn das uneigentliche Integral in (2.79) existiert, dann ist das normale Maximierungskriterium in (2.79) mit den Kriterien (2) und (3) äquivalent, während Kriterium (1) nicht aus der Maximierungsanweisung folgt.

Der grundlegende Satz über notwendige Bedingungen für $T = \infty$ stammt von Halkin (1974), der das **sporadically catching up**-Kriterium verwendet hat, weil die notwendigen Bedingungen für die Optimalität in bezug auf dieses Kriterium aufgrund der angegebenen logischen Beziehung offensichtlich auch notwendige Bedingungen für alle anderen genannten Kriterien sind. Der folgende Satz gilt daher für alle Kriterien, sowohl bei Divergenz als auch bei Konvergenz des Zielfunktionals.

Satz 2.20 (Maximumprinzip für $T = \infty$) *Gegeben ist das Problem (2.79), wobei die Maximierungsvorschrift durch die Forderung der sporadically catching up-Optimalität ersetzt wird. Wenn $\mathbf{u}^*(t)$ mit zugehöriger Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ optimal ist, gelten mit Ausnahme der Transversalitätsbedingungen alle Bedingungen von Satz 2.16 analog für $t \in [0, \infty)$.*

Beweis: Halkin (1974). □

Bemerkung 2.23. Auch wenn keine Endbedingungen vorliegen, kann nicht wie im endlichen Fall von vornherein $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden. Halkin beweist den Satz 2.20 durch Rückführung auf ein Problem mit endlichem Planungshorizont T und festem Endzustand $\mathbf{x}_T$, für das die Formulierung mit $\lambda_0 = 1$ nicht von vornherein möglich ist und für das keine Transversalitätsbedingungen existieren. Daher liegt es nahe, daß diese Einschränkungen auch für $T = \infty$ gelten. ♢

In vielen ökonomischen Veröffentlichungen werden die zu den in der Bemerkung 2.16 angegebenen analogen Grenztransversalitätsbedingungen

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_i^c(t) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_i^c(t)x_i^*(t) = 0 \quad \text{für} \quad i = n_1+1,\dots,n_2,$$

wobei als Endbedingung $\lim_{t\to\infty} x_i(t) \geqq 0$ unterstellt wird, und

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_i^c(t) = 0 \quad \text{für} \quad i = n_2+1,\dots,n,$$

als notwendige Bedingungen bezeichnet. Diese Vorgehensweise ergibt sich aus einer durch die ökonomische Intuition gestützten Übertragung der Bedingungen für den Fall mit endlichem Planungshorizont auf den Fall $T \to \infty$. Angenommen, $x(t) \geqq 0$ bezeichnet den Kapitalstock und $e^{-\rho t}\lambda^c(t)$ den Barwert des entsprechenden (nichtnegativen) Schattenpreises des Kapitals. Wenn im Falle eines endlichen Planungshorizontes T der Kapitalstock zum Zeitpunkt T positiv ist, kann diese Lösung nur optimal sein, wenn der abdiskontierte Schattenpreis null ist, denn im Falle eines positiven Schattenpreises bleibt ein Kapitalstock mit positivem Gegenwartswert übrig, der keine Verwendung mehr hat. Wenn umgekehrt der Schattenpreis positiv ist, muß der Kapitalstock zum Zeitpunkt T gleich null sein. Überträgt man dieses Argument auf $T \to \infty$, so folgt

$$\lim_{t\to\infty} x^*(t) \geqq 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda^c(t) \geqq 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda^c(t)x^*(t) = 0.$$

Das folgende berühmte Gegenbeispiel von Halkin (1974, S. 271) zeigt, daß diese Analogie zwischen endlichem und unendlichem Planungszeitraum nicht immer gültig ist.[40]

Beispiel 2.13. Das Zielfunktional $\int_0^\infty (1-x)u\,dt$ soll maximiert werden, wobei die Zustandsgleichung $\dot{x} = (1-x)u$ mit $x(0) = 0$ lautet und der Kontrollbereich durch $u \in [0,1] = \Omega$ gegeben ist. Da $\dot{x}$ dem Integranden des Zielfunktionals entspricht, gilt

$$J(u) = \int_0^\infty (1-x)u\,dt = \int_0^\infty \dot{x}\,dt = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0) = \lim_{t\to\infty} x(t).$$

Anhand der Zustandsgleichung ist unmittelbar zu erkennen, daß x immer kleiner als eins ist, weil $\dot{x} = 0$ für $x = 1$ (und $\dot{x} = 0$ kann wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung nicht erreicht werden). Daher ist jede Lösung optimal, die zu $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ führt. Das wird zum Beispiel durch jedes konstante $\bar{u} \in (0,1)$ erfüllt, denn $\dot{x} = (1-x)\bar{u}$ hat für $0 < \bar{u} < 1$ den Wert 1 als asymptotisch stabiles Gleichgewicht. (Die Wahl von $0 < \bar{u} < 1$ geht auf Arrow und Kurz (1970, S. 46, Fußnote 1) zurück; dadurch wird die Darstellung einfacher als zum Beispiel für die optimale Kontrolle $\bar{u} = 1$, womit sich das Gegenbeispiel ebenfalls darstellen läßt.)

Die Hamiltonfunktion lautet $H(=\mathscr{H}) = (\lambda_0 + \lambda)(1-x)u$. Weil $\bar{u}$ optimal ist und annahmegemäß im Inneren des Kontrollbereichs liegt, muß dieser Wert H maximieren, wobei $H_u = (\lambda_0 + \lambda)(1-x) = 0$ gilt. Daraus folgt $\lambda_0 = -\lambda(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$. Weil λ_0 und λ nicht gleichzeitig gleich null sein können, muß $\lambda_0 > 0$ sein und kann gleich eins gesetzt werden. Also ist

[40] Ein weiteres bekanntes Gegenbeispiel stammt von Shell (1969).

$\lambda(t) = -1$ für alle $t \in [0,\infty)$, und weil $\lambda(t)$ stetig ist, gilt $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = -1$. Für die angegebene optimale Lösung ist also die Transversalitätsbedingung (in der present-value Formulierung beziehungsweise für $\rho = 0$) $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ nicht erfüllt, und daher ist sie keine notwendige Bedingung. ◊

Wenn für alle x_i Endbedingungen der Form $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = x_{i\infty}$ vorliegen, liefert der Satz 2.20 im allgemeinen genügend Informationen, um einen oder einige Kandidaten für eine optimale Lösung aufzuspüren. Andernfalls werden aufgrund der fehlenden Transversalitätsbedingungen in der Regel unendlich viele Kandidaten die notwendigen Bedingungen erfüllen, weil dem kanonischen Differentialgleichungssystem dann Randbedingungen fehlen. Daher ist es nicht verwunderlich, daß die Suche nach geeigneten zusätzlichen Bedingungen oder Annahmen, die weitere Bedingungen implizieren, bis heute nicht abgeschlossen ist. Schon Arrow (1968, S. 93) hat angemerkt, daß in *...cases of interest in economics, the transversality conditions [...] are in fact valid, but so far it is necessary to verify this in each case*. Daran hat sich bis heute nur für bestimmte Spezialfälle etwas geändert. Bemerkenswert ist, daß alle bekannten Gegenbeispiele keine Diskontierung beinhalten, also für $\rho = 0$ formuliert sind. Für den Fall mit Diskontierung (beziehungsweise allgemeiner mit Konvergenz des Zielfunktionals) und unter Verwendung zusätzlicher Voraussetzungen haben Michel (1982) und Benveniste und Scheinkman (1982) die Notwendigkeit von bestimmten Transversalitätsbedingungen nachgewiesen. Darauf wird in den folgenden Unterabschnitten eingegangen.

Wenn keine notwendigen Transversalitätsbedingungen anwendbar sind, ist es häufig sinnvoll, sich auf die hinreichenden Bedingungen zu konzentrieren, sofern die entsprechenden Konkavitätseigenschaften gültig sind. Hier gibt es modifizierte Grenztransversalitätsbedingungen, die eine wichtige Rolle spielen, weil die Abschätzung (2.70) in Bemerkung 2.20 unter entsprechenden Konkavitätsvoraussetzungen analog für $T = \infty$ gilt. Wenn das Zielfunktional konvergiert, sind also die hinreichenden Bedingungen unter den Voraussetzungen des Satzes 2.17 erfüllt, wenn in der current-value Formulierung gilt:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) \geqq 0. \tag{MAX}$$

Die entsprechenden Bedingungen für das overtaking-Kriterium (OT), das catching up-Kriterium (CU), und das sporadically catching up-Kriterium (SCU) sind:

$$\text{es gibt ein } t', \text{so daß} \quad e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) \geqq 0 \ \forall\, t \geqq t', \tag{OT}$$

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) \geqq 0, \tag{CU}$$

$$\limsup_{t\to\infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) \geqq 0. \tag{SCU}$$

Satz 2.21 (Hinreichende Bedingungen für $T = \infty$) *Sei $\mathbf{u}^*(t)$ mit der zugehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^*(t)$ eine zulässige Lösung des Problems (2.79), die die notwendigen*

Bedingungen des Satzes 2.20 mit $\lambda_0 = 1$ erfüllt. Wenn Ω konvex ist und die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^c)$ für alle $t \in [0, \infty)$ konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ist, dann ist $(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*)$ eine optimale Lösung, wenn je nach Optimalitätskriterium die Bedingung (MAX), (OT), (CU) oder (SCU) für jede beliebige zulässige Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ erfüllt ist. Wenn $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^c)$ streng konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ist, ist $(\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*)$ die einzige optimale Lösung.

Bemerkung 2.24. Auch zu Satz 2.21 gibt es eine analoge Version nach der Art von Arrow. Konkret kann die Konkavität der Hamiltonfunktion durch die Konkavität der maximierten Hamiltonfunktion $\mathcal{H}^0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^c) := \max_{\mathbf{u} \in \Omega} \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^c)$ in $\mathbf{x}$ für alle $t \in [0, \infty)$ ersetzt werden. Wenn $\mathcal{H}^0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^c)$ streng konkav in $\mathbf{x}$ ist, ist $\mathbf{x}^*$ wiederum die einzige optimale Zustandstrajektorie (wobei $\mathbf{u}^*$ nicht notwendigerweise eindeutig ist). $\diamondsuit$

Bemerkung 2.25. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t))$$

für alle zulässigen $\mathbf{x}(t)$ existiert und nichtnegativ ist, folgt daraus auch die Optimalität bezüglich des CU- und des SCU-Kriteriums, weil in diesem Fall der Limes inferior und der Limes superior gleich dem Grenzwert sind. Ferner ist es im Falle der Konvergenz des Zielfunktionals offenbar auch hinreichend für die Optimalität im Sinne des Maximierungskriteriums, wenn die Bedingung (CU) anstelle der Bedingung (MAX) erfüllt ist. $\diamondsuit$

Bemerkung 2.26. Die zum Satz 2.16 analogen End- und Grenztransversalitätsbedingungen reichen für $T = \infty$ nicht aus, um (MAX) sicherzustellen. Auch die oft angegebenen Bedingungen

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \geqq \mathbf{0}, \ \lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot \mathbf{x}^*(t) = 0, \ \mathbf{x}(t) \geqq \mathbf{0} \ \forall t \in [0, \infty)$$

sind nicht hinreichend, wie das folgende Gegenbeispiel nach Long und Vousden (1977, S. 28) belegt. Sei $\rho > 0$, $\lambda^c(t) = -1$, $x^*(t) = 1$ und $x(t) = e^{\rho t}$. Dann ist die eben angegebene Bedingung erfüllt, aber wegen

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t}(-1)(e^{\rho t} - 1) = \lim_{t \to \infty}(-1 + e^{-\rho t}) = -1$$

nicht die Bedingung (MAX). $\diamondsuit$

Die Wertfunktion in autonomen Problemen In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse dargestellt, die nur für autonome Probleme mit unendlichem Zeithorizont gelten, das heißt, eine Verallgemeinerung auf nichtautonome oder endliche Probleme ist nicht möglich.[41] Dabei wird auf das Problem (2.79) Bezug genommen, wobei

[41] Sofern keine weiteren Hinweise gegeben werden, finden sich die hier dargestellten Ergebnisse bei Arrow (1968) und Arrow und Kurz (1970).

unterstellt wird, daß das Zielfunktional konvergiert. In diesem Fall lautet die Wertfunktion

$$V(t,\mathbf{x}(t)) = \max_{\mathbf{u}(\tau)\in\Omega,\tau\geqq t} \int_t^\infty e^{-\rho\tau} U(\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\, d\tau,$$

wobei die Nebenbedingungen in (2.79) zu beachten sind. Der Ausdruck kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} V(t,\mathbf{x}(t)) &= e^{-\rho t} \max_{\mathbf{u}(\tau)\in\Omega,\tau\geqq t} \int_t^\infty e^{-\rho(\tau-t)} U(\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau))\, d\tau \\ &= e^{-\rho t} \max_{\mathbf{u}(s)\in\Omega,s\geqq 0} \int_0^\infty e^{-\rho s} U(\mathbf{x}(s),\mathbf{u}(s))\, ds \\ &= e^{-\rho t} V(0,\mathbf{x}(t)), \end{aligned} \tag{2.81}$$

wobei im zweiten Schritt $s := \tau - t$ gesetzt worden ist und $\mathbf{x}(0) := \mathbf{x}(t)$ als Startwert zu wählen ist. Analog zur Formulierung der current-value Hamiltonfunktion wird die **current-value Wertfunktion** definiert durch

$$\mathcal{V}(t,\mathbf{x}(t)) := e^{\rho t} V(t,\mathbf{x}(t)),$$

wobei V zur Unterscheidung als **present-value Wertfunktion** bezeichnet werden kann. In Verbindung mit dem vorherigen Ergebnis folgt also $\mathcal{V}(t,\mathbf{x}(t)) = V(0,\mathbf{x}(t))$, das heißt, $\mathcal{V}$ ist nicht explizit von t abhängig und kann daher der Einfachheit halber geschrieben werden als $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$. Insgesamt gilt demnach

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = e^{\rho t} V(t,\mathbf{x}(t)) = V(0,\mathbf{x}(t)). \tag{2.82}$$

Da der zweite Schritt in (2.81) nicht möglich ist, wenn der Planungshorizont T endlich ist, gilt dieses Ergebnis nur für $T = \infty$.

Die Gleichung (2.82) hat wichtige Implikationen. Zunächst kann die **HJB-Gleichung** der dynamischen Programmierung unter Verwendung der current-value Hamiltonfunktion geschrieben werden als

$$\rho\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} \mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}))\,. \tag{2.83}$$

Man sieht das unmittelbar, indem $V_t = -\rho e^{-\rho t}\mathcal{V}$ und $V_{\mathbf{x}} = e^{-\rho t}\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$ in die HJB-Gleichung $-V_t = \max_{\mathbf{u}\in\Omega} H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}})$ eingesetzt werden, wobei zu beachten ist, daß

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{u},V_{\mathbf{x}}) = e^{-\rho t}\mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},e^{\rho t}V_{\mathbf{x}}).$$

Da angenommen worden ist, daß das Zielfunktional für jede zulässige Lösung **konvergiert**, kann darüber hinaus die zu $V(T,\mathbf{x}(T)) = S(T,\mathbf{x}(T))$ analoge Randbedingung verwendet werden, denn $V(0,\mathbf{x}_0)$ muß für jeden Startwert endlich sein, also auch für $\mathbf{x}(t)$. Also ist $V(0,\mathbf{x}(t))$ endlich, so daß gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = \lim_{t\to\infty} V(t,\mathbf{x}(t)) = \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} V(0,\mathbf{x}(t)) = 0. \tag{2.84}$$

Unter diesen Voraussetzungen besteht manchmal die Möglichkeit, eine Lösung der HJB-Gleichung zu finden. Wenn also bekannt ist, daß das Zielfunktional konvergiert, ist (2.84) eine notwendige Optimumbedingung. Anhand des Beweises des Satzes 2.19 ist zu erkennen, daß die Formel (2.84) zusammen mit den dort angegebenen Bedingungen, für einen unendlichen Planungshorizont formuliert, auch hinreichend für ein Optimum ist.

Wenn man sich an die Interpretation der Ableitung der Wertfunktion gemäß (2.76) als Vektor der Kozustandsvariablen erinnert, so folgt (die Existenz der Ableitung vorausgesetzt) aus (2.82):

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t)) = e^{-\rho t}\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)),$$

mit $\boldsymbol{\lambda}^c(t) = e^{\rho t}\boldsymbol{\lambda}(t)$ also

$$\boldsymbol{\lambda}^c(t) = \mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)). \tag{2.85}$$

Die Gleichung (2.85) besagt, daß der optimale Wert der current-value Kozustandsvariablen zu jedem Zeitpunkt ausschließlich vom Wert der Zustandsvariablen in diesem Zeitpunkt abhängt. Da sich die optimalen Werte der Kontrollvariablen aus der Maximierung der autonomen current-value Hamiltonfunktion ergeben, hängt auch $\mathbf{u}^*$ ausschließlich von $\mathbf{x}^*$ ab (direkt und indirekt über $\boldsymbol{\lambda}^c(\mathbf{x}(t))$). Das heißt, daß prinzipiell eine **autonome feedback-Lösung** $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t))$ gefunden werden kann, die ausschließlich von $\mathbf{x}(t)$ abhängt.

Setzt man die optimalen Werte der Kontroll-, Zustands- und Kozustandstrajektorien unter Verwendung von (2.85) in die rechte Seite der HJB-Gleichung (2.83) ein und bildet die Ableitung nach t, so folgt

$$\rho\boldsymbol{\lambda}^c(t)\cdot\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^c(t)). \tag{2.86}$$

Wie unter Berücksichtigung von (2.85) durch die genannten Substitutionen auch unmittelbar anhand von (2.83) zu erkennen ist, ist also insbesondere für $\rho = 0$ die current-value Hamiltonfunktion entlang des optimalen Zeitpfades konstant gleich null. Für den Fall $\rho > 0$ wird die Gleichung (2.83) mit $e^{-\rho t}$ multipliziert:

$$\rho e^{-\rho t}\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = e^{-\rho t}\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^c(t)).$$

In Verbindung mit (2.84) folgt daraus unmittelbar die von Michel (1982) abgeleitete Transversalitätsbedingung

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^c(t)) = 0. \tag{2.87}$$

Man beachte, daß die Konvergenz des Zielfunktionals unterstellt werden muß, weil (2.84) darauf basiert. Diese Bedingung ist allerdings nicht so einfach wie die Transversalitätsbedingungen für die Kozustandsvariablen anzuwenden.[42]

[42] Die Ableitung von (2.87) setzt hier die Differenzierbarkeit der Wertfunktion voraus. Michel (1982) hat gezeigt, daß diese Annahme nicht benötigt wird. Unter zusätzlichen, in der Regel allerdings schwierig zu überprüfenden Voraussetzungen, hat er die Notwendigkeit einer Transversalitätsbedingung für die Kozustandsvariablen nachgewiesen.

Mit den Methoden dieses Abschnitts kann leicht gezeigt werden, daß der **Zustandspfad** in autonomen Problemen mit unendlichem Zeithorizont **für den Spezialfall nur einer Zustandsvariablen monoton** verläuft, sofern die Lösung $\mathbf{u}^*$ eindeutig ist. Denn gemäß der Diskussion nach der Gleichung (2.85) kann prinzipiell eine autonome feedback-Lösung $\mathbf{u}^*(x)$ ermittelt werden. Setzt man diese eindeutige Lösung in die eine Zustandsgleichung ein, so folgt also

$$\dot{x} = f(x, \mathbf{u}^*(x)) =: F(x),$$

das heißt, die optimale Zustandstrajektorie folgt einer autonomen Differentialgleichung erster Ordnung mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Im Abschnitt 2.1.4 ist bereits gezeigt worden, daß die Lösung einer solchen Differentialgleichung monoton verläuft, also zum Beispiel keine Zyklen aufweisen kann. Zu beachten ist, daß dieses Ergebnis auch ohne die Differenzierbarkeit der Wertfunktion bewiesen werden kann (vgl. Feichtinger und Hartl, 1986, S. 119).

Eine Transversalitätsbedingung für $T \to \infty$ Um das Problem der fehlenden Transversalitätsbedingung im Satz 2.20 zu lösen, ist bereits auf den Ansatz von Michel (1982) hingewiesen worden, dessen Ergebnisse allerdings häufig nicht einfach anzuwenden sind. Ein alternativer Beweis für die Notwendigkeit einer Transversalitätsbedingung für den unendlichen Planungshorizont, der insbesondere auf Konkavitätsannahmen basiert, ist von Benveniste und Scheinkman (1982) angegeben worden. Obwohl eine Darstellung dieser Bedingung und der erforderlichen Annahmen noch nicht in die Lehrbuchliteratur eingegangen ist, beziehen sich zahlreiche Darstellungen in der Wachstumstheorie auf dieses Ergebnis. Um das Argument plausibel zu machen, wird hier eine vereinfachte Version bewiesen, wobei auch die im Original erforderlichen Annahmen diskutiert werden.

Satz 2.22. *Für das Problem (2.79) ohne Endbedingungen konvergiere das Zielfunktional für jede zulässige Lösung. Die current-value Wertfunktion $\mathcal{V}$ sei (1) stetig differenzierbar und (2) konkav in $\mathbf{x}(t)$. Ferner existiere (3) für alle $\mathbf{x}(t) > \mathbf{0}$ zum Zeitpunkt t eine zulässige Lösung, und es sei (4) $U(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqq 0$ für alle zulässigen $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sowie (5) $\mathbf{x}(t) \geqq 0$ für alle t. (6) Für alle $\mathbf{x}(t)$ sei $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) > \mathbf{0}$. Dann ist*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot \mathbf{x}^*(t) = 0 \tag{2.88}$$

eine notwendige Optimumbedingung.

Beweis: Gemäß (1) und (2) ist $\mathcal{V}$ stetig differenzierbar und konkav. Eine stetig differenzierbare Funktion ist genau dann konkav, wenn für alle $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}^*(t)$ aus dem Definitionsbereich gilt, daß

$$\mathcal{V}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t))(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)) \geqq \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathcal{V}(\mathbf{x}^*(t)).$$

Wegen (3) kann $\mathbf{x}(t) = 0{,}5\mathbf{x}^*(t)$ gesetzt werden, und zusammen mit (1) und (2.85) ergibt sich

$$\boldsymbol{\lambda}^c(t)\cdot(0{,}5\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}^*(t)) \geqq \mathcal{V}(0{,}5\mathbf{x}^*(t)) - \mathcal{V}(\mathbf{x}^*(t)).$$

Addiert man $\mathcal{V}(\mathbf{x}^*(t))$ auf beiden Seiten und beachtet, daß $\mathcal{V}(0{,}5\mathbf{x}^*(t)) \geqq 0$ wegen (4), so folgt

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}^*(t)) - 0{,}5\boldsymbol{\lambda}^c(t)\cdot\mathbf{x}^*(t) \geqq 0.$$

Wegen (5) und (6) gilt $\boldsymbol{\lambda}^c(t)\cdot\mathbf{x}^*(t) \geqq 0$, so daß die Multiplikation der vorangehenden Ungleichung mit $2e^{-\rho t}$ und Addition von $\boldsymbol{\lambda}^c(t)\cdot\mathbf{x}^*(t)$

$$2e^{-\rho t}\mathcal{V}(\mathbf{x}^*(t)) \geqq e^{-\rho t}\boldsymbol{\lambda}^c(t)\cdot\mathbf{x}^*(t) \geqq 0$$

liefert. Die Bildung des Grenzwertes für $t\to\infty$ ergibt wegen (2.84) schließlich (2.88). □

Dieser Beweis basiert zwar auf restriktiveren Annahmen als nötig, zeigt aber trotzdem, daß einige Voraussetzungen erfüllt sein müssen, um die Notwendigkeit der Grenztransversalitätsbedingung (2.88) nachzuweisen. Denn die wesentlichen Vereinfachungen hier bestehen in den Annahmen (1) und (2), die von Benveniste und Scheinkman (1982) nicht unterstellt werden, sondern für das folgende spezielle Problem der **Variationsrechnung** in verallgemeinerter Form bewiesen werden.

$$\begin{gathered}\max \int_0^\infty e^{-\rho t}U(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})\,dt \\ (\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) \in \mathcal{T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\end{gathered} \tag{2.89}$$

Dabei ist $\mathcal{T} \subset R^{2n}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, die einige weitere Annahmen erfüllen muß, die für $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$ zusammen mit Annahmen über die Funktion U (konkav und beschränkt) die hier getroffenen Voraussetzungen (3), (4), (5) und (6) implizieren.[43] Die Konvergenz des Zielfunktionals folgt aus $\rho > 0$ und der Beschränktheit von U. Die Voraussetzung (2) wird durch die Annahme impliziert, daß U stetig und konkav in $(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$ ist, während (1) nicht benötigt wird. Stattdessen beweisen Benveniste und Scheinkman (1982), daß es einen Pfad von Dualvariablen beziehungsweise Kozustandsvariablen $\boldsymbol{\lambda}^c(t)$ gibt, die für alle t Elemente der Supergradienten (ein verallgemeinertes Konzept der Ableitung für nicht notwendigerweise differenzierbare konkave Funktionen) von $\mathcal{V}$ sind. Für diesen Beweis, der erheblich über das mathematische Niveau der Ausführungen hier hinausgeht, werden zusätzlich bezüglich $\mathbf{x}(t)$ reine Zustandsbeschränkungen ausgeschlossen. Daß die Annahme (1) nicht benötigt wird und die Annahme (2) aus den Voraussetzungen für U folgt, macht den eigentlichen Nutzen des Theorems erst aus, da keine häufig gar nicht erfüllte Annahme über die Funktion $\mathcal{V}$ getroffen werden muß. Dabei ist zu beachten, daß diese Funktion ja nicht gegeben ist, sondern ein Teil der Lösung des Problems.

Anhand der Voraussetzungen ist zu erkennen, daß für den Fall, daß die Transversalitätsbedingung (2.88) notwendig für ein Optimum ist, auch die hinreichenden

[43] Anstelle von $e^{-\rho t}U(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$ verwenden die Autoren die etwas allgemeinere Form $U(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$, wobei allerdings in jedem Fall die Konvergenz des Zielfunktionals unterstellt werden muß.

Bedingungen des Satzes 2.21 erfüllt sind. Denn wenn die momentane Zielfunktion U konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit $\mathbf{u} := \dot{\mathbf{x}}$ ist, dann ist die gemäß dem Maximumprinzip gebildete Funktion $\mathscr{H}$ konkav in $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, wobei $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden kann (was aus den obigen Voraussetzungen (1) bis (6) oder dem Beweis von Benveniste und Scheinkman (1982) folgt). Aufgrund von (5) und (6) ist die Bedingung (MAX) erfüllt, wenn (2.88) gilt.

Die Transversalitätsbedingung (2.88) spielt eine wichtige Rolle beim Beweis der Äquivalenz von Konkurrenzgleichgewichten bei vollkommener Voraussicht und optimalen Lösungen, worauf im Kapitel 3 noch eingegangen wird. Als generelle Transversalitätsbedingung in dynamischen Optimierungsproblemen mit unendlichem Planungszeitraum kann sie aufgrund der zahlreichen involvierten Annahmen jedoch nur mit Einschränkungen verwendet werden. Hinzu kommt, daß die Bedingung für ein Problem der Variationsrechnung formuliert ist. Bei der Analyse mittels des Maximumprinzips muß daher streng genommen stets geprüft werden, ob eine Transformation in ein Variationsproblem möglich ist, das den erforderlichen Annahmen genügt. In der Literatur zur Wachstumstheorie ist es üblich, das Problem der Transversalitätsbedingungen entweder einfach zu ignorieren, oder auf den Beweis von Benveniste und Scheinkman (1982) hinzuweisen, der die Notwendigkeit sicherstelle. Angesichts der zahlreichen zu prüfenden Voraussetzungen, die die Formulierung eines einfachen und allgemeinen Satzes in der Art von (2.20) einschließlich der Bedingung (2.88) unmöglich macht, ist dieses Vorgehen in vielen Fällen nicht gerechtfertigt, auch wenn zwei der erforderlichen Annahmen in der Regel erfüllt sind (die Konkavität der Momentannutzenfunktion und die Konvergenz des Zielfunktionals).

Beispiel 2.14. Ein wichtiges Beispiel stellt die in (2.61) verwendete Momentannutzenfunktion dar, die häufig in Modellen mit $T = \infty$ verwendet wird. Unterstellt man zum Beispiel $\theta = 1$, so geht sie in die Funktion $\ln(c)$ über, die offenbar nicht beschränkt ist. Die Annahme (4), $U(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqq 0$, ist im Falle einer Nutzenfunktion immer dann erfüllt, wenn U beschränkt ist, denn man kann den Nutzen immer einer positiv affinen Transformation unterwerfen, ohne die Lösung zu ändern. Sollte U negativ sein, addiert man also einfach eine Konstante. Im Falle von $\ln(c)$ ist das nicht möglich, weil diese Funktion für $c \to 0$ nach unten unbeschränkt ist und es daher keine Konstante a gibt, für die $a + \ln(c)$ immer positiv ist. $\diamondsuit$

Für die Nutzenfunktion im Beispiel 2.14, die einen einfachen Standardfall in der Literatur darstellt, kann man sich nicht auf den Artikel von Benveniste und Scheinkman (1982) berufen. Stattdessen ist zumindest ein Hinweis auf Araujo und Scheinkman (1983) erforderlich, die die Ergebnisse für unbeschränkte Nutzenfunktionen und zusätzlich auch die Berücksichtigung von reinen Zustandsbeschränkungen verallgemeinern. Die Voraussetzungen (5) und (6) (beziehungsweise andere Annahmen, die diese Bedingungen in verallgemeinerter Form implizieren), werden auch bei Araujo und Scheinkman (1983) benötigt. In diesem Zusammenhang wird auf die Bedeutung der Bedingung $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathscr{T}$ in der Formulierung des Variationsproblems (2.89) aufmerksam gemacht. Da die Menge $\mathscr{T}$ konvex und abgeschlossen sein soll, könnte man vermuten, daß reine Zustandsbeschränkungen erfaßt werden. Dem ist nicht so, weil für den Beweis der Transversalitätsbedingung (2.88) aufgrund der von

Benveniste und Scheinkman (1982) unterstellten Annahmen $\mathbf{x}(t)$ zu jedem Zeitpunkt im Inneren der Menge $\Pi_1(\mathcal{T}) := \{\mathbf{x} \in R^n \mid \exists \dot{\mathbf{x}} \text{ mit } (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in \mathcal{T}\}$ liegt. Eine gemischte Beschränkung, in der die Kontroll- und Zustandsvariablen auftauchen, ist dagegen zulässig. Zur Verdeutlichung der Menge $\mathcal{T}$ wird das folgende Beispiel angegeben.

Beispiel 2.15. Gesucht wird das Maximum von $\int_0^\infty e^{-\rho t} U(c)\, dt$ unter der Nebenbedingung $\dot{k} = f(k) - nk - c,\ k(0) = k_0,\ 0 \leqq c \leqq f(k)$. Dabei ist U konkav und beschränkt, und für die Funktion f gilt $f(0) = 0$, $f'(0) > n$, $0 < n < 1$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$ und $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$. Dann gibt es einen Wert $\bar{k} > 0$ mit $f(\bar{k}) - n\bar{k} = 0$. Für $0 < k_0 < \bar{k}$ kann man die Menge $\mathcal{T}$ definieren als $\mathcal{T} = \{(k, \dot{k}) \in R^2 \mid 0 \leqq k \leqq \bar{k},\ -nk \leqq \dot{k} \leqq f(k) - nk\}$, wobei sich die Grenzen für $\dot{k}$ aus den Grenzen für c, $c = f(k)$ und $c = 0$ ergeben. Löst man die Bewegungsgleichung nach c auf und setzt in die Zielfunktion ein, so kann man das Problem in der Form von (2.89) schreiben als $\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(f(k) - nk - \dot{k})\, dt$ u.d.N. $(k, \dot{k}) \in \mathcal{T},\ k(0) = k_0$. Dabei übernimmt $\dot{k}$ die aus dem Maximumprinzip bekannte Rolle der Kontrollvariablen. Für gegebenes k ist $\dot{k}$ durch ein abgeschlossenes Intervall in Abhängigkeit von k beschränkt, so daß eine gemischte Restriktion berücksichtigt wird. Dagegen muß k für alle t im Inneren der Menge $\Pi_1(\mathcal{T}) := [0, \bar{k}]$ liegen, so daß die reine Zustandsbeschränkung $0 \leqq k \leqq \bar{k}$ nicht binden darf. Dieses Beispiel kann man als Problem des optimalen Wachstums interpretieren, das im Abschnitt 3.3 ausführlich anhand des Maximumprinzips diskutiert wird. ♢

Die Bedeutung notwendiger und hinreichender Bedingungen Zumindest für im Format der Kontrolltheorie (die hinsichtlich der Anwendung erhebliche Vorteile gegenüber der Variationsrechnung hat) formulierte Optimierungsprobleme ist es in jedem Einzelfall erforderlich, die Notwendigkeit der Bedingung (2.88) nachzuweisen. Häufig ist es daher einfacher und naheliegender, sich in Problemen mit unendlichem Planungshorizont auf die hinreichenden Bedingungen zu konzentrieren. In diesem Zusammenhang ist allerdings darauf hinzuweisen, daß notwendige und hinreichende Bedingungen natürlich nicht beliebig austauschbar sind.

In der neoklassischen positiven Wirtschaftstheorie, die wirtschaftliche Vorgänge erklären und deren Implikationen aufzeigen will, sind zunächst immer die notwendigen Bedingungen von größerer Bedeutung, wenn man die Hypothese verwendet, daß die Wirtschaftssubjekte rational handeln und ihre Zielfunktionen maximieren. Denn aus dieser Hypothese lassen sich lediglich anhand von notwendigen Bedingungen Implikationen logisch ableiten. Aus einer Hypothese A folgen die Bedingungen B, die notwendig für die Erfüllung der Hypothese sind, und nach der Kontrapositionsregel impliziert die Nichterfüllung der Bedingungen B, daß die Hypothese A nicht zutrifft. Derartige Schlüsse sind anhand von hinreichenden Bedingungen nicht möglich, die dafür in der normativen Wirtschaftstheorie eine größere Rolle spielen. Denn nur hinreichende Bedingungen stellen sicher, daß tatsächlich ein Optimum vorliegt, über dessen Erfüllung man Aussagen treffen möchte.

Die Situation ändert sich, wenn man nicht unterstellt, daß die Wirtschaftssubjekte vollkommen rational handeln, sondern zum Beispiel Faustregeln befolgen. In diesem Fall können auch hinreichende Bedingungen in der positiven Wirtschaftstheorie wertvolle Hinweise geben, wenn man die Implikationen von Faustregeln mit denjenigen von optimalen Lösungen vergleichen will. Wenn solche Faustregeln bestimmte notwendige Bedingungen nicht erfüllen, kann natürlich wie zuvor gefolgert werden, daß diese Faustregeln nicht optimal sind. Wenn sie sie erfüllen, kann aber nur anhand von hinreichenden Bedingungen gefolgert werden, ob die Faustregeln zufällig optimal sind oder zum Beispiel einem tatsächlichen Optimum nahekommen. Die Verwendung von hinreichenden Bedingungen in der Kontrolltheorie ist für $T \to \infty$ also nicht nur einfacher als die Verwendung von notwendigen Bedingungen, sondern in normativen Anwendungen und in positiven Anwendungen, die nicht von unbegrenzter Rationalität ausgehen, unter Umständen auch sinnvoller. Soweit als möglich werden daher in den folgenden Anwendungen die hinreichenden Bedingungen verwendet.

In diesem Zusammenhang ist auf eine Einschränkung bezüglich der *einfachen Verwendung* von hinreichenden Bedingungen hinzuweisen. Die Ableitung von notwendigen Bedingungen kann unabhängig vom Nachweis der Existenz einer Lösung sinnvoll sein, weil die notwendigen Bedingungen immer dann erfüllt sein müssen, wenn man eine optimale Lösung unterstellt. Dabei werden Aussagen getroffen, wie: *Wenn eine Lösung A optimal ist, dann erfüllt sie die Bedingung B*, wobei die Existenz von *A* nicht bewiesen werden muß, denn es ist ja gerade die *Hypothese* der Aussage, daß eine optimale Lösung vorliegt. Bei Verwendung der hinreichenden Bedingungen ist dagegen grundsätzlich der Nachweis der Existenz einer Lösung erforderlich. Denn die möglichen Aussagen sind von der Art: *Wenn die Bedingung E erfüllt ist, dann gibt es eine Menge M von zulässigen Lösungen. Die Lösung $A \in M$ erfüllt die Bedingung B und ist daher optimal.* Ohne den Beweis der Existenz einer Lösung ist lediglich eine relativ uninteressante Aussage möglich, wie: *Wenn es eine zulässige Lösung A gibt, die die Bedingung B erfüllt, dann ist A optimal.* In diesem Fall ist die Hypothese, daß es eine optimale Lösung *A* gibt, und die Folgerung, daß *A* eine optimale Lösung ist. Der Nachweis der Existenz einer Lösung von dynamischen Optimierungsproblemen, die die hinreichenden Bedingungen erfüllt, ist zwar im allgemeinen schwierig, doch in der Regel relativ einfach, wenn man sich auf die Existenz eines optimalen langfristigen Gleichgewichts beschränkt.

Die Instabilität der gestörten Hamilton-Systeme In vielen autonomen Problemen des Typs (2.79) stellt sich heraus, daß die optimale Lösung zu einem **langfristigen Gleichgewicht** $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ konvergiert, in dem die notwendigen Bedingungen des Satzes 2.20 und unter entsprechenden Konkavitätsvoraussetzungen auch die hinreichenden Bedingungen des Satzes 2.21 für $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$ erfüllt sind. Für eine allgemeine Analyse des kanonischen Differentialgleichungssystems (vgl. die Bemerkung 2.15) bietet sich die Formulierung mittels der **maximierten Hamiltonfunktion** an. In der current-value Formulierung für autonome Probleme lautet sie

$$\mathscr{H}^0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^c) := \max_{\mathbf{u} \in \Omega} \mathscr{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^c),$$

wobei hier wieder unterstellt wird, daß $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden kann, so daß gegebenenfalls die Verwendung der hinreichenden Bedingungen möglich ist. Außerdem wird im folgenden angenommen, daß Ω offen und $\mathcal{H}^0$ zweimal stetig differenzierbar ist. Aus dem Umhüllendensatz folgt dann unmittelbar[44]

$$\mathcal{H}^0_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^c) = \mathcal{H}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\lambda}^c),$$
$$\mathcal{H}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^c) = \mathcal{H}_{\boldsymbol{\lambda}^c}(\mathbf{x},\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\lambda}^c),$$

wobei $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^c) = \arg\max_{\mathbf{u}\in\Omega} \mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}^c)$ ist. Unter Verwendung dieser Ergebnisse wird das kanonische Differentialgleichungssystem dargestellt als

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathcal{H}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^c), \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}^c &= \rho\boldsymbol{\lambda}^c - \mathcal{H}^0_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}^c). \end{aligned} \tag{2.90}$$

Damit ergibt sich ein System von $2n$ Differentialgleichungen mit n Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und n Endbedingungen für $\boldsymbol{\lambda}^c(T)$ und/oder $\mathbf{x}(T)$ – je nach Problemformulierung – wenn es gültige Transversalitätsbedingungen für $T \to \infty$ gibt. Der Vergleich mit (2.56) im Abschnitt 2.2.3 zeigt, daß es sich von einem konservativen Hamilton-System in zwei Punkten unterscheidet. Erstens taucht der Term $\rho\boldsymbol{\lambda}^c$ zusätzlich auf, der es ermöglicht, ein autonomes System zu untersuchen, obwohl die present-value Hamiltonfunktion wegen der Diskontierung nicht autonom ist. Für $\rho \neq 0$ spricht man daher von einem **gestörten Hamilton-System**. Zweitens ist zu beachten, daß durch (2.90) eine optimale Lösung beschrieben werden soll. Diese Optimalität erfordert im allgemeinen bestimmte Randbedingungen, die zur Auswahl einer ganz bestimmten der möglichen Lösungen führt. Wie eingangs bereits bemerkt, zeigt sich häufig (aber nicht immer), daß die optimale Lösung durch einen Sattelpfad charakterisiert ist.

Damit stellt sich unmittelbar die Frage, ob sich bestimmte Eigenschaften der konservativen Hamilton-Systeme auf gestörte Systeme übertragen lassen. Die Gleichung (2.86) zeigt, daß die wichtige Eigenschaft der Konstanz der Hamiltonfunktion in konservativen Systemen für gestörte Systeme offenbar nicht gilt. Ein weiteres zentrales Resultat über die Eigenschaften stationärer Gleichgewichtspunkte von Hamilton-Systemen ist der Satz 2.14. Kurz (1968) hat ein vergleichbares Ergebnis für das gestörte System (2.90) abgeleitet. Wie im Beweis des Satzes 2.14 bezeichnet I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

$$J = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c\mathbf{x}} & \hat{\mathcal{H}}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c\boldsymbol{\lambda}^c} \\ -\hat{\mathcal{H}}^0_{\mathbf{x}\mathbf{x}} & -\hat{\mathcal{H}}^0_{\mathbf{x}\boldsymbol{\lambda}^c} + \rho I_n \end{pmatrix}$$

ist die als Blockmatrix geschriebene Jacobi-Matrix des Systems (2.90), ausgewertet in einem Gleichgewicht $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}^c)$, wobei zum Beispiel $\hat{\mathcal{H}}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c\mathbf{x}}$ eine Abkürzung für die Matrix

[44] Vgl. zum Umhüllendensatz zum Beispiel Varian (1992, S. 502). Die Anwendung des dort bewiesenen Satzes setzt voraus, daß das optimale $\mathbf{u}$ durch $\mathcal{H}_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ charakterisiert ist, was sichergestellt ist, wenn Ω offen ist. Der Beweis beruht einfach auf der Bildung der Ableitung von $\mathcal{H}^0$ zum Beispiel nach x_i: $\mathcal{H}^0_{x_i} = \mathcal{H}_{x_i} + \mathcal{H}_{\mathbf{u}} \cdot (\partial\mathbf{u}/\partial x_i) = \mathcal{H}_{x_i}$. Die Bedingungen, daß Ω offen ist und $\mathcal{H}^0 \in C^2$, sind allerdings restriktiv und folgen nicht aus den Annahmen des Maximumprinzips. Das System (2.90) läßt sich aber auch unter weniger restriktiven Annahmen ableiten.

$\mathcal{H}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^c)$ ist. Man beachte im Vergleich zur Darstellung im Abschnitt 2.2.3, daß $\boldsymbol{\lambda}^c$ jetzt die Rolle von $\mathbf{y}$ und $\mathcal{H}^0$ die Rolle von H übernimmt. Daher werden Eigenwerte im folgenden mit dem Symbol μ statt mit λ bezeichnet.

Satz 2.23 (Kurz) *Sei $\hat{\mathcal{H}}^0 \in C^2$ und μ ein Eigenwert der Matrix J. Dann ist auch $-\mu + \rho$ ein Eigenwert.*

Beweis: Sei $F(\rho/2)$ die Matrix, die man aus J erhält, indem man von den Hauptdiagonalblöcken jeweils die Matrix $(\rho/2)I_n$ abzieht:

$$F\left(\frac{\rho}{2}\right) := \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c\mathbf{x}} - \frac{\rho}{2}I_n & \hat{\mathcal{H}}^0_{\boldsymbol{\lambda}^c\boldsymbol{\lambda}^c} \\ -\hat{\mathcal{H}}^0_{\mathbf{xx}} & -\hat{\mathcal{H}}^0_{\mathbf{x}\boldsymbol{\lambda}^c} + \frac{\rho}{2}I_n \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man mit I die $(2n \times 2n)$-Einheitsmatrix, so ist zu erkennen, daß

$$J = \frac{\rho}{2}I + F\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

gilt. Wenn μ ein Eigenwert von J ist, gibt es einen Eigenvektor $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, so daß $\mu\mathbf{z} = J\mathbf{z}$. Mit der obigen Beziehung folgt daraus

$$J\mathbf{z} = \frac{\rho}{2}\mathbf{z} + F\left(\frac{\rho}{2}\right)\mathbf{z} = \mu\mathbf{z},$$

beziehungsweise

$$F\left(\frac{\rho}{2}\right)\mathbf{z} = \left(\mu - \frac{\rho}{2}\right)\mathbf{z}.$$

Das heißt, daß $\tilde{\mu} := \mu - \rho/2$ ein Eigenwert der Matrix $F(\rho/2)$ ist. Mit anderen Worten, der Eigenwert von J kann als $\mu = \tilde{\mu} + \rho/2$ geschrieben werden. Nun ist zu beachten, daß die Matrix $F(\rho/2)$ alle relevanten Voraussetzungen der Matrix J im Beweis des Satzes 2.14 erfüllt (insbesondere ist $\Im F(\rho/2)$ symmetrisch), so daß dieser Satz auf die Eigenwerte von $F(\rho/2)$ angewendet werden kann und folglich $-\tilde{\mu}$ ebenfalls ein Eigenwert von $F(\rho/2)$ ist. Also gibt es ein $\tilde{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$ mit

$$F\left(\frac{\rho}{2}\right)\tilde{\mathbf{z}} = -\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{z}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(J - \frac{\rho}{2}I\right)\tilde{\mathbf{z}} = -\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{z}},$$

oder

$$J\tilde{\mathbf{z}} = \left(-\tilde{\mu} + \frac{\rho}{2}\right)\tilde{\mathbf{z}}.$$

Der Ausdruck $-\tilde{\mu} + (\rho/2)$ ist also ein Eigenwert von J. Setzt man $\tilde{\mu} = \mu - \rho/2$ in diesen Wert ein, so folgt damit, daß $-\mu + \rho$ ein Eigenwert von J ist. □

Dieser Satz hat unmittelbare Konsequenzen für die Stabilität der Gleichgewichte in Modellen der optimalen Kontrolle. Im vorliegenden Zusammenhang der Diskontierung der Zielfunktion ist $\rho > 0$. Mit $\mathrm{Re}(\mu)$ wird der Realteil der komplexen Zahl μ bezeichnet. Nun ist zu erkennen, daß das Gleichgewicht $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^c)$ nicht stabil sein kann.

Denn für die Eigenwerte gilt:

$$\mathrm{Re}(-\mu+\rho) = -\mathrm{Re}(\mu)+\rho \begin{cases} >0 & \text{wenn} \quad \mathrm{Re}(\mu)<0, \\ >0 & \text{wenn} \quad \mathrm{Re}(\mu)=0, \\ >0 & \text{wenn} \quad 0<\mathrm{Re}(\mu)<\rho, \\ =0 & \text{wenn} \quad \mathrm{Re}(\mu)=\rho, \\ <0 & \text{wenn} \quad 0<\rho<\mathrm{Re}(\mu). \end{cases}$$

In keinem Fall ist es also möglich, daß alle Realteile der Eigenwerte von J negativ oder gleich null sind. Es gilt also das

Korollar. *Jedes Gleichgewicht des Systems (2.90) ist instabil.*

Kurz (1968, S. 164) merkt an, daß ein analoges Ergebnis für den Fall $\rho = 0$ gilt, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, daß J mindestens einen Eigenwert hat, der nicht rein imaginär ist. Wenn dagegen alle Eigenwerte rein imaginär sind, wenn also alle Realteile gleich null sind, kann aufgrund der lokalen Analyse mittels der Jacobi-Matrix keine Aussage über die Stabilität oder die Instabilität des Gleichgewichts gemacht werden. Die Frage, ob für $\rho = 0$ rein imaginäre Eigenwerte auftreten können, hat daher zu weiterer Forschung geführt. Levhari und Liviatan (1972) und Samuelson (1972) haben Ergebnisse für den Fall des optimalen Wirtschaftswachstums abgeleitet, wobei die Annahme sinnvoll sein kann, daß die jeweils unterstellten Nutzenfunktionen und die Produktionsfunktionen konkav sind. Unter dieser Voraussetzung zeigt sich, daß die auftretenden Gleichgewichte in der Tat Sattelpunkte sind. Man beachte, daß für $\rho = 0$, wenn kein Eigenwert einen verschwindenden Realteil hat, das betrachtete Gleichgewicht wegen Satz 2.14 ein Sattelpunkt ist. Neuerdings hat Wolff (1997) im Rahmen eines Multi-Sektoren-Modells des effizienten Wachstums (ohne Konsum) gezeigt, daß die Sattelpunktdynamik auch in dem allgemeineren Fall mit zeitabhängiger, bikonvexer Produktionsstruktur auftritt, die nicht-konstante Skalenerträge zuläßt.

Der Satz 2.23 und das Korollar betreffen beide das kanonische Differentialgleichungssystem (2.90). Von besonderem Interesse ist häufig aber in erster Linie weniger das dynamische Verhalten der Zustands- und Kozustandsvariablen, als dasjenige der Zustands- und Kontrollvariablen. Da die Anzahl der Kontrollvariablen nicht mit der Anzahl der Zustandsvariablen übereinstimmen muß, können die Ergebnisse offenbar nicht ohne weiteres übertragen werden. Trotzdem ist es intuitiv naheliegend, daß die Instabilität des kanonischen Differentialgleichungssystems sich auf das System in den Kontroll- und Zustandsvariablen überträgt, weil die Werte der Kontrollvariablen im allgemeinen in jedem Zeitpunkt von den Werten der Zustands- und Kozustandsvariablen abhängen. Wenn also das System in den Zuständen und deren Schattenpreisen (Kozustandsvariablen) instabil ist, dann ist es auch das System in den Zuständen und den von den Zuständen und den Schattenpreisen abhängigen Kontrollvariablen. Eine genauere Analyse der Zusammenhänge zwischen den

Phasendiagrammen im Zustands-Kozustandsraum und den Phasendiagrammen im Zustands-Kontrollraum findet sich in Feichtinger und Hartl (1986, Abschnitte 4.2 und 4.3). Zum Beispiel gilt unter allgemeinen Annahmen, daß im Falle einer Zustandsvariablen x und einer oder zweier Kontrollvariablen u_1 und u_2 ein Gleichgewicht im (x, u_1)-Raum und im (x, u_2)-Raum ein Sattelpunkt ist, wenn es im (x, λ^c)-Raum ein Sattelpunkt ist (Feichtinger und Hartl, 1986, Sätze 4.3 und 4.8).

Die bisher abgeleiteten Ergebnisse beziehen sich alle auf die Linearisierung der kanonischen Gleichungen in einem Gleichgewichtspunkt und sind daher lokaler Natur. Cass und Shell (1976), Rockafellar (1976) und Brock und Scheinkman (1977) – um nur einige zu nennen – haben die globalen Eigenschaften von Hamilton-Systemen analysiert und einige Resultate zur **globalen asymptotischen Stabilität der optimalen Kontrolle** abgeleitet. Analytisch werden verschiedene Ansatzpunkte unterschieden. Zum einen kann man direkt das gestörte Hamilton-System (2.90) betrachten und Bedingungen dafür ableiten, daß die optimale Lösung gegen ein eindeutiges Gleichgewicht konvergiert. Die Stabilität ist dann so zu verstehen, daß jede **beschränkte Lösung** gegen das Gleichgewicht konvergiert, oder daß nur die Lösungen konvergieren, die eine **Grenztransversalitätsbedingung** der Art $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \boldsymbol{\lambda}^c(t) \cdot \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{0}$ erfüllen (vgl. zum Beispiel Cass und Shell, 1976). Ein anderer Ansatz besteht darin, $\boldsymbol{\lambda}^c$ gemäß (2.85) in $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^c)$ und diese Funktion schließlich in $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ einzusetzen (was im allgemeinen nur theoretisch möglich ist, da Lösungen der Wertfunktion in geschlossener Form zumeist nicht verfügbar sind). Dadurch erhält man eine Differentialgleichung in $\mathbf{x}^*$, für die, wenn die Wertfunktion konkav in $\mathbf{x}$ ist und einige weitere Annahmen erfüllt sind, die globale Stabilität des Gleichgewichts nachgewiesen werden kann (vgl. zum Beispiel Brock und Scheinkman, 1977). In jedem Fall gilt, daß sich die globale asymptotische Stabilität des Gleichgewichts nicht auf das Originalsystem bezieht, sondern lediglich auf die optimalen Trajektorien. Mit anderen Worten, es wird nicht geprüft, ob das Gleichgewicht stabil ist, was gemäß dem obigen Korollar auch gar nicht möglich ist, sondern lediglich, ob die optimale Trajektorie gegen das Gleichgewicht konvergiert. Damit werden solche Fälle ausgeschlossen, in denen der optimale Pfad kein Sattelpfad ist. Zum Beispiel ist es im allgemeinen auch möglich, daß der optimale Pfad gegen einen Grenzzyklus konvergiert (vgl. Benhabib und Nishimura, 1979).

2.4 Anforderungen an ein Modell des Wirtschaftswachstums

Hinsichtlich der Modellierung des Wirtschaftswachstums ist zu unterscheiden zwischen **normativen** Modellen, die die Ableitung der Optimalitätsbedingungen bezüglich bestimmter wirtschaftspolitischer Zielvorstellungen zum Gegenstand haben, und deskriptiven oder **positiven** Modellen, die das Wirtschaftswachstum beschreiben beziehungsweise erklären wollen. Hinsichtlich der normativen Ansätze sind die im letzten Abschnitt dargestellten Methoden der dynamischen Optimierung unverzichtbare

Hilfsmittel, die eine adäquate Analyse erst ermöglichen.

Die Modelle zur Erklärung des Wirtschaftswachstums, die ja immer nur ein extrem vereinfachtes Abbild der Realität sein können, sollten in zweierlei Hinsicht **robust** gegenüber Änderungen sein. Zum einen dürfen sich die Implikationen der Modelle nicht grundsätzlich ändern, wenn sich die Wirtschaftssubjekte nicht exakt so verhalten, wie im Modell unterstellt. Zum anderen sollte das Modell auch **strukturell stabil** in dem Sinne sein, daß geringfügige Änderungen von Parameterwerten nicht zu einer qualitativ völlig unterschiedlichen dynamischen Entwicklung führen. Denn die Realität stimmt nie so genau mit einem Modell überein, daß Entwicklungen wiederholt empirisch relevant sein können, die nur für ganz spezielle Werte der Parameter gelten. Solche Grenzfälle können allenfalls zufällig auftreten, aber nicht die durch ein Modell vorhergesagte Regel darstellen. Auf das Problem der strukturellen Stabilität von Differentialgleichungen ist in diesem Kapitel nur am Rande hingewiesen worden, da zum einen die mathematischen Anforderungen für eine exakte Behandlung erheblich sind und zum anderen die strukturelle Stabilität für die im folgenden behandelten Modelle nur ein geringes Problem darstellt.[45] Im Kapitel 4 wird allerdings gezeigt, daß Modelle des endogenen Wachstums strukturell instabil sind und daher durch Modelle des semi-endogenen Wachstums ersetzt werden sollten, die von diesem Problem nicht betroffen sind.

In der modernen neoklassischen Wachstumstheorie wird nahezu ausschließlich der Ansatz der dynamischen Optimierung als Hypothese über die Bildung der Ersparnis und damit letztlich die Akkumulation der Produktionsfaktoren verwendet. Wie der Satz 2.23 zeigt, sind die gleichgewichtigen Pfade solcher Optimierungslösungen instabil. Abweichungen des tatsächlichen Verhaltens der Wirtschaftssubjekte von der unterstellten dynamischen Optimierung haben daher erhebliche Implikationen, denn wenn beispielsweise der Startwert einer Kontrollvariablen nicht genau auf einem optimalen Sattelpfad liegt, ergibt sich keine Konvergenz zum Gleichgewicht. Ein stabiler Mechanismus der Anpassung an diesen Pfad der kurzfristigen Gleichgewichte ist bisher nicht bekannt. Eine positive Interpretation derartiger Modelle in der Theorie des Wirtschaftswachstums erscheint daher fragwürdig, zumindest solange nicht schlüssig dargelegt werden kann, ob und wie die optimalen Lösungen näherungsweise durch bestimmte Verhaltensweisen oder Anpassungsmechanismen der Unternehmen und Haushalte erreicht werden können.

Die **Stabilität der Anpassung** an statische Gleichgewichte und Optima wird seit jeher in der Wirtschaftstheorie problematisiert. So lernt schon jeder Student im ersten Semester, daß ein Gleichgewicht in einem Modell nur dann auch eine empirische Bedeutung haben kann, wenn es stabil ist. Die Eigenschaften eines Gleichgewichtes zu studieren, das nicht erreicht werden kann, hat wenig Sinn. Auch in bezug auf die Erreichung einzelwirtschaftlicher Optima ist die Existenz eines stabilen Anpassungsmechanismus von grundlegender Bedeutung, da nicht davon ausgegangen werden kann, daß die optimalen Lösungen in der Realität exakt berechnet werden

[45] Eine Einführung in die Theorie der strukturellen Stabilität und die damit verbundene Theorie der Bifurkationen findet sich zum Beispiel in Perko (1996, Kapitel 4).

können. Mit der Frage der Stabilität in um einen Anpassungsmechanismus erweiterten statischen Modellen haben sich einige der herausragenden Arbeiten der Wirtschaftstheorie beschäftigt (zum Beispiel Samuelson, 1947; Arrow et al., 1958, 1959). Obwohl sich dabei herausstellt, daß die Stabilität etwa in walrasianischen Systemen des allgemeinen Gleichgewichts nur unter restriktiven Annahmen zu beweisen ist, erscheint eine stabile Anpassung immerhin möglich. Im Abschnitt 2.2.2 ist gezeigt worden, daß auch für zahlreiche einzelwirtschaftliche Optimierungsmodelle ein stabiles Optimum unterstellt werden kann.

Dagegen fehlt die Analyse von Prozessen der Anpassung an die weitaus schwieriger zu berechnenden dynamischen Optima in der dynamischen Wirtschaftstheorie fast vollständig. Wenn zum Beispiel der dynamische Optimierungsansatz in der Wachstumstheorie verwendet wird, bezieht sich die Analyse der **Übergangsdynamik** in der Regel auf die Entwicklung der optimalen Lösung beziehungsweise des Konkurrenzgleichgewichts selbst entlang eine Sattelpfades, nicht aber auf eine Anpassung an diesen optimalen Pfad. Hier ist eine Art **metadynamischer Prozeß** erforderlich, der allerdings bisher nicht formuliert worden ist. Als Ausweg wird im Kapitel 3 die Verwendung von Faustregeln vorgeschlagen. Die Problematik der Sattelpunktdynamik im Rahmen des neoklassischen Wachstumsmodells wird dabei ausführlich diskutiert.

Neben den genannten formalen Anforderungen sollte jedes positive Modell des Wirtschaftswachstums vor allem ein wesentliches Ziel erreichen, nämlich das Wachstum zu erklären. Wenn möglich, sollten darüber hinaus in normativer Sicht Handlungsanweisungen zur positiven Beeinflussung des Wachstums gegeben werden. Hinsichtlich der Erklärung des Wirtschaftswachstums ist es zunächst erforderlich, daß die Implikationen eines Modells mit den empirischen Fakten in Übereinstimmung stehen. Da es unmöglich ist, jede denkbare empirische Entwicklung zu erfassen, muß man sich als erste Annäherung mit den sogenannten **stilisierten Fakten** befassen, die sich aufgrund einer Abstraktion von der Vielfalt der empirischen Gegebenheiten und einer Konzentration auf häufig wiederkehrende Tatbestände ergeben. Das Ziel dieses Buches ist es letztlich, einfache und robuste Modelle des Wirtschaftswachstums zu entwickeln, die mit diesen stilisierten Fakten möglichst gut im Einklang stehen.

2.5 Literaturhinweise

Trotz des relativ großen Umfangs dieses Kapitels erfordert ein tieferer Einstieg in die mathematischen Grundlagen die Lektüre speziellerer Literatur. Mit Bezug zu den dynamischen Systemen und Differentialgleichungen sind die Bücher von Gandolfo (1996), Beavis und Dobbs (1990) und Takayama (1985, 1993) speziell für Ökonomen zu empfehlen. Aus der allgemeinen mathematischen Literatur seien die Klassiker zur qualitativen Theorie der Differentialgleichungen von Hirsch und Smale (1974) sowie Hartman (1964) genannt, wobei das Niveau des Buches von Hartman (1964) allerdings in erster Linie auf Mathematiker zugeschnitten ist. Neuere Standardwerke sind Hale und Koçak (1991), Perko (1996) und Amann (1995), wiederum in der Reihenfolge des Schwierigkeitsgrades geordnet. Einfache deutschsprachige Literatur ist rar; Amann (1995) wendet sich an Mathematiker. Etwas leichter zugänglich ist das Buch von Knobloch und Kappel (1974). Weniger um die qualitative Theorie als um die explizite Lösung von Differentialgleichungen geht es im Buch von Heuser (1993c), das ebenso gut verständlich wie seine Werke zur Analysis ist (Heuser, 1993a,b). Im Hinblick auf die allgemeinen mathematischen Grundlagen für Ökonomen sei auch Blume und Simon (1994) genannt.

Das sogenannte Bolza-Hestenes-Problem ist wesentlich allgemeiner als das hier behandelte Standardproblem der Kontrolltheorie. Darstellungen findet man zum Beispiel in Long und Vousden (1977) oder Takayama (1985), den Beweis in Hestenes (1966). Die herausragenden Bücher zur optimalen Kontrolle für Ökonomen sind Feichtinger und Hartl (1986) sowie Seierstad und Sydsæter (1987), in denen man auch Theoreme über die Existenz einer optimalen Kontrolle findet, die hier völlig außer Acht gelassen worden sind. Diese Existenztheoreme sind auch deshalb von Bedeutung, weil sich der Satz 2.1 auf ein Anfangswertproblem bezieht, in Modellen der optimalen Kontrolle aber Randwertprobleme zu lösen sind. Speziell zu den Problemen mit unendlichem Planungshorizont existiert eine Monographie von Carlson et al. (1991). Allen genannten Quellen gemeinsam ist eine mathematisch exakte Darstellung der Methoden. Auf etwas niedrigerem Anforderungsniveau bewegen sich die ebenfalls empfehlenswerten Bücher von Kamien und Schwartz (1991) und Léonard und Long (1992).

Kapitel 3: Grundlagen der neoklassischen Wachstumstheorie

3.1 Das neoklassische Grundmodell

3.1.1 Der methodische Ansatz der Neoklassik

Die neoklassische Wachstumstheorie ist eine formal gefaßte Modelltheorie, die ihren Höhepunkt in den fünfziger und sechziger Jahren gehabt hat. Durch die immer weiter fortschreitende Mathematisierung und die damit einhergehende Spezialisierung hat sie sich danach dem breiteren Interesse der Ökonomen entzogen. Erst durch die Arbeiten von Romer (1986, 1990) und Lucas (1988), die die sogenannte **Neue Wachstumstheorie** beziehungsweise die **Theorie des endogenen Wachstums** begründet haben, ist sie wieder in den Mittelpunkt der allgemeinen ökonomischen Forschung getreten. Der Begriff **neoklassische Wachstumstheorie** wird im folgenden relativ weit gefaßt. So ist auch die im nächsten Kapitel behandelte Theorie des endogenen Wachstums eine neoklassische Theorie, die sich von den älteren Ansätzen in erster Linie durch die Betonung der endogenen Erklärung des langfristigen Pro-Kopf-Wachstums des Nationaleinkommens, etwa durch den technischen Fortschritt, die Akkumulation von Humankapital, oder allgemein die Abwesenheit fallender Grenzproduktivitäten des Kapitals unterscheidet, ansonsten aber dem neoklassischen Paradigma verpflichtet ist.

Im strengen Sinne beinhaltet das neoklassische Paradigma, daß alle wirtschaftlichen Entscheidungen unter dem Gesichtspunkt der unbeschränkten Rationalität getroffen werden. Im dynamischen Zusammenhang impliziert dieser Ansatz die Lösung dynamischer Optimierungsprobleme, zum Beispiel bezüglich der Ableitung der Konsumfunktion. Solow (1956), der Begründer der neoklassischen Wachstumstheorie,[1] hat dagegen eine konstante Sparquote unterstellt. Daher ist es gerechtfertigt, nicht nur die Ansätze, in denen die Sparentscheidung aufgrund der intertemporalen Maximierung des Konsumnutzens bestimmt wird, als *neoklassisch* zu bezeichnen, sondern auch solche Ansätze, in denen die Wirtschaftssubjekte wie im Solow-Modell eine konstante Sparquote verwenden.

Eine konstante Sparquote kann auch als einfache **Faustregel** für die Konsumentscheidung beziehungsweise die Ersparnis interpretiert werden. Aufbauend auf den Ergebnissen des Kapitels 2 wird in diesem Kapitel der Standpunkt vertreten, daß dynamische Optimierungslösungen instabil und zu kompliziert sind, um als Erklärungsansätze im Rahmen einer positiven Theorie des Wirtschaftswachstums verwendet zu werden. Als sinnvolle Alternative wird die Verwendung einfacher Faustregeln vorgeschlagen, wobei zusätzlich zur konstanten Sparquote eine Verallgemeinerung

[1] Die Anmerkung ist erforderlich, daß Swan (1956) einen zum Solow-Modell vergleichbaren Ansatz veröffentlicht hat, der allerdings weniger allgemein ist, weil er eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion verwendet hat. Durch diese Vereinfachung wird allerdings die Analyse einiger Probleme ermöglicht, die von Solow (1956) nicht behandelt werden, vgl. auch Wan (1971, S. 57–58).

der sogenannten **klassischen Sparfunktion** eingeführt wird. Diese hier als **Goldene Faustregel** bezeichnete Konsumhypothese hat den Vorteil, mit minimalen Informationen auszukommen und trotzdem eine Lösung zu implizieren, die der optimalen Konsumfunktion nahekommt.

Zahlreiche Implikationen der neoklassischen Wachstumstheorie, die im Gegensatz zur nachfrageorientierten postkeynesianischen Theorie eine Angebotstheorie ist und auf eine substitutionale Produktionsfunktion setzt, sind nicht davon abhängig, ob die Konsumenten ihre Ersparnisse langfristig optimal bestimmen oder nicht. Selbst wenn man die Verwendung einer bestimmten Faustregel ablehnt, so sind viele der Ergebnisse robust gegenüber der Verwendung alternativer Faustregeln, vorausgesetzt, diese Regeln implizieren wie die Goldene Faustregel oder die konstante Sparquote ein stabiles langfristiges Gleichgewicht. Im Hinblick auf die Erklärung der **stilisierten Fakten** über das Wachstum stellt sich dabei heraus, daß die Goldene Faustregel, soweit es überhaupt auf die verwendete Konsumhypothese ankommt, den alternativen Ansätzen zumindest ebenbürtig ist.

3.1.2 Die Basisversion

Die Basisversion des neoklassischen Wachstumsmodells von Solow (1956) besteht aus den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y \equiv Y^S &= F(K,L), \\ Y^D &= C + I \\ C &= (1-s)Y, \\ Y &= Y^D, \\ \dot{K} &= I, \\ g_L &= n. \end{aligned}$$

Das reale Nationaleinkommen Y ist gleich dem Gesamtangebot Y^S, das gemäß der linearhomogenen Produktionsfunktion $Y^S = F(K,L)$ mit dem Kapitalstock K und dem Arbeitseinsatz L hergestellt wird.[2] Wie in der Bemerkung 2.2 auf der Seite 11 erläutert worden ist, kann man den gesamten Arbeitseinsatz bei entsprechender Normierung numerisch mit der Größe der Bevölkerung gleichsetzen, wenn man unterstellt, daß die Anzahl der Erwerbstätigen einen konstanten Anteil der Gesamtbevölkerung ausmacht. Die Variable L wird daher im folgenden als Bevölkerung interpretiert, wobei sie in der Produktionsfunktion eine Stromgröße, ansonsten eine Bestandsgröße darstellt. Analoge Anmerkungen gelten wiederum für den Kapitalstock. Die Gesamtnachfrage Y^D verteilt sich auf den Konsum C und die Investitionen I. Für den Konsum

[2]Auch hier muß strenggenommen von Produktionsraten gesprochen werden, vgl. die Bemerkung 2.1 auf der Seite 8.

wird eine konstante marginale und durchschnittliche Konsumquote $(1-s)$ unterstellt, so daß sich die Ersparnis S mit der konstanten Sparquote s als $S = sY$ ergibt. Schließlich ist $Y = Y^D$ die **Gleichgewichtsbedingung für den Gütermarkt**. Die Änderung $\dot{K}$ des Kapitalstocks in der Zeit entspricht den Investitionen I, und die Wachstumsrate g_L der Bevölkerung ist konstant gleich n.

Bemerkung 3.1. Die Variable Y wird im folgenden zumeist einfach als **Nationaleinkommen** oder **Einkommen** bezeichnet. Da kein Saldo der Erwerbs- und Vermögenseinkommen aus dem Ausland auftritt, muß nicht zwischen Bruttoinlandsprodukt und Bruttonationaleinkommen unterschieden werden. Solange Abschreibungen vernachlässigt werden, entsprechen sich Bruttokonzepte und Nettokonzepte. Wenn Abschreibungen berücksichtigt werden, ist zu beachten, daß die Abschreibungen in der Wachstumstheorie im Unterschied zur Praxis in den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen annahmegemäß aus der Ersparnis finanziert werden, so daß die Ersparnis stets als Bruttoersparnis zu interpretieren ist, die mit den Bruttoinvestitionen übereinstimmt. Soweit erforderlich, wird zwischen Bruttonationaleinkommen und Nettonationaleinkommen unterschieden. Da keine Salden zwischen Subventionen und Produktions- und Importabgaben an den Staat berücksichtigt werden, entspricht das Nettonationaleinkommen dem Volkseinkommen. Diese Begriffe werden austauschbar verwendet, wobei der Einfachheit halber auch schlicht vom *Einkommen* die Rede ist. Tiefergehende Unterscheidungen im Sinne der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen sind im folgenden nicht erforderlich. $\lozenge$

Bemerkung 3.2. Die Bedingung, daß die Produktionsfunktion linearhomogen ist, kann durch ein **Wiederholungsargument** gestützt werden. Da alle Produktionsfaktoren berücksichtigt werden, muß es zum Beispiel möglich sein, durch Verdoppelung aller Faktormengen auch den Output zu verdoppeln. Dieses Argument verliert seinen Sinn, wenn höhere Ausbringungsniveaus eine höhere Produktivität ermöglichen (steigende Skalenerträge), da dann kein Anlaß zur bloßen Wiederholung der Produktion besteht (vgl. ausführlicher zum Beispiel Buhr und Christiaans, 2002, S. 576). Steigende Skalenerträge spielen in der Theorie des endogenen Wachstums eine Rolle. $\lozenge$

Verwendet man die Gleichgewichtsbedingung $Y = Y^D$ und setzt die Konsumfunktion in $Y^D = C + I$ ein, so folgt die bekannte Darstellung

$$I = sY \tag{3.1}$$

für das Gleichgewicht des Gütermarktes. Für die Interpretation des Modells ist es wichtig, sich diese Beziehung vor Augen zu halten. Sie impliziert, daß das **statische Gleichgewicht in jedem Zeitpunkt** unterstellt wird, hier konkretisiert durch die Übereinstimmung von geplanter Investition und geplanter Ersparnis. In der gesamten neoklassischen Wachstumstheorie wird das statische beziehungsweise kurzfristige

Gleichgewicht grundsätzlich unterstellt, wobei sich die Investitionen stets der Ersparnis anpassen.[3] Davon zu unterscheiden ist der Begriff des **gleichgewichtigen Wachstums** beziehungsweise des langfristigen Gleichgewichts, der später eingeführt wird und sich auf ein dynamisches Gleichgewicht der Wachstumsraten bezieht.

Im Unterschied zur postkeynesianischen Wachstumstheorie, die ebenfalls von der Gleichgewichtsbedingung am Gütermarkt ausgeht, unterstellt die neoklassische Theorie ein Gleichgewicht auf allen Märkten, also auch auf den Faktormärkten. Im vorliegenden Fall eines Ein-Sektor-Modells ist die Gleichgewichtsbedingung für die Faktormärkte implizit in der verwendeten Produktionsfunktion enthalten, in der die gesamten Angebotsmengen an Arbeit und Kapital als Argument auftauchen. Damit wird unterstellt, daß die Nachfrage nach Faktoren stets dem Angebot entspricht und die Preise auf den Faktormärkten vollständig flexibel sind, um diesen Ausgleich zu gewährleisten. Die neoklassische Wachstumstheorie unterstellt also ein **unbehindertes, freies System von Märkten**. Diese Tatsache ist insbesondere bei der Ableitung von wirtschaftspolitischen Empfehlungen aus den Wachstumsmodellen zu berücksichtigen. Denn die **Ursachen des Wachstums** des Nationaleinkommens in der Modelltheorie sind im wesentlichen das Wachstum der Faktormengen und der technische Fortschritt. Beide Ursachen hängen aber selbst wiederum von Einflußfaktoren ab, etwa von den Sparentscheidungen und der Effizienz der Produktion in jedem Zeitpunkt. Zum Beispiel wird der technische Fortschritt vermutlich um so geringer ausfallen, je mehr von den Faktormengen verschwendet wird, das heißt, je geringer die statische Produktionseffizienz ist. Wenn man demgemäß eine funktionierende marktwirtschaftliche Ordnung als eine Ursache des Wachstums ausmacht, ist also festzuhalten, daß die mathematische Modelltheorie zu dieser Ursache keine Aussagen liefert, sondern sie voraussetzt. In denjenigen Ländern, in denen diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, muß also zunächst eine effiziente Marktwirtschaft eingeführt werden, bevor eventuell weitergehende Politikempfehlungen der neoklassischen Wachstumstheorie greifen können.[4]

Zur Lösung des Modells ist zunächst zu beachten, daß die Änderung des Kapitalstocks in der Zeit, $\dot{K}$, gleich den Nettoinvestitionen ist, die unter Vernachlässigung von Abschreibungen den Bruttoinvestitionen I entsprechen. Unter Verwendung von (3.1) folgt für die Wachstumsrate g_K des Kapitalstocks

$$g_K := \frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} = s\frac{Y}{K}.$$

Da die Produktionsfunktion linearhomogen in (K, L) ist, erhält man für das Pro-Kopf-Einkommen Y/L

$$y := Y/L = F(K/L, 1) = f(K/L) = f(k),$$

[3] Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied zur keynesianischen Theorie, in der in der Regel eine unabhängige Investitionsfunktion verwendet wird.

[4] In neuerer Zeit gibt es erste Versuche, nicht nur das Wachstum moderner Volkswirtschaften, sondern auch dasjenige von traditionellen Gesellschaften und deren Übergang zum marktwirtschaftlichen System modelltheoretisch zu erfassen, vgl. etwa Goodfriend und McDermott (1995) und Galor und Weil (2000).

wobei f die Pro-Kopf-Produktionsfunktion bezeichnet, und $k = K/L$ die Kapitalintensität ist. Die Wachstumsrate von k ergibt sich durch die logarithmische Ableitung von $k = K/L$ nach der Zeit:

$$g_k = g_K - g_L.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit k unter Berücksichtigung von $\dot{K} = sY$, $g_L = n$ und $y = f(k)$, so folgt

$$\dot{k} = sf(k) - nk. \tag{3.2}$$

Diese Gleichung wird als **Solows fundamentale Wachstumsgleichung** bezeichnet.

Im folgenden wird grundsätzlich eine neoklassische Produktionsfunktion unterstellt, die formal definiert wird.

Definition 3.1. *Eine substitutionale Produktionsfunktion $F(K,L)$ heißt* ***neoklassisch****, wenn sie linearhomogen ist und positive, aber abnehmende Grenzproduktivitäten hat:*

$$F_K > 0,\ F_L > 0, \quad F_{KK} < 0,\ F_{LL} < 0.$$

Darüber hinaus wird zunächst angenommen, daß die Pro-Kopf-Produktionsfunktion $f(k)$ die sogenannten **Inada-Bedingungen** erfüllt:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0^+} f(k) &= 0,\\
\lim_{k\to\infty} f(k) &= \infty,\\
\lim_{k\to 0^+} f'(k) &= \infty,\\
\lim_{k\to\infty} f'(k) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Zwischen den Ableitungen von F und f besteht wegen $Y = F(K,L) = Lf(k)$ der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Y}{\partial K} = Lf'(k)\frac{1}{L} = f'(k) > 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = f''(k)\frac{1}{L} < 0,\\
&\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) + Lf'(k)\frac{-K}{L^2} = f(k) - kf'(k) > 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \frac{k^2}{L}f''(k) < 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wie man anhand der Abbildung 3.1 erkennt, impliziert die Annahme einer neoklassischen Produktionsfunktion mit den Inada-Bedingungen, daß für $k \in (0,\infty)$ genau ein stabiles langfristiges Gleichgewicht $\hat{k}$ mit $\dot{k} = 0$ der Gleichung (3.2) existiert (wobei die Annahmen hinreichend, aber nicht notwendig für dieses Ergebnis sind). Im oberen Teil der Abbildung werden die Funktionen $sf(k)$ und nk dargestellt. Die Differenz beider Funktionen ergibt $\dot{k}$ und findet sich im unteren Teil der Abbildung, die das Phasendiagramm für das grundlegende neoklassische Wachstumsmodell darstellt. Wie im Abschnitt 2.1.4 gezeigt worden ist, folgt die Stabilität formal auch daraus, daß die Ableitung von (3.2) nach k, $sf'(k) - n$, negativ ist. Denn im Gleichgewicht gilt $sf(k)/k - n = 0$ und wegen $f'(k) < f(k)/k$ gemäß (3.4) folgt $sf'(k) - n < 0$, wenn $\dot{k} = 0$ ist. Anhand der Abbildung 3.1 läßt sich auch direkt ablesen, daß das Gleichgewicht $\hat{k}$ für $k > 0$ global stabil ist. Das Gleichgewicht $k = 0$ ist dagegen für $k \geq 0$ instabil. Solange Kapital existiert, nähert sich die Volkswirtschaft also unabhängig vom Startwert in der Zeit immer mehr dem Gleichgewicht $\hat{k}$ an. Eine Kapitalintensität von $k > \hat{k}$ ist demnach langfristig nicht aufrecht zu erhalten.

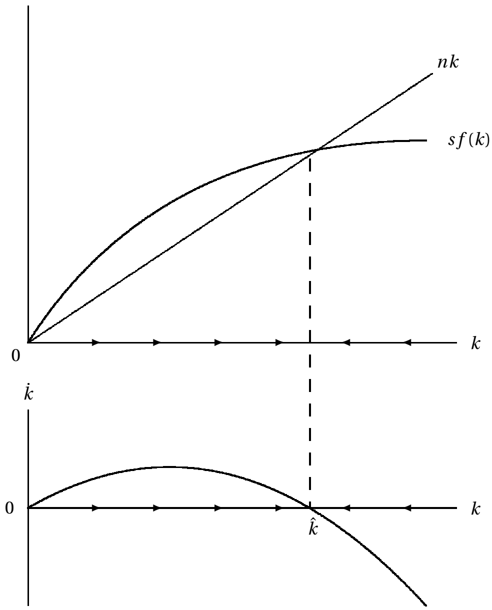

Abbildung 3.1
Das neoklassische Grundmodell

Im langfristigen Gleichgewicht mit $\dot{k} = 0$ folgt aus $g_k = g_K - g_L = 0$, daß $g_K = g_L = n$. Wegen $y = f(k)$ ist auch $g_y = g_Y - g_L = 0$ und damit $g_Y = n$. Aus $S = I = sY$ folgt, daß S und I und damit schließlich auch C ebenfalls mit der Rate n wachsen. Im neoklassischen Wachstumsgleichgewicht sind also alle Wachstumsraten konstant. Insbesondere wachsen im Grundmodell die aggregierten Variablen mit der exogenen Rate n des Bevölkerungswachstums, so daß die Wachstumsraten der Pro-Kopf-Variablen alle gleich null sind. In Verallgemeinerung dieses Ergebnisses wird das **gleichgewichtige Wachstum (steady state)** beziehungsweise das **langfristige Gleichgewicht** auch in allgemeineren Fällen **durch die Konstanz aller Wachstumsraten definiert**. Im neoklassischen Ansatz liegt also ungleichgewichtiges Wachstum vor, wenn nicht alle Wachstumsraten konstant sind. Davon zu unterscheiden ist das statische Gleichgewicht der Märkte in jedem Zeitpunkt, das in der neoklassischen Theorie auch im ungleichgewichtigen Wachstum erfüllt ist. Die zentralen Ergebnisse werden durch die folgende Aussage zusammengefaßt.

Aussage 3.1. *Wenn die Produktionsfunktion neoklassisch ist und die Inada-Bedingungen erfüllt, existiert für Startwerte* $k_0 > 0$ *ein eindeutiges und global stabiles langfristiges Gleichgewicht im neoklassischen Grundmodell, in dem das Einkommen, der Konsum und der Kapitalstock mit der Rate des Bevölkerungswachstums zunehmen.*

Eine interessante Abwandlung des Modells ergibt sich, wenn man zum Beispiel annimmt, daß entweder die Sparquote oder die Wachstumsrate der Bevölkerung nicht konstant ist, sondern mit der Höhe des Pro-Kopf-Einkommens variiert. Dann ändert sich entweder der Verlauf von $sf(k)$ oder der von nk. Je nach den Eigenschaften der Abhängigkeit etwa der Sparquote vom Pro-Kopf-Einkommen kann sich zum Beispiel das Phasendiagramm 3.2 ergeben. Da das Gleichgewicht $\hat{k}_1$ lokal stabil ist, wird es von einer Volkswirtschaft erreicht, die in der Nähe dieses Gleichgewichtes startet. Daher wird $\hat{k}_1$ als **Armutsfalle** bezeichnet, in der das Pro-Kopf-Einkommen relativ niedrig ist. Das Gleichgewicht $\hat{k}_2$ ist instabil. Für $k < \hat{k}_2$ fällt die Volkswirtschaft auf $\hat{k}_1$ zurück, für $k > \hat{k}_2$ erreicht die Volkswirtschaft schließlich das Gleichgewicht $\hat{k}_3$. Dieser Ansatz liefert eine mögliche Erklärung für Einkommensunterschiede zwischen verschiedenen Ländern. Denn wenn ein Land einen geringeren Wert der Kapitalintensität, $k = \hat{k}_1$, im langfristigen Gleichgewicht hat als ein anderes, $k = \hat{k}_3$, so hat es gemäß $y = f(k)$ auch ein geringeres Pro-Kopf-Einkommen. Allerdings ist es schwierig, unterschiedliche Wachstumsraten mit diesem Ansatz zur erklären. Denn im Falle einer exogenen Wachstumsrate n der Bevölkerung wachsen in beiden stabilen Gleichgewichten die aggregierten Variablen ebenfalls mit der Rate n. Das Pro-Kopf-Einkommen ist daher jeweils konstant. Ein wesentliches Anliegen der Theorie des endogenen Wachstums ist es gerade, Unterschiede in den Wachstumsraten des (Pro-Kopf-) Einkommens zu erklären, und zwar ohne dabei auf exogene Parameter wie n zu rekurrieren.

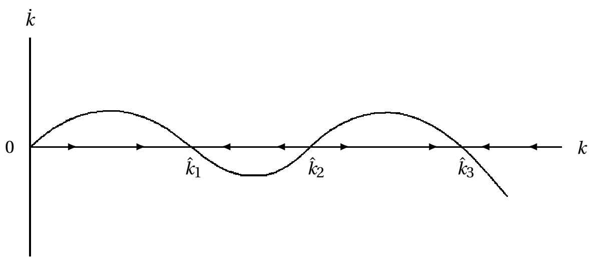

Abbildung 3.2
Eine Armutsfalle im neoklassischen Grundmodell

Im Falle der Abbildung 3.2 besteht eine sinnvolle Strategie der Entwicklungspolitik in einer Erhöhung der Kapitalintensität auf einen Wert in Höhe von $k > \hat{k}_2$, so daß schließlich der Wert $\hat{k}_3$ erreicht werden kann. Jede Anhebung der Kapitalintensität auf einen geringeren Wert als $\hat{k}_2$, etwa durch Entwicklungshilfe von außen, ist ineffektiv, weil sich die betrachtete Volkswirtschaft in diesem Fall zurück zur stabilen

Armutsfalle bewegt. Insofern ist hier also ein **big push** erforderlich.

3.1.3 Erweiterungen

Die bisherige Darstellung vernachlässigt zwei wesentliche Aspekte, deren Bedeutung für das Wirtschaftswachstum sich geradezu aufdrängt: den Verschleiß des Kapitalstocks und den technischen Fortschritt. Die einfachste Möglichkeit zur Berücksichtigung des Kapitalverschleißes besteht in der Verwendung einer konstanten **Abschreibungsrate** $\delta \geqq 0$. Für die Veränderung des Kapitalbestands gilt dann

$$\dot{K} = I - \delta K = sF(K, L) - \delta K,$$

wobei $\dot{K}$ gleich der Nettoinvestition ist und I die Bruttoinvestition bezeichnet, die mit der Ersparnis sY übereinstimmt. Demnach bezeichnet $Y = F(K, L)$ hier das Einkommen nach einem Bruttokonzept, etwa das Bruttonationaleinkommen. Die Sparquote s ist daher als Bruttosparquote zu interpretieren, so daß die Ersparnis die Abschreibungen enthält. Aus dem Ansatz $g_k = g_K - g_L$ läßt sich nun völlig analog zur Ableitung der Gleichung (3.2) die Beziehung

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

finden.

Die einfachste Möglichkeit, den **technischen Fortschritt** zu berücksichtigen, besteht in der Unterstellung eines exogenen, faktorungebundenen Fortschritts mit konstanter Rate. Man kann zeigen, daß ein **gleichgewichtiges Wachstum** im neoklassischen Grundmodell **nur dann möglich** ist, wenn der technische Fortschritt **Harrod-neutral** beziehungsweise **arbeitsvermehrend** ist.[5] Obwohl diese Annahme restriktiv ist, kann sie dadurch motiviert werden, daß sie mit den stilisierten Fakten über das Wachstum im Einklang steht, denen zufolge der Kapitalkoeffizient bei steigender Arbeitsproduktivität langfristig konstant ist (vgl. auch den Abschnitt 4.1). Mit arbeitsvermehrendem technischen Fortschritt kann die neoklassische Produktionsfunktion wie folgt geschrieben werden:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)).$$

Der technische Fortschritt in der Form von $A(t) = A_0 e^{\gamma t}$ wirkt also wie eine Multiplikation der gesamten Einsatzmenge der Arbeit $L(t)$ mit dem Faktor $A(t)$. Der Fortschritt ist daher nicht an neue Produktionsfaktoren gebunden. Der Einfachheit halber wird $A_0 = 1$ gesetzt, so daß

$$A(t) = e^{\gamma t}$$

[5] Vgl. hierzu und zur Klassifikation des technischen Fortschritts zum Beispiel Burmeister und Dobell (1970, Kapitel 3) sowie Barro und Sala-i-Martin (1998, S. 63–64).

ist. Das Produkt $A(t)L(t)$ heißt **effektive Arbeitsmenge**. Anstelle der Pro-Kopf-Produktionsfunktion $y = f(k)$ wird nun eine Produktionsfunktion pro effektiver Arbeitseinheit

$$y = F(K/(AL), 1) =: f(k) \tag{3.5}$$

definiert, wobei $y = Y/(AL)$ und $k = K/(AL)$ ist. Aus dem Ansatz $g_k = g_K - g_L - g_A$ läßt sich nun analog zum bisherigen Vorgehen die Beziehung

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta + \gamma)k \tag{3.6}$$

ableiten, wobei auch die Abschreibungen berücksichtigt worden sind.

Das Phasendiagramm 3.3 der Gleichung (3.6) unterscheidet sich qualitativ nicht von demjenigen für die Gleichung (3.2). An die Stelle der Kapitalintensität k tritt jetzt der Kapitalstock pro effektiver Arbeitseinheit k und anstelle des Parameters n tritt jetzt $n+\delta+\gamma$ auf. Aufgrund der Stabilität des Gleichgewichts k_e ist es sinnvoll, die grundlegenden Aussagen der neoklassischen Wachstumstheorie mit Bezug zum steady state abzuleiten. Wegen $\dot{k} = 0$ gilt hier $n + \delta + \gamma = sf(k)/k = sY/K = (\dot{K} + \delta K)/K = g_K + \delta$. Der Kapitalstock wächst also mit der konstanten Rate $n + \gamma$. Aus $y = f(k)$ und $\dot{k} = 0$ im langfristigen Gleichgewicht folgt $g_y = g_Y - g_A - n = 0$, wegen $g_A = \gamma$ also $g_Y = n + \gamma$. Für die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens erhält man daher

$$g_{Y/L} = \gamma.$$

Die Wachstumsrate des Effizienzfaktors A entspricht also im steady state der Wachstumsrate der Arbeitsproduktivität, und eine langfristig positive Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens kann in diesem Modell nur durch den exogenen technischen Fortschritt erklärt werden.

Aussage 3.2. *Wenn die Produktionsfunktion neoklassisch ist und die Inada-Bedingungen erfüllt, so wächst das Pro-Kopf-Einkommen unter Berücksichtigung des Harrod-neutralen technischen Fortschritts im langfristigen Gleichgewicht des neoklassischen Grundmodells mit der Rate des exogenen technischen Fortschritts.*

Die Gleichung (3.6) kann die Vermutung nahelegen, daß dieses Ergebnis nicht für den Fall einer **konstanten Bevölkerung** ohne Abschreibungen gilt. Normiert man $A \equiv 1$ für $n = \delta = \gamma = 0$, so ergibt sich mit $k = k$ die fundamentale Wachstumsgleichung als

$$\dot{k} = sf(k),$$

es existiert also kein Gleichgewicht mit $\dot{k} = 0$. Für die Veränderung des Kapitalstocks gilt $\dot{K} = sY$, und die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens ist

$$g_{Y/L} = g_Y = \frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\dot{K}}{Y} = sF_K(K, L).$$

Die Wachstumsrate von Y/L ist also auch für $\gamma = 0$ positiv, wenn die Grenzproduktivität des Kapitals positiv ist. Bei genauerer Betrachtung erkennt man aber, daß diese

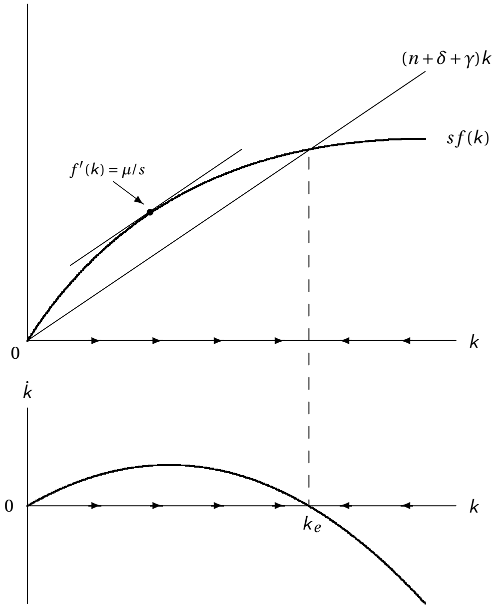

Abbildung 3.3
Das neoklassische Grundmodell mit Abschreibungen und technischem Fortschritt

Wachstumsrate für $K \to \infty$ bei Gültigkeit der Inada-Bedingungen gegen null konvergiert:

$$\lim_{K\to\infty} sF_K(K,L) = \lim_{K\to\infty} sf'(K/L) = s\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

Auch in diesem Fall gilt also, daß eine positive Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens im Falle einer neoklassischen Produktionsfunktion ohne technischen Fortschritt bei Gültigkeit der Inada-Bedingungen langfristig nicht möglich ist. Vielmehr ist $g_{Y/L}$ genau dann langfristig positiv, wenn die Grenzproduktivität des Kapitals nach unten durch einen positiven Wert ϵ beschränkt ist.

Analog gilt im Falle $n+\delta > 0$ und $\gamma = 0$, daß $g_{Y/L}$ genau dann langfristig positiv ist, wenn die **Grenzproduktivität des Kapitals** durch $\epsilon > (n+\delta)/s$ nach unten **beschränkt** ist.[6] In der Abbildung 3.3 gilt $\mu := n+\delta+\gamma$, für $\gamma = 0$ also $\mu := n+\delta$ (und $k = k$). Für $f'(k) = \mu/s$ entspricht die Steigung von $sf(k)$ derjenigen von μk. Wird bei fallenden Grenzproduktivitäten der Wert $f'(k) = \mu/s$ erreicht, so existiert wegen der weiter in k fallenden Grenzproduktivität ein Gleichgewicht, in dem für $\gamma = 0$ die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens gleich null ist. Ist dagegen $f'(k)$ durch $\epsilon > \mu/s$ nach unten beschränkt und ist $\lim_{k\to\infty} f'(k) = \epsilon$, so gilt dieser Grenzwert nach der Regel von de

[6]Dieses Ergebnis, daß die Grundlage zahlreicher Ansätze der modernen Wachstumstheorie ist, findet sich auch schon bei Solow (1956) und bei Kurz (1968), auf dessen Ansatz Jones und Manuelli (1990) aufbauen.

l'Hôspital auch für $f(k)/k$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{f'(k)}{1} = \epsilon.$$

Damit erhält man für die Wachstumsrate der Kapitalintensität aus (3.6):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta) = s\epsilon - (n+\delta).$$

Für $k \to \infty$ ist also $g_k = 0$, wenn $\epsilon = (n+\delta)/s$, und $g_k > 0$, wenn $\epsilon > (n+\delta)/s$. Wegen $y = f(k)$ gilt das unter Berücksichtigung der beiden vorausgehenden Gleichungen auch für das Pro-Kopf-Einkommen:

$$g_y = \frac{f'(k)\dot{k}}{f(k)} = \frac{f'(k)}{f(k)/k}\frac{\dot{k}}{k} \quad \xrightarrow[\lim k\to\infty]{} \quad s\epsilon - (n+\delta).$$

Aussage 3.3. *Wenn die Grenzproduktivität des Kapitals durch $\epsilon > (n+\delta)/s$ nach unten beschränkt ist und kein technischer Fortschritt vorliegt, wächst das Pro-Kopf-Einkommen im neoklassischen Grundmodell langfristig mit der Rate $s\epsilon - (n+\delta) > 0$.*

Das neoklassische Wachstumsmodell führt also im allgemeinen zu der Vorhersage langfristig konstanter Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens sowie identischer konstanter Wachstumsraten von Einkommen und Kapitalstock. Diese Ergebnisse ändern sich nicht, wenn man von der Annahme einer konstanten Sparquote abgeht (vgl. den Abschnitt 3.3). Die Höhe der Sparquote beeinflußt zwar nicht die Wachstumsrate im steady state, wohl aber das Niveau des Wachstumspfades, also die Höhe des langfristigen Pro-Kopf-Einkommens. Letztere Aussage erkennt man unmittelbar anhand der Abbildung 3.1, wenn man sich eine höhere als die dargestellte Sparquote und die dazugehörige Kurve $sf(k)$ denkt, die zu einem höheren Wert der gleichgewichtigen Kapitalintensität und damit auch des gleichgewichtigen Pro-Kopf-Einkommens führt. Die Höhe der Sparquote hat also keinen **Wachstumseffekt**, aber einen **Niveaueffekt**. Ohne technischen Fortschritt beläuft sich die langfristige Vorhersage für die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens auf null, wenn die Grenzproduktivität des Kapitals nicht hinreichend nach unten beschränkt ist.

Bemerkung 3.3. Zu den Eigenschaften des durch die Konstanz aller Wachstumsraten definierten langfristigen Gleichgewichts ist eine Anmerkung angebracht. Teilweise wird zusätzlich gefordert, daß K/Y konstant ist. Diese Bedingung ist im Solow-Modell mit einer konstanten Sparquote und allgemeiner immer dann automatisch erfüllt, wenn im langfristigen Gleichgewicht die Bruttosparquote konstant ist. Sei $\bar{s}$ die konstante Sparquote im langfristigen Gleichgewicht (also im gleichgewichtigen Wachstum). Dann folgt aus $\dot{K} = \bar{s}Y - \delta K$, daß

$$g_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\bar{s}Y}{K} - \delta.$$

Die Konstanz von g_K impliziert also die Konstanz von Y/K und damit die Bedingung

$$g_K = g_Y.$$

$\Diamond$

Die bisherigen Aussagen beziehen sich auf das langfristige Gleichgewicht, das stabil ist und daher asymptotisch erreicht wird. **Abseits des steady state** sind die Wachstumsraten dagegen nicht konstant. Zum Beispiel weist eine Volkswirtschaft, die mit einem geringeren als dem gleichgewichtigen Wert der (effektiven) Kapitalintensität startet, auch ohne technischen Fortschritt positive Wachstumsraten der (effektiven) Kapitalintensität auf. Denkt man sich Ursprungsstrahlen zu ausgewählten Punkten der Kurve $\dot{k}$ im unteren Teil der Abbildung 3.3, so kann man anhand deren Steigungen unmittelbar erkennen, daß die Wachstumsrate g_k in k monoton fällt. Je kleiner der Startwert von k, desto höher ist also ceteris paribus die Wachstumsrate von k. Um eine Aussage für das Pro-Kopf-Einkommen abzuleiten, wird die Wachstumsrate von y anhand der Produktionsfunktion pro effektiver Arbeitseinheit (3.5) berechnet:

$$g_y = \underbrace{\frac{f'(k)k}{f(k)}}_{=:\sigma_K(k)} g_k.$$

Mit $y = y/A$ und $g_A = \gamma$ folgt also

$$g_y = \sigma_K(k) g_k + \gamma, \tag{3.7}$$

wobei $\sigma_K(k)$ die partielle Produktionselastizität des Kapitals ist, die aufgrund der Linearhomogenität der Produktionsfunktion bei vollständiger Konkurrenz der Gewinnquote entspricht, definiert als Anteil der Nichtarbeitseinkommen am Nationaleinkommen. Für eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ist $\sigma_K(k) = \alpha$ konstant. Aus (3.7) folgt in diesem Fall unmittelbar, daß sich die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in dieselbe Richtung wie diejenige der effektiven Kapitalintensität verändert. Für den allgemeineren Fall einer neoklassischen Produktionsfunktion kann man dieses Ergebnis zumindest für Startwerte, die unterhalb des langfristigen Gleichgewichts liegen, ebenfalls nachweisen (vgl. Barro und Sala-i-Martin, 1998, S. 28). Also gilt die

Aussage 3.4. *Wenn die (effektive) Kapitalintensität im neoklassischen Grundmodell unterhalb ihres langfristigen Gleichgewichtswertes liegt, fällt die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens mit steigender (effektiver) Kapitalintensität.*

Das Solow-Modell stellt nach wie vor den grundlegenden Ansatz der neoklassischen Wachstumstheorie dar. Allerdings ist es in vielerlei Hinsicht erweitert und modifiziert worden. Empirisch ist vor allem die Vorhersage eines Pro-Kopf-Wachstums von null im Modell ohne technischen Fortschritt problematisch. Die Verwendung des exogenen technischen Fortschritts erzeugt zwar ein positives Pro-Kopf-Wachstum, kann aber als exogene Größe keine Erklärung für die Ursachen dieses Wachstums liefern. In den sechziger Jahren ist das Modell daher durch die Einführung des endogenen technischen Fortschritts erweitert worden. Hier sind insbesondere die Ansätze von Arrow (1962), Uzawa (1965) und Shell (1966) zu nennen, auf die sich auch die neue Theorie des (semi-) endogenen Wachstums beruft. Andere wichtige Erweiterungen in den frühen Jahren der neoklassischen Wachstumstheorie betreffen zum Beispiel die Einführung von Geld (Tobin, 1965), die Berücksichtigung zweier oder mehrerer Sektoren (Uzawa, 1961a, 1963; Hahn, 1966) und die Einbeziehung des Außenhandels (Bardhan, 1965; Oniki und Uzawa, 1965). Schließlich ist die Annahme einer konstanten Sparquote von Cass (1965) und Koopmans (1965) durch die auf Ramsey (1928) zurückgehende Verwendung der Theorie der optimalen Ersparnis ersetzt worden, wobei diese Autoren allerdings zunächst von einer normativen Interpretation ihrer Ergebnisse ausgegangen sind, die später in eine positive Interpretation gewandelt worden ist. Den Stand der Forschung bis zum Jahr 1970 geben Burmeister und Dobell (1970) sowie Wan (1971) wieder. Aus der deutschsprachigen Literatur sind insbesondere Krelle (1988) und als Übersichtsaufsatz Vosgerau (1980) zu empfehlen.[7] Für die Analyse in diesem und den folgenden Kapiteln spielen insbesondere die Ansätze der optimalen Ersparnis, Arrows learning by doing und die Erweiterung auf offene Volkswirtschaften eine Rolle.

3.2 Optimale Entscheidungen in der Zeit

3.2.1 Nutzenmaximierung mit unendlichem Planungshorizont

Berechnung der optimalen Lösung Während Solow (1956) eine konstante Sparquote unterstellt hat, wird nun die Alternative einer mittels der Verfahren der dynamischen Optimierung berechneten optimalen Konsumfunktion betrachtet. Dazu wird das auf der Seite 72 behandelte Beispiel 2.10 der Nutzenmaximierung für den Fall $T = \infty$ in der current-value Formulierung gemäß der Darstellung im Beispiel 2.11 auf der Seite 77 analysiert. Die auf Ramsey (1928) zurückgehende Lösung dieses Problems liefert die heute in praktisch der gesamten Literatur zur neoklassischen Wachstumstheorie verwendete Konsumhypothese, deren Verbindung mit dem Solow-Modell das sogenannte Ramsey-Koopmans-Cass-Modell des optimalen Wachstums ergibt, das im Abschnitt 3.3 dargestellt wird.

Anstelle der zum Fall des endlichen Planungshorizontes analogen Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} a(t) \geqq 0$ wird lediglich gefordert, daß der **Barwert** des Endvermögens nichtnegativ ist. Der Einfachheit halber wird wie zuvor angenommen, daß der **Re-**

[7] Aus der neueren deutschsprachigen Lehrbuchliteratur, die neben dem Solow-Modell auch aktuelle Neuerungen enthält, sind insbesondere Arnold (1997), Bretschger (2004), Frenkel und Hemmer (1999) sowie Maußner und Klump (1996) zu nennen.

allohnsatz $w > 0$ **und der Zinssatz** $r > 0$ **konstant** sind.

$$
\begin{aligned}
&\max_{c \in \bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\, dt, \quad \theta > 0, \\
&\qquad \text{u. d. N.} \\
&\qquad \dot{a} = w + ra - c, \quad a(0) = a_0,\ \liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) \geqq 0, \\
&\qquad c(t) \geqq 0.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Damit das Problem eine sinnvolle Lösung hat, muß wie zuvor unterstellt werden, daß $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) > 0$ erreichbar ist, wenn nicht konsumiert wird. Die Verwendung des einfachen Maximierungskriteriums (anstelle etwa des im Abschnitt 2.3.3 dargestellten catching up-Kriteriums) ist gerechtfertigt, weil später gezeigt wird, daß das Zielfunktional für alle zulässigen Lösungen konvergiert. Ein Ziel dieses Abschnittes ist es auch, anhand einer exakten Anwendung des Maximumprinzips zu zeigen, wie aufwendig die Lösung selbst einfacher dynamischer Optimierungsprobleme ist. Schließlich werden die weitreichenden Auswirkungen selbst kleiner Fehler in der Berechnung der optimalen Lösung anhand numerischer Beispiele diskutiert.

Die Bedingung $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) \geqq 0$ wird häufig als **Bedingung zum Ausschluß eines Ponzi-Spiels** bezeichnet (vgl. zum Beispiel Blanchard und Fischer, 1989, S. 49). Sie verhindert, daß der Konsument seinen Konsum und seine Zinszahlungen bei negativem Vermögen durch eine immer weitere Verschuldung bezahlen kann (wie mit Kettenbriefen). Wenn $a(t)$ negativ ist, dürfen die Schulden demnach langfristig höchstens mit einer kleineren Rate als r wachsen, damit die Bedingung erfüllt ist. Ein negatives Endvermögen ist zulässig, so daß diese Beschränkung weniger restriktiv als die Bedingung $\liminf_{t\to\infty} a(t) \geqq 0$ ist. Später wird gezeigt, daß im allgemeinen keine optimale Lösung des Problems (3.8) existiert, wenn die strengere Bedingung der Nichtnegativität des Endvermögens verwendet wird.[8]

Die current-value Hamiltonfunktion lautet

$$\mathcal{H} = \lambda_0 \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda^c (w + ra - c).$$

Aus dem Satz 2.20 auf der Seite 88 ergeben sich die folgenden notwendigen Optimumbedingungen für eine innere Lösung:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \lambda_0 c^{-\theta} - \lambda^c = 0, \\
\dot{\lambda}^c &= \rho\lambda^c - r\lambda^c,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

wobei die erste Gleichung hinreichend für ein Maximum der Hamiltonfunktion ist, weil $\mathcal{H}$ konkav in c ist. Eine innere Lösung liegt vor, weil wieder $\lambda_0 = 1$ und $\lambda^c(t) > 0$ für alle t ist.

[8] Für $w = 0$ besteht dieses Problem ebenso wie im später dargestellten Ramsey-Koopmans-Cass-Modell nicht, so daß dort auch einfach die Beschränkung $\liminf_{t\to\infty} a(t) \geqq 0$ verwendet werden kann.

Zunächst wird gezeigt, daß $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden kann. Wenn $\lambda_0 = 0$ ist, muß λ^c entweder für alle $t \geqq 0$ positiv oder für alle $t \geqq 0$ negativ sein, um die Bedingung $(\lambda_0, \lambda^c(t)) \neq (0,0)$ zu erfüllen. Für $\lambda^c(t) > 0$ impliziert die Maximierung von $\mathscr{H}$ dann, daß $c^*(t) = 0$ für alle t. Diese Lösung kann nicht optimal sein, weil der Nutzen mit dem Konsum steigt, und ein positiver Konsum annahmegemäß möglich ist. Für $\lambda^c(t) < 0$ impliziert die Maximierung von $\mathscr{H}$, daß $c^*(t) = \infty$ für alle t. Diese Lösung ist nicht zulässig, weil sie $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) < 0$ impliziert. Folglich kann $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden. Der Einfachheit halber ist aus diesem Grund statt λ_1^c gleich λ^c als Kozustandsvariable gewählt worden.

Auch wenn $\lambda_0 = 1$ ist, impliziert die Maximierung der Hamiltonfunktion für $\lambda^c \leqq 0$, daß $c = \infty$. Da die Hamiltonfunktion streng konkav in c ist, gilt gemäß der Bemerkung 2.12 auf der Seite 70 in jedem Zeitpunkt $\dot{\lambda}^c = (\rho - r)\lambda^c$; also ist $\lambda^c(t) > 0$ für alle t (sonst gilt zum Beispiel im Falle $\lambda^c(t_1) = 0$ für ein beliebiges $t_1 \in [0,\infty)$, daß $\lambda^c(t) = 0$ für alle t und damit $c(t) \equiv \infty$, so daß die Lösung nicht zulässig ist).

Aus (3.9) läßt sich mit $\lambda_0 = 1$ wie im Beispiel 2.10 die Keynes-Ramsey-Regel ableiten, so daß man wieder die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\theta}(r-\rho)c, \\ \dot{a} &= w + ra - c \end{aligned} \tag{3.10}$$

erhält. Da der Satz 2.20 keine Transversalitätsbedingung enthält, fungieren jetzt zunächst nur $a(0) = a_0$ sowie $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) \geqq 0$ als Randbedingungen. Da die Optimumbedingungen $\lambda^c = 1/c^\theta$ impliziert und $\lambda^c > 0$ ist, gilt auch $c > 0$, und gemäß (3.10) wächst $c(t)$ mit der Rate $(r-\rho)/\theta$. Bezeichnet man den Startwert mit c_0, so gilt also

$$c(t) = c_0 e^{(r-\rho)t/\theta}.$$

Setzt man diesen Wert in das Zielfunktional aus (3.8) ein, so erkennt man, daß es genau dann konvergiert, wenn

$$\int_0^\infty e^{[(1-\theta)(r-\rho)/\theta - \rho]t}\, dt$$

konvergiert, was genau dann der Fall ist, wenn der Exponent in eckigen Klammern negativ ist, wenn also

$$(1-\theta)(r-\rho)/\theta < \rho \tag{3.11}$$

ist. Da jede (auch hinsichtlich des sporadically catching-up Kriteriums) optimale Lösung die Beziehung (3.10) erfüllen muß, folgt aus (3.11) die Konvergenz des Zielfunktionals in (3.8) für jede zulässige Lösung. Die Formulierung mit dem einfachen Maximierungskriterium ist also genau dann sinnvoll, wenn (3.11) gilt. Andernfalls sind allgemeinere Optimalitätskriterien zu verwenden.

Zur Vereinfachung der Formeln wird **wieder** $\theta = 1$ **unterstellt**, so daß die Momentannutzenfunktion logarithmisch ist. Anhand von (3.11) ist zu erkennen, daß die Annahme $\rho > 0$ dann für die Konvergenz des Zielfunktionals ausreicht. Im Gegensatz zum Fall mit endlichem Planungshorizont T erhält man auch für ein konstantes $w > 0$ noch relativ einfache Ergebnisse. Unter Verwendung von $a(0) = a_0$ können die folgenden Lösungen der Differentialgleichungen (3.10) in Abhängigkeit von einer unbestimmten Konstanten $C_1 > 0$ analog zum Vorgehen im Beispiel 2.10 abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} c^*(t) &= C_1 e^{(r-\rho)t} \\ a^*(t) &= \left(a_0 + \frac{w}{r}\right) e^{rt} + \frac{C_1}{\rho}\left(e^{(r-\rho)t} - e^{rt}\right) - \frac{w}{r} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Konstante C_1 kann mittels der hinreichenden Bedingungen bestimmt werden. Zunächst ist festzustellen, daß $\Omega = [0, \infty)$ konvex und die Hamiltonfunktion konkav in (a, c) ist, da die Nutzenfunktion streng konkav in c und die Zustandsgleichung linear in a und c ist. Weil die abgeleiteten Lösungen der Differentialgleichungen die notwendigen Bedingungen mit $\lambda_0 = 1$ erfüllen, ist es also gemäß dem Satz 2.21 auf der Seite 90 (in Verbindung mit der Bemerkung 2.25) hinreichend, C_1 so festzulegen, daß die Grenztransversalitätsbedingung

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda^c(t)(a(t) - a^*(t)) \geqq 0$$

erfüllt ist. Setzt man $\lambda^c(t)$ und $a^*(t)$ ein und bildet den Grenzwert, so folgt schließlich

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda^c(t)(a(t) - a^*(t)) = \liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)}{C_1} e^{-rt} - \frac{1}{C_1}\left(a_0 + \frac{w}{r}\right) + \frac{1}{\rho}.$$

Da jede zulässige Trajektorie $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) \geqq 0$ erfüllen muß, ist der obige Grenzwert nichtnegativ, wenn $C_1 > 0$ ist und sich die beiden konstanten Summanden zu einem Wert größer oder gleich null addieren. Das wird durch $C_1 \geqq \rho(a_0 + w/r)$ gewährleistet. Gleichzeitig ist zu beachten, daß der Wert von C_1 implizieren muß, daß $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a^*(t) \geqq 0$ gilt. Anhand der Formel für $a^*(t)$ ist zu erkennen, daß diese Bedingung für $C_1 > \rho(a_0 + w/r)$ nicht erfüllt ist, wohl aber für $C_1 = \rho(a_0 + w/r)$. In diesem Fall sind also sowohl alle Nebenbedingungen als auch die Grenztransversalitätsbedingung erfüllt. Die optimale Lösung lautet daher

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \rho\left(a_0 + \frac{w}{r}\right) e^{(r-\rho)t}, \\ a^*(t) &= \left(a_0 + \frac{w}{r}\right) e^{(r-\rho)t} - \frac{w}{r}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Man erhält die abgeleiteten Ergebnisse auch, indem in den im Beispiel 2.10 abgeleiteten Beziehungen der Grenzwert für $T \to \infty$ gebildet wird (für $w > 0$). Das muß aber nicht so sein, weshalb eine gesonderte Argumentation für den Fall $T \to \infty$ im allgemeinen erforderlich ist. Anhand der Formeln (3.13) für die Lösung ist leicht zu erkennen, daß die optimale Kontrolltrajektorie im Falle eines unendlichen Planungshorizontes in feedback-Form darstellbar ist, was im Abschnitt 2.3.3 bereits allgemein dargestellt worden ist.

$$c^*(t) = \rho \left[a^*(t) + \frac{w}{r} \right] \tag{3.14}$$

Anhand von (3.13) ist zu erkennen, daß der Konsum langfristig gegen null und das Vermögen langfristig gegen $-w/r$ konvergiert, wenn $r < \rho$ ist. Im Falle $r > \rho$ wachsen beide Größen in der Zeit über alle Schranken. Für $r = \rho$ gilt $c^*(t) = ra^*(t) + w$ mit $a^*(t) = a_0$ für alle t. Wenn also die Diskontrate des Haushalts dem Zinssatz entspricht, wird pro Periode die Summe aus dem Arbeitseinkommen und den Zinsen des Reinvermögens konsumiert, so daß das Vermögen selbst konstant bleibt.

Tatsächlich ist das Problem einfach genug, um die Konstante C_1 auch ohne Transversalitätsbedingung zu bestimmen (allerdings ist die hinreichende Bedingung zum Nachweis der Optimalität erforderlich). Anhand der ersten Gleichung in (3.12) ist nämlich zu erkennen, daß C_1 so groß wie möglich gewählt werden muß, weil der Nutzen in c steigt. Aus der zweiten Gleichung folgt dagegen wie zuvor, daß C_1 nicht größer als $\rho(a_0 + w/r)$ sein darf, weil sonst die Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a^*(t) \geqq 0$ nicht erfüllt ist. Also muß $C_1 = \rho(a_0 + w/r)$ sein. Daher ist (3.13) die einzige Lösung, die die notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt.

Die Konstante C_1 ergibt sich auch anhand der Transversalitätsbedingung (2.88) auf der Seite 94. Denn aus

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \lambda^c(t) a^*(t) &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{C_1} \left(a_0 + \frac{w}{r} \right) + \frac{1}{\rho}(e^{-\rho t} - 1) - \frac{1}{C_1} \frac{w}{r} e^{-rt} \right) \\ &= \frac{1}{C_1} \left(a_0 + \frac{w}{r} \right) - \frac{1}{\rho} \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

folgt $C_1 = \rho(a_0 + w/r)$. Da gezeigt worden ist, daß nur (3.13) optimal sein kann, ist (2.88) eine notwendige Bedingung für das vorliegende Problem. Trotzdem ist sie für dieses Beispiel nicht von vornherein anwendbar. Denn mehrere der Annahmen für den allgemeinen Beweis von Benveniste und Scheinkman (1982) sind nicht erfüllt. Zum einen ist die Momentannutzenfunktion $\ln(c)$ nicht beschränkt, und zum anderen ist nicht gewährleistet, daß $a(t) \geqq 0$ für alle t. Araujo und Scheinkman (1983) haben für den allgemeinen Beweis der Bedingung (2.88) zwar die Annahme einer beschränkten Nutzenfunktion fallen gelassen, nicht aber die Nichtnegativität der Zustandsvariablen. Zwar kann man eine Zustandsbeschränkung einführen, doch existiert in diesem Fall eine optimale Lösung im allgemeinen nur im Sinne eines Supremums.

Die schon anfangs aufgestellte Behauptung, daß eine optimale Lösung im allgemeinen nicht existiert, wenn $\liminf_{t\to\infty} a(t) \geqq 0$ als Endbedingung verwendet wird, wird nun bewiesen. Dazu wird angenommen, daß $\rho > r$ ist. Aus der Lösung (3.13) ergibt sich in diesem Fall

$$\lim_{t\to\infty} a^*(t) = -\frac{w}{r} < 0,$$

das heißt, diese Lösung ist nicht zulässig. Jede optimale Lösung muß die Gleichungen (3.12) erfüllen, die aus dem Maximumprinzip folgen. Anhand dieser Beziehungen kann man erkennen, daß $\liminf_{t\to\infty} a^*(t) \geqq 0$ für $\rho > r$ genau dann erfüllt ist, wenn

$$\liminf_{t\to\infty}\left(a_0 + \frac{w}{r} - \frac{C_1}{\rho}\right)e^{rt} \geqq \frac{w}{r}$$

ist. Wie bereits ermittelt, ist $C_1 = \rho(a_0 + w/r)$ also nicht zulässig. Wählt man $C_1 = \rho(a_0 + w/r) - \epsilon$, so ist die Ungleichung für jedes $\epsilon > 0$ erfüllt. Das heißt, daß keine optimale Lösung im Sinne des Maximums existiert. Für $C_1 = \rho(a_0 + w/r)$ ergibt sich allerdings ein Supremum des Zielfunktionals.

Eine alternative Lösung des dargestellten Problems findet sich bei Arrow und Kurz (1970, S. 155–156), die die Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} a(t) \geqq 0$ durch die Bedingung

$$\liminf_{t\to\infty}[a(t) + w/r] \geqq 0$$

ersetzen, die für die optimale Lösung $a^*(t)$ offenbar erfüllt ist. Da w/r der Barwert des Lohneinkommens ist, wird also die Forderung nach einem asymptotisch nichtnegativen Barwert des Reinvermögens durch die Nichtnegativität des Barwertes des Gesamtvermögens substituiert, das sich aus dem Reinvermögen und dem kapitalisierten Lohneinkommen zusammensetzt.

Fehler in den Berechnungen In dem im letzten Abschnitt diskutierten Beispiel der dynamischen Nutzenmaximierung ist unterstellt worden, daß die Konsumenten bei ihren Berechnungen keinerlei Fehler machen. Im folgenden werden die Implikationen des Modells analysiert, wenn bestimmte Planungsfehler auftreten. Um die Analyse weiter zu vereinfachen, wird **jetzt** $w = 0$ **gesetzt**, so daß der betrachtete Haushalt kein Arbeitseinkommen hat. Die optimalen Lösungen in offener Schleife beziehungsweise in Rückkopplung lauten dann

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \rho a_0 e^{(r-\rho)t}, \\ a^*(t) &= a_0 e^{(r-\rho)t}, \\ c^*(t) &= \rho a^*(t). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Angenommen, ein Haushalt habe nach der Absolvierung eines Kurses über dynamische Optimierung die hier abgeleitete Lösung des betrachteten extrem vereinfachten Problems berechnet. Wie stellt sich die dynamische Entwicklung dar, wenn er aufgrund unzureichender Informationen einen winzigen Planungsfehler macht? Hier reicht es schon, den einfachen Fall anzunehmen, daß die Diskontrate des Haushalts ρ gleich dem Effektivzinssatz r ist, wobei r aber nur – wie in der Realität üblich – bis auf zwei Nachkommastellen genau angegeben wird. Konkret sei $\rho = 0{,}1$, und die Angabe des Effektivzinssatzes durch eine Bank belaufe sich ebenfalls auf $r = 0{,}1$, wobei eine exakte Ermittlung aber den Wert $r = 0{,}09995$ ergibt. Das Anfangsvermögen sei $a_0 = 100$. Die Konsequenzen dieser Ausgangslage variieren in Abhängigkeit davon, ob der Konsument die open loop-Lösung oder die feedback-Lösung anwendet. Zunächst wird die Lösung in offener Schleife betrachtet. Weil aus Sicht des Haushalts $r = \rho$ gilt, ist in diesem Fall $c(t) = 0{,}1 \cdot 100 \cdot e^0 = 10$ gemäß (3.15). Um die Entwicklung von $a(t)$ zu berechnen, muß die Differentialgleichung $\dot{a} = 0{,}09995a - 10$ unter der Anfangsbedingung $a_0 = 100$ gelöst werden. Diese Lösung ist[9]

$$a(t) = -0{,}05003e^{0{,}09995t} + 100{,}05003.$$

Setzt man $a(t) = 0$ und löst nach t auf, so folgt

$$t = \ln(100{,}05003/0{,}05003)/0{,}09995 = 76{,}04605.$$

Das heißt, nach gut 76 Jahren ist das Reinvermögen, das ursprünglich für die Ewigkeit gedacht war, aufgebraucht. (Für $w = 0$ gilt im Optimum $\lim_{t\to\infty} a^*(t) = 0$.) Im Verhältnis zum unterstellten unendlichen Planungszeitraum sind auch etwa eine Trilliarde Jahre sehr wenig. Was sind dann aber 76 Jahre? Statt der optimalen Lösung, die ein nur langsam fallendes Reinvermögen beinhaltet, das für die Ewigkeit ausreicht, ergibt sich also eine Lösung, in der das Vermögen nach einem vernachlässigbar kurzen Zeitraum aufgebraucht ist. Die Ursache dafür ist einzig und allein die ungenaue dritte Nachkommastelle in der Zinssatzangabe.

Gegen dieses Ergebnis kann eingewendet werden, daß die Verfolgung einer open loop-Strategie unrealistisch ist. Dabei wird allerdings vergessen, daß eine reine feedback-Lösung, die noch nicht einmal von t abhängt, ohnehin nur in einfachen Spezialfällen zu ermitteln ist. Außerdem ist für eine feedback-Lösung natürlich eine Informationsstruktur erforderlich, die die Kenntnis der Zustandsvariablen in jedem Zeitpunkt beinhaltet.[10] Trotzdem ist der Vergleich mit einer Rückkopplungsstrategie interessant. Wenn die Konsumfunktion $c(t) = 0{,}1a(t)$ lautet, folgt das Reinvermögen der Differentialgleichung $\dot{a} = 0{,}09995a - 0{,}1a = -0{,}00005a$, deren Lösung

$$a(t) = 100e^{-0{,}00005t}$$

lautet. Das **ist die optimale Lösung** des Problems. Während also die Lösung in offener Schleife aufgrund des falschen verwendeten Zinssatzes völlig unbefriedigend ist, beeinflußt dieser Fehler die feedback-Lösung nicht (abgesehen davon, daß der Konsument sich wundern wird, daß sein Vermögen immer geringer wird, obwohl er in seiner Planung von einem konstanten Vermögen ausgeht). Das liegt im vorliegenden Beispiel daran, daß der Konsument zur Verwirklichung seiner optimalen Rückkopplungslösung lediglich seine eigene Diskontrate ρ und sein Vermögen $a(t)$, nicht aber den Zinssatz r genau kennen muß. In allgemeineren Fällen (zum Beispiel schon für $w > 0$) kann daher keine Hoffnung auf ein derart günstiges Ergebnis bestehen.

[9] Wenn man ein Phasendiagramm für das System (3.10) formuliert, so ist zu beachten, daß die hier berechneten Lösungen die Optimumbedingungen (3.10) nicht erfüllen. Daher entsprechen sie auch weder den optimalen noch irgendwelchen nichtoptimalen Trajektorien dieses Phasendiagramms.

[10] Die Kenntnis der Zustandsvariablen in jedem Zeitpunkt ergibt sich automatisch, wenn ein Modell keinerlei Planungsfehler oder stochastische Elemente enthält, weil dann der Zustand zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ am Anfang des Planungszeitraumes, $t = 0$, berechnet werden kann.

Zum Vergleich mit der open loop-Lösung bietet sich noch die Berechnung von a nach 76 Jahren an: $a(76) = 99{,}620723$. Das unterstreicht die deutliche Überlegenheit der feedback-Lösung im Vergleich zur open loop-Lösung. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes über Differentialgleichungen kann $a(t)$ im vorliegenden Fall niemals gleich null werden (allerdings konvergiert $a(t)$ für $t \to \infty$ gegen null). Um eine Vorstellung von der dynamischen Entwicklung zu erhalten, bietet sich daher die Berechnung der **Halbwertszeit** des Vermögens an, also der Zeit, die es dauert, bis das Vermögen zur Hälfte aufgebraucht ist. Dazu wird $a_0/2 = 50 = 100e^{-0{,}00005t}$ nach t aufgelöst: $t = \ln(2)/0{,}00005 = 13862{,}944$, das heißt, das Vermögen ist nach knapp 13863 Jahren halbiert, während es für die open-loop Lösung schon nach 76 Jahren aufgebraucht ist.

Als weiteres Beispiel wird unterstellt, daß $r = 0{,}1$ und $\rho = 0{,}085$ ist. Beide Werte seien dem Haushalt jetzt exakt bekannt. Das Anfangsvermögen beträgt $a_0 = 100$. Die optimale Lösung für den Konsum lautet dann $c^*(t) = 0{,}085 \cdot 100e^{0{,}015t}$. Der Haushalt begehe aber Rundungsfehler, wobei zwei verschiedene Möglichkeiten untersucht werden sollen. Zunächst wird unterstellt, daß nur der Startwert als ganzzahliger Wert durch Rundung falsch berechnet wird. Der Haushalt verwendet also den Startwert $c(0) = 0{,}085 \cdot 100e^0 = 8{,}5 \approx 9$, das heißt

$$c(t) = 9e^{0{,}015t}.$$

Dann folgt $a(t)$ der Differentialgleichung $\dot{a} = 0{,}1a - 9e^{0{,}015t}$, die für $a_0 = 100$ die Lösung[11]

$$a(t) = 105{,}8823529411765e^{0{,}015t} - 5{,}8823529411765e^{0{,}1t}$$

hat. Setzt man $a(t) = 0$ und löst nach t auf, so folgt, daß das Vermögen, das eigentlich wachsen sollte, aufgrund des Rundungsfehlers am Beginn des Planungszeitraumes schon nach

$$t = \ln(18)/0{,}085 = 34{,}004373$$

Jahren verbraucht ist.

Realistischer ist es allerdings, daß ein Haushalt, der am Anfang des Planungszeitraumes auf ganzzahlige Werte rundet, so auch weiterhin verfährt. Zur Darstellung dieser Variante wird die in *Mathematica*[12] implementierte Funktion `Round` verwendet, die jeder reellen Zahl die nächstliegende ganze Zahl zuordnet, so daß sich aus $\texttt{Round}(c^*(t))$ der jeweils gerundete Wert für den Konsum ergibt. Der Haushalt konsumiert also gemäß

$$c(t) = \texttt{Round}(c^*(t)) = \texttt{Round}\left(0{,}085 \cdot 100e^{0{,}015t}\right),$$

und das Vermögen folgt der unstetigen Differentialgleichung

$$\dot{a} = 0{,}1a - \texttt{Round}(c^*(t)),$$

[11] Die jetzt angegebene Lösung erfüllt die Optimumbedingungen (3.10). Daher entspricht sie auch bestimmten Trajektorien in einem Phasendiagramm der Differentialgleichungen (3.10), wobei aber der Startwert nicht optimal ist, so daß nicht der optimale Pfad ausgewählt wird.

[12] *Mathematica* ist ein eingetragenes Warenzeichen der Wolfram Research, Inc.

die nur numerisch gelöst werden kann. Die Berechnungen sind mit *Mathematica* aufgrund der folgenden Eingaben möglich, wobei auch der Wert $t = 59{,}3625$ berechnet worden ist, für den das Vermögen gleich null wird.

```
sol=NDSolve[{a'[t]==0.1 a[t]-Round[0.085*100*Exp[0.015 t]],
   a[0]==100},a,{t,0,200},MaxSteps->2000]
at=a/.sol; FindRoot[at[t]==0,{t,{40,41}},MaxIterations->100]
Plot[a[t]/.sol,{t,0,60},PlotStyle->Dashing[{0.04}]]
Plot[Round[0.085*100*Exp[0.015 t]],{t,0,60}]
```

In der Abbildung 3.4 werden die Ergebnisse bis zum Zeitpunkt $t = 100$ im Vergleich zur optimalen Lösung dargestellt. Die beiden Graphiken zeigen jeweils die optimale Lösung für $c(t)$ und $a(t)$ (glatte Kurven) sowie die gerundete Näherungslösung ($c(t)$ Treppenkurve und $a(t)$ gestrichelte Kurve). Man erkennt gut, daß die Rundungsfehler zu einem völlig unbefriedigenden Ergebnis führen. Das Reinvermögen ist bereits zum Zeitpunkt $t = 59{,}3625$ aufgebraucht, während es für die optimale Lösung wächst und gegen unendlich strebt. Wenn das Vermögen gleich null wird, verletzt jeder positive Konsum über ein endliches Intervall wegen $w = 0$ die Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt} a(t) \geqq 0$ (vgl. die frühere Argumentation für den Fall $w > 0$). Also ist der Konsum ab dem Zeitpunkt $t = 59{,}3625$ gleich null.

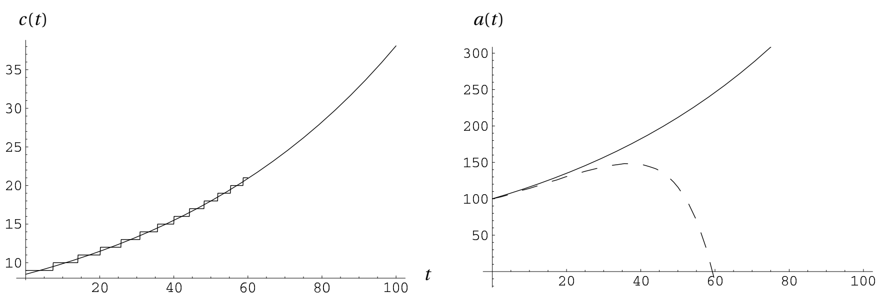

Abbildung 3.4
Open loop-Lösung und gerundete open loop-Lösung

Auch die Rückkopplungslösung für diesen Fall kann nur numerisch berechnet werden, weil sinnvollerweise in jeder Periode gerundet werden muß. Unter Verwendung der Funktion `Round` folgt der Konsument nun der Regel

$$c(t) = \mathtt{Round}(0{,}085a(t)).$$

Daraus ergibt sich für $a(t)$ die (unstetige) Bewegungsgleichung

$$\dot{a} = 0{,}1a - \mathtt{Round}(0{,}085a),$$

die mit *Mathematica* aufgrund der folgenden Eingaben numerisch gelöst werden kann.

```
sol=NDSolve[{a'[t]==0.1 a[t]-Round[0.085 a[t]],a[0]==100},
   a,{t,0,200},MaxSteps->4000]
Plot[a[t]/.sol,{t,0,100},PlotStyle->Dashing[{0.04}]]
Plot[Round[0.085 a[t]/.sol],{t,0,100}]
```

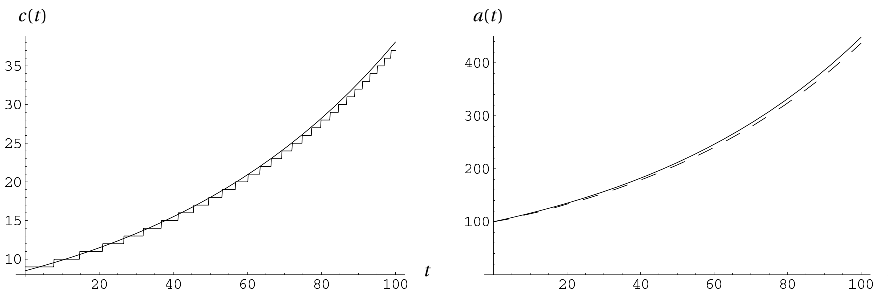

Abbildung 3.5
Feedback-Lösung und gerundete feedback-Lösung

Die Ergebnisse sind in der Abbildung 3.5 wieder im Vergleich zur optimalen Lösung dargestellt worden und belegen die deutliche Überlegenheit der Rückkopplungslösung gegenüber der Lösung in offener Schleife. Die beiden Graphiken zeigen jeweils die optimale Lösung für $c(t)$ und $a(t)$ (glatte Kurven) sowie die gerundete Näherungslösung in Rückkopplung ($c(t)$ Treppenkurve und $a(t)$ gestrichelte Kurve). Die feedback-Lösungen werden wie die Lösungen in offener Schleife dabei in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Man erkennt gut, daß die gerundete Lösung sich in einem Zeitraum von 100 Jahren nicht sehr weit von der optimalen Lösung entfernt. Numerisch sind die Werte bis $t = 200$ berechnet worden. Hier ergeben sich für das Reinvermögen folgende Zahlen (gerundete Näherungslösung mit Index r): $a^*(200) = 2008{,}56$, $a^r(200) = 1956{,}93$. Interessant sind auch die Ergebnisse für $t = 59{,}3625$, weil hier das Vermögen bei der gerundeten Lösung in offener Schleife schon gleich null ist: $a^*(59{,}3625) = 243{,}62$, $a^r(59{,}3625) = 238{,}066$.

Diese Überlegenheit der Rückkopplungslösung gegenüber der Lösung in offener Schleife ergibt sich daraus, daß sich die Rundungsfehler nicht fortsetzen, weil die Lösung immer wieder in Abhängigkeit vom Wert der Zustandsvariablen angepaßt wird. Wie bei der optimalen Lösung wächst das Vermögen in der Zeit, statt wie bei der open loop-Lösung mit falschem Startwert und der gerundeten open loop-Lösung zu fallen.

Festzuhalten ist, daß die Beispiele hier speziell gewählt worden sind. Für andere Parameterwerte ist es auch möglich, daß das Vermögen für eine gerundete open loop-Lösung oder eine solche mit falschem Startwert steigt. Trotzdem treten dann im allgemeinen extreme Abweichungen vom Optimum auf, und die feedback-Lösung erweist sich generell als verläßlicher. Ferner können die Ergebnisse auch noch alarmierender sein als hier dargestellt, weil es zum Beispiel möglich ist, daß das Vermögen für die gerundete feedback-Lösung konstant bleibt, statt zu steigen (wenn etwa $\rho = 0{,}095$ im obigen Beispiel verwendet wird).

Die Implikationen dieser Beispiele für die neoklassische Wachstumstheorie werden im Abschnitt 3.4.1 ausführlich diskutiert. Die zentralen Punkte werden kurz genannt. Open loop-Lösungen dynamischer Optimierungsprobleme sind instabil. Während feedback-Lösungen erheblich robuster gegenüber Fehlern in den Berechnungen sind, ist es in aller Regel nicht möglich, solche Lösungen zu berechnen (das hier betrachtete Beispiel ist extrem vereinfacht). Daher ist es naheliegend, einfache Faustregeln zu untersuchen, die als Rückkopplungsregeln formuliert sind.

3.2.2 Neoklassische Investitionstheorie

Bisher ist lediglich das dynamische Entscheidungsproblem eines Haushalts betrachtet worden. Analog dazu wird nun das dynamische Entscheidungsproblem eines Unternehmens bei vollständiger Konkurrenz analysiert. Im dynamischen Zusammenhang besteht das Ziel des Unternehmens in der Maximierung seines Ertragswertes, wobei der Planungshorizont unendlich ist. Der **Ertragswert** eines Unternehmens ist gleich dem Barwert seiner gegenwärtigen und zukünftigen Nettoeinnahmen. Wie bisher bezeichnen K und L die Einsatzmengen an Kapital und Arbeit und F die neoklassische Produktionsfunktion (vgl. die Definition 3.1), die die Inada-Bedingungen erfüllt und linearhomogen ist. Die Bruttoinvestition ist I und die konstante Abschreibungsrate $\delta > 0$. Der Einfachheit halber wird wieder unterstellt, daß der Reallohnsatz w und der Zinssatz r konstant sind und daß das betrachtete Unternehmen über vollkommene Voraussicht verfügt, so daß es auf der Grundlage dieser konstanten Werte kalkulieren kann.

Das dynamische Problem der Ertragswertmaximierung lautet unter diesen Annahmen:

$$
\begin{aligned}
&\max_{I,L\in\bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty [F(K,L) - wL - I]\,e^{-rt}\,dt,\\
&\qquad \text{u. d. N.}\\
&\qquad \dot{K} = I - \delta K, \quad K(0) = K_0 > 0,\ \liminf_{t\to\infty} K(t) \geqq 0,\\
&\qquad 0 \leqq I \leqq \bar{I}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Die Investitionen werden dabei in denselben Einheiten wie der Output gemessen, der als numéraire dient (was die Notation erleichtert). Die Bruttoinvestition ist in jedem Zeitpunkt durch die Untergrenze $I = 0$ und die Obergrenze $\bar{I}$ beschränkt. Die Art dieser Beschränkungen hat einen erheblichen Einfluß auf das Ergebnis.[13] Die

[13] Die neoklassische Investitionstheorie geht auf Jorgenson (1963) zurück, der die Investitionsbeschränkungen vernachlässigt hat. Eine kritische Darstellung findet sich bei Takayama (1985, S. 685–719), der sich auf den Fall einer unterlinearhomogenen Produktionsfunktion konzentriert. Der Zusammenhang mit der Tobinschen q-Theorie wird in Takayama (1993, Abschnitt 10.4.3) erläutert.

Annahme $K_0 > 0$ wird getroffen, um die Analyse zu vereinfachen, ohne daß dadurch die Ergebnisse wesentlich beeinflußt werden.

Zur Ableitung einer optimalen Lösung nach dem Satz 2.21 auf der Seite 90 wird die current-value Hamiltonfunktion

$$\mathscr{H} = F(K, L) - wL - I + \lambda^c (I - \delta K)$$

verwendet. Daraus ergeben sich die **hinreichenden Optimumbedingungen**

$$I^* = \begin{cases} 0 & : \lambda^c < 1, \\ \in [0, \bar{I}] & : \lambda^c = 1, \\ \bar{I} & : \lambda^c > 1, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$w = F_L(K^*, L^*), \tag{3.18}$$

$$\dot{\lambda}^c = (r + \delta)\lambda^c - F_K(K^*, L^*), \tag{3.19}$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} \lambda^c(t) [K(t) - K^*(t)] \geqq 0. \tag{3.20}$$

Gemäß (3.18) entspricht die Grenzproduktivität der Arbeit in jedem Zeitpunkt dem Reallohnsatz. Da die Produktionsfunktion neoklassisch, also linearhomogen ist, und die Inada-Bedingungen erfüllt, hat diese Gleichung eine Lösung, die die Kapitalintensität $K^*/L^* = k^* = k(w)$ eindeutig bestimmt [vgl. (3.4)]. Also ist auch die Grenzproduktivität des Kapitals konstant festgelegt (weil L^* bei Änderungen von K^* unmittelbar angepaßt wird), so daß man $F_K(K^*, L^*) = f'(k(w))$ in (3.19) einsetzen kann und eine lineare Differentialgleichung in λ^c mit konstanten Koeffizienten und konstantem Störterm erhält, die eine langfristige Wachstumsrate in Höhe von $(r + \delta)$ für λ^c impliziert, wenn λ^c nicht im Gleichgewicht startet [vgl. zur Lösung dieser Differentialgleichung (2.38) auf der Seite 31]. Also ist die langfristige Wachstumsrate von $e^{-rt}\lambda^c(t)$ langfristig gleich δ, während für $K_0 > 0$ die Wachstumsrate von K^* langfristig gleich $-\delta$ oder gleich null ist.[14] Daraus folgt, daß für $K_0 > 0$ genau dann $\lim_{t\to\infty} e^{-rt}\lambda^c(t)K^*(t) = 0$ gilt, wenn λ^c im Gleichgewicht mit $\dot{\lambda}^c = 0$ startet, das heißt, wenn für λ^c gilt:

$$\lambda^c = \frac{F_K(K^*, L^*)}{r + \delta} > 0.$$

Da $K(t) \geqq 0$ für alle t, wenn $K_0 > 0$ ist, ist in diesem Fall die Transversalitätsbedingung (3.20) erfüllt. Unter dieser Voraussetzung ist $\lambda^c \gtreqless 1$ genau dann, wenn $F_K(K^*, L^*) \gtreqless r + \delta$.

Um gemäß (3.17) die hinreichenden Bedingungen zu erfüllen, muß also der maximal (minimal) mögliche Betrag investiert werden, wenn die Grenzproduktivität größer (kleiner) als $r + \delta$ ist. Im Grenzfall mit $F_K(K^*, L^*) = r + \delta$ ist die Investition unbe-

[14] Wenn λ^c mit positiver Rate wächst, impliziert (3.18), daß $I = 0$ oder $I = \bar{I}$. Aus $\dot{K} = I - \delta K$ folgt für $I = 0$ direkt $w_K = -\delta$ und für $I = \bar{I}$ ergibt sich $w_K = \bar{I}/K - \delta \to 0$ weil $\bar{I}/K \to \delta$. Diese Ergebnisse implizieren auch, daß $K(t)$ nicht negativ werden kann.

stimmt.[15] Man erhält also zum statischen Fall einer Unternehmung bei vollständiger Konkurrenz mit konstanten Skalenerträgen analoge Ergebnisse, wenn man $r+\delta$ als **Nutzungspreis des Kapitals** ansetzt. Im Kostenminimum des statischen Falles ist der Gewinn entweder negativ, gleich null, oder positiv. Das Unternehmen versucht dementsprechend entweder, die Produktion einzustellen, die Unternehmensgröße ist unbestimmt oder das Unternehmen produziert so viel wie möglich. Da durch die Beschränkung der zulässigen Bruttoinvestition im dynamischen Fall keine beliebige Produktionsänderung in einem Zeitpunkt möglich ist, vollzieht sich die Kapazitätsanpassung über die Auswahl der maximal (minimal) möglichen Investitionsrate. Anhand der Bewegungsgleichung für den Kapitalstock ist dabei unmittelbar zu erkennen, wie er sich in der Zeit entwickelt. Für $F_K(K^*,L^*) > r+\delta$ wird langfristig der Wert $\lim_{t\to\infty} K^*(t) = \bar{I}/\delta$ erreicht, und für $F_K(K^*,L^*) < r+\delta$ gilt $\lim_{t\to\infty} K^*(t) = 0$.

Wie zuvor muß noch gezeigt werden, daß das Zielfunktional konvergiert. Da der langfristig maximale Wert von K durch $\bar{I}/\delta$ gegeben ist und $F(K,L)-wL-I$ durch eine Erhöhung von L nur erhöht werden kann, bis (3.18) erfüllt ist, ist $F(K,L)-wL-I$ nach oben beschränkt. Damit folgt die Konvergenz des Zielfunktionals wegen $r>0$ direkt aus dem Argument in (2.80) auf der Seite 87. Da die current-value Hamiltonfunktion für eine neoklassische Produktionsfunktion konkav und der zulässige Bereich für die Kontrollvariablen konvex sowie die gefundene Lösung zulässig ist, ist gemäß dem Satz 2.21 eine optimale Lösung bestimmt worden.

Weil der Nutzungspreis des Kapitals, $r+\delta$, und wegen (3.18) auch $F_K(K^*,L^*)$ konstant sind, ist der Grenzfall

$$F_K(K^*,L^*) = r+\delta \tag{3.21}$$

für ein einzelnes Unternehmen äußerst unwahrscheinlich. Man kann allerdings argumentieren, daß er unter den Idealbedingungen der vollständigen Konkurrenz mit identischen Produktionsfunktionen für alle Unternehmen endogen zum Regelfall wird, wenn man eine Anpassung des Zinssatzes an Ungleichgewichte zuläßt. Wenn zum Beispiel $F_K(K^*,L^*) > r+\delta$ ist, führt die Kapazitätsausweitung einer großen Anzahl kleiner Unternehmen insgesamt zu einem Anstieg des Zinssatzes, der schließlich die Angleichung von Grenzproduktivität und Nutzungspreis des Kapitals bewirkt. In einem Gleichgewicht bei vollständiger Konkurrenz stellt sich daher eine Situation ein, in der die Grenzproduktivitäten beider Faktoren mit den jeweiligen Nutzungspreisen übereinstimmen.

In den Modellen der neoklassischen Wachstumstheorie wird davon ausgegangen, daß die Beziehungen (3.18) und (3.21) in jedem Zeitpunkt gelten. Obwohl gezeigt worden ist, daß die Marktkräfte eine Anpassung an diese Werte bewirken können, ist die Unterstellung der kontinuierlichen Gültigkeit der Grenzproduktivitätsbedingungen aufgrund des vorliegenden Modells nicht zu rechtfertigen. Hier kommen die Beschränkungen für die Bruttoinvestitionen ins Spiel. Für einen Markt mit vielen

[15] Wenn die Bedingung $F_K(K^*,L^*) = r+\delta$ erfüllt ist, liegt wegen $\lambda^c = 1$ und $\dot{\lambda}^c = 0$ ein sogenannter singulärer Pfad vor, weil die Umschaltfunktion $\mathcal{H}_I$ für den gesamten Zeitraum verschwindet, vgl. auch das Beispiel 2.9 auf der Seite 71.

kleinen Unternehmen kann es gerechtfertigt sein, die Möglichkeit diskreter Anpassungen des Kapitalstocks durch den Kauf und den Verkauf von Kapitalgütern zu unterstellen. Während für eine gesamte Volkswirtschaft die Untergrenze $I = 0$ eine sinnvolle Beschränkung ist, kann ein kleines Unternehmen auch einen Teil des Kapitalstocks verkaufen und so eine negative Bruttoinvestition realisieren.[16] Unterstellt man im einfachsten Fall, daß ein vollkommener Markt auch für einmal installierte Kapitalgüter besteht, so fallen dadurch formal die Ober- und Untergrenze für die Bruttoinvestitionen im Problem (3.16) weg. Im Ergebnis entsteht dadurch eine sofortige Anpassung an den optimalen Kapitalstock,[17] der allerdings bei linearhomogenen Produktionsfunktionen weiterhin unbestimmt ist. Auch jetzt muß also unterstellt werden, daß die Marktkräfte sehr schnell wirken, um eine gleichzeitige Erfüllung der Gleichungen (3.18) und (3.21) zu gewährleisten. Man kann dann unterstellen, daß die Unternehmen lediglich eine statische Gewinnmaximierung betreiben, die wie sonst bei konstanten Skalenerträgen im statischen Fall zu einer gewinnlosen Produktion im Gleichgewicht führt und durch die Übereinstimmung der Nutzungspreise der Faktoren mit ihren jeweiligen Grenzproduktivitäten charakterisiert ist.

Die Unternehmen müssen in der neoklassischen Wachstumstheorie also lediglich eine Folge von statischen Optimierungsproblemen lösen, die zum Problem der Maximierung des Ertragswertes des jeweiligen Unternehmens äquivalent ist. Diese Äquivalenz entsteht durch die Verwendung des Nutzungspreises $r+\delta$ für das Kapital im statischen Problem[18] und die Unterstellung einer unendlich schnellen Anpassung der Kapazität im dynamischen Problem. Da der Kapitalstock unter dieser Voraussetzung beliebig angepaßt wird, zerfällt das dynamische Entscheidungsproblem der Barwertmaximierung in eine Abfolge statischer Probleme der Gewinnmaximierung ohne essentielles intertemporales Bindeglied. Die Äquivalenz von kurzfristiger Gewinnmaximierung und langfristiger Barwertmaximierung ist nicht mehr gegeben, wenn unsichere Erwartungen bezüglich der zukünftigen Preise bestehen und aufgrund von Anpassungskosten ein einmal installierter Kapitalstock nicht mehr ohne Verluste auf einem vollkommenen Kapitalmarkt verkauft werden kann. Diese Äquivalenz wird jedoch in der Wachstumstheorie üblicherweise unterstellt.

Man kann diesen Ansatz auch als **Faustregel** in dem Sinne interpretieren, daß eine einfache statische Lösung gewählt wird, die unter idealisierten Annahmen auch langfristig optimal ist. Diese Interpretation, die in der positiven Wirtschaftstheorie sinnvoll erscheint, wird hier bevorzugt. Aus diesem Grund ist die Analyse der hinreichenden Bedingungen für ein Optimum nicht nur einfacher, weil man sich etwa

[16] In diesem Zusammenhang sind Anpassungskosten zu erwähnen, die sowohl bei der Investition als auch bei der Desinvestition anfallen können und die eine bedeutende Erweiterung des Grundmodells der neoklassischen Investitionstheorie darstellen, vgl. Takayama (1985, S. 697–712).

[17] Eine saubere formale Behandlung erfordert die Verwendung des sogenannten Impulsmaximumprinzips, das Sprünge in den Zustandsvariablen berücksichtigt, vgl. Feichtinger und Hartl (1986, S. 528–532).

[18] Vgl. hierzu Sargent (1982, Kapitel 3), der (im Rahmen der Variationsrechnung ohne Investitionsbeschränkungen) auch den Fall mit nicht-konstantem Preis und Reallohnsatz (exponentielle Inflation) berücksichtigt. Die einzige Änderung zum vorliegenden Fall ist, daß der Nutzungspreis dann $r+\delta$ abzüglich der erwarteten Inflationsrate ist.

den Nachweis von $\lambda_0 = 1$ für die Anwendung des Satzes 2.20 erspart, sondern auch sinnvoller als die Analyse von notwendigen Bedingungen. Wenn die Unternehmen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein statisches Optimum befolgen, so zeigt das vorliegende Modell, daß sie dann (unter idealisierenden Annahmen) auch ein dynamisches Optimum erreichen. Im folgenden wird das dynamische Entscheidungsproblem der Unternehmen daher nicht weiter thematisiert.

Zur Verdeutlichung der Äquivalenz zwischen kurzfristiger Gewinnmaximierung und langfristiger Barwertmaximierung wird der einfachste Fall explizit dargestellt. Angenommen, es gilt $F_K(K^*, L^*) = r + \delta$. Dann ist es gleich, welchen Wert die Bruttoinvestition aus dem Intervall $[0, \bar{I}]$ annimmt, so daß der Einfachheit halber unterstellt werden kann, daß von Beginn an $I = \delta K^*$ gilt, so daß $\dot{K} = 0$. Aus dem Euler-Theorem über linearhomogene Funktionen folgt für den Momentangewinn in jedem Zeitpunkt

$$\begin{aligned} F(K^*, L^*) - wL^* - I &= F_K(K^*, L^*)K^* + F_L(K^*, L^*)L^* - wL^* - \delta K^* \\ &= (r + \delta)K^* + wL^* - wL^* - \delta K^* = rK^*, \end{aligned}$$

wobei K^* konstant ist. Damit ergibt sich für den Ertragswert des betrachteten Unternehmens

$$\int_0^\infty rK^* e^{-rt} = \lim_{T\to\infty} \left[-K^* e^{-rt}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \left(-K^* e^{-rT} + K^*\right) = K^*.$$

Der Momentangewinn rK^* ist also gerade so groß, daß er der Verzinsung des Unternehmenswertes K^* entspricht, der mit dem im Unternehmen gebundenen Kapitalstock übereinstimmt. Das heißt, daß der Gewinn in jedem Zeitpunkt gleich null ist, wenn man für das im Unternehmen gebundene Kapital einen kalkulatorischen Zinssatz in Höhe des Marktzinssatzes ansetzt. Die statische Gewinnmaximierung liefert dasselbe Ergebnis.

3.3 Das Modell des optimalen Wachstums

3.3.1 Eine dezentrale Gleichgewichtsversion

Die Theorie der optimalen Ersparnis von Ramsey (1928) ist durch Koopmans (1965) und Cass (1965) im Zuge der Entwicklung der neoklassischen Wachstumstheorie weiterentwickelt worden. Die Vereinigung der im Abschnitt 3.2.1 dargestellten Theorie des optimalen Konsums und des Wachstumsmodells von Solow (1956) ergibt das sogenannte Ramsey-Koopmans-Cass-(RKC)-Modell des optimalen Wachstums. Die ursprüngliche Formulierung ist normativ in dem Sinne, daß lediglich der optimale Pfad der Kapitalakkumulation gesucht wird, ohne zu unterstellen, daß sich reale Volkswirtschaften durch eine Bewegung entlang eines solchen Pfades beschreiben lassen. Zum Beispiel schreibt Cass (1965, S. 233): *For this purpose a centralized, closed economy is postulated; ...*, und Arrow (1968, S. 97) analysiert das Modell aus der

Sicht *. . . of a government which is in a position to control the economy completely* . . . . In neuerer Zeit werden jedoch Varianten des Modells als positive, also erklärende Theorie des Wirtschaftswachstums interpretiert (zum Beispiel Romer, 1986, 1990; Lucas, 1988; Blanchard und Fischer, 1989; Barro und Sala-i-Martin, 1998, sowie nahezu beliebig viele der unzähligen neueren Veröffentlichungen zum Wirtschaftswachstum). Mittlerweile sind die Anwendungen dieses Paradigmas drastisch ausgeweitet worden. Zum Beispiel interpretieren Eicher et al. (2000) sogar finanzielle Krisen wie die Asienkrise in den neunziger Jahren als Ergebnis der optimalen Entscheidungen der Haushalte. Da die Lösung dynamischer Optimierungsprobleme die Kenntnis der Transversalitätsbedingungen und damit auch der Endwerte der Zustandsvariablen beinhaltet, impliziert dieser Ansatz, daß die optimierenden Akteure die entstehende **Krise im Voraus erwartet** haben müssen.

Zunächst wird die positive Interpretation des Modells analysiert, die sich in dieser Form an Blanchard und Fischer (1989) anlehnt. Die Darstellung ist insofern heuristisch, als auf eine formale Definition des Gleichgewichts bei vollständiger Konkurrenz mit vollkommener Voraussicht (**perfect foresight competitive equilibrium**) und einen strengen Beweis der Äquivalenz dieses Gleichgewichts mit der optimalen Lösung des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells verzichtet wird. Stattdessen wird einfach gezeigt, daß die dezentrale Lösung zum selben System von Differentialgleichungen wie die zentrale Lösung führt, was angesichts identischer Zielfunktionale dieselbe Lösung impliziert, die in dem hier analysierten Modell eindeutig ist und für die auch die hinreichenden Optimumbedingungen erfüllt sind.

Im Unterschied zum vorigen Abschnitt wird jetzt nicht nur ein Haushalt betrachtet, sondern es wird unterstellt, daß es sehr viele **identische Haushalte** mit derselben kardinalen Momentannutzenfunktion $U(c_h) = (c_h^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$ und derselben konstanten Diskontrate ρ gibt, wobei c_h der Pro-Kopf-Konsum des Haushalts h ist. Die Größe der Bevölkerung wird mit L bezeichnet. Wenn L_0 Menschen zum Zeitpunkt $t = 0$ leben und die Wachstumsrate der Bevölkerung (in jedem Haushalt gleich) $g_L = n$ beträgt, ist $L(t) = L_0 e^{nt}$ die Bevölkerung zum Zeitpunkt t. Jeder Haushalt kann als unendlich lange planende Familiendynastie interpretiert werden, wobei die altruistischen Eltern jeweils für ihre Kinder mit planen und so weiter. Mit c wird nun der Pro-Kopf-Konsum $C(t)/L(t)$ bezeichnet, wobei $C(t)$ der aggregierte Gesamtkonsum zum Zeitpunkt t ist.

Der Reallohnsatz w und der Zinssatz r sind keine Konstanten mehr, sondern werden endogen bestimmt. Bei vollständiger Konkurrenz stellen sich diese Größen für jeden einzelnen Haushalt allerdings zu jedem Zeitpunkt als gegeben dar, wobei **vollkommene Voraussicht** unterstellt wird, so daß jeder Haushalt die Zeitpfade von $w(t)$ und $r(t)$ exakt in seine Planungen einbeziehen kann (vgl. die Definition 2.9 auf der Seite 60). Jedes Mitglied einer Familie bietet eine Arbeitseinheit pro Zeiteinheit an, so daß das Arbeitseinkommen pro Kopf und Zeiteinheit gerade $w(t)$ beträgt. Da angenommen wird, daß es den Familien gleichgültig ist, ob sie Kapital akkumulieren oder Darlehen an andere Familien vergeben, gibt es nur einen Zinssatz $r(t)$, der dem Nutzungspreis des Kapitals entspricht (von Abschreibungen wird abgesehen).

Die Verzinsung des Reinvermögens ist gleich $r(t)a_h(t)$, wobei $a_h(t)$ jetzt das Reinvermögen pro Kopf eines Haushalts h bezeichnet, während $A_h(t)$ das Reinvermögen der Familie ist. Die Budgetbedingung für eine Familie h lautet so zu jedem Zeitpunkt

$$C_h(t) + \dot{A}_h(t) = w(t)L_h(t) + r(t)A_h(t),$$

das heißt, das gesamte Einkommen auf der rechten Seite der Formel wird auf den Konsum und die Veränderung des Reinvermögens aufgeteilt. In Pro-Kopf-Größen ergibt sich

$$c_h(t) + \dot{A}_h(t)/L_h(t) = w(t) + r(t)a_h(t),$$

wobei, weil die Familie mit der Rate n wächst, $\dot{A}_h(t)/L_h(t))$ folgendermaßen umgeformt werden kann:

$$\dot{a}_h(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{A_h(t)}{L_h(t)}\right) = \frac{\dot{A}_h L_h - A_h \dot{L}_h}{L_h^2} = \frac{\dot{A}_h}{L_h} - g_L a_h,$$

also

$$\frac{\dot{A}_h}{L_h} = \dot{a}_h + n a_h.$$

Setzt man diesen Ausdruck in das Pro-Kopf-Budget ein, so folgt die Bewegungsgleichung für $a_h(t)$:

$$\dot{a}_h(t) = w(t) + (r(t) - n)a_h(t) - c_h(t). \tag{3.22}$$

Mit der oben angegebenen Momentannutzenfunktion und der Diskontrate ρ lautet das Zielfunktional der Familie

$$\int_0^\infty \frac{c_h^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t}\, dt. \tag{3.23}$$

Analog zur früheren Analyse wird als Endbedingung verlangt, daß der Barwert des Reinvermögens $A_h(t)$ nichtnegativ ist. Für den Barwert des Pro-Kopf-Vermögens folgt wegen $A_h(t) = L_h(t)a_h(t)$ aus $\liminf_{t\to\infty} e^{-rt}A_h(t) \geqq 0$ die Bedingung

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-rt}A_h(t) = \liminf_{t\to\infty} e^{-rt}a_h(t)L_{h0}e^{nt} = L_{h0}\liminf_{t\to\infty} e^{-(r-n)t}a_h(t) \geqq 0,$$

wobei L_{h0} als positive Konstante auch vernachlässigt werden kann. Schließlich ist zu beachten, daß r keine Konstante mehr im vorliegenden Modell ist. Anstelle des Barwertfaktors e^{-rt} tritt daher der Barwertfaktor $e^{-\int_0^t r(\tau)\, d\tau}$ [vgl. (2.5) auf der Seite 10]. Damit lautet die Endbedingung für das Pro-Kopf-Vermögen der Familie schließlich

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-\int_0^t (r(\tau)-n)\, d\tau} a_h(t) \geqq 0. \tag{3.24}$$

Somit besteht das Problem des Haushalts in der Auswahl eines nichtnegativen Konsumpfades, der (3.23) unter der Nebenbedingung (3.22) und den Randbedingungen (3.24) und $a_h(0) = a_{h0}$ maximiert.

Damit liegt ein Optimierungsproblem vor, das mit dem im Abschnitt 3.2.1 analysierten Problem weitgehend identisch ist. Formal besteht der einzige Unterschied darin, daß in der Zustandsgleichung nun $(r(t)-n)a_h(t)$ statt $ra(t)$ steht und daß $(r(t)-n)$ auch in der Endbedingung r ersetzt. Da r im gesamten Problem sonst nicht vorkommt, werden hier also lediglich r durch $(r(t)-n)$ sowie $a(t)$ durch $a_h(t)$ ersetzt. Ferner ist im letzten Abschnitt unterstellt worden, daß w und r Konstanten sind. Zur Ableitung der Keynes-Ramsey-Regel ist diese Tatsache nicht benötigt worden. Entscheidend ist nur, daß die Haushalte davon ausgehen, ihr eigener Einfluß auf diese Größen sei vernachlässigbar klein, so daß w und r also nicht von ihren eigenen Entscheidungen bezüglich c_h und a_h abhängen.[19] Damit folgt, daß die beiden Differentialgleichungen (3.10) direkt aus dem Abschnitt 3.2.1 übernommen werden können, wobei (unter Vernachlässigung der Zeitvariablen) nur r durch $(r-n)$ ersetzt und der Index h hinzugefügt wird:

$$\begin{aligned} \dot{c}_h &= \frac{1}{\theta}(r(t)-n-\rho)c_h, \\ \dot{a}_h &= w(t)+(r(t)-n)a_h-c_h. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nun wird das Verhalten der **Unternehmen** betrachtet, wobei die Annahmen zu dem im Abschnitt 3.1 analysierten neoklassischen Grundmodell übernommen werden. Wenn alle Unternehmen über dieselbe linearhomogene Produktionsfunktion verfügen, so existiert eine aggregierte Produktionsfunktion, die mit den individuellen Funktionen übereinstimmt und von den aggregierten Faktormengen abhängt: $Y=F(K,L)$ (vgl. zum Beispiel Christiaans, 1997, S. 14). Gemäß den Ergebnissen im Abschnitt 3.2.2 enthält das Optimierungsproblem der Unternehmen letztlich keine dynamischen Elemente, wenn unterstellt wird, das keinerlei Anpassungskosten entstehen. Unter Verwendung der entsprechenden Pro-Kopf-Produktionsfunktion $y=f(k)$ und unter Vernachlässigung von Abschreibungen gilt im Gewinnmaximum daher die aus dem statischen Fall bekannte Bedingung, daß die Grenzproduktivitäten der Faktoren jeweils den realen Faktorpreisen entsprechen:

$$\begin{aligned} f'(k(t)) &= r(t), \\ f(k(t))-k(t)f'(k(t)) &= w(t), \end{aligned} \tag{3.26}$$

wobei die Faktorpreise als an die Haushalte als Faktoreigner zu zahlende Nutzungspreise von Arbeit und Kapital zu interpretieren sind und Abschreibungen vernachlässigt werden. Diese Gleichungen bestimmen aus der Sicht jedes einzelnen kleinen Unternehmens dessen jeweilige Kapitalintensität, die bei identischen Produktionsfunktionen für alle Unternehmen gleich ist. Wie im Abschnitt 3.2.2 ausgeführt worden ist, besteht (3.26) aus zwei Gleichungen, die bei gegebenen Werten von r und w jede für sich die Kapitalintensität festlegen. Eine simultane Erfüllung beider Gleichungen ist daher nur möglich, wenn die Konkurrenz unter den Unternehmen für eine entsprechende Anpassung der Faktorpreise sorgt.

[19] Die Haushalte wissen also, daß $r(t)=r(a(t))$ vom Pro-Kopf-Vermögen abhängt, betrachten $r(t)$ aber trotzdem als exogen, weil sie jeweils zu klein sind, um selbst einen Einfluß auf den Zinssatz zu haben.

Unterstellt man vorgegebene Pfade von $w(t)$ und $r(t)$, so wird dadurch auch der Pfad der Vermögensakkumulation der Familien bestimmt. Nun ist zu beachten, daß zwar nicht ausgeschlossen worden ist, daß einzelne Familien Schulden machen, daß aber für die gesamte Volkswirtschaft die Summe der privaten Schulden gleich null sein muß, da jedem privaten Schuldner ein privater Gläubiger gegenübersteht. Im Gleichgewicht muß darüber hinaus gelten, daß alle Familien, die annahmegemäß auch im Hinblick auf ihr Startvermögen identisch sind, denselben Wert für $a_h(t)$ realisieren. Deshalb gilt für das Vermögen pro Kopf der gesamten Volkswirtschaft auch $a(t) = a_h(t)$. Da physisches Kapital der einzige akkumulierbare Vermögensbestandteil in dieser Volkswirtschaft ist, bedeutet dieser Tatbestand letztlich, daß das in allen Familien identische Pro-Kopf-Vermögen der aggregierten Kapitalintensität $k(t)$ der Volkswirtschaft entsprechen muß: $k(t) = a(t)$. Der somit implizierte Zeitpfad der Kapitalintensität determiniert nun seinerseits die Pfade des Reallohnsatzes und des Nutzungspreises des Kapitals; beide Größen werden demnach endogen über den Markt bestimmt, obwohl sie für alle Individuen vorgegeben sind. Im Gleichgewicht kann man also in den Gleichungen (3.25) a_h und c_h durch den Pro-Kopf-Kapitalstock k und den Pro-Kopf-Konsum c der gesamten Volkswirtschaft sowie w und r durch die Gleichungen (3.26) substituieren. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\theta}(f'(k) - n - \rho)c, \\ \dot{k} &= f(k) - nk - c. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Für das Optimierungsproblem des repräsentativen Haushalts ist die Endbedingung (3.24) verwendet worden. Wegen $a_h(t) = a(t) = k(t)$ muß im Marktgleichgewicht darüber hinaus gelten, daß in jedem Zeitpunkt $a(t) \geqq 0$ ist. Also kann man die Endbedingung (3.24) durch $\liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0$ ersetzen. Denn jeder Pfad, der diese strengere Bedingung nicht erfüllt, ist kein Gleichgewichtspfad. Die Zustandsbeschränkung $k(t) \geqq 0$ für alle t kann weiterhin vernachlässigt werden, da sich herausstellen wird, daß sie im Optimum ohnehin nicht bindet (und auch keine Kandidaten für eine optimale Lösung gemäß der weniger strengen Beschränkung ausschließt). Die Lösung der Differentialgleichungen (3.27) liefert damit die gleichgewichtige Entwicklung dieser Volkswirtschaft mit rationalen Konsumenten und Produzenten bei vollkommener Voraussicht unter Berücksichtigung des Startwertes $k(0) = k_0$, der Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0$ und einer noch festzulegenden Transversalitätsbedingung. Diese Lösung wird im nächsten Abschnitt anhand eines Phasendiagramms qualitativ abgeleitet.

Später wird sich herausstellen, daß sich die Volkswirtschaft entlang eines Sattelpfades asymptotisch dem langfristigen Gleichgewicht (steady state) nähert. Zu beachten ist, daß dieser Sattelpfad selbst eine Sequenz von Gleichgewichten in dem Sinne darstellt, daß in jedem Zeitpunkt Angebot und Nachfrage auf allen Märkten ausgeglichen sind und die Erwartungen aller Marktteilnehmer übereinstimmen und korrekt sind. Zur Unterscheidung vom langfristigen Gleichgewicht wird dieser Pfad daher im folgenden als **PFC-Gleichgewicht (perfect foresight competitive equilibri-**

um) bezeichnet.

Definition 3.2. *Ein Pfad, auf dem Angebot und Nachfrage auf allen Märkten in jedem Zeitpunkt ausgeglichen sind und alle Haushalte und Unternehmen bei vollständiger Voraussicht unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz ihre jeweiligen Zielfunktionen maximieren, heißt **PFC-Gleichgewicht**.*

Das PFC-Gleichgewicht ist also ein dynamisches Gleichgewicht bei vollkommener Voraussicht, in dem sich die Volkswirtschaft in jedem Zeitpunkt im kurzfristigen Gleichgewicht befindet.

3.3.2 Die Optimierung durch die zentrale Planungsbehörde

Das Modell wird jetzt im Sinne der Originalarbeiten von Ramsey-Koopmans-Cass als Optimierungsproblem einer zentralen Planungsbehörde betrachtet. Dieses Problem lautet[20]

$$\begin{aligned} &\max_{c \in \bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\, dt, \quad \theta > 0, \\ &\qquad \text{u. d. N.} \\ &\qquad \dot{k} = f(k) - nk - c, \quad k(0) = k_0,\ \liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0, \\ &\quad c(t) \geqq 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Hier bezeichnet c den Pro-Kopf-Konsum bezogen auf die gesamte Bevölkerung. Die Pro-Kopf-Produktionsfunktion f erfüllt die bereits früher verwendeten Inada-Bedingungen (3.3) und die Vorzeichen (3.4). Das Ziel besteht also in der Maximierung des Pro-Kopf-Nutzens für den gesamten unendlichen Planungszeitraum, wobei der zukünftige Nutzen diskontiert wird. Die Bewegungsgleichung für den Pro-Kopf-Kapitalstock kann analog zum Solow-Modell hergeleitet werden, wobei $f(k) - c$ hier die Pro-Kopf-Ersparnis ist, die bei Solow (1956) durch $sf(k)$ aufgrund der konstanten Sparquote wiedergegeben wird.

Häufig wird der Momentannutzen des Pro-Kopf-Konsums im Zielfunktional mit dem Faktor e^{nt} ($= L(t)$ für $L_0 = 1$) für die Bevölkerungsgröße multipliziert (zum Beispiel Cass, 1965). Dieses Vorgehen erscheint wenig sinnvoll, wenn der Nutzen der Individuen im Vordergrund

[20] Die genaue Spezifikation des Problems kennt viele Varianten. Zum Beispiel geht bei Cass (1965) der Faktor e^{nt} für die Bevölkerungsgröße in das Zielfunktional ein und die Momentannutzenfunktion ist unspezifiziert. Ferner berücksichtigt er Abschreibungen, vgl. hierzu und zu arbeitsvermehrendem technischen Fortschritt auch den Abschnitt 3.5.2. Ramsey (1928) hat aus ethischen Gründen den zukünftigen Nutzen nicht diskontiert und stattdessen den Momentannutzen als Abweichung von einem Sättigungsniveau gemessen. Weitere Varianten mit Literaturhinweisen findet man zum Beispiel in Takayama (1985) und in Feichtinger und Hartl (1986).

steht. Unterstellt man zum Beispiel, daß sich die Bevölkerung vervierfacht und sich der Nutzen des Pro-Kopf-Konsums halbiert, weil für jeden einzelnen weniger zur Verfügung steht, so würde sich der Wert des Zielfunktionals verdoppeln, obwohl es doch jedem einzelnen schlechter geht. Insbesondere für ein exogenes Bevölkerungswachstum, das also nicht durch die Präferenzen der Individuen für Nachkommen erklärt wird, ist diese Annahme kaum zu rechtfertigen. Deshalb wird der Momentannutzen hier nicht mit der Bevölkerungsgröße multipliziert.

Vergleicht man das Problem (3.28) mit dem Optimierungsproblem eines einzelnen Haushalts (3.8), das der dezentralen Gleichgewichtsversion des letzten Abschnitts zugrundeliegt, so zeigt sich, daß die Zielfunktionale formal übereinstimmen. Denn wenn alle identischen Haushalte im Gleichgewicht denselben Pro-Kopf-Konsum wählen, dann entspricht dieser Pro-Kopf-Konsum auch dem gesamtwirtschaftlichen Pro-Kopf-Konsum. Im letzten Abschnitt ist gezeigt worden, daß die Einführung des Bevölkerungswachstums die Zustandsgleichung für jeden Haushalt derart verändert, daß r durch $(r-n)$ ersetzt wird, und daß dadurch im Gleichgewicht die in (3.27) angegebene Zustandsgleichung für k impliziert wird, die so auch in (3.28) auftaucht. Dabei gilt ferner $a_0 = k_0$. Anstelle der Beschränkung $\liminf_{t\to\infty} e^{-\int_0^t (r(\tau)-n)\,d\tau} a(t) \geqq 0$ muß im PFC-Gleichgewicht darüber hinaus wie in (3.28) die Bedingung $\liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0$ gelten. Schließlich unterliegt c in beiden Fällen der Nichtnegativitätsbeschränkung. Also entspricht das Optimierungsproblem jedes einzelnen Haushalts im Gleichgewicht exakt dem Problem (3.28). Weil sich herausstellt, daß die Lösung eindeutig ist, muß die Lösung des Optimierungsproblems (3.28) der Planungsbehörde demnach mit der dezentralen Lösung übereinstimmen. Da die Lösung von (3.28) Pareto-effizient ist, ist auch das PFC-Gleichgewicht effizient.[21]

Aussage 3.5. *Angenommen, alle Haushalte sind identisch und haben dieselbe Zielfunktion wie die zentrale Planungsbehörde. Dann sind die Lösung des zentralen Optimierungsproblems und das PFC-Gleichgewicht unter den sonstigen Voraussetzungen des RKC-Modells äquivalent und Pareto-effizient.*

Wie im Abschnitt 3.2.1 kann man zeigen, daß $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden kann. Ebenso läßt sich analog nachweisen, daß das Zielfunktional für alle zulässigen Lösungen konvergiert, wobei die Annahme $\rho > 0$ jetzt anstelle von (3.11) ausreicht. Auf den direkten Beweis wird diesmal verzichtet, da sich herausstellt, daß der optimale Pfad des Pro-Kopf-Konsums $c^*(t)$ gegen eine Konstante konvergiert, so daß der Momentannutzen nach oben beschränkt ist und daher das Zielfunktional für $\rho > 0$ konvergiert. Wenn aber der optimale Wert beschränkt ist, dann kann es keine andere zulässige Lösung geben, für die das Zielfunktional gegen unendlich divergiert, da diese zulässige Lösung dann besser als die optimale wäre.

[21] Einen exakten Beweis der Äquivalenz für den allgemeineren Fall mit heterogenen Kapitalgütern, der sich wesentlich auf die Transversalitätsbedingung von Benveniste und Scheinkman (1982) stützt, liefert Becker (1981). Die Beweisidee beruht darauf, daß die notwendigen Bedingungen für ein PFC-Gleichgewicht hinreichende Bedingungen für ein zentrales Optimum sind und umgekehrt.

Die current-value Hamiltonfunktion lautet

$$\mathscr{H} = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda^c(f(k) - nk - c).$$

Die Randlösungen für c können ebenfalls analog zum Vorgehen im letzten Abschnitt ausgeschlossen werden.[22] Der Satz 2.20 auf der Seite 88 liefert somit die folgenden notwendigen Optimalitätsbedingungen, wobei zu beachten ist, daß die Hamiltonfunktion konkav in c ist.

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_c &= c^{-\theta} - \lambda^c = 0 \\ \dot{\lambda}^c &= [\rho + n - f'(k)]\lambda^c \end{aligned} \tag{3.29}$$

Differenziert man die erste Gleichung nach t und ersetzt im Ergebnis $\dot{\lambda}^c$ durch die zweite Gleichung und schließlich λ^c durch $c^{-\theta}$ gemäß der ersten Gleichung, so folgt unter Hinzunahme der Zustandsgleichung für k das System zweier nichtlinearer Differentialgleichungen (3.27), das hier nochmals angegeben wird.

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\theta}(f'(k) - n - \rho)c \\ \dot{k} &= f(k) - nk - c \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dieses System wird unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $k(0) = k_0$ in der Abbildung 3.6 graphisch analysiert.

Das System hat für $(c,k) > (0,0)$ einen eindeutigen Gleichgewichtspunkt $E = (\hat{c}, \hat{k})$, der durch $\dot{c} = \dot{k} = 0$ definiert ist.

$$\begin{aligned} f'(\hat{k}) &= n + \rho \\ \hat{c} &= f(\hat{k}) - n\hat{k} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Hier gehen die Bedingungen (3.3) und (3.4) ein. Durch die erste Gleichung wird aufgrund dieser Annahmen $\hat{k} > 0$ eindeutig bestimmt; weil $f'(\hat{k}) = n + \rho > n$ ist, implizieren die Bedingungen, daß $\hat{c} = f(\hat{k}) - n\hat{k} > 0$ (vgl. die Abbildung 3.1). Die beiden Isoklinen $\dot{c} = 0$ und $\dot{k} = 0$ schneiden sich in diesem Gleichgewicht. Im (k,c)-Diagramm ist die Isokline $\dot{c} = 0$ eine vertikale Linie, die die k-Achse bei $\hat{k}$ trifft. Die Isokline $\dot{k} = 0$ wird durch die Gleichung $c = f(k) - nk$ beschrieben, die im Ursprung beginnt[23] und wegen der Inada-Bedingungen sowie der Vorzeichen der Ableitungen von f zunächst eine positive und schließlich eine negative Steigung hat, wobei die k-Achse für ein endliches k erreicht wird. Das Maximum dieser Kurve liegt bei dem Wert k_g, der durch

$$\left.\frac{dc}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = f'(k) - n = 0 \quad \Rightarrow \quad k = k_g \tag{3.31}$$

[22] Zum Beispiel kann c nicht gleich null sein, weil $\lim_{c\to 0} U'(c) = \lim_{c\to 0} c^{-\theta} = \infty$ ist. Wenn die Momentannutzenfunktion nicht explizit vorgegeben ist, wird eine entsprechende Annahme üblicherweise für die nicht spezifizierte Funktion unterstellt. Weil wie im endlichen Fall $\lambda^c > 0$ ist, ergeben sich innere Lösungen, wobei wieder zu beachten ist, daß die Hamiltonfunktion streng konkav in c ist.

[23] Die Annahmen über die Produktionsfunktion implizieren, daß $f(0) = 0$.

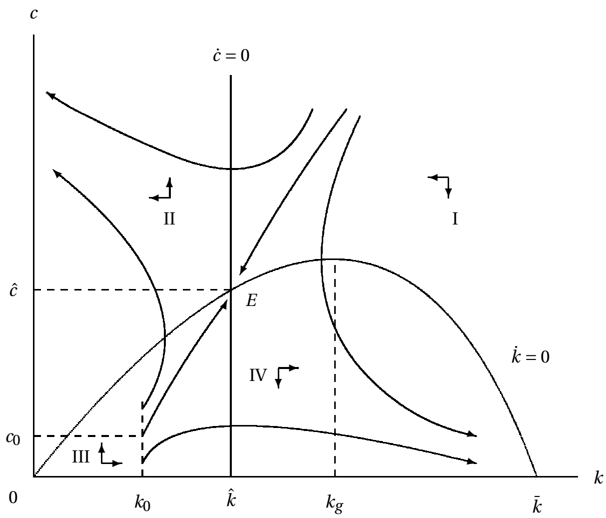

Abbildung 3.6
Das Phasendiagramm des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells

definiert ist, und der wegen $\rho > 0$ und $f''(k) < 0$ größer als $\hat{k}$ ist.

Anhand der Bestimmung von k_g ist zu erkennen, daß der Pro-Kopf-Konsum bei k_g sein Maximum unter der Nebenbedingung erreicht, daß $\dot{k} = 0$ ist. Der zugehörige Wert von c ist demnach der langfristig maximal mögliche gleichgewichtige Pro-Kopf-Konsum. Die Beziehung (3.31) wird deshalb als **Goldene Regel der Akkumulation** bezeichnet (vgl. Phelps, 1967). Diese Regel impliziert, daß der Zinssatz gleich der Wachstumsrate der Bevölkerung ist. (Weil im Solow-Modell im Gleichgewicht $n = sY/K$ gilt, kann man die Goldene Regel mit $r = f'(k)$ umformen zu $rK = sY$, wobei s die konstante Sparquote im Beitrag von Solow ist. Demnach ist die Goldene Regel erfüllt, wenn im Gleichgewicht die Ersparnis dem Kapitaleinkommen entspricht.) Für $\rho = 0$ stimmen $\hat{k}$ und k_g überein.[24] Deshalb liegt es nahe, daß der Gleichgewichtspfad, der in E startet und dort verbleibt, als **für $\rho > 0$ modifizierter Pfad der Goldenen Regel** bezeichnet wird.[25] Das Gleichgewicht E hat alle Eigenschaften eines stationären Gleichgewichts des Solow-Modells; insbesondere wachsen alle absoluten Größen mit der Rate n, und die Pro-Kopf-Größen sind konstant. Der (modifizierte) Pfad der Goldenen Regel ist optimal, wenn der Startwert $k_0 = k_g$ beziehungsweise $k_0 = \hat{k}$ (für $\rho > 0$) ist; für andere Startwerte k_0 wird im folgenden gezeigt, daß der Sattelpfad

[24] Für $\rho = 0$ konvergiert das Zielfunktional nicht. Man kann aber das catching up-Kriterium verwenden. Ein vereinfachter Spezialfall wird zum Beispiel in Seierstad und Sydsæter (1987, S. 260–261) analysiert. Für $\rho = 0$ konvergiert der optimale Pfad zum Pfad der Goldenen Regel.

[25] Eine ausführliche Darstellung der Beziehung zwischen dem gleichgewichtigen Pfad der (modifizierten) Goldenen Regel und dem optimalen Pfad im Ramsey-Koopmans-Cass-Modell, der eben optimal für beliebige Startwerte $k_0 \neq \hat{k}$ beziehungsweise $k_0 \neq k_g$ ist, findet sich in Takayama (1985, S. 463–464).

optimal ist, der zu $\hat{k}$ führt. Dazu muß für den gegebenen Wert k_0 der Wert c_0 des Pro-Kopf-Konsums als Startwert gewählt werden. Man beachte, daß das Gleichgewicht E **unabhängig von der** speziellen Form der **Momentannutzenfunktion** ist, wenn diese Funktion nur gewisse Mindestanforderungen wie die positive erste und negative zweite Ableitung nach c erfüllt. So beeinflußt der Parameter θ das Gleichgewicht nicht.

Nachdem die Isoklinen eingezeichnet sind, kann auf die übliche Art und Weise das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems der Differentialgleichungen durch die Ermittlung der Richtungspfeile dargestellt werden. Wie die Richtungspfeile anzeigen, ist das Gleichgewicht E ein Sattelpunkt. Das kann man lokal durch die Analyse der im Gleichgewicht ausgewerteten Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} (f'(\hat{k}) - n - \rho)/\theta & f''(\hat{k})\hat{c}/\theta \\ -1 & f'(\hat{k}) - n \end{pmatrix}$$

beweisen. Wegen $f'(\hat{k}) - n - \rho = 0$ ist die Determinante $|J| = f''(\hat{k})\hat{c}/\theta < 0$; also ist E ein Sattelpunkt.

Man kann nun in Anlehnung an Arrow (1968, Abschn. 3) sowie Arrow und Kurz (1970, Kap. III) zeigen, daß alle Pfade außer dem Sattelpfad nicht optimal sein können. Der gegebene Startwert für die Kapitalintensität k ist k_0 in der Abbildung 3.6. Wenn dann der Pro-Kopf-Konsum c_0 gewählt wird, ergibt sich die Konvergenz zum Gleichgewicht E entlang des Sattelpfades. Angenommen, ein höherer Wert von c wird gewählt. Dann verläßt die Trajektorie den Bereich III und gelangt in den Bereich II, wo der Pro-Kopf-Konsum so lange wächst, bis der Kapitalstock in endlicher Zeit aufgebraucht ist.[26] Wenn $k(t) = 0$ wird, muß $c(t)$ zu diesem Zeitpunkt von einem positiven Wert auf null springen, weil sonst die Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0$ nicht mehr erfüllt werden kann (mit etwas mehr Aufwand kann man für diese Trajektorien auch die Verletzung der Bedingung $\liminf_{t\to\infty} e^{-\int_0^t (r(\tau)-n)\, d\tau} k(t) \geqq 0$ nachweisen). Durch diesen Sprung werden die notwendigen Bedingungen (3.29) verletzt, weil $\lambda^c(t)$ stetig ist. Dieser Pfad kann also nicht optimal sein. Nun werde ein Startwert kleiner als c_0 gewählt. In diesem Fall wird der Bereich III verlassen, und die Trajektorie gelangt in den Bereich IV. Hier gibt es ein t_0, so daß $\hat{c} > c(t)$ für alle $t \geqq t_0$. Daher kann dieser Pfad nicht optimal sein, weil man immer einen höheren Konsum durch geringere Investitionen verwirklichen kann, solange bis $k(t) = \hat{k}$ ist, zum Beispiel durch den Sprung auf den stabilen Arm des Sattelpunktes im Bereich I. Ab hier kann dann $c(t) = \hat{c}$ gewählt werden. Wenn der Startwert $k_0 > \hat{k}$ ist, kann analog gezeigt werden, daß nur der Sattelpfad im Bereich I optimal sein kann. Damit erfüllt

[26] Entlang dieses Pfades gilt $\dot{c} > 0$. Daher ist $\ddot{k} = (f'(k) - n)\dot{k} - \dot{c} < 0$, weil $\dot{k} < 0$ im Bereich II gilt und $f'(k) > n$ ist (man beachte, daß $k < k_g$ in diesem Bereich). Daraus folgt, daß es ein $\varepsilon > 0$ und ein t_1 mit $\dot{k}(t_1) = -\varepsilon$ gibt, so daß $\dot{k} < -\varepsilon$ für $t > t_1$, woraus man

$$k(t) = k_{t_1} + \int_{t_1}^{t} \dot{k}(\tau)\, d\tau < k_{t_1} - \int_{t_1}^{t} \varepsilon\, d\tau = k_{t_1} + (t_1 - t)\varepsilon$$

erhält. Setzt man diesen Ausdruck gleich null, so folgt, daß $k(t)$ schon vor dem Zeitpunkt $t = t_1 + k_{t_1}/\varepsilon$ gleich null ist.

nur der stabile Arm des Sattelpunktes E alle notwendigen Optimalitätsbedingungen. Die optimale Lösung muß also asymptotisch den modifizierten Pfad der Goldenen Regel erreichen.

Für den Sattelpfad sind auch die hinreichenden Bedingungen erfüllt. Die Hamiltonfunktion ist konkav, weil U und f konkav sind und $\lambda^c > 0$ ist. Der zulässige Bereich $\Omega = [0, \infty)$ ist konvex. Der Sattelpfad erfüllt alle notwendigen Bedingungen des Satzes 2.20 mit $\lambda_0 = 1$. Nach dem Satz 2.21 (in Verbindung mit der Bemerkung 2.25 auf der Seite 91) ist es daher hinreichend für die Optimalität der Lösung, wenn

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t} \lambda^c(t)(k(t) - k^*(t)) \geqq 0$$

ist. Wegen der Optimumbedingung $\lambda^c(t) = c^{*-\theta}(t)$ kann diese Bedingung geschrieben werden als

$$\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t} c^{*-\theta}(t)(k(t) - k^*(t)) \geqq 0,$$

wobei $c^*(t)$ und $k^*(t)$ die Sattelpfadlösungen sind. Weil $k^*(t)$ gegen $\hat{k}$ und $c^*(t)$ gegen $\hat{c}$ konvergiert, gilt $\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t} c^{*-\theta}(t) k^*(t) = 0$. Für alle t gilt $e^{-\rho t} c^{*-\theta}(t) \geqq 0$ und für alle zulässigen Lösungen ist $k(t) \geqq 0$ für alle t (sonst wird die Endbedingung $\liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0$ verletzt). Daraus folgt $\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t} c^{*-\theta}(t) k(t) \geqq 0$ für alle zulässigen Lösungen. Also ist die Transversalitätsbedingung erfüllt, so daß der Sattelpfad optimal ist.

Wenn das langfristige Gleichgewicht erreicht wird, entsprechen die **Implikationen** des Modells für das Wachstum weitestgehend denjenigen des neoklassischen Grundmodells von Solow (1956). Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens ist etwa nur dann positiv, wenn entweder Harrod-neutraler technischer Fortschritt vorliegt oder die Grenzproduktivität des Kapitals hinreichend nach unten beschränkt ist. Der einzige Unterschied im steady state ergibt sich dadurch, daß jetzt anders als bei Solow ein effizientes Wachstumsniveau erreicht wird. Dieses Niveau hat allerdings keinen Einfluß auf die Wachstumsraten. Unterschiede bestehen bezüglich der Übergangsdynamik zum langfristigen Gleichgewicht, die im Abschnitt 3.5.2 für drei verschiedene Konsumhypothesen analysiert wird.

Aussage 3.6. *Die in den Aussagen 3.1, 3.2 und 3.3 zusammengefaßten Implikationen für das langfristige Wachstum in einer geschlossenen Volkswirtschaft mit exogener Sparquote gelten analog für ein PFC-Gleichgewicht, wobei die Sparquote im langfristigen Gleichgewicht nun endogen ermittelt wird und effizient ist.*

Abschließend wird auf einige **Probleme und Erweiterungen** hingewiesen. Zunächst ist streng genommen nicht gezeigt worden, daß der Sattelpfad überhaupt global existiert, was insbesondere hinsichtlich der Anwendung der hinreichenden Bedingungen erforderlich ist. Die Analyse der Jacobi-Matrix gibt darüber Auskunft, daß E ein Sattelpunkt ist, was die Existenz der stabilen Arme nur lokal garantiert. Für ein vereinfachtes Beispiel wird ein exakter Beweis der globalen Existenz des Sattelpfades von Seierstad und Sydsæter (1987, S. 256–257, 260–261) gegeben.

Man muß auch darauf hinweisen, daß in (3.28) sinnvollerweise die gemischte Beschränkung $f(k(t)) - c(t) \geqq 0$ zusätzlich auftreten sollte. Ohne diese Beschränkung können die Bruttoinvestitionen – die hier aufgrund der Vernachlässigung der Abschreibungen den Nettoinvestitionen entsprechen – negativ sein. Einmal installiertes Kapital kann also konsumiert werden. Realistischer ist es, wenn der Pro-Kopf-Konsum höchstens so groß wie das Pro-Kopf-Einkommen sein darf, so daß die Bruttoinvestitionen nichtnegativ sind. Wird diese gemischte Beschränkung berücksichtigt, so sind verallgemeinerte Optimumbedingungen zu verwenden, die die Berücksichtigung gemischter Beschränkungen erlauben. In Feichtinger und Hartl (1986, insbes. Kap. 13) wird gezeigt, daß in diesem Fall für sehr große Werte von k für einen Teil der Lösung $c(t) = f(k(t))$ und $\dot{k}(t) < 0$ optimal sind. Nachdem $k(t)$ hinreichend kleiner geworden ist, geht die Lösung dann in den hier analysierten inneren Bereich über. Durch die Berücksichtigung der Restriktion $f(k(t)) - c(t) \geqq 0$ wird das Modell also realistischer, aber an den grundlegenden Implikationen ändert sich wenig. Der Einfachheit halber wird im folgenden die Beschränkung nichtnegativer Bruttoinvestitionen daher grundsätzlich nicht explizit aufgeführt.

Schließlich ist die **Turnpike-Eigenschaft** des modifizierten Pfades der Goldenen Regel zu erwähnen. Anschaulich gesprochen hat Cass (1966) gezeigt, daß im Falle eines endlichen, aber hinreichend langen Planungshorizontes die optimale Lösung die meiste Zeit – abgesehen von der Start- und der Endperiode – in der Nähe des Pfades der (für $\rho > 0$ modifizierten) Goldenen Regel verläuft. Daher wird der Pfad der (modifizierten) Goldenen Regel als **Turnpike (Schnellstraße)** bezeichnet. Ein ähnliches Resultat hat auch Samuelson (1965) abgeleitet.[27]

3.4 Zur positiven Interpretation des optimalen Wachstums

3.4.1 Kritik der Verwendung dynamischer Optimierungsmodelle

In den vorhergehenden Abschnitten ist bereits mehrfach darauf hingewiesen worden, daß das Ramsey-Koopmans-Cass-Modell (beziehungsweise seine Erweiterungen) zunehmend als positive Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung interpretiert wird. Diese Tatsache verwundert auch angesichts der rein normativen Interpretation dieser Modelle in den grundlegenden Arbeiten zum optimalen Wirtschaftswachstum. Dieser Abschnitt setzt sich kritisch mit dieser Tendenz auseinander.

Zunächst stellt sich die Frage nach den Ursachen für eine derartige Interpretation. Hier lassen sich drei mögliche Motive ausmachen:

1. Das zentrale Paradigma der neoklassischen Wirtschaftstheorie beinhaltet, daß sich Haushalte und Unternehmen in allen Lebenslagen **strikt rational** verhalten.

[27] Die Turnpike-Theoreme für reine Produktionsmodelle haben ihren Ursprung in der Arbeit von Dorfman et al. (1958, Kap. 12). Ein ausführlicher Überblick über verschiedene Turnpike-Theoreme in allgemeineren Modellen findet sich bei McKenzie (1986).

2. Geht man von der Annahme unbegrenzter Rationalität ab, so stellt sich das Problem der Auswahl aus einer unbegrenzten Anzahl **alternativer Verhaltenshypothesen**.

3. Einige Forscher betrachten den Ansatz der dynamischen Optimierung als Lösung für das sogenannte **Hahn-Problem**.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Annahme der unbegrenzten Rationalität zumindest hinsichtlich komplizierter dynamischer Entscheidungsprobleme nicht haltbar erscheint. Als alternativer Ansatz wird die Verwendung von Faustregeln vorgeschlagen. Das Hahn-Problem, das die Instabilität positiver Wachstumsmodelle mit heterogenen Kapitalgütern betrifft, kann ebenfalls nicht durch einen Ansatz gelöst werden, dessen Lösungen selbst instabil sind. Die jeweilige Kritik an den drei Motiven ist daher nicht unabhängig voneinander. Wenn schwierige Entscheidungsprobleme aufgrund der unzureichenden Informationen und Fähigkeiten der Haushalte nicht exakt gelöst werden können **und** die exakten Lösungen instabil sind, kommt man trotz aller Schwierigkeiten an der Verwendung alternativer Hypothesen nicht vorbei.

Deutet man die in der neoklassischen Wirtschaftstheorie unterstellte Rationalität dahingehend, daß immer die optimalen Lösungen wirtschaftlicher Entscheidungsprobleme gesucht und gefunden werden, so impliziert das die Entscheidungsfindung mittels des Pontryaginschen Maximumprinzips oder verwandter Methoden im dynamischen Zusammenhang. Daher liegt es aus dieser Sicht nahe, das Wirtschaftswachstum durch derartige Optimierungsmodelle auch beschreiben zu wollen. Gibt man zu, daß die Anforderungen, die dadurch an die Haushalte und Unternehmen gestellt werden – insbesondere also die Kenntnis von Pontryagins Maximumprinzip und aller für die Entscheidungsfindung relevanten (auch zukünftigen) Daten –, unrealistisch sind, so muß die zentrale Annahme der (unbegrenzten) Rationalität zumindest in dynamischen neoklassischen Modellen fallen gelassen werden.

Anhand des Beispiels der Konsumoptimierung ist im Abschnitt 3.2.1 gezeigt worden, daß selbst dann, wenn alle Akteure tatsächlich Pontryagins Maximumprinzip kennen (was definitiv nicht der Fall ist) und auch den Aufwand auf sich nehmen, es anzuwenden, man nicht von Lösungen im Sinne der dynamischen Optimierung entlang von Sattelpfaden ausgehen kann. Denn es ist unrealistisch anzunehmen, daß alle relevanten Daten bis auf die letzte Nachkommastelle genau bekannt sind und auch verwendet werden. Genau das ist aber nötig, um entlang eines Sattelpfades in ein nun einmal instabiles Gleichgewicht zu gelangen.[28] Bei all den empirischen Unwägbarkeiten, die in einfachen Modellen nicht berücksichtigt werden können, kann eine mathematisch instabile Lösung nicht als Erklärung der Realität verwendet werden. Von den anderen extremen Annahmen, wie etwa die Unterstellung vollkommen

[28] Für das dargestellte Beispiel der Konsumoptimierung existiert im allgemeinen kein Gleichgewicht, das im Optimum asymptotisch erreicht wird. Die Situation ist trotzdem analog zu solchen Fällen, in denen die Konvergenz zu einem Gleichgewicht optimal ist, weil der optimale Pfad selbst instabil ist. Das heißt, bei kleinen Abweichungen vom Optimum entfernt man sich immer weiter vom optimalen Pfad, unabhängig davon, ob er selbst gegen ein Gleichgewicht konvergiert oder nicht.

identischer Haushalte, die für die positive Interpretation des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells in seiner Grundversion erforderlich sind, soll hier gar nicht die Rede sein.

Denn nur dann, wenn man vernünftigerweise davon ausgehen kann, daß es Anpassungsmechanismen gibt, die zumindest bei kleinen Planungsfehlern zur optimalen Lösung zurückführen, kann ein solcher Ansatz zur Erklärung des Sparverhaltens geeignet sein. Wenn einfach Lösungen in offener Schleife verwendet werden, vergrößert sich ein anfangs gemachter Fehler im Laufe der Zeit immer mehr. Hier besteht ein grundlegender Unterschied zwischen statischen und dynamischen neoklassischen Modellen mit rationalen Akteuren. Statische Optima und Gleichgewichte können vielfach durch einen stabilen Anpassungsprozeß an das Optimum ergänzt werden.[29] Zum Beispiel ist im Abschnitt 2.2.2 gezeigt worden, daß die Gradientenmethode als stabiler Prozeß der Ressourcenallokation interpretiert werden kann. Für das Beispiel des Monopols ist dargestellt worden, daß es sogar vorstellbar ist, daß eine einfache Faustregel, die praktisch ohne Kenntnis der ökonomischen Struktur auskommt, zum Optimum führt. Solche Anpassungsprozesse an statische Gleichgewichte sind mit mathematischen Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Gleichung beziehungsweise eines Gleichungssystems vergleichbar, wie etwa der Newton-Methode, die allerdings im Gegensatz zur genannten Faustregel generell die Kenntnis des involvierten Gleichungssystems voraussetzen. Jedenfalls belegen diese Beispiele, daß es immerhin vorstellbar ist, daß sich die Haushalte und Unternehmen in der Realität so ähnlich verhalten, wie wenn sie die jeweils optimalen Lösungen berechneten.

In dynamischen Modellen ist das Optimum dagegen nicht einfach durch die Lösung eines Gleichungssystems, sondern die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen, speziell eines Randwertproblems, charakterisiert. Solche Randwertprobleme sind selbst dann schwierig (numerisch) zu lösen, wenn das zugrunde liegende Modell vollständig bekannt ist, was zum Teil daran liegt, daß die Lösungen in der Regel Sattelpfade darstellen. Der kleinste Fehler bei der Bestimmung der Startwerte führt dazu, daß man sich immer weiter vom Sattelpfad entfernt. Diese Probleme verschärfen sich, wenn das zugrunde liegende Modell aus der Sicht der Entscheidungsträger nicht genau bekannt ist. Da die Realität komplexer als jedes noch so komplizierte Modell ist, muß man davon ausgehen, daß selbst vollkommen rationale Akteure bei der Bestimmung der Startwerte Fehler machen und sich daher nicht entlang von optimalen Sattelpfaden bewegen.

Im Gegensatz zu statischen Modellen ist es schwierig, sich einen **metadynamischen Anpassungsprozeß** an das durch die optimale Lösung charakterisierte dynamische PFC-Gleichgewicht vorzustellen; ein solcher Prozeß ist bisher auch noch nicht formuliert worden. Der wohl einzige Ansatz in dieser Richtung stammt von Heller (1975), der eine Ungleichgewichtsdynamik in ein Modell des Gleichgewichts bei vollkommener Voraussicht mit optimierenden Haushalten eingeführt hat. Heller erhält

[29] In diesem Zusammenhang wird an das Samuelsonsche Korrespondenzprinzip erinnert.

eine Stabilitätsaussage für den Anpassungsprozeß an das PFC-Gleichgewicht. Allerdings basiert dieses Ergebnis auf der Annahme, daß zum Zeitpunkt null, in dem die Entscheidungen getroffen werden, Terminmärkte für die gesamte unendliche Zukunft existieren. Damit beseitigt Heller (1975) die eigentliche Dynamik des Problems, indem er das Optimierungsproblem des repräsentativen Haushalts bei vollkommener Voraussicht wie ein statisches Problem (in einem unendlich dimensionalen Raum) formuliert, so daß ein Gleichgewicht auf Terminmärkten entsteht. Für das so *entdynamisierte* PFC-Gleichgewicht wird nun ein Anpassungsprozeß mit einem walrasianischen Auktionator formuliert. Dieser Anpassungsprozeß ist unter bestimmten Annahmen (etwa Bruttosubstituierbarkeit) stabil. Also wird die ursprüngliche Dynamik des Problems durch ein walrasianisches Tâtonnement auf den Terminmärkten ersetzt, das im wesentlichen mit dem Prozeß in statischen allgemeinen Gleichgewichtsmodellen übereinstimmt (abgesehen davon, daß es jetzt unendlich viele Güter gibt).

Ohne einen stabilen Anpassungsprozeß an das PFC-Gleichgewicht bieten nur Rückkopplungslösungen einen möglichen Ausweg, da die Rückkopplung dafür sorgt, daß Fehler in der Berechnung des Optimums korrigiert werden können. Doch auch hier stellt sich die Frage, ob denn die Rückkopplungslösung selbst durch irgendwelche Näherungsmethoden bestimmt werden kann. Ein wesentliches Problem bei der Berechnung optimaler Lösungen stellt die Ermittlung der richtigen Startwerte für die Kontrollvariablen dar, was für die Rückkopplungslösung ebenso gilt wie für die Lösung in offener Schleife. Wenn dagegen zum Beispiel der richtige Startwert für den Konsum im Ramsey-Koopmans-Cass-Modell exakt bekannt ist, so spielt es keine Rolle, welche Art der Lösung man verwendet, da es dann prinzipiell möglich ist, die Lösung in offener Schleife in die Rückkopplungslösung zu transformieren und umgekehrt. Im allgemeinen ist die Ermittlung des Startwertes aber nicht exakt, sondern nur mittels numerischer Näherungsmethoden möglich. Über die extremen Auswirkungen kleiner Fehler bei open loop-Lösungen ist berichtet worden. Unter diesen Umständen ist es erforderlich, den Startwert für den Konsum in relativ kleinen Zeitintervallen ständig aufs neue numerisch zu bestimmen, um wenigstens keine völlig falsche Entwicklung des Kapitalstocks zu verursachen. Im Abschnitt 3.2.1 ist dagegen aufgezeigt worden, daß Rückkopplungslösungen auch dann noch gute Ergebnisse liefern können, wenn bei der Planung kleine Fehler gemacht werden.

Leider ist es im allgemeinen unmöglich, eine Rückkopplungslösung exakt zu bestimmen. Schon für das relativ einfache Ramsey-Koopmans-Cass-Modell ist, abgesehen von Spezialfällen, weder eine Rückkopplungslösung noch eine Lösung in offener Schleife exakt bekannt. Die funktionale Darstellung des stabilen Armes eines Sattelpunktes wird häufig als **Politikfunktion** bezeichnet, weil sie die optimale Wahl von c in Abhängigkeit von k zu jedem Zeitpunkt angibt. Diese Politikfunktion stimmt mit der Rückkopplungslösung des Optimierungsproblems überein. In Barro und Sala-i-Martin (1998, S. 96) wird das Verfahren der **Elimination der Zeit** als Möglichkeit zur

numerischen Ermittlung der Politikfunktion vorgeschlagen.[30] Um diesen Ansatz als positive Theorie des Wirtschaftswachstums zu verwenden, muß man unterstellen, daß zumindest einige Haushalte in realen Volkswirtschaften ihre viel komplizierteren Optimierungsprobleme mit numerischen Methoden lösen. Teilweise wird argumentiert, die Mehrheit der Haushalte könnte dann diejenigen Haushalte imitieren, die die optimalen Lösungen kennen. Aus numerischen Berechnungen ergeben sich aber keine einfachen Regeln, die die anderen Haushalte imitieren könnten. Trotzdem wird das Modell als Grundlage für die empirischen Forschungen verwendet. Soweit seine Implikationen sich als nicht verträglich mit den Daten herausstellen, werden verschiedene Ergänzungen und Modifikationen – wie die Berücksichtigung von Humankapital und endogenem technischem Fortschritt – betrachtet, wobei aber an der Grundhypothese der Bewegung entlang von stabilen Armen der Sattelpunkte von Optimierungsproblemen festgehalten wird. Auch wenn die Modellerweiterungen gewisse Probleme des Grundansatzes überwinden, bleibt diese zentrale Schwäche des gesamten theoretischen Ansatzes bestehen.

Tatsächlich beinhalten Rückkopplungslösungen sogar einige Nachteile im Vergleich zu Lösungen in offener Schleife (vgl. zum Beispiel Petit, 1990, S. 123–125). So ist die (numerische) Berechnung von feedback-Lösungen normalerweise aufwendiger als diejenige der entsprechenden open loop-Lösungen. Wenn es mehrere Zustandsvariablen gibt, hängt die Rückkopplungslösung im allgemeinen von allen diesen Variablen auf eine komplizierte Art und Weise ab, und sofern der Planungshorizont nicht gleich unendlich ist, auch von der Zeit t. Dagegen ist die Lösung in offener Schleife lediglich eine Funktion der Zeit, die einfacher zu verstehen und damit auch einfacher zu imitieren ist. Diese Aussagen sprechen für die open loop-Kontrolle, deren wesentlicher Nachteil durch die sukzessive Reoptimierung mit wiederholter Bestimmung neuer Startwerte für die Kontrollvariablen in relativ kleinen Zeitabständen abgeschwächt werden kann. Jedoch muß angemerkt werden, daß die Imitation von instabilen Lösungen in offener Schleife eben nicht zum tatsächlichen Optimum führen kann.

Teilweise wird auch gleich der (modifizierte) Pfad der Goldenen Regel (in erweiterten Modellen) als Ansatz zur Erklärung des Wirtschaftswachstums verwendet,[31] wofür zwei Gründe sprechen. Zum einen hat das langfristige Gleichgewicht (zumindest im Grundmodell) eine erfreuliche Eigenschaft: es ist unabhängig von der speziellen Form der Momentannutzenfunktion.[32] Zum anderen legt es die asymptotische

[30] Später wird gezeigt, daß man eine exakte Rückkopplungslösung für den Spezialfall mit einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion und einer bestimmten Parameterkonstellation ermitteln kann.

[31] Vgl. zum Beispiel Lucas (1988) und Romer (1990). In deren erweiterten Modellen der Theorie des endogenen Wachstums treten allerdings Externalitäten auf, die dazu führen, daß die aus der Sicht der Konsumenten optimale Lösung nicht auch die gesamtwirtschaftlich optimale Lösung ist. Außerdem ist das Pro-Kopf-Einkommen im langfristigen Gleichgewicht nicht konstant. Jedoch ergibt sich wie im Grundmodell von Ramsey-Koopmans-Cass eine konstante Sparquote im steady state.

[32] Das Gleichgewicht hängt nur von der Art der Produktionsfunktion und den Parametern ρ und n ab. Das gilt auch, wenn nicht wie hier eine Momentannutzenfunktion mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität unterstellt wird. Allerdings geht diese Eigenschaft für bestimmte Modellerweiterungen

Konvergenz des Sattelpfades zum Gleichgewicht in Verbindung mit dem Turnpike-Theorem nahe, daß der Pfad der Goldenen Regel sowohl für einen unendlichen als auch für einen endlichen Planungshorizont eine gute Näherung für die optimale Lösung ist (zumindest, wenn der Startwert nicht allzu weit vom Gleichgewicht entfernt liegt). Das impliziert aber keineswegs, daß die Goldene Regel auch eine Näherung für das tatsächliche Verhalten der Haushalte ist. Trotzdem ist diesem Ansatz noch der Vorzug gegenüber den Sattelpfadansätzen zu geben. Denn die Goldene Regel, die eine konstante Sparquote beinhaltet, ist sehr viel einfacher als ein optimaler Pfad außerhalb des Gleichgewichts zu bestimmen. Den Haushalten sollte es also erheblich leichter fallen, eine konstante Sparquote gemäß der (modifizierten) Goldenen Regel zu berechnen oder zu imitieren, als eine variable Sparquote, die auch abseits des langfristigen Gleichgewichts optimal ist. Da das langfristige Gleichgewicht im Solow-Modell stabil ist, bietet dieser Ansatz die Möglichkeit, sich dem tatsächlichen intertemporalen Optimum wenigstens asymptotisch zu nähern. Die Bestimmung der optimalen konstanten Sparquote gemäß der Goldenen Regel kann daher auch als eine Art **Faustregel** interpretiert werden.

Diese Überlegung führt zu der Frage, ob die Möglichkeit besteht, daß eine konstante Sparquote auch für den Übergangsprozeß zum langfristigen Gleichgewicht optimal sein kann. Früher ist bereits darauf hingewiesen worden, daß Kurz (1968) gezeigt hat, daß eine konstante Sparquote als optimale Lösung für bestimmte zugrunde liegende Nutzenfunktionen interpretiert werden kann. Die Bestimmung einer Nutzenfunktion, deren Maximierung eine gegebene Sparfunktion erzeugt, bezeichnet Kurz als **inverses Problem des optimalen Wachstums**. Dieses inverse Problem wird hier nicht gelöst (vgl. dazu Kurz, 1968, S. 166–173). Stattdessen wird gezeigt, daß eine konstante Sparquote für bestimmte Konstellationen der Parameter des hier behandelten Falls einer Nutzenfunktion mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität tatsächlich optimal ist. In diesem Fall kann man daher eine Rückkopplungslösung in geschlossener Form angeben.

Konkret wird eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $Y = aK^\alpha L^{1-\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ unterstellt. Dann lautet die Pro-Kopf-Produktionsfunktion $y = f(k) = ak^\alpha$. Das System der Differentialgleichungen (3.27) wird damit zu

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\theta}(a\alpha k^{\alpha-1} - n - \rho)c, \\ \dot{k} &= ak^\alpha - nk - c. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Gemäß (3.30) lautet das Gleichgewicht

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \left(\frac{a\alpha}{n+\rho}\right)^{1/(1-\alpha)}, \\ \hat{c} &= a\left(\frac{a\alpha}{n+\rho}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} - n\left(\frac{a\alpha}{n+\rho}\right)^{1/(1-\alpha)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

wie zum Beispiel die Berücksichtigung des arbeitsvermehrenden technischen Fortschritts verloren, vgl. den Abschnitt 3.5.2.

Die Sparquote $\hat{s}$ in diesem langfristigen Gleichgewicht, die die modifizierte Goldene Regel erfüllt, erhält man aus $\hat{s} = 1 - \hat{c}/(a\hat{k}^{\alpha})$ als[33]

$$\hat{s} = \frac{n\alpha}{n+\rho}.$$

Dem entspricht der Pro-Kopf-Konsum in Abhängigkeit von $\hat{k}$

$$\hat{c} = (1-\hat{s})a\hat{k}^{\alpha} = \frac{n+\rho-n\alpha}{n+\rho}a\hat{k}^{\alpha}.$$

Nun wird unterstellt, daß die berechnete Sparquote auch während des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht entlang des Sattelpfades optimal ist, daß also die optimale Lösung des Ramsey-Koopmans-Cass-Problems eine konstante Sparquote beinhaltet. Dann muß außerhalb des Gleichgewichts die Rückkopplungsregel

$$c(t) = \frac{n+\rho-n\alpha}{n+\rho}ak(t)^{\alpha}. \tag{3.34}$$

optimal sein. Wenn diese Lösung tatsächlich optimal ist, muß der Wert der Zeitableitung von c gemäß (3.34) gleich demjenigen der Zeitableitung von c in (3.32) sein:

$$\frac{n+\rho-n\alpha}{n+\rho}a\alpha k(t)^{\alpha-1}\dot{k} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\theta}(a\alpha k^{\alpha-1} - n - \rho)c.$$

Ersetzt man $\dot{k}$ durch die zweite Gleichung in (3.32) und c durch (3.34), so führt dieser Ansatz nach einigen Umformungen zu der Beziehung

$$\theta\left(\frac{\alpha n}{n+\rho}a\alpha k^{\alpha-1} - n\alpha\right) = a\alpha k^{\alpha-1} - n - \rho.$$

Für alle k muß diese Gleichung erfüllt sein. Deshalb kann man analog zur Methode der unbestimmten Koeffizienten einen Koeffizientenvergleich durchführen, der die Gleichungen

$$\theta\frac{\alpha n}{n+\rho}a\alpha = a\alpha \quad \text{und} \quad -\theta n\alpha = -n-\rho$$

liefert. Beide Beziehungen sind erfüllt, wenn gilt

$$\theta = \frac{n+\rho}{\alpha n}.$$

Dieser Wert von θ ist der Kehrwert der Sparquote im langfristigen Gleichgewicht. Die Rückkopplungsregel (3.34) erfüllt damit alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\theta = (n+\rho)/(\alpha n)$, weil sie den Gleichungen (3.32) genügt und weil c

[33] Für $\rho = 0$ folgt $\hat{s} = \alpha$. Da α, die Produktionselastizität des Kapitals, der Kapitalertragsquote bei vollständiger Konkurrenz entspricht, ist $\hat{s} = \alpha$ die Goldene Regel mit $sY = rK$ beziehungsweise $s = rK/Y = \alpha$.

und k (wie im Solow-Modell) gegen das langfristige Gleichgewicht konvergieren. In diesem Fall ist die konstante Sparquote

$$\hat{s} = \frac{1}{\theta} = \frac{\alpha n}{n+\rho} \tag{3.35}$$

also optimal für das Ramsey-Koopmans-Cass-Modell. Durch (3.34) ist die Politikfunktion gegeben.

Eine Rückkopplungslösung läßt sich also für eine bestimmte Parameterkombination ermitteln, die zu einer konstanten Sparquote führt. Allerdings setzt dieser Fall voraus, daß die Beziehung (3.35) erfüllt ist. Da θ, α, n und ρ in diesem Modell exogene Konstanten sind, hat die Erfüllung dieser Gleichung das Wahrscheinlichkeitsmaß null. Mit anderen Worten, da diese (reellen) Konstanten exogen gegeben sind, muß man davon ausgehen, daß die Gleichung nicht erfüllt ist. Eine konstante Sparquote ist dann keine optimale Lösung, und man kann die Politikfunktion nur numerisch bestimmen. Daher kennen die Haushalte in einer Volkswirtschaft keine Rückkopplungsregel. Oft stützt sich die positive Interpretation des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells auch darauf, daß die Haushalte einfach der Keynes-Ramsey-Regel in (3.32) folgen, die noch relativ leicht zu berechnen ist. Die Bewegung entlang des Sattelpfades setzt dann allerdings voraus, daß der richtige Startwert für c bekannt ist. Wie die Haushalte diesen Startwert erfahren, wird nicht erklärt. Doch selbst wenn sie ihn kennen, wird in diesem Fall die Lösung in offener Schleife verwendet.[34] In den numerischen Beispielen im Abschnitt 3.2.1 ist gezeigt worden, welche radikalen Auswirkungen ein winziger numerischer Fehler am Anfang des Planungszeitraumes hat. Man kann also nicht davon ausgehen, daß eine Bewegung entlang des Sattelpfades stattfindet. Natürlich können empirische Beobachtungen trotzdem im Einklang mit diesem Modell beziehungsweise einer seiner Erweiterungen stehen. Daß aus der Wahrheit der Implikationen einiger Annahmen kein Rückschluß auf die Wahrheit dieser Annahmen möglich ist, ist ein logisches Grundgesetz.

Anfangs ist darauf hingewiesen worden, daß einige Autoren den Ansatz der dynamischen Optimierung als Lösung des sogenannten **Hahn-Problems** ansehen. Hahn (1966) hat für den Cobb-Douglas-Fall gezeigt, daß der steady state-Pfad in einem positiven (deskriptiven) Modell einer Volkswirtschaft mit heterogenen Kapitalgütern und extremer **klassischer Sparfunktion** (das gesamte Arbeitseinkommen wird konsumiert, das gesamte Kapitaleinkommen investiert)[35] instabil ist, wenn die Entscheidungsträger **kurzsichtig vollkommene Voraussicht (myopic perfect foresight)** haben, wenn also die erwarteten und die tatsächlichen Preisänderungen in jedem Zeitpunkt übereinstimmen.[36] Während Hahn die Instabilität auf die Existenz heteroge-

[34] Obwohl der Zinssatz in (3.32) von $k(t)$ abhängt, entspricht die Befolgung der Keynes-Ramsey-Regel keiner Rückkopplungsstrategie, für die es erforderlich ist, daß c in jedem Zeitpunkt als Funktion von k gegeben ist. Hier wird dagegen $c(0)$ (wie auch immer) bestimmt und das Wachstum von c folgt dann der angegebenen Regel mit einem nicht konstanten Zinssatz.

[35] Allgemeiner liegt eine (nicht extreme) klassische Sparfunktion vor, wenn eine fester Anteil des Kapitaleinkommens gespart wird, der nicht gleich eins sein muß.

[36] Einen allgemeinen Beweis für dieses Resultat gibt Kuga (1977).

ner Kapitalgüter und die damit verbundene Arbitrage-Gleichgewichtsbedingung zurückführt (die Nettoertragsrate inklusive erwarteter Preisänderungen muß für alle Kapitalgüter gleich sein), hat Kurz (1968) gezeigt, daß sogar ein Ein-Sektor-Modell instabil sein kann. Im allgemeinen tritt das Hahn-Problem in jedem Modell auf, in dem die Haushalte mit kurzfristiger vollkommener Voraussicht Vermögen in unterschiedlichen Aktiva halten können, da die mit dem Arbitragegleichgewicht verknüpften dynamischen Preisgleichungen in diesem Fall instabil sind. Wie bereits gezeigt worden ist, kann man die konstante Sparquote im Solow-Modell als Lösung eines dynamischen Optimierungsproblems auffassen. Kurz (1968) interpretiert nun die Kozustandsgleichung als dynamische Preisgleichung, die den Preis des Kapitals in Nutzeneinheiten mißt. Da jedes Gleichgewicht eines gestörten Hamilton-Systems instabil ist (vgl. das Korollar zum Satz 2.23 auf der Seite 100), gilt die Instabilität in dieser Interpretation sogar für das Solow-Modell. An die Stelle heterogener Kapitalgüter kann also das zweite Gut *Nutzen* treten. Dagegen ist das Solow-Modell stabil, wenn man nur die konstante Sparquote verwendet und den Pro-Kopf-Konsum gemäß $c(k) = (1-s)f(k)$ bestimmt; die Stabilität wird also durch die Verwendung einer Rückkopplungsregel erzeugt. Die Diskussion macht klar, daß das Hahn-Problem auch in Modellen auftritt, in denen es neben dem (homogenen) Kapitalstock das Aktivum **Geld** gibt. Tatsächlich ist das im Abschnitt 2.2.4 dargestellte Modell der Geldnachfrage die einfachste Möglichkeit, die Problematik zu verdeutlichen. Daher wird hier auf die relativ aufwendige Darstellung des Modells von Hahn (1966) verzichtet.

Im Abschnitt 3.3 ist dargestellt worden, daß ein PFC-Gleichgewicht, in dem die Entscheidungsträger nicht wie bei kurzsichtig vollkommener Voraussicht nur über die Preisänderungen in jedem Zeitpunkt, sondern aufgrund ihrer vollkommenen Voraussicht (perfect foresight) über die gesamten zukünftigen Zeitpfade informiert sind, äquivalent zu einem Problem des optimalen Wachstums ist (Aussage 3.5). In diesem Fall werden explodierende Pfade durch die Transversalitätsbedingungen ausgeschlossen, so daß das Hahn-Problem dadurch nach Ansicht vieler Autoren beseitigt wird. Dabei wird allerdings vergessen, daß das langfristige Gleichgewicht und auch die optimale Lösung selbst instabil sind; es wird lediglich ein Argument gegeben, warum der Sattelpfad unter extremen Annahmen gewählt werden kann. Burmeister (1980, S. 234) bemerkt dazu: *If we are willing to ignore reality, a ... theoretically satisfactory solution to the Hahn saddlepoint instability problem has been provided ....*[37] Reali-

[37] Das Argument steht im Zusammenhang mit der Tatsache, daß explodierende Pfade (teilweise als **bubbles** bezeichnet) unter bestimmten Annahmen (die für die dezentrale Version des RKC-Modells erfüllt sind) kein PFC-Gleichgewicht sein können. Blanchard und Fischer (1989, S. 260) bemerken dazu: *These divergent solutions can sometimes be ruled out by partial or general equilibrium arguments, although the arguments often rely on a degree of rationality and foresight that is unlikely to be present in practice.* Eine Übersicht über verschiedene Ansätze findet sich in Gray (1984). Explosive Preispfade werden generell aufgrund von Transversalitätsbedingungen wie denjenigen von Benveniste und Scheinkman (1982) ausgeschlossen, während implosive Preispfade kein PFC-Gleichgewicht sein können, wenn die Preise schließlich negativ werden. Eine generelle Kritik an Modellen mit vollkommener Voraussicht beziehungsweise rationalen Erwartungen, die letztlich auch auf dem fehlenden Anpassungsmechanismus basiert, findet sich bei Sanyal (1996).

stischere Ansätze stammen von Burmeister et al. (1968) sowie von Burmeister und Turnovsky (1978). Burmeister et al. (1968) nehmen an, daß alte Kapitalgüter nicht gehandelt werden können und daß ein konstanter Anteil des Kapitaleinkommens zur Reinvestition in den jeweiligen Kapitalstock verwendet wird, während das gesamte Arbeitseinkommen konsumiert wird. Für den Cobb-Douglas-Fall beweisen sie die globale Stabilität des langfristigen Gleichgewichts. Burmeister und Turnovsky (1978) verwenden anstelle der Annahme der kurzsichtig vollkommenen Voraussicht eine stetige Variante der adaptiven Erwartungshypothese und geben die Annahme der kontinuierlichen Markträumung auf. Auch in diesem Fall können sie einige Stabilitätsresultate für bestimmte Spezialfälle beweisen. Obwohl der Fall der heterogenen Kapitalgüter im folgenden nicht weiter betrachtet wird, läßt sich aus dieser Diskussion die Schlußfolgerung ziehen, daß die Betrachtung einfacher Rückkopplungsregeln (wie bei Burmeister et al., 1968) für den Konsum in Modellen des Wirtschaftswachstums sinnvoll ist und geeignet sein kann, dem Hahn-Problem zu entgehen, wenn man für den Fall heterogener Kapitalgüter gewisse Friktionen des Marktes (keine kontinuierliche Markträumung, unvollkommener Markt bezüglich der alten Kapitalgüter) unterstellt.

Um Mißverständnissen vorzubeugen: Hier wird keineswegs die Auffassung vertreten, daß ein Modell deshalb abzulehnen ist, weil seine Annahmen nicht vollkommen realistisch sind. Denn jedes Modell ist definitionsgemäß nur ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit, und ohne sinnvolle Abstraktionen sind wissenschaftliche Erkenntnisse wohl kaum möglich. Viele besonders nützliche ökonomische Theorien zeichnen sich gerade durch ihre Einfachheit aus, die es etwa erlaubt, wirtschaftspolitische Empfehlungen anhand eines Gedankenmodells zu bewerten. Eine andere Frage ist es jedoch, ob Ergebnisse, die selbst innerhalb eines Modells nicht robust gegen kleine Änderungen sind, ernsthaft in bezug auf die Wirklichkeit interpretiert werden können. Instabile Gleichgewichte sind in bezug auf kleine Änderungen im Modell nicht robust, da sie bei minimalen Datenfehlern nie erreicht werden können. Ein analoges Beispiel aus der Physik stellt das mathematische Modell des Pendels dar, das im Beispiel 2.8 auf der Seite 57 analysiert worden ist. Wie für das ungedämpfte Pendel existieren auch für das daraus abgeleitete (realistischere) Modell des gedämpften Pendels Sattelpunkte, die die instabile Gleichgewichtslage repräsentieren, in denen das Pendel senkrecht nach oben steht (vgl. zum Beispiel Hale und Koçak, 1991, S. 269–270, 273–275). Ebenso wie kein Physiker auf die Idee kommt, aus der Existenz eines Sattelpfades in Richtung der instabilen Gleichgewichtslage zu folgern, daß Pendel in der Regel auf dem Kopf stehen bleiben, sollten Ökonomen nicht aus der Existenz von Sattelpfaden in dynamischen Optimierungsproblemen folgern, daß die Wirtschaft sich entlang eines solchen Pfades bewegt. So wie die Vorhersage eines Physikers in bezug auf ein gedämpftes Pendel lautet, daß eine stabile Gleichgewichtslage erreicht wird (in der das Pendel senkrecht nach unten hängt), muß die Vorhersage eines Ökonomen in bezug auf eine Volkswirtschaft, die den Differentialgleichungen (3.27) folgt, lauten, daß je nach Startwert entweder das Kapital in endlicher Zeit verbraucht ist oder das **stabile Gleichgewicht** $(0, \bar{k})$ in der Abbildung 3.6 erreicht wird.[38] Diese positive Interpretation des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells, bei der sämtliche Eigenschaften der Optimalität verloren gehen, dürfte allerdings kaum ernsthaft vertreten werden.

Gegen die genannte Analogie kann eingewendet werden, das Modell des Pendels stelle kein Optimierungsproblem dar und daher bestehe im Gegensatz zum Modell des optimalen Wachstums auch keine Veranlassung, den Sattelpfad auszuwählen. Die Analogie wird aber vollständig, wenn man einen hohen Preis aussetzt und Personen einem Test unterzieht, in dem sie ein Pendel in eine bestimmte Ausgangslage versetzen und so anstoßen sollen, daß es auf dem Kopf stehen bleibt. Eine Befragung mehrerer Physiker hat ergeben, daß auch im Falle eines echten Pendels mit einer geringfügigen Reibung niemand eine positive Wahrscheinlichkeit für das Gelingen angeben wollte. Diese Einstellung ändert sich erst, wenn man ein hohe Reibung unterstellt, da ein reales Pendel dann auch zur Ruhe kommen kann, wenn es gar nicht exakt vertikal steht. Dem entspricht in der Ökonomik der bereits zitierte Ansatz von Burmeister und Turnovsky (1978), deren Stabilitätsresultate auf der Einführung von adaptiven Erwartungen und Verzögerungen der Markträumung (also einer Art *Reibung*) basieren.

3.4.2 Zur mikroökonomischen Theorie der Ersparnis

Letztlich basiert das Verhalten der aggregierten Ersparnis auf den mikroökonomischen Sparentscheidungen der Haushalte.[39] Die theoretischen Modelle kann man grob in Standardansätze und Nicht-Standardansätze einteilen. Die Standardansätze können sämtlich als konkretisierte stochastische Varianten des Ramsey-Modells bezeichnet werden (auch wenn das keine übliche Terminologie ist), wobei die stetige Zeit durch diskrete Perioden ersetzt wird und der Planungshorizont endlich ist. So basieren auch die Lebenszeit-Einkommens-Hypothese von Modigliani und Brumberg (1954) und die permanente Einkommenshypothese von Friedman (1957) auf intertemporalen Optimierungsproblemen nach der Art von Ramsey (1928). In der modernen Version werden die Modelle insbesondere nach den Annahmen über die Form der Nutzenfunktion, die Vollkommenheit des Kapitalmarktes sowie die Erwartungsbildung differenziert. Beispielsweise wird für das **additive Standardmodell** angenommen, daß die Haushalte ihre intertemporal additive Nutzenfunktion im Sinne des Erwartungsnutzens mit rationalen Erwartungen maximieren, wobei die individuellen Diskontraten konstant sind und der Kapitalmarkt vollkommen ist (vgl. Browning und Lusardi, 1996, S. 1802).

[38] Da in diesem Gleichgewicht $f'(\bar{k}) < n$ und $c = 0$ gilt, kann man erkennen, daß die Routh-Hurwitz-Bedingungen erfüllt sind. Das Gleichgewicht ist also lokal stabil.

[39] Einen Überblick über die mikroökonomische Theorie der Ersparnis und empirische Tests findet man bei Browning und Lusardi (1996).

Nun stellt sich zunächst die Frage, wie die mikroökonomische Theorie mit der aggregierten Betrachtung in der Wachstumstheorie im Zusammenhang steht. Wie aus der Aggregationstheorie bekannt ist, sind makroökonomische Aggregate, die sich wie die individuellen Größen verhalten, nur unter äußerst restriktiven Hypothesen aus den individuellen Funktionen ableitbar. Trotzdem kann es sinnvoll sein, solche Annahmen zu treffen, um ein handhabbares Denkmodell zu entwickeln. So ist zum Beispiel früher bei der Ableitung der dezentralen Gleichgewichtsversion des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells unterstellt worden, daß alle Haushalte **vollkommen identisch** sind. Das Problem ist hier jedoch tiefgreifender, weil die endlichen Planungshorizonte vieler einzelner Haushalte durch einen unendlichen Planungshorizont eines Haushalts (beziehungsweise einer Dynastie) im aggregierten Modell ersetzt werden. Die Argumentation zur Rechtfertigung dieser Art der Aggregation kann auf eine erweiterte Version des Modells überlappender Generationen von Samuelson (1958) und Diamond (1965) gestützt werden. Diesem Modell liegt ein diskretes Optimierungsproblem für die Haushalte zugrunde, die jeweils zwei Perioden lang leben; in der ersten Periode, der Jugend, wird Einkommen erzielt, das teilweise gespart werden kann, um in der zweiten Periode, dem Alter, konsumieren zu können. In jeder Periode gibt es eine junge und eine alte Generation. Während das Modell überlappender Generationen in seiner Grundversion zu einem anderen Ergebnis als das RKC-Modell führt, weil ein dynamisch ineffizienter Betrag der Ersparnis möglich ist, zeigen Barro und Sala-i-Martin (1998, Anhang zum Kapitel 3), daß eine diskrete Version des RKC-Modells generiert werden kann, wenn man eine altruistische Bindung zwischen den Eltern und ihren Kindern unterstellt, so daß die Eltern ihren Kindern Vermögen vererben. Insofern ist das aggregierte Modell mit den mikroökonomischen Standardansätzen vereinbar, vorausgesetzt daß alle Haushalte identisch sind (abgesehen vom Anfangsvermögen unterschiedlicher Generationen). Diese Annahmen sind jedoch äußerst restriktiv.

Die empirischen Tests der mikroökonomischen Ansätze gehen regelmäßig von verschiedenen Erweiterungen aus. So werden zum Beispiel demographische Faktoren zur Erklärung des Konsums beziehungsweise der Ersparnis einbezogen. Bemerkenswert ist auch die Tatsache, daß die Art der zufälligen Einflüsse und der Erwartungsbildung nicht nur in bezug auf die Empirie, sondern schon hinsichtlich der theoretischen Ergebnisse erheblichen Einfluß auf die optimale Wahl der Ersparnis hat (vgl. Browning und Lusardi, 1996, S. 1802). Das aggregierte Wachstumsmodell berücksichtigt weder solche zusätzlichen Faktoren noch die Implikationen der Stochastik.

Trotzdem wird auf die zahlreichen empirischen Tests hingewiesen, die von Browning und Lusardi (1996) zusammengefaßt werden. *In the end, the results on the validity of the standard additive model from consumption Euler equations are deeply ambiguous* (Browning und Lusardi, 1996, S. 1835).[40] Obwohl sich diese Aussage auf kurzfristige Tests bezieht, ergeben sich bei der Analyse der Ursachen für die langfri-

[40] Die Euler-Gleichung ist eine Optimumbedingung der klassischen Variationsrechnung, die aus dem Pontryaginschen Maximumprinzip abgeleitet werden kann.

stig gefallene aggregierte Sparquote der Vereinigten Staaten ähnliche Schwierigkeiten.[41] Hier werden neben elf Hypothesen, die unter Umständen mit dem Standardmodell in Einklang gebracht werden können, auch einige Nicht-Standardhypothesen der **verhaltenswissenschaftlichen Ökonomik (behavioral economics, sozialökonomische Verhaltensforschung)** angeführt. Eine vollständige Erklärung muß wohl auf der Einbeziehung mehrerer Ansätze basieren. Wie sehr die Beurteilung empirischer Tests von persönlichen Einstellungen abhängt, dokumentieren die beiden Autoren eindrucksvoll anhand ihrer eigenen Interpretation der dargestellten Studien: *Browning feels that ... there is no strong evidence against the standard additive model while Lusardi believes that there is* (Browning und Lusardi, 1996, S. 1835).

Auch in der mikroökonomischen Theorie wird insbesondere von den Vertretern der verhaltenswissenschaftlichen Ökonomik mittlerweile häufig die Auffassung vertreten, daß dynamische Optimierungsprobleme in der Realität viel zu komplex sind, als daß die Haushalte sie lösen könnten. Teilweise wird argumentiert, daß dieses Problem dadurch gelöst wird, daß zahlreiche Individuen ähnliche Probleme lösen müssen. Dann können diejenigen, die überfordert sind, die Erfolgreichen imitieren. Auf die Vielfalt der Probleme, die damit verbunden sind (zum Beispiel, gibt es überhaupt passende Vorbilder), soll hier nicht weiter eingegangen werden. Stattdessen wird auf ein weiteres Argument von Buhr und Christiaans (2001) auf der Grundlage von Ergebnissen der Hirnforschung hingewiesen, wonach grundlegende Bedenken gegenüber der grundsätzlichen Fähigkeit der Menschen zu rationalem Handeln bestehen. Die Struktur des menschlichen Gehirns legt es vielmehr nahe, daß Entscheidungen auf **Faustregeln**, nicht auf rationaler Planung beruhen. Die grundlegenden neoklassischen Modelle der Wirtschaft können daher nur dann adäquat sein, wenn ihre wesentlichen Schlußfolgerungen robust gegenüber solchen realitätsbezogenen Änderungen der unterstellten Verhaltensweisen sind. Während diese Robustheit für statische Modelle immerhin möglich erscheint, ist sie für dynamische Modelle aufgrund der Komplexität der zu lösenden Probleme und der fehlenden Stabilität optimaler Lösungen in offener Schleife beziehungsweise fehlender Anpassungsmechanismen an den Gleichgewichtspfad mit Zweifeln behaftet. Es erscheint daher sinnvoll, auch die Implikationen der neoklassischen Wachstumstheorie unter alternativen Annahmen zu analysieren. Hierbei stellt sich das zentrale Problem, welche der (wohl unbegrenzt vorhandenen) alternativen Verhaltenshypothesen zu verwenden ist. Eine naheliegende Möglichkeit ist die Unterstellung einer konstanten Sparquote, wie schon im grundlegenden Modell von Solow (1956). Das Konsumentenverhalten ohne jeden Bezug zum ökonomischen Prinzip zu modellieren, widerspricht allerdings dem neoklassischen Paradigma. In der Literatur werden daher auch abgeschwächte Varianten diskutiert, wonach die Haushalte zum Beispiel zwar eine konstante Sparquote wählen, die aber unter allen konstanten Sparquoten optimal ist.[42]

[41] Im Gegensatz zu diesem Ergebnis interpretieren Barro und Sala-i-Martin (1998, S. 91) Paneldaten verschiedener Länder dahingehend, daß die Sparquote während des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht tendenziell steigt.

[42] Eine optimale konstante Sparquote sollte nicht mit der Sparquote der (modifizierten) Goldenen Re-

Krusell und Smith (1996) haben in Simulationen (unter anderem) die Faustregel einer (optimalen) konstanten Sparquote mit der dynamisch optimalen Lösung in der stochastischen Version des grundlegenden neoklassischen Wachstumsmodells in diskreter Zeit verglichen, indem sie Kosten der optimalen Entscheidungsfindung in das Modell eingeführt haben. Dabei zeigt sich, daß selbst bei relativ geringen Entscheidungskosten viele oder sogar alle Haushalte im Gleichgewicht die konstante Sparquote der optimalen Lösung vorziehen, wobei ihr Verhalten unter Berücksichtigung der Entscheidungskosten vollkommen rational ist. (Im Gleichgewicht ist der Nettonutzen, also der um die in Nutzeneinheiten gemessenen Kosten der Entscheidungsfindung bereinigte Gesamtnutzen, eines Haushalts, der die optimale Lösung wählt, gleich demjenigen eines Haushalts, der die optimale konstante Sparquote wählt.) Die Berücksichtigung von auch nur geringen Kosten der Entscheidungsfindung führt zu grundlegenden Änderungen der Implikationen des neoklassischen Wachstumsmodells, denn auch die simulierten aggregierten Zeitreihen reagieren auf die Benutzung von Faustregeln äußerst sensitiv. Einer der Erfolge der Theorien realer Konjunkturzyklen, durch das Optimierungsverhalten der Wirtschaftssubjekte die relative Volatilität aggregierter Zeitreihen erklären zu können (der Konsum schwankt weniger als die Investitionen und das Nationaleinkommen), gerät damit ins Wanken. Denn in der Realität gibt es Kosten der Entscheidungsfindung (man denke allein an die Beschaffung von Informationen). Diese Kosten führen dazu, daß das neoklassische Modell andere relative Zeitreihen generiert, also ohne Berücksichtigung kostspieliger Entscheidungen. Mit einer konstanten Sparquote ist die Volatilität des Konsums gleich derjenigen des Nationaleinkommens, das heißt, die relativ unterschiedliche Volatilität der genannten Zeitreihen kann damit nicht erklärt werden. In diesem Zusammenhang wird angemerkt, daß diese Unzulänglichkeit einer konstanten Sparquote bezüglich der Erklärung konjunktureller Phänomene nichts über ihre Eignung in der Wachstumstheorie aussagt, die von konjunkturellen Schwankungen abstrahiert.

Die Ergebnisse von Krusell und Smith (1996) beruhen auf der Berücksichtigung von Kosten der Ermittlung der optimalen Entscheidung. Wie Lettau und Uhlig (1999) gezeigt haben, wählen die Haushalte aus einer exogen gegebenen Menge alternativer Entscheidungsregeln, die die optimale Lösung enthält, unter Umständen auch unabhängig von diesen Kosten nicht die optimale Lösung aus, weil sie eine andere Lösung als vorteilhaft wahrnehmen können. Dieses Ergebnis basiert auf der Annahme, daß die suboptimale Regel nur unter günstigen Umweltbedingungen, die optimale Regel dagegen immer anwendbar ist. Obwohl diese Voraussetzung fragwürdig erscheint, zeigen die Ergebnisse von Lettau und Uhlig (1999), daß es in einem dynamischen Modell durchaus möglich ist, daß die Haushalte andere Lösungen als die optimale wählen, auch wenn letztere unter den zur Auswahl stehenden Alternativen ist. Das hier vertretene Argument basiert weder auf den Kosten der Entscheidungsfindung,

gel der Akkumulation verwechselt werden. Letztere ist lediglich optimal unter der Nebenbedingung, daß $\dot{k} = 0$ ist, was einen speziellen zu dieser Sparquote passenden Startwert k_g (beziehungsweise $\hat{k}$) der Kapitalintensität erfordert. Wenn $k_0 \neq k_g$ ist, wird im allgemeinen eine andere Sparquote als die der Goldenen Regel optimal unter allen konstanten Sparquoten sein.

noch auf der Möglichkeit einer verzerrten Auswahl der Alternativen, sondern geht einen Schritt weiter. Erstens ist es zweifelhaft, ob die optimale Lösung überhaupt unter den möglichen Alternativen ist, und zweitens ist die optimale Lösung, wenn sie denn bekannt ist, instabil. Die Implikationen neoklassischer Optimierungsmodelle können deshalb nur dann eine sinnvolle positive Theorie des Wirtschaftswachstums begründen, wenn sie auch mit alternativen Hypothesen über die Entscheidungsfindung reproduziert werden können.

Neben den empirischen Tests und den Simulationsrechnungen ist mittlerweile als weiterer Ansatz das erste Laborexperiment zur Bildung der Ersparnis im Rahmen eines Wachstumsmodells durchgeführt worden (Lei und Noussair, 2002), dessen Ergebnisse gegen die hier vertretene Auffassung zu sprechen scheinen. In diesem Experiment werden die Vorhersagen des RKC-Modells bezüglich der Konvergenz des Konsumniveaus und des Kapitalstocks in einer dezentralen Volkswirtschaft gegen das optimale langfristige Gleichgewicht und bezüglich der Äquivalenz der dezentralen Lösung mit der Lösung eines zentralen Entscheidungsträgers beziehungsweise einer aus mehreren Individuen bestehenden Entscheidungsagentur getestet. Für das dezentrale Experiment sind in mehreren Kohorten je fünf Individuen jeweils mit einer hypothetischen Produktionsfunktion, einem Startwert ihres jeweiligen Kapitalstocks, einem in Geldeinheiten gemessenen Nutzenindex und einem Kredit in Geldeinheiten ausgestattet worden. Die Produktionsfunktionen und die Nutzenfunktionen haben sich zwischen den heterogenen Individuen unterschieden. In jeder Periode haben die Individuen mit ihrem Kapitalstock den Output gemäß den vorgegebenen Produktionsfunktionen erstellen und anschließend auf einem Markt Kapital handeln können. Schließlich sind das Konsumniveau und damit der Kapitalstock der nächsten Periode bestimmt worden. Der zentrale Entscheidungsträger beziehungsweise die zentrale Planungsagentur hat dagegen die aggregierte Produktionsfunktion und die aggregierte Nutzenfunktion als Grundlagen erhalten; ein Handel mit Kapitalgütern ist entfallen. Die Fiktion des unendlichen Planungshorizontes ist durch einen Zufallsmechanismus implementiert worden, der das Ende des Planungszeitraums bestimmt hat.[43]

Die überraschenden Folgerungen, die Lei und Noussair (2002) aus ihrem Experiment für den Fall der dezentralen Volkswirtschaft ziehen, werden wie folgt zusammengefaßt. (1) Der Konsum konvergiert gegen das optimale steady state-Niveau. (2) Der Kapitalstock konvergiert ebenfalls gegen das langfristige Optimum, wenn der Startwert des aggregierten Kapitalstocks kleiner als das optimale steady state-Niveau ist, weicht aber langfristig statistisch signifikant vom optimalen Niveau ab, wenn der Startwert größer ist. (3) Wie im theoretischen Modell steigt (fällt) der Konsum, wenn der Startwert des aggregierten Kapitalstocks niedriger (höher) als das steady state-Niveau ist. (4) Die Allokation des gesamtwirtschaftlichen Kapitalstocks auf die

[43] Bei Risikoneutralität ist ein zufällig endender Planungshorizont aus der Sicht der Individuen äquivalent zu einem unendlichen Planungshorizont, wenn die Eintrittswahrscheinlichkeit für die Beendigung des Experiments in Abstimmung mit der verwendeten Diskontrate gewählt wird, vgl. Lei und Noussair (2002, S. 556).

verschiedenen Individuen ist in jedem Zeitpunkt nahezu effizient.

Im Unterschied zu dem vorstehenden Ergebnis (1) gilt im Fall der zentralen Lösung, daß der Konsum nicht gegen das Optimum konvergiert. (Im Falle der Entscheidungsagentur kommen die Ergebnisse der dezentralen Lösung allerdings näher.) Während das relativ schlechte Abschneiden der zentralen Planung mit der hier vertretenen Auffassung vereinbar ist, daß dynamische Optimierungsprobleme in aller Regel zu kompliziert sind, um in der Realität gelöst zu werden, stehen die Ergebnisse zur dezentralen Lösung scheinbar im Widerspruch zu dieser Aussage. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich jedoch, daß man die vier genannten Folgerungen auch völlig anders interpretieren kann. (1) Der Konsum konvergiert zwar gegen den optimalen steady state-Wert, doch daraus folgt keineswegs, daß auch der optimale Sattelpunktpfad gewählt wird.[44] Im Gegensatz zur Vorhersage des theoretischen Modells schwankt der Konsum darüber hinaus langfristig um das steady state-Niveau (Lei und Noussair, 2002, S. 560); nur der Mittelwert konvergiert langfristig gegen das optimale Niveau. In diesem Zusammenhang ist zu beachten, daß im Experiment keine exogenen Schocks aufgetreten sind, die eine solche Schwankung erklären könnten. (2) Für die Entwicklung des Kapitalstocks gelten ähnliche Ausführungen, wobei im Falle eines relativ hohen Kapitalstocks auch die Konvergenz des Mittelwertes zum optimalen Wert nicht mehr gegeben ist. (3) Für einen relativ hohen Startwert des Kapitalstocks ist der realisierte Konsum in einigen Fällen anfangs geringer als das steady state-Niveau gewesen (auch wenn die statistische Regression einen höheren Wert ergibt). Ein monotoner Konsumpfad ist in den meisten Fällen nicht zu erkennen. (4) Die Effizienz der Allokation des Kapitals kann damit begründet werden, daß der Kapitalmarkt in jedem Zeitpunkt gut funktioniert. Damit ist die statische Produktionseffizienz angesprochen, deren mögliche Realisierung auch hier nicht bezweifelt worden ist.[45] Im Experiment wird die statische Effizienz darüber hinaus dadurch gefördert, daß die Konsumenten gleichzeitig Produzenten sind, anders als im Modell des optimalen Wachstums.

Letztlich ist festzustellen, daß die Akteure in diesem Experiment nicht in der Lage gewesen sind, ein Problem der optimalen Kontrolle zu lösen. Denn andernfalls hätten sie auch als zentrale Entscheidungsträger eine optimale Lösung bestimmen können müssen. Das relativ gute Abschneiden der dezentralen Lösung muß also darauf zurückzuführen sein, daß die Individuen irgendwelche alternativen Entscheidungsgrundlagen verwendet haben, wobei die Signale des Kapitalmarktes für eine kurzfristig effiziente Allokation gesorgt haben. Durch einen trial and error-Prozeß haben die Individuen die Nähe des optimalen steady state erreicht. Da Schwankungen um das optimale langfristige Gleichgewicht bestanden haben, können die Individuen ihre Entscheidungen nicht an einer optimalen Lösung entsprechend der Keynes-Ramsey-

[44] Auch Lei und Noussair (2002, S. 550) schließen streng genommen nicht, daß die optimale Lösung durch den dezentralen Mechanismus realisiert wird, sondern lediglich, daß eine Konvergenz gegen das optimale langfristige Gleichgewicht stattfindet.

[45] Im Kapitel 2 ist gezeigt worden, daß die Anpassungsprozesse an statische Gleichgewichte in vielen Fällen stabil sind.

Regel orientiert haben, die einen monotonen Konsumpfad impliziert. Ob der optimale Pfad gewählt worden ist, haben Lei und Noussair (2002, S. 550) auch gar nicht getestet, sondern lediglich, ob eine Konvergenz zum optimalen steady state vorliegt. Wie im Abschnitt 3.5.1 gezeigt wird, ist eine solche Konvergenz auch unter alternativen Verhaltenshypothesen denkbar, die erheblich geringere Anforderungen an die Fähigkeiten der Entscheidungsträger als die Hypothese der dynamischen Optimierung stellen.

Daß es mit steigender Komplexität dynamischer Entscheidungsprobleme auch unter normativen Gesichtspunkten immer schwieriger wird, optimale Lösungen zu finden, ist wohl bekannt. So stellen schon Burmeister und Dobell (1970, S. 416 f.) fest, *…our search must turn from a concern with exact optimality to a concern with the identification of policies that lead to satisfactory values of the criterion function and that are robust against shocks or possible misspecification.* Als Beispiel für eine robuste Regel in einem Modell mit heterogenen Kapitalgütern verweisen sie auf die von Burmeister et al. (1968) verwendete klassische Sparfunktion, die eine Art einfacher Rückkopplungsregel darstellt und zum Pfad der Goldenen Regel führt. Die Bedeutung der klassischen Sparfunktion ist in diesem Zusammenhang ansonsten bisher kaum gewürdigt worden.

Mit Bezug zu den anfangs genannten drei Motiven für eine positive Interpretation dynamischer Optimierungsmodelle bleibt festzuhalten, daß die Instabilität der Lösungen und die begrenzten Fähigkeiten des menschlichen Gehirns die Annahme der unbegrenzten Rationalität in dynamischen Modellen äußerst zweifelhaft erscheinen lassen. Der Ansatz eignet sich daher auch nicht als Lösung des Hahn-Problems. Obwohl Rückkopplungslösungen stabil sein können, sind sie in aller Regel nicht bekannt (auch nicht den darauf spezialisierten Ökonomen). Die Analyse von einfachen, nicht unbedingt optimalen **Faustregeln** in Rückkopplung stellt daher eine naheliegende alternative Verhaltenshypothese dar, wobei die klassische Sparfunktion ein bedeutendes, aber relativ wenig beachtetes Beispiel darstellt.

3.5 Faustregeln als Alternative zur dynamischen Optimierung

3.5.1 Eine Goldene Faustregel der Akkumulation

Als Konsequenz aus der Kritik an der positiven Interpretation dynamischer Optimierungsmodelle wird nun eine Faustregel vorgeschlagen, die in Rückkopplung formuliert ist und die einer modifizierten **klassischen Sparfunktion** unter Berücksichtigung einer positiven gesellschaftlichen Rate der Zeitpräferenz entspricht. Diese Faustregel ist eine sinnvolle Konsumhypothese, die wesentliche Fakten über das Wirtschaftswachstum ebensogut wie der Ansatz der dynamischen Optimierung erklären kann, ohne dabei zu hohe Anforderungen an die Fähigkeiten der Wirtschaftssubjekte und die Verfügbarkeit von Informationen zu stellen.

Die Literatur zur **Goldenen Regel der Akkumulation** befaßt sich fast ausschließlich mit den Eigenschaften dieser Regel (sowie verschiedener Erweiterungen) im langfristigen Gleichgewicht, in dem der Pro-Kopf-Konsum unter der Nebenbedingung $\dot{k} = 0$ maximiert wird, wobei die Kapitalintensität den entsprechenden Gleichgewichtswert k_g aufweisen muß.[46] Die konstante Sparquote gemäß der Goldenen Regel wird im folgenden mit s_g bezeichnet. Wenn diese konstante Sparquote auch außerhalb des Gleichgewichts verwendet wird, so folgt aufgrund der Stabilität des Gleichgewichts der fundamentalen Wachstumsgleichung (3.2) des Solow-Modells unmittelbar, daß das langfristige Gleichgewicht k_g asymptotisch erreicht wird. Analoge Ergebnisse gelten für die für $\rho > 0$ modifizierte Goldene Regel mit der konstanten Sparquote $\hat{s}$ und der langfristigen Kapitalintensität $\hat{k}$.

Im Gleichgewicht kann man die Goldene Regel auch derart formulieren, daß die Ersparnis gleich dem Kapitaleinkommen sein muß. Obwohl aus der Diskussion der klassischen Sparfunktion bekannt ist, daß das neoklassische Wachstumsmodell auch stabil ist, wenn die Sparquote nicht konstant ist, sondern auch außerhalb des Gleichgewichts der Kapitalertragsquote entspricht, wird dieser Aspekt in der Literatur wenig betont.[47] Im folgenden wird in Verallgemeinerung der klassischen Sparfunktion eine Faustregel der Ersparnis beziehungsweise des Konsums formuliert, deren Verwendung in einer Solow-Ökonomie asymptotisch zum langfristigen Optimum im Sinne von Ramsey-Koopmans-Cass für den Fall $\rho > 0$ führt. Das heißt, die Sparquote bewegt sich in die Richtung der modifizierten Goldenen Regel der Akkumulation, wobei kein Optimierungsproblem explizit gelöst werden muß. Daher kann man die Regel als **Goldene Faustregel der Akkumulation** bezeichnen.

Bei der Beurteilung dieser Regel sind zwei Aspekte zu unterscheiden. In normativer Sicht liefert sie eine Möglichkeit, wenn auch keine optimale, so doch immerhin eine asymptotisch optimale Lösung ohne großen Aufwand zu finden. Für die positive Beurteilung ist weitergehend danach zu fragen, ob man plausiblerweise davon ausgehen kann, daß die Wirtschaftssubjekte diese Regel oder eine ähnliche aus der Menge der unbegrenzt verfügbaren Regeln verwenden. Diese Frage kann letztlich nur durch empirische Tests beantwortet werden. Formuliert man Wachstumsmodelle aufgrund einer solchen Regel, so kann man als ersten Ansatz auch prüfen, ob die Implikationen dieser Modelle mit regelmäßigen empirischen Ergebnissen zum Wachstum vereinbar sind. Ein solcher Test wird später anhand der Berechnung von **Konvergenzraten** demonstriert.

Die vorgeschlagene Faustregel wird für den Konsum (anstelle der Ersparnis) formuliert, wobei wieder unterstellt wird, daß alle Haushalte identisch sind, so daß eine einfache Aggregation möglich ist und die Formulierung der Einfachheit halber direkt für einen repräsentativen Haushalt erfolgen kann. Dieser Haushalt bestimmt seinen

[46] Zum Beispiel finden sich in der Monographie von Phelps (1967) keinerlei Ausführungen zu der Bedeutung der Goldenen Regel außerhalb des Gleichgewichts im Zusammenhang mit der klassischen Sparfunktion.

[47] Eine Ausnahme bildet Burmeister (1980, S. 60).

Konsum gemäß

$$C(t) = w(t)L(t) + \rho K(t), \quad \text{bzw. pro Kopf:} \quad c(t) = w(t) + \rho k(t). \tag{3.36}$$

Der Haushalt soll also sein gesamtes Arbeitseinkommen und den Anteil seines Reinvermögens konsumieren, der seiner persönlichen Diskontrate entspricht.

Die so formulierte Faustregel kann wie folgt begründet werden. Unterstellt man zunächst einmal, daß $\rho = 0$ ist, so entspricht sie letztlich der Goldenen Regel der Akkumulation in der Form der extremen klassischen Spar- beziehungsweise Konsumfunktion, derart, daß das gesamte Kapitaleinkommen gespart wird, was aufgrund des adding-up Theorems für linearhomogene Produktionsfunktionen offenbar äquivalent zum Konsum des gesamten Arbeitseinkommens ist. Im folgenden wird die Beziehung (3.36) insbesondere hinsichtlich ihrer Bedeutung abseits des langfristigen Gleichgewichts analysiert. Die Korrektur der Goldenen Regel um ρk für $\rho > 0$ ist naheliegend, weil sie bedeutet, daß ein Haushalt mehr als sein Arbeitseinkommen konsumiert, wenn er über ein positives Reinvermögen verfügt und die Zukunft geringer bewertet als die Gegenwart. Daß diese Korrektur im normativen Sinne sinnvoll ist, zeigt der Vergleich mit dem Problem des optimalen Konsums unter der Annahme, daß w und r Konstanten sind mit $r = \rho$. In diesem Fall entspricht (3.36) nämlich der Rückkopplungslösung (3.14). Die Regel (3.36) ist also eine Rückkopplungslösung für einen einfachen Spezialfall. Es wird sich erweisen, daß sie auch im allgemeineren Fall des neoklassischen Wachstumsmodells gute Ergebnisse liefert.

Daß eine Korrektur der klassischen Konsumfunktion durch die Erhöhung des Pro-Kopf-Konsums naheliegend ist, folgt auch aus einer wichtigen Eigenschaft der Goldenen Regel der Akkumulation. Langfristig ist jeder Wachstumspfad mit einer Kapitalintensität dynamisch ineffizient, die auf Dauer höher als k_g ist (Phelps, 1967, S. 56–61). Denn angenommen, die Sparquote ist konstant und größer als s_g. Dann gibt es ein t' und ein $\epsilon > 0$, so daß $k(t) \geqq k_g + \epsilon$ und $c < c_g$ für alle $t > t'$, wobei c_g der konstante, maximale gleichgewichtige Pro-Kopf-Konsum gemäß der Goldenen Regel ist. Daher kann durch die Senkung der Sparquote zum Zeitpunkt t' der Konsum unmittelbar und für alle Ewigkeit erhöht werden. Eine dauerhaft höhere Sparquote als s_g ist also dynamisch ineffizient. (Das Argument gilt analog, wenn die Sparquote nicht konstant ist; jeder Pfad, für den $k(t) \geqq k_g + \epsilon$ für alle $t > t'$ gilt, ist ineffizient. Dagegen gilt das Argument in umgekehrter Richtung nicht; eine Sparquote, die dauerhaft kleiner als s_g ist, kann nicht unabhängig von der unterstellten Nutzenfunktion als ineffizient bezeichnet werden.) Jede sinnvolle Faustregel sollte also gegen eine Sparquote konvergieren, die höchstens so groß ist wie s_g. Eine positive Diskontrate $\rho > 0$ bedeutet, daß der gegenwärtige Konsum höher bewertet wird als der zukünftige. Daraus folgt, daß auch die Sparquote s_g, gegen die die Sparquote im Fall der klassischen Sparfunktion konvergiert, langfristig zu hoch ist. Eine Korrektur der klassischen Konsumfunktion in Abhängigkeit von ρ nach oben ist also langfristig sinnvoll.

Damit ist die normative Motivation für (3.36) hinreichend begründet worden. Darin eingeschlossen ist die Überleitung zur positiven Interpretation. Denn auch in positiver Hinsicht erscheint die Annahme, daß die Haushalte die Regel (3.36) befolgen, zumindest naheliegender als die, daß sie ein dynamisches Optimierungsproblem lösen. Sein Arbeitseinkommen prinzipiell auszugeben und um einen Vermögensanteil zu korrigieren, der sich nach der persönlichen Diskontrate richtet, erscheint durchaus plausibel, wobei keinerlei Optimierungsproblem gelöst werden muß und lediglich die einen Haushalt unmittelbar betreffenden Daten bekannt sein müssen. Im Gegensatz dazu basiert die Ableitung der Goldenen Regel der Akkumulation in ihrer üblichen Interpretation auf der Maximierung des langfristig erreichbaren Konsums (gegebenenfalls bei positiver Diskontrate in modifizierter Form). Das heißt, der Haushalt muß, um die Goldene Regel bewußt zu bestimmen, die Bewegungsgleichung der Volkswirtschaft kennen und den Konsum unter der Nebenbedingung maximieren, daß $\dot{k} = 0$ ist. Wenn er dagegen (für $\rho = 0$) schlicht und einfach sein gesamtes Arbeitseinkommen für den Konsum verwendet, so nähert er sich, wie später gezeigt wird, der Goldenen Regel im Gleichgewicht ganz von selbst. Daher kann von einer **Goldenen Faustregel** gesprochen werden, deren Befolgung nur minimale Voraussetzungen an die verfügbaren Informationen stellt.

Anzumerken ist allerdings, daß die Faustregel (3.36) für einen einzelnen Haushalt nur dann sinnvoll sein kann, wenn man wie in der positiven Interpretation des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells von Familiendynastien mit einem Vererbungsmotiv ausgeht. Wenn es keinen Willen der Vererbung gibt, muß jede normativ sinnvolle Faustregel so aufgebaut sein, daß das Reinvermögen am Ende des Planungszeitraumes aufgebraucht ist. Dieses Problem betrifft nicht nur die Faustregel (3.36), sondern zum Beispiel auch alle Regeln mit einer konstanten Sparquote. Solche Faustregeln können letztlich also nur in einem aggregierten Modell verwendet werden, in dem die lebenden Generationen eine altruistische Bindung an die folgenden Generationen haben. Beachtet man, daß wir gegenwärtig in einer *Generation der Erben* leben, so erscheint diese Annahme plausibel.

Die Implikationen der unterstellten Verhaltenshypothese werden unter den üblichen Annahmen im Rahmen des Modells der vollständigen Konkurrenz abgeleitet. Für den Reallohnsatz gilt dann

$$w = f(k) - kf'(k).$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Faustregel (3.36) ein, so ergibt sich

$$c = f(k) + (\rho - f'(k))k.$$

Die Substitution dieses Ausdrucks in die Bewegungsgleichung

$$\dot{k} = f(k) - nk - c$$

liefert

$$\dot{k} = (f'(k) - n - \rho)k. \tag{3.37}$$

Diese Gleichung ist für $k > 0$ stetig und hat unter den üblichen Annahmen (neoklassische Produktionsfunktion, die die Inada-Bedingungen erfüllt) einen eindeutigen

Gleichgewichtspunkt $\hat{k}$, der durch

$$f'(\hat{k}) = n + \rho \tag{3.38}$$

definiert ist. Der Konsum im langfristigen Gleichgewicht ist

$$c = f(\hat{k}) + (\rho - f'(\hat{k}))\hat{k} \overset{(3.38)}{=} f(\hat{k}) - n\hat{k}.$$

Im Gleichgewicht sind also die Bedingungen (3.30) erfüllt, so daß man für den Startwert $k_0 = \hat{k}$ die optimale Lösung gemäß der (modifizierten) Goldenen Regel der Akkumulation erhält. Der wesentliche Vorteil der Faustregel (3.36) ist, daß das langfristige (optimale) Gleichgewicht auch für $k_0 \neq \hat{k}$ für alle $k_0 > 0$ asymptotisch erreicht wird. Zum Beweis ist zunächst zu beachten, daß das Gleichgewicht $\hat{k}$ im positiven Bereich eindeutig ist und daß (3.37) hier stetig ist. Für die Ableitung nach k gilt im Gleichgewicht

$$\left.\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\right|_{k=\hat{k}} = f''(\hat{k})\hat{k} + f'(\hat{k}) - n - \rho \overset{(3.38)}{=} f''(\hat{k})\hat{k} < 0.$$

Die Eindeutigkeit des Gleichgewichts und der fallende Verlauf von $\dot{k}$ im Gleichgewichtspunkt implizieren die globale Stabilität von $\hat{k}$ für $k > 0$.

Aussage 3.7. *Wenn die Produktionsfunktion neoklassisch ist und die Inada-Bedingungen erfüllt, existiert für $k_0 > 0$ bei Verwendung der Goldenen Faustregel (3.36) ein eindeutiges und global stabiles langfristiges Gleichgewicht. In diesem Gleichgewicht ist die (modifizierte) Goldene Regel der Akkumulation erfüllt.*

Im Hinblick auf die normative Bewertung der Faustregel ist es sinnvoll, den erreichten Wert der Zielfunktion mit dem optimalen Wert und den Werten, die andere plausible Faustregeln liefern, zu vergleichen. Die erforderlichen Berechnungen sind für den Fall einer logarithmischen Momentannutzenfunktion und einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion durchgeführt worden. Weil die Regel (3.36) sehr einfach ist, kann der damit verbundene kumulierte Nutzenindex weitgehend exakt berechnet werden, was auch für den Fall einer konstanten Sparquote gilt. Dagegen kann die optimale Lösung im allgemeinen nicht in geschlossener Form ermittelt werden, so daß auf numerische Methoden ausgewichen werden muß. Für die Berechnungen werden die folgenden Funktionsformen und Parameter unterstellt:

$$f(k) = ak^{\alpha}, \quad a = 10,\ \alpha = 0{,}3,$$
$$u(c) = \ln(c), \quad \rho = 0{,}02,\ n = 0{,}01.$$

Die Berechnungen werden nun kurz für die verschiedenen Fälle skizziert.

1. Optimale Lösung: Die kanonischen Differentialgleichungen lauten

$$\dot{c} = (3k^{-0{,}7} - 0{,}03)c,$$
$$\dot{k} = 10k^{0{,}3} - 0{,}01k - c,$$

woraus für das langfristige Gleichgewicht folgt:

$$\hat{k} = 719{,}686, \quad \hat{c} = 64{,}77174.$$

Um die Unterschiede deutlicher machen zu können, wird der Startwert $k_0 = 100$ gewählt, der weit vom Gleichgewicht entfernt ist. Numerisch läßt sich dann ermitteln, daß der Startwert für den Konsum $c_0 = 21{,}4888$ in etwa auf den stabilen Arm des Sattelpunktes führt.[48] Der Wert des Zielfunktionals ist für einen Zeitraum von 140 Jahren berechnet worden, in dem die Gleichgewichtswerte praktisch erreicht werden. (Wenn man sich tatsächlich entlang des Sattelpfades bewegt, kann das Gleichgewicht in endlicher Zeit nicht erreicht werden. Der Startwert $c_0 = 21{,}4888$ ist eben nur eine Näherung.) Das Ergebnis lautet

$$\int_0^{140} \ln(c^*(t))e^{-0{,}02t}\,dt \approx 182{,}403.$$

2. Goldene Faustregel: Für alle folgenden Fälle ergibt sich eine Bernoullische Differentialgleichung in k der Form

$$\dot{k} = bk^\alpha - dk,$$

wobei die Parameter b und d jeweils unterschiedlich sein können. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet (vgl. den Abschnitt 2.1.3)

$$k(t,k_0) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{b}{d}\right)e^{-d(1-\alpha)t} + \frac{b}{d}\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.39}$$

Hieraus werden alle folgenden Ergebnisse abgeleitet. Die Bewegungsgleichung (3.37) gemäß der Goldenen Faustregel ist im vorliegenden Fall

$$\dot{k} = \alpha a k^\alpha - (n+\rho)k = 3k^{0{,}3} - 0{,}03k.$$

Also gilt $b = \alpha a = 3$ und $d = n + \rho = 0{,}03$, so daß man (mit $\alpha = 0{,}3$) gemäß (3.39) die Lösung

$$k(t,k_0) = \left[(k_0^{0{,}7} - 100)e^{-0{,}021t} + 100\right]^{1/0{,}7}$$

erhält, womit sich der Konsumpfad gemäß

$$c(t,k_0) = 7k(t,k_0)^{0{,}3} + 0{,}02k(t,k_0)$$

ermitteln läßt. Setzt man diesen Pfad in das Zielfunktional ein, so kann numerisch integriert werden. Das Ergebnis lautet

$$\int_0^{140} \ln(c(t,100))e^{-0{,}02t}\,dt \approx 180{,}417.$$

[48] Diese Berechnung ist mit der Software *Dynamics Solver* durchgeführt worden, die Juan M. Aguirregabiria frei verfügbar im Internet bereitgestellt hat. Die numerischen Werte für den Konsum sind dann in *Mathematica* eingelesen und weiter verarbeitet worden. Vgl. den Anhang zu diesem Abschnitt.

Geht man dagegen wie im Fall der optimalen Lösung vor und berechnet auch den Konsumpfad nur numerisch, so ergibt sich

$$\int_0^{140} \ln(c(t,100))\,e^{-0{,}02t}\,dt \approx 181{,}992.$$

3. Konstante Sparquote gemäß der modifizierten Goldenen Regel: Die im langfristigen Gleichgewicht optimale Sparquote ist

$$s^* = 1 - \frac{\hat{c}}{a\hat{k}^\alpha} = 1 - \frac{64{,}77174}{71{,}9686} = 0{,}1.$$

Die Bewegungsgleichung mit $b = s^* a = 1$ und $d = n = 0{,}01$ lautet

$$\dot{k} = 10k^{0,3} - 0{,}01k - 0{,}9 \cdot 10k^{0,3} = k^{0,3} - 0{,}01k$$

und hat die Lösung

$$k(t,k_0) = \left[(k_0^{0,7} - 100)\,e^{-0{,}007t} + 100\right]^{1/0,7}.$$

Auf der Basis der Konsumfunktion $c = 0{,}9y = 9k(t,k_0)^{0,3}$ erhält man analog zu den vorhergehenden Berechnungen durch numerische Integration (wobei $c(t)$ nicht numerisch, sondern exakt berechnet worden ist)

$$\int_0^{140} \ln(c(t,100))\,e^{-0{,}02t}\,dt \approx 177{,}711.$$

4. Andere konstante Sparquoten: In den beiden folgenden Fällen gilt $b = sa$ und $d = n$. Für die langfristig zu niedrige Sparquote $s = 0{,}08$ erhält man die Bewegungsgleichung

$$\dot{k} = 0{,}8k^{0,3} - 0{,}01k$$

mit der Lösung

$$k(t,k_0) = \left[(k_0^{0,7} - 80)\,e^{-0{,}007t} + 80\right]^{1/0,7}$$

und der Konsumfunktion $c = 0{,}92y = 9.2k(t,k_0)^{0,3}$. Für den Wert des Zielfunktionals gilt

$$\int_0^{140} \ln(c(t,100))\,e^{-0{,}02t}\,dt \approx 176{,}706.$$

Für die langfristig zu hohe Sparquote $s = 0{,}12$ hat die Bewegungsgleichung

$$\dot{k} = 1.2k^{0,3} - 0{,}01k$$

die Lösung

$$k(t,k_0) = \left[(k_0^{0,7} - 120)\,e^{-0{,}007t} + 120\right]^{1/0,7},$$

wobei $c = 0{,}88y = 8.8k(t, k_0)^{0{,}3}$ die Konsumfunktion ist. Für den Wert des Zielfunktionals gilt

$$\int_0^{140} \ln(c(t,100))e^{-0{,}02t}\,dt \approx 178{,}463.$$

Diese Ergebnisse belegen, daß die Faustregel (3.36) im Vergleich zu anderen Regeln in der Tat sehr gut abschneidet. Berücksichtigt man, daß die Regel asymptotisch gegen das langfristig optimale Gleichgewicht konvergiert, so unterstreicht dieses Ergebnis noch einmal die berechtigte Bezeichnung als **Goldene Faustregel**. Beim Vergleich der Werte der Zielfunktionale ist zu beachten, daß der stabile Pfad des Sattelpunktes nur für einen unendlichen Planungshorizont optimal ist; 140 Jahre stellen im Vergleich zur Unendlichkeit einen sehr geringen Zeitraum dar. Allerdings ist bereits darauf hingewiesen worden, daß sich die Lösung entlang des Sattelpfades nach diesem Zeitraum schon in der Nähe des langfristigen Gleichgewichts gemäß der modifizierten Goldenen Regel der Akkumulation befindet. Obwohl andere Pfade noch weiter davon entfernt sind, ergeben sich für längere Planungshorizonte keine grundsätzlichen Abweichungen mehr. Denn alle Lösungen, die in das optimale langfristige Gleichgewicht führen, unterscheiden sich in der Nähe dieses Gleichgewichts nur noch geringfügig. Aufgrund der Diskontierung haben geringe Abweichungen des Momentannutzens in der entfernten Zukunft praktisch keine Auswirkungen mehr auf den Wert des Zielfunktionals. Der Pfad mit einer zu niedrigen konstanten Sparquote führt in ein Gleichgewicht mit langfristig zu niedrigem Pro-Kopf-Konsum, so daß sich der Nachteil im Vergleich zur Goldenen Faustregel nicht mehr ändert. Der Pfad mit einer zu hohen Sparquote führt in ein Gleichgewicht mit langfristig zu hohem Pro-Kopf-Konsum, was bedeutet, daß dieser Pfad für einen längeren Planungszeitraum etwas besser abschneidet.[49] Man kann jedoch durch die Berechnung für längere Zeiträume leicht nachweisen, daß er gegenüber dem Pfad der Goldenen Faustregel immer unterlegen bleibt. Dagegen ist es bemerkenswert, daß der Pfad mit der langfristig zu hohen Sparquote auch für längere Planungshorizonte bessere Ergebnisse liefert als der Pfad mit der konstanten Sparquote gemäß der modifizierten Goldenen Regel der Akkumulation. Die modifizierte Goldene Regel in ihrer Interpretation als konstante konsummaximierende Sparquote (unter Berücksichtigung einer positiven Diskontrate) ist also nicht so überzeugend wie die Goldene Faustregel. Das ist deshalb interessant, weil die (modifizierte) Goldene Regel immerhin die Lösung eines gewissermaßen statischen Optimierungsproblems erfordert, während man sich vorstellen kann, daß die Goldene Faustregel auch ohne einen Optimierungsansatz eine mögliche Option darstellt.

Aufschlußreich ist auch die Gegenüberstellung des optimalen Sattelpfades mit dem Pfad der Goldenen Faustregel. In der Abbildung 3.7 werden die Isoklinen $\dot{c} = 0$

[49] Man beachte, daß alle Sparquoten deutlich unter der Sparquote gemäß der Goldenen Regel für $\rho = 0$ liegen, die gleich 0,3 ist. In dem Bereich $0 < s < 0{,}3$ steigt der langfristige Pro-Kopf-Konsum mit der Sparquote. Die langfristige Sparquote gemäß der Goldenen Faustregel ist gleich 0,1, liegt also zwischen 0,08 und 0,12. Der Pro-Kopf-Konsum in den jeweiligen langfristigen Gleichgewichten für $s = 0{,}08$, $s = 0{,}1$ und $s = 0{,}12$ beträgt jeweils 60,17, 64,77 und 68,48.

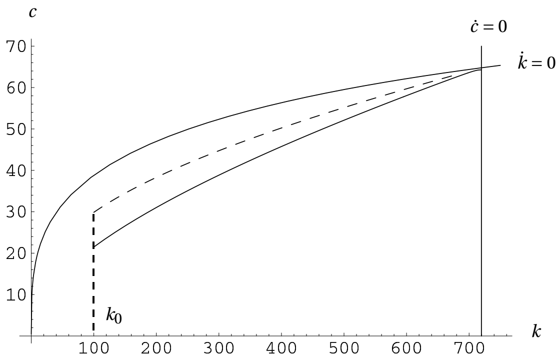

Abbildung 3.7
Der optimale Pfad (durchgezogene Linie) und der Pfad der Goldenen Faustregel (gestrichelte Linie)

und $\dot{k} = 0$ des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells für den Bereich $k \in [0, 750]$ dargestellt. Die untere, durchgezogene Linie zeigt den optimalen Pfad und die gestrichelte Linie den Pfad der Goldenen Faustregel.[50] Beide starten bei einem Kapitalstock pro Kopf in Höhe von $k_0 = 100$. Bemerkenswert ist, daß sich die qualitativen Eigenschaften beider Pfade nicht wesentlich unterscheiden.[51] In beiden Fällen steigt der Pro-Kopf-Konsum degressiv in der Kapitalintensität. Offenbar ergibt sich die Suboptimalität der Goldenen Faustregel für das Beispiel dadurch, daß anfangs zuviel konsumiert wird. Deshalb nähert sich diese Lösung dem Gleichgewicht langsamer an als die optimale Lösung. In $t = 140$ hat die optimale Lösung das Gleichgewicht nahezu erreicht, während die Lösung der Goldenen Faustregel noch relativ weit entfernt ist. Obwohl sich beide Pfade nicht schneiden, ist der Pro-Kopf-Konsum ab $t = 14$ auf dem optimalen Pfad höher als auf dem Pfad der Goldenen Faustregel, weil k hier im Fall der optimalen Lösung schon beträchtlich größer ist. Man erkennt aber auch, daß sich beide Lösungen immer weiter annähern, je näher sie dem Gleichgewicht kommen. Je dichter der Startwert des Kapitalstocks am Gleichgewicht liegt, desto weniger unterscheiden sich beide Lösungen hinsichtlich des erreichten Wertes des Zielfunktionals. Daß sich diese Werte selbst für den betrachteten erheblich vom Gleichgewicht abweichenden Startwert nur mäßig voneinander unterscheiden, spricht für den normativen Gehalt der Goldenen Faustregel.

[50] Die Herleitung der Abbildung wird im Anhang zu diesem Abschnitt dargestellt.

[51] Das Verhältnis der Dimensionen der Koordinatenachsen entspricht zwar nicht den absoluten Einheiten, aber eine konkave Kurve bleibt unter einer positiven linearen Transformation der Koordinatenachsen konkav.

3.5.2 Die Konvergenzrate in einem erweiterten Modell

Als erster Ansatz zur positiven Beurteilung der Goldenen Faustregel im Vergleich zu anderen Erklärungsansätzen bietet sich der Vergleich der Konvergenzraten während der Übergangsdynamik zum langfristigen Gleichgewicht an, weil diese Raten empirisch häufig geschätzt worden sind. Die **Konvergenzrate** β ist definiert als die negative Veränderung der Lücke zwischen der Kapitalintensität k in der Periode t und dem langfristigen Gleichgewichtswert $\hat{k}$ im Verhältnis zu dieser Lücke:[52]

$$\beta := -\frac{d(\hat{k} - k(t))}{\hat{k} - k(t)} = \frac{\dot{k}(t)dt}{\hat{k} - k(t)} \approx \frac{\dot{k}(t)}{\hat{k} - k(t)}. \tag{3.40}$$

Die Konvergenzrate muß sich nicht auf die Kapitalintensität beziehen, sondern kann analog für andere Variablen wie das Pro-Kopf-Einkommen definiert werden. In der Literatur wird sie regelmäßig als **Konvergenzgeschwindigkeit** bezeichnet, was angesichts ihrer Definition, bei der es sich eindeutig um eine Rate handelt, nicht besonders zweckmäßig ist.[53]

Um die sich aus den verschiedenen Modellen ergebenden Konvergenzraten mit den empirisch geschätzten vergleichen zu können, müssen diese Modelle zumindest diejenigen Bestandteile enthalten, von denen angenommen wird, daß sie die Ergebnisse entscheidend beeinflussen. Zwei dieser Bestandteile, die Abschreibungen und der technische Fortschritt, sind bisher weitgehend vernachlässigt worden. Zunächst wird angenommen, daß der technische Fortschritt exogen ist. Die endogene Erklärung des technischen Fortschritts wird später im Zusammenhang mit der Theorie des (semi-) endogenen Wachstums aufgegriffen. Wie im Abschnitt 3.1.3 wird unterstellt, daß der technische Fortschritt **Harrod-neutral** beziehungsweise **arbeitsvermehrend** ist, weil nur so ein langfristiges Gleichgewichtswachstum möglich ist.

Im Abschnitt 3.1.3 ist gezeigt worden, daß die fundamentale Wachstumsgleichung des Solow-Modells unter Berücksichtigung von Abschreibungen des bestehenden Kapitalstocks mit der Rate δ und einem exogenen technischen Fortschritt mit der Rate γ

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta + \gamma)k \tag{3.6}$$

[52] Die letzte approximative Gleichung in (3.40) erhält man für $dt = 1$. Diese Feststellung ist wesentlich, weil die berechneten Konvergenzraten üblicherweise als Raten für ein Jahr, also für $dt = 1$ interpretiert werden.Wenn $k(t)$ auf dem Intervall $[t, t+1]$ konstant ist, gilt die Gleichung exakt:

$$\Delta k(t) := k(t+1) - k(t) = \int_t^{t+1} \dot{k}(\tau)\, d\tau \overset{\dot{k}=\text{konst.}}{=} \dot{k}(t) \int_t^{t+1} d\tau = \dot{k}(t).$$

[53] Eine Geschwindigkeit hat die Dimension [Weg/Zeit]. Dagegen ist β dimensionslos. Als **Konvergenzgeschwindigkeit** könnte man daher in Analogie allenfalls den Ausdruck $d(\hat{k} - k(t))/dt$ bezeichnen. Die ungenaue Bezeichnungsweise hängt vielleicht damit zusammen, daß der Begriff in der Regel nicht formal definiert wird. Daß β eine Rate ist, bemerken allerdings schon Mankiw et al. (1992, S. 422), die die Konvergenzgeschwindigkeit jedoch (wohl wegen eines Druckfehlers) als Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens definieren, dann aber β wie hier definiert verwenden.

lautet, wobei der technische Fortschritt in der Form von $A(t) = A_0 e^{\gamma t}$ so wirkt, als ob der Arbeitseinsatz $L(t)$ mit $A(t)$ multipliziert wird, so daß gilt: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$. Der Einfachheit halber wird wieder $A_0 = 1$ gesetzt, so daß $A(t) = e^{\gamma t}$ ist. Das rechnerische Produkt $A(t)L(t)$ heißt **effektive Arbeitsmenge**. Mit $y = Y/(AL)$ und $k = K/(AL)$ ist $y = f(k)$ die Produktionsfunktion pro effektiver Arbeitseinheit.

Für eine nicht konstante Sparquote kann man völlig analog die Beziehung

$$\dot{k} = f(k) - (n + \delta + \gamma)k - c$$

ableiten, wobei $c = C/(AL) = ce^{-\gamma t}$ ist. Im Fall der Goldenen Faustregel ist zu beachten, daß jetzt $w = [f(k) - kf'(k)]e^{\gamma t}$ gilt.[54] Berücksichtigt man diesen Ausdruck in (3.36) und setzt das Ergebnis in die vorstehende Bewegungsgleichung ein, so folgt (mit $k = ke^{-\gamma t}$) nach einigen Umformungen

$$\dot{k} = (f'(k) - n - \rho - \delta - \gamma)k. \tag{3.41}$$

Für das Ramsey-Koopmans-Cass-Modell ist schließlich zu beachten, daß sich das Optimierungsproblem der Haushalte zunächst formal nicht ändert. Die Keynes-Ramsey-Regel gemäß (3.25) in aggregierter Form kann daher übernommen werden:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - n - \rho),$$

wobei jetzt aufgrund der Abschreibungen $r = f'(k) - \delta$ ist.[55] Wegen $c = ce^{-\gamma t}$ gilt

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{c}}{c} - \gamma = \frac{1}{\theta}(f'(k) - \delta - n - \rho) - \gamma.$$

Zusammen mit der bereits abgeleiteten Bewegungsgleichung für k bei nicht konstanter Sparquote erhält man also die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\theta}(f'(k) - \delta - n - \rho - \gamma\theta)c, \\ \dot{k} &= f(k) - (n + \delta + \gamma)k - c. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Mit (3.6), (3.41) und (3.42) liegen damit die Differentialgleichungen für das erweiterte Solow-Modell, das erweiterte Modell der Goldenen Faustregel und das erweiterte Ramsey-Koopmans-Cass-Modell vor. Vergleicht man (3.41) mit der ersten Gleichung in (3.42), so fällt auf, daß die Goldene Faustregel nun in normativer Hinsicht nicht mehr ganz so überzeugt wie zuvor. Denn im allgemeinen wird nicht das

---

[54] Zum Beweis leitet man die Funktion $Y = ALf(k)$ nach L ab und beachtet, daß die Grenzproduktivität des Faktors Arbeit im Gleichgewicht dem Reallohnsatz entspricht.

[55] Wiederum kann man zum Beweis die Funktion $Y = ALf(k)$ ableiten, diesmal nach K. Zu beachten ist, daß die Grenzproduktivität des Faktors K im Gewinnmaximum der Unternehmen dem Nutzungspreis des Kapitals entspricht, der sich gemäß den Ergebnissen im Abschnitt 3.2.2 aus dem Zinssatz und der Abschreibungsrate zusammensetzt.

tatsächliche Optimum asymptotisch erreicht werden, weil das optimale langfristige Gleichgewicht jetzt von dem Parameter θ der Momentannutzenfunktion abhängt und nur dann mit dem Gleichgewicht der Goldenen Regel übereinstimmt, wenn $\theta = 1$ ist. Dieses Resultat ist aber nicht allzu ernüchternd, wenn man bedenkt, daß die Goldene Faustregel unabhängig von der speziellen Form der Momentannutzenfunktion formuliert worden ist. Keine so konstruierte Faustregel kann generell zu einem Gleichgewicht führen, das von einem Parameter einer nicht berücksichtigten Momentannutzenfunktion abhängt.

Nun kann die Konvergenzrate gemäß der Definition (3.40) für die drei Modelle berechnet werden, wobei allerdings k statt k verwendet wird. Das übliche Vorgehen besteht darin, die jeweilige Konvergenzrate anhand der im Gleichgewichtspunkt linearisierten Bewegungsgleichung zu bestimmen. Die Taylor-Approximation erster Ordnung von (3.6) um den Gleichgewichtspunkt $\hat{k}$ lautet

$$\dot{k} \approx (sf'(\hat{k}) - n - \delta - \gamma)(k - \hat{k}).$$

Im folgenden wird mit β unmittelbar die Approximation des linearisierten Modells bezeichnet, wobei der Index s für das Solow-Modell, f für die Goldene Faustregel und r für das Ramsey-Koopmans-Cass-Modell steht. Die vorstehende Formel liefert direkt

$$\beta_s = \frac{\dot{k}}{\hat{k} - k} = n + \delta + \gamma - sf'(\hat{k}).$$

In der Abbildung 3.8 wird die Gleichung (3.6) dargestellt. Die Konvergenzrate gemäß (3.40) zum Zeitpunkt t, $\dot{k}(t)/(\hat{k} - k(t))$, entspricht der absoluten Steigung der Geraden, die die Punkte $(\hat{k}, 0)$ und $(k(t), \dot{k}(t))$ verbindet. Die aufgrund des linearisierten Modells berechnete Konvergenzrate ist gleich der absoluten Steigung der Tangente im Punkt $(\hat{k}, 0)$. Daran erkennt man, daß die so berechnete Konvergenzrate in der Nähe des Gleichgewichts eine sehr gute Näherung für die Rate gemäß (3.40) ist, die aber weit ab des Gleichgewichts sehr schlecht werden kann,[56] was analog für die folgenden Fälle gilt.

Für den Fall einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$Y = aK^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

gilt

$$f(k) = ak^{\alpha}, \quad f'(k) = \alpha a k^{\alpha-1}, \quad \hat{k} = \left(\frac{sa}{n + \delta + \gamma}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Setzt man diese Beziehungen in β_s ein, so folgt

$$\beta_s = (1 - \alpha)(n + \delta + \gamma).$$

[56] Im Fall einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion kann man zeigen, daß die Entwicklung des **Kapitalkoeffizienten** $v = K/Y$ einer linearen Differentialgleichung folgt. In einer zur Abbildung 3.8 analogen Darstellung ist die $\dot{v}$-Kurve linear, so daß die Steigung und damit auch die Konvergenzrate konstant sind. Für diesen Fall erhält man also keine Näherung, sondern die exakte Höhe der Konvergenzrate für den Kapitalkoeffizienten.

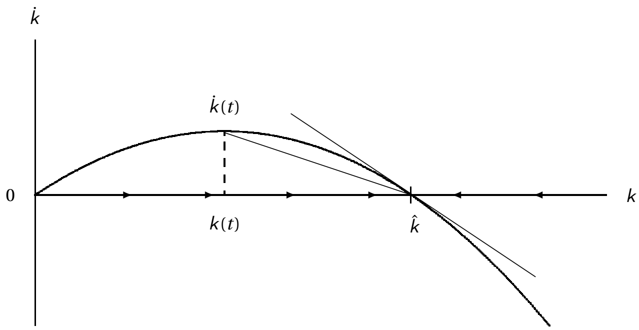

Abbildung 3.8
Die Konvergenzrate gemäß (3.40) und ihre Approximation im linearisierten Modell

Für die Goldene Faustregel liefert die Taylor-Approximation der Gleichung (3.41) um den Gleichgewichtspunkt

$$\dot{k} \approx f''(\hat{k})\hat{k}(k - \hat{k}),$$

also

$$\beta_f = -f''(\hat{k})\hat{k}.$$

Im Cobb-Douglas-Fall gilt

$$f''(k) = (\alpha - 1)\alpha a k^{\alpha-2}, \quad \hat{k} = \left(\frac{\alpha a}{n + \rho + \delta + \gamma}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Die Substitution dieser Größen in β_f liefert

$$\beta_f = (1 - \alpha)(n + \rho + \delta + \gamma).$$

Der Vergleich mit β_s zeigt, daß das System für $\rho > 0$ bei Verwendung der Goldenen Faustregel also schneller gegen das Gleichgewicht konvergiert als bei Verwendung einer konstanten Sparquote.

Die Berechnung der Konvergenzrate im Ramsey-Koopmans-Cass-Modell ist erheblich aufwendiger. Das Ergebnis lautet

$$2\beta_r = \sqrt{\zeta^2 + 4\frac{1-\alpha}{\theta}(n + \rho + \delta + \gamma\theta)\left[\frac{n + \rho + \delta + \gamma\theta}{\alpha} - n - \delta - \gamma\right]} - \zeta,$$

wobei zur Abkürzung $\zeta := \rho - (1 - \theta)\gamma$ gesetzt worden ist.[57]

[57] Das von Barro und Sala-i-Martin (1998) betrachtete Modell unterscheidet sich von dem vorliegenden Modell dadurch, daß das Wachstum der Bevölkerung mit dem Faktor e^{nt} in das Zielfunktional eingeht, so daß die Momentannutzenfunktion effektiv mit dem Faktor $e^{-(\rho-n)t}$ diskontiert wird. Wenn man daher in der hier abgeleiteten Formel für β_r überall ρ durch $\rho - n$ ersetzt, so erhält man die von Barro und Sala-i-Martin (1998, S. 93) berechnete Formel (wobei dort statt γ das Symbol x verwendet wird).

Zur Ableitung ist zunächst das System (3.42) zu linearisieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & f''(\hat{k})\hat{c}/\theta \\ -1 & \rho-(1-\theta)\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-\hat{c} \\ k-\hat{k} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist berücksichtigt worden, daß im Gleichgewicht $(f'(\hat{k})-\delta-n-\rho-\gamma\theta)/\theta = 0$ und $f'(k)-(n+\delta+\gamma) = \rho-(1-\theta)\gamma$ gilt. Um die Konvergenz des Zielfunktionals zu gewährleisten, wird üblicherweise $\rho-(1-\theta)\gamma > 0$ unterstellt.[58] Bezeichnet man die Koeffizientenmatrix auf der rechten Seite mit A, so folgt $\mathrm{Sp}(A) = \rho-(1-\theta)\gamma > 0$ und $|A| = f''(\hat{k})\hat{c}/\theta < 0$. Für die Eigenwerte der Matrix A gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\rho-(1-\theta)\gamma \pm \sqrt{[\rho-(1-\theta)\gamma]^2 - 4f''(\hat{k})\hat{c}/\theta}\right],$$

wobei $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ ist. Da beide Eigenwerte reell und unterschiedlich sind, läßt sich die allgemeine Lösung des linearisierten Systems ermitteln als

$$\begin{aligned} c(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \hat{c}, \\ k(t) &= C_1 \frac{\lambda_1\theta}{f''(\hat{k})\hat{c}} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2\theta}{f''(\hat{k})\hat{c}} e^{\lambda_2 t} + \hat{k}. \end{aligned}$$

Die Auswahl des stabilen Arms des Sattelpfades bedeutet, daß $C_1 = 0$ gesetzt wird. Dann kann C_2 aufgrund der Anfangsbedingung $k(0) = k_0$ bestimmt werden als $C_2 = (k_0-\hat{k})f''(\hat{k})\hat{c}/(\lambda_2\theta)$. Aus der allgemeinen Lösung wird damit schließlich die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} c(t) &= (k_0-\hat{k})\frac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\lambda_2\theta} e^{\lambda_2 t} + \hat{c}, \\ k(t) &= (k_0-\hat{k})e^{\lambda_2 t} + \hat{k}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Anhand der zweiten Gleichung in (3.43) kann die Konvergenzrate β_r berechnet werden:

$$\beta_r = \frac{\dot{k}}{\hat{k}-k(t)} = \frac{\lambda_2(k_0-\hat{k})e^{\lambda_2 t}}{(\hat{k}-k_0)e^{\lambda_2 t}} = -\lambda_2 > 0.$$

Im Cobb-Douglas-Fall gilt $f'(k) = \alpha a k^{\alpha-1}$ und $f''(k) = (\alpha-1)f'(k)/k$. Unter Verwendung von $f''(k) = (\alpha-1)f'(\hat{k})/\hat{k}$ und $f'(\hat{k}) = n+\rho+\delta+\gamma\theta$ folgt daher

$$f''(\hat{k}) = (\alpha-1)(n+\rho+\delta+\gamma\theta)/\hat{k}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $\hat{c} = a\hat{k}^\alpha - (n+\delta+\gamma)\hat{k}$ und setzt das Resultat unter Berücksichtigung von

$$\hat{k} = \left(\frac{\alpha a}{n+\rho+\delta+\gamma\theta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

in die Formel für β_r ein, so ergibt sich schließlich der angegebene Ausdruck für $2\beta_r$.

[58] Die Bedeutung dieser Bedingung erkennt man wie zuvor, indem man $c = ce^{\gamma t}$ in das Zielfunktional in (3.28) einsetzt.

Die berechneten Konvergenzraten betreffen alle die effektive Kapitalintensität k. In den empirischen Untersuchungen steht dagegen die Konvergenz des Einkommens pro effektiver Arbeitseinheit $y = Y/(AL)$ im Mittelpunkt. Im Fall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion kann β auch als Näherung für die Konvergenzrate von y verwendet werden.

Allgemein gilt

$$\frac{\dot{k}}{\hat{k}-k} = \beta,$$

wobei β jetzt für irgendeine der bisher berechneten Konvergenzraten steht. Multipliziert man die vorstehende Gleichung mit $(\hat{k}-k)/\hat{k}$, so folgt für k in der Nähe von $\hat{k}$

$$\frac{d\ln k}{dt} \approx \frac{\dot{k}}{\hat{k}} = -\beta\left(\frac{k}{\hat{k}} - 1\right).$$

Weil $\ln(x+1) \approx x$ für kleine x gilt,[59] ergibt sich für $x := k/\hat{k} - 1$, daß

$$\ln(x+1) = \ln\left(\frac{k}{\hat{k}}\right) \approx \frac{k}{\hat{k}} - 1.$$

Also gilt approximativ

$$\frac{d\ln k}{dt} \approx -\beta\ln\left(\frac{k}{\hat{k}}\right). \tag{3.44}$$

Wenn man zeigen kann, daß eine zu (3.44) analoge Beziehung auch für y erfüllt ist, kann man also die Konvergenzrate übertragen. Dazu ist lediglich zu beachten, daß aus $y = ak^{\alpha}$ und $\hat{y} = a\hat{k}^{\alpha}$ unmittelbar folgt, daß

$$\frac{d\ln y}{dt} = \alpha\frac{d\ln k}{dt} \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{y}{\hat{y}}\right) = \alpha\ln\left(\frac{k}{\hat{k}}\right).$$

Dividiert man diese Gleichungen durch α und substituiert in (3.44), so erhält man

$$\frac{d\ln y}{dt} = -\beta\ln\left(\frac{y}{\hat{y}}\right).$$

Also ist β auch eine Näherung für die Konvergenzrate des Einkommens pro effektiver Arbeitseinheit.

Zum Vergleich der verschiedenen Konvergenzraten werden die folgenden, plausiblen Parameter zugrundegelegt, die von Barro und Sala-i-Martin (1998) verwendet werden:

$$\alpha = 0{,}3,\ \rho = 0{,}02,\ n = 0{,}01,\ \gamma = 0{,}02,\ \delta = 0{,}05.$$

[59] Die Taylor-Approximation erster Ordnung von $\ln(x+1)$ um den Punkt $x = 0$ ist

$$\ln(x+1) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(x-0) = x.$$

Für das Ramsey-Koopmans-Cass-Modell muß darüber hinaus jeweils der Parameter θ, also der Kehrwert der intertemporalen Substitutionselastizität festgelegt werden. Beispielsweise erhält man für $\theta = 1$:

$$\beta_s = 0{,}056, \quad \beta_f = 0{,}07 \quad \text{und} \quad \beta_r = 0{,}124.$$

Empirisch sind die Konvergenzraten häufig geschätzt worden. Dabei hat sich gewissermaßen als **stilisiertes Faktum** ein Wert zwischen 2 % (zum Beispiel Mankiw et al., 1992) und 3 % (zum Beispiel Barro und Sala-i-Martin, 1998, S. 501) ergeben. Obwohl auch Raten von bis zu 11 % geschätzt worden sind (vgl. Klenow und Rodriguez-Clare, 1997, S. 605–606), sind viele Wachstumstheoretiker der Ansicht, daß ein brauchbares Modell des Wirtschaftswachstums Konvergenzraten zwischen 2 % und 3 % generieren können sollte. Verglichen mit diesen Werten sind alle anhand der drei Modelle berechneten Raten viel zu hoch. Das gilt insbesondere für β_r, wobei dieser Wert aber durch alternative Annahmen über θ verringert werden kann. Für $\theta = 10$ ergibt sich zum Beispiel $\beta_r = 0{,}063$. Doch auch für noch größere Werte von θ verringert sich der Wert nicht so sehr, daß er in die Nähe von 2 % bis 3 % kommt.[60]

Gemessen an den empirischen Daten kann θ ohnehin nicht beliebig gewählt werden, weil sonst andere Größen als die Konvergenzrate unrealistische Werte annehmen. Berechnet man analog zur Gleichung (3.35) im Abschnitt 3.4.1 die Sparquote im langfristigen Gleichgewicht des erweiterten Ramsey-Koopmans-Cass-Modells, so ergibt sich

$$\hat{s} = \frac{\alpha(n+\delta+\gamma)}{n+\delta+\rho+\theta\gamma} = \frac{0{,}024}{0{,}08+0{,}02\theta}.$$

Man kann diesen Wert auch einfach aus dem vorher berechneten Wert ermitteln, indem n durch $n+\delta+\gamma$ und ρ durch $\rho-(1-\theta)\gamma$ ersetzt wird, weil sich die kanonischen Differentialgleichungen des erweiterten Systems auf diese Weise aus denjenigen des Grundmodells ergeben. Daher gilt auch völlig analog zu den früheren Ausführungen, daß die optimale Lösung genau dann dieser konstanten optimalen Sparquote entspricht, wenn $\hat{s} = 1/\theta$ ist. Ferner kann man zeigen, daß die Sparquote während der Anpassung an das langfristige Gleichgewicht entlang des Sattelpfades steigt oder fällt und immer größer oder kleiner als $1/\theta$ ist, je nachdem ob $\hat{s}$ größer oder kleiner als $1/\theta$ ist:[61]

$$s(t)\begin{cases} = 1/\theta & \text{und} \quad \dot{s}(t) = 0 \quad : \quad \hat{s} = 1/\theta \\ > 1/\theta & \text{und} \quad \dot{s}(t) > 0 \quad : \quad \hat{s} > 1/\theta \\ < 1/\theta & \text{und} \quad \dot{s}(t) < 0 \quad : \quad \hat{s} < 1/\theta \end{cases}$$

Barro und Sala-i-Martin (1998) interpretieren Daten verschiedener Länder dahingehend, daß die Sparquote während des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht

[60] Der Verlauf von β_r in Abhängigkeit von θ ist zwar nicht monoton, doch für einen weiten Bereich fallend. Bei $\theta = 100$ ist beispielsweise $\beta_r = 0{,}049$.

[61] Vgl. den Anhang 2B in Barro und Sala-i-Martin (1998). Die Vorgehensweise dort kann auf das Modell hier, das sich nur durch einen Parameter unterscheidet, problemlos angewendet werden.

tendenziell steigt. Um das Cobb-Douglas-Modell des optimalen Wachstums damit vereinbar zu machen, muß also $\hat{s} > 1/\theta$ gelten. Eine konstante Sparquote ergibt sich für die gewählten Parameter bei $\theta = 20$; für $\theta < 20$ ist $\hat{s} < 1/\theta$ und umgekehrt. Da ein so hoher Wert $\theta > 20$ unrealistisch ist (er würde einer sehr kleinen intertemporalen Substitutionselastizität entsprechen und zu der unrealistisch geringen Sparquote $\hat{s} < 0{,}05$ im langfristigen Gleichgewicht führen), muß also von einem geringeren θ ausgegangen werden, was wiederum bedeutet, daß $\hat{s} < 1/\theta$ ist und daß die Sparquote im Modell während des Übergangs fällt anstatt zu steigen. Außerdem ist die Konvergenzrate für $\theta < 20$ zu hoch. Beispielsweise ist für $\theta = 19$ immer noch $\beta_r = 0{,}056$, und mit fallendem θ steigt die Konvergenzrate in diesem Bereich. Um das Modell trotzdem mit den Fakten in Übereinstimmung zu bringen, nehmen Barro und Sala-i-Martin (1998, Kapitel 2) an, daß $\alpha = 0{,}75$ ist. Ein so hoher Wert der Kapitalertragsquote macht nur dann Sinn, wenn man den Begriff des Kapitals so weit interpretiert, daß er das Humankapital umfaßt. Für das dort formulierte Modell schließen die Autoren, daß die Wahl von $\alpha = 0{,}75$ und $\theta = 3$ (allgemeiner: etwas größer als zwei) dazu führt, daß die empirischen Fakten gut wiedergegeben werden. Sie errechnen $\beta_r = 0{,}018$. Das vorliegende Modell unterscheidet sich von demjenigen von Barro und Sala-i-Martin (1998) dadurch, daß die Momentannutzenfunktion nicht mit e^{nt} multipliziert wird. Für $\theta = 3$ und $\alpha = 0{,}75$ ergibt sich unter Beibehaltung der übrigen Parameterwerte allerdings keine allzu große Abweichung der Ergebnisse, denn man erhält

$$\beta_s = 0{,}02, \quad \beta_f = 0{,}025 \quad \text{und} \quad \beta_r = 0{,}016.$$

Die Rate β_f stimmt jetzt mit den empirisch ermittelten 2 % bis 3 % sehr gut überein.

Natürlich stellt sich auch die Frage, wie verläßlich die Schätzungen für die verwendeten Parameter sind. Unterstellt man zum Beispiel $\gamma = 0{,}015$ und verwendet den von Maußner und Klump (1996) für Deutschland berechneten Wert $\delta = 0{,}025$, so sind die von allen drei Modellvarianten prognostizierten Konvergenzraten schon deutlich niedriger. Außerdem ist darauf hinzuweisen, daß es sich bei den empirisch ermittelten 2 % bis 3 % für die Konvergenzrate nur um einen stilisierten Wert handelt. Je nachdem, welche Länder oder Regionen mit welcher Regressionsmethode verglichen werden, können sich auch erheblich andere Werte ergeben, die wie bereits angemerkt bis zu 11 % reichen. Insofern sollte den Konvergenzraten eines Modells beim gegenwärtigen Wissensstand kein zu großes Gewicht beigemessen werden.

Im Cobb-Douglas-Fall kann man zeigen, daß auch bei Verwendung der Goldenen Faustregel die Sparquote während des Übergangs von einem geringeren Wert der effektiven Kapitalintensität zum Gleichgewichtswert fällt. Mit $w = [f(k) - kf'(k)]e^{\gamma t}$ in (3.36) folgt für die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$c = f(k) - kf'(k) + \rho k = (1-\alpha)ak^{\alpha} + \rho k.$$

Damit erhält man für die Bruttosparquote

$$s = \frac{Y-C}{Y} = 1 - \frac{c}{y} = \alpha - \rho k^{1-\alpha}/a.$$

Demnach fällt s mit steigendem k. Auch wenn die empirischen Ergebnisse von Barro und Sala-i-Martin (1998) auf eine tendenziell steigende Sparquote hinweisen, steht diesem Ergebnis zum Beispiel das im Abschnitt 3.4.2 angesprochene Phänomen der langfristig gefallenen Sparquote in den Vereinigten Staaten gegenüber. Ohne behaupten zu wollen, daß dieses Phänomen durch die Goldene Faustregel erklärt werden kann, zeigt sich, daß man mit einem speziellen Modell nicht alle empirischen Fälle erklären kann. Die Implikationen der Goldenen Faustregel in diesem Modell sind mit bestimmten Daten vereinbar und mit anderen eben nicht. Im Abschnitt 4.5.3 wird gezeigt, daß die Sparquote in einem Modell mit endogenem technischen Fortschritt unter Verwendung der Goldenen Faustregel auch steigen kann.

Ebenfalls mit Bezug zu den Konvergenzraten kann festgehalten werden, daß alle drei betrachteten Varianten des neoklassischen Wachstumsmodells streng genommen nicht mit den Daten verträglich sind, weil $\alpha = 0{,}75$ nicht der eigentlichen Intention des Modells entspricht, in dem mit K das physische Kapital gemeint ist. Auch insofern ist also eine echte Erweiterung des Grundmodells dringend erforderlich. Aber selbst wenn man einmal annimmt, daß man das Humankapital einfach mit dem physischen Kapital zusammenfassen kann, um einen höheren Wert von α zu erhalten, so sind die Ergebnisse des einfachen Solow-Modells und des Modell mit der Goldenen Faustregel im Sinne der Einfachheit denjenigen des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells überlegen. Denn alle aus diesen Modellen vorhergesagten Konvergenzraten bewegen sich jetzt in der Nähe der empirischen 2 % bis 3 %, wobei aber in β_s und β_f weniger Parameter frei wählbar sind als in β_r, wo $\theta = 3$ unterstellt worden ist (obwohl θ nicht außerhalb eines bestimmten Bereichs liegen darf, um keine unrealistische Sparquote zu erzeugen). Letztlich kann das Vorgehen von Barro und Sala-i-Martin (1998), um β_r mit den empirischen Daten in Übereinstimmung zu bringen, folgendermaßen zusammengefaßt werden. Nachdem die anderen Parameter (empirisch) vorgegeben worden sind, löst man ein System von zwei Gleichungen nach den Parametern α und θ auf, um die vorgegebenen Lösungen für $\hat{s}$ und β_r zu erhalten. Bei zwei linear unabhängigen linearen Gleichungen wie denjenigen für $\hat{s}$ und β_r stehen die Chancen gut, positive Lösungen für α und θ zu erhalten. Das ist keine Erklärung der Wirklichkeit, sondern die Kalibrierung eines Modells.

Anhang: Numerische Berechnungen zum Abschnitt 3.5.1

Die optimale Lösung des numerischen Beispiels im Abschnitt 3.5.1 ist unter Verwendung von Juan M. Aguirregabirias Software *Dynamics Solver* berechnet worden, die im Internet frei erhältlich ist. Bei diesem Programm werden zahlreiche Vorlagen mitgeliefert, die man zur Anpassung an die zu lösenden Probleme editieren kann. (Außerdem können alle Eingaben auch menügesteuert erfolgen.) Im folgenden werden die wesentlichen Eingaben in die für die Berechnung des optimalen Pfades verwendete Datei angegeben. Um sie zu verwenden, kann man eine der Vorlagen von *Dynamics Solver* (zum Beispiel System2.ds) entsprechend editieren. Die numerischen Ergebnisse eines Programmlaufes, der bei $t = 140$ abgebrochen werden kann, werden in der Datei `D:\growth_Optimum.txt` abgespeichert.

```
[Type]
Single ODE      = No
System of ODEs  = Yes
Map             = No
Dimension/Order = 2
Stack length    = 1000
P-code length   = 10000
Heaviside(0)    = 0.5
;
[Variables]
Independent variable      = t
Dependent variable(s)     =
Individual names:
k
c
Independent variable(0)   = t0
Dependent variable(0)     =
Individual names(0):
k0
c0
;
[Parameters]
Parameters                = 4
n = 0.01
rho = 0.02
alpha = 0.3
a = 10
;
[Equations]
Definitions:
a*pow(k,alpha)-n*k-c
(alpha * a * (1/pow(k,1-alpha))-n-rho)*c
Delay                     = 0
Discontinuities           =
;
[Initial values]
Independent variable      = 0
Dependent variable(s):
100
21.4888
0
0
;
[Range]
First value               = 0
Last value                = 500
Infinity                  = 1e+20
Interpolate               = Yes
Step                      = 0.01
Backward                  = No
Pause                     = 0
Retarded points           = 100
Real time                 = 1
;
[Text window] = 0.0270603,0.0467091,0.772448,0.683652,0
```

```
Title          = Text Window #1
Expressions    = 3
k
c
t
Format strings:
%10.16f\t
%10.16f\t
%3.0f\r\n
Separator      = \r\n
Frequency      = 100
Capture        = Yes
Output file    = D:\growth_Optimum.txt
;
[Graphics window] = 0.00492005,0.0912951,0.99508,0.847134,0
Title                 = Ramsey-Koopmans-Cass
Window                =
Min. X                = 0
X axis                = k
Max. X                = 1000
Min. Y                = 0
Y axis                = c
Max. Y                = 150
Continuous line       = Yes
Frequency             = 1
Direction Field       = No
EPSF File             = D:\growth_Optimum.eps
Graphics element = Segment
x         = 719.686
y         = 0
size      = 150
radius    = 0
begin     = 0
end       = 0
direction = 90
color     = 0
line      = 2
steps     = 1
Graphics element = 2-curve
t
d * pow(t,s) - r* t
x         = 0
y         = 0
size      = 0.3
radius    = 0.01
begin     = 0
end       = 1000
direction = 10
color     = 0
line      = 2
steps     = 100
;
[Notes]
Berechnung der dynamischen Entwicklung im Ramsey-Koopmans-Cass-
Modell. Zur numerischen Ermittlung des Sattelpfades sollte
interaktiv die Rueckwaertsloesung in der Naehe des Gleichgewichts
gestartet werden. Unter [Initial values] ist der ermittelte
Startwert fuer den Konsum c bereits eingetragen worden, so daß
```

```
davon ausgehend die Vorwaertsloesung berechnet werden kann. Die
numerischen Ergebnisse werden in Mathematica weiterverarbeitet.
```

Die in der Datei `D:\growth_Optimum.txt` abgespeicherten Daten können in *Mathematica* weiterverarbeitet werden:

```
dataOpt=ReadList["D:\growth_Optimum.txt",{Number,Number,Number}]
cDataOpt=dataOpt[[Table[i,{i,1,140}],{2} ]]//Flatten
cDataOptDisc=Table[E^(-0.02 (i-1)) *Log[cDataOpt[[i]]],{i,1,140}]
Apply[Plus,cDataOptDisc]
```

Als letzte Ausgabe erhält man den optimalen Wert 182,403 des Zielfunktionals.

Die numerische Berechnung für die Goldene Faustregel verläuft analog, wobei nur eine Differentialgleichung zu lösen ist. Der alternative Weg der Berechnung der Werte des Zielfunktionals aufgrund der exakten Konsumpfade bei Verwendung der Goldenen Faustregel oder der verschiedenen konstanten Sparquoten kann anhand der Berechnungen für die Goldene Regel verdeutlicht werden. Dabei werden die im Text berechneten Lösungen direkt verwendet.

```
kt=(100-74.8811*E^(-0.021 t))^(1/0.7)
ct=0.02*kt+7*kt^0.3
NIntegrate[Log[ct]*E^(-0.02 t),{t,0,140}]
```

Als letzte Ausgabe ergibt sich der Wert 180,417 des Zielfunktionals. Die Berechnungen für die konstanten Sparquoten verlaufen analog.

Die Abbildung 3.7 ist mit den folgenden Befehlen in *Mathematica* erstellt worden. Die Datei `D:\growth_RuleofThumb.txt` enthält die numerischen Werte der Integration mit *Dynamics Solver* für den Pfad der Goldenen Faustregel.

```
dataOpt=ReadList["D:\growth_Optimum.txt",{Number,Number,Number}]
kcDataOpt=dataOpt[[Table[i,{i,1,140}],{1,2}]]
OptPlot=ListPlot[kcDataOpt,PlotRange->All,PlotJoined->True]
dataThumb=ReadList["D:\growth_RuleofThumb.txt",
    {Number,Number,Number}]
kcDataThumb=dataThumb[[Table[i,{i,1,140}],{1,2}]]
ThumbPlot=ListPlot[kcDataThumb,PlotRange->All,PlotJoined->True,
    PlotStyle->Dashing[{0.02}]]
kdot0=Plot[10 k^0.3-0.01 k,{k,0,750}]
Show[OptPlot,ThumbPlot,kdot0,Graphics[Line[{{719.686,0},
    {719.686,70}}]]]
```

3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel ist die traditionelle neoklassische Wachstumstheorie dargestellt und zum Teil kritisiert worden. Die Grundlage der gesamten neoklassischen Wachstumstheorie bildet nach wie vor das Solow-Modell, dessen zentrale Annahmen die Verwendung einer die Inada-Bedingungen erfüllenden neoklassischen Produktionsfunktion, ein intakter Preismechanismus in einer Marktwirtschaft bei Vollbeschäftigung der Faktoren, eine exogene Wachstumsrate der Bevölkerung und eine konstante Sparquote sind. Dieses Modell besitzt ein eindeutiges, stabiles langfristiges Gleichgewicht, in dem die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens mit der Rate des exogenen, Harrod-neutralen technischen Fortschritts übereinstimmt. Die Höhe der Sparquote hat daher keinen Einfluß auf die langfristige Wachstumsrate, sondern nur auf das Niveau des Wachstumspfades.

Die Annahme einer exogenen Sparquote, die nicht auf der Grundlage eines Optimierungskalküls bestimmt wird, widerspricht dem neoklassischen Paradigma bezüglich der Rationalität aller wirtschaftlichen Entscheidungen. Daher ist das ursprünglich rein normativ formulierte Ramsey-Koopmans-Cass-Modell des optimalen Wachstums von zahlreichen Autoren positiv interpretiert worden, indem die Äquivalenz der zentralen Optimierungslösung mit einem PFC-Gleichgewicht unter der Voraussetzung nachgewiesen worden ist, daß die Konsumenten ihre Entscheidungen aufgrund einer dynamischen Optimierungslösung treffen. Der Ansatz der dynamischen Optimierung ist hier ausführlich kritisiert worden, weil die Optimierungslösungen instabil sind und daher nicht zur Formulierung eines robusten, positiven Modells des Wirtschaftswachstums geeignet sind. In diesem Zusammenhang ist auch auf das Hahn-Problem der Instabilität des langfristigen Gleichgewichts in positiven Modellen des Wachstums mit heterogenen Kapitalgütern hingewiesen worden, das nicht dadurch gelöst werden kann, daß man unrealistisch hohe Anforderungen an die Haushalte stellt, die ihre Optimierungslösungen bei vollkommener Voraussicht mit größter Genauigkeit berechnen müssen, um die Instabilität zu beseitigen. Ein metadynamischer Anpassungsprozeß an das PFC-Gleichgewicht ist nicht bekannt. Die Annahme der unbegrenzten Rationalität in dynamischen Modellen verträgt sich auch nicht mit neueren Ergebnissen der Hirnforschung, die die Verwendung von Faustregeln nahelegen.

Bei der Diskussion der dynamischen Optimierung ist herausgestellt worden, daß Rückkopplungslösungen den Lösungen in offener Schleife überlegen sind, da sie die Korrektur von Fehlern ermöglichen. Zusammen mit der Kritik an der Annahme der Rationalität und der Betonung der Bedeutung von Faustregeln bietet es sich daher an, einfache Faustregeln in Rückkopplung auf ihre Eignung in positiven und normativen Modellen hin zu analysieren. Die konstante Sparquote im Solow-Modell oder die klassische Sparfunktion, derzufolge das Arbeitseinkommen vollständig konsumiert und ein konstanter Anteil des Kapitaleinkommens investiert wird, können als Beispiele für solche Faustregeln interpretiert werden. Hier ist eine Goldene Faustregel der Akkumulation hinzugefügt worden, deren Bezeichnung sich dadurch rechtfertigt, daß sie die Konsumenten unter bestimmten Voraussetzungen zum langfristigen Optimum führt und dabei ohne externe Informationen auskommt. Der Haushalt muß lediglich sein eigenes Arbeitseinkommen, sein eigenes Reinvermögen und seine eigene Diskontrate kennen. Diese Tatsache zeigt, daß die vorgeschlagene Faustregel sowohl normativ sinnvoll als auch positiv plausibel ist. Die normative Güte der Goldenen Faustregel ist schließlich durch Beispielrechnungen untermauert worden, die zeigen, daß der erreichte Wert des Zielfunktionals nicht weit vom Optimum entfernt ist und denjenigen verschiedener konstanter Sparquoten übersteigt, einschließlich der langfristig optimalen Sparquote gemäß der modifizierten Goldenen Regel der Akkumulation.

Soweit man sich für die langfristig erreichbaren Wachstumsraten in einer neoklassischen Modellökonomie interessiert, spielt die Annahme der Rationalität ohnehin eine untergeordnete Rolle. So unterscheiden sich die Vorhersagen des Ramsey-Koopmans-Cass-Modells in bezug auf das langfristige Wachstum nicht von denjenigen des Solow-Modells. Insofern widerspricht die Verwendung der dynamischen Optimierung, die insbesondere bei Unterstellung eines unendlichen Zeithorizonts beträchtliche formale Probleme mit sich bringt, der Forderung nach Modellen, die gerade so einfach sind, daß sie den Untersuchungsgegenstand nicht eliminieren. Zu beachten ist allerdings, daß die Hypothese der dynamischen Optimierung dem Wachstum eine Optimalität unterstellt, die es nicht hat. Außerdem hängen die Anpassungspfade an das langfristige Gleichgewicht sehr wohl von der verwendeten Konsumhypothese ab. Angesichts der generellen Kritik an der Unterstellung der dynamischen Optimierung erscheint die häufig durchgeführte empirische Schätzung von Konvergenzraten auf dieser Basis fragwürdig. In diesem Zusammenhang ist gezeigt worden, daß die empirisch geschätzten Konvergenzraten mit einem Modell auf der Grundlage der Goldenen Faustregel zumindest ebenso gut vereinbar sind, wie mit einem dynamischen Optimierungsmodell. Allerdings können die Standardraten der Konvergenz von 2 %–3 % ohnehin nur dann erklärt werden, wenn der Kapitalbegriff entgegen der Intention des neoklassischen Grundmodells so weit gefaßt wird, daß er das Humankapital beinhaltet. Darüber hinaus finden sich mittlerweile auch Schätzungen, die weit über diese Werte hinausgehen. Insofern ist die weitere Entwicklung auf diesem Gebiet noch abzuwarten.

Die Verwendung der dynamischen Optimierungsansätze in der positiven Wachstumstheorie ist also fragwürdig, macht die Modelle unnötig kompliziert und liefert keinerlei Verbesserung in bezug auf die Erklärung empirischer Tatbestände. Daher erscheint die Verwendung von Faustregeln in solchen Modellen sinnvoll. Jedoch ist das grundlegende Problem der traditionellen neoklassischen Wachstumstheorie anderer Natur. Ein langfristig positives Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens wird auf den exogenen technischen Fortschritt zurückgeführt, was keine Erklärung darstellt. Die Berücksichtigung des endogenen technischen Fortschritts ist daher der nächste Schritt zum Aufbau eine befriedigenden Modells des Wirtschaftswachstums. Ausgehend von einer Analyse des empirischen Befunds zum neoklassischen Grundmodell befaßt sich damit das folgende Kapitel.

Kapitel 4:
Endogenes und semi-endogenes Wachstum

4.1 Der empirische Befund zum neoklassischen Grundmodell

Viele Wachstumstheoretiker sind der Meinung, daß ein Modell des Wirtschaftswachstums zunächst daran gemessen werden sollte, wie gut es die (oder Teile der) sogenannten **stilisierten Fakten** über das Wachstum erklären beziehungsweise beschreiben kann. Darunter versteht man diejenigen ökonomischen Tatbestände, die durch zahlreiche empirische Beobachtungen an verschiedenen Orten und Zeiten gestützt werden. Das Attribut *stilisiert* weist dabei darauf hin, daß es sich bei diesen Fakten nicht etwa um echte Gesetzmäßigkeiten handelt, zu denen es keine Gegenbeispiele gibt, sondern lediglich um empirische Regelmäßigkeiten. Stilisierte Fakten ergeben sich also aufgrund einer Konzentration auf häufig wiederkehrende Muster und damit einer Abstraktion von der Vielfalt der vorherrschenden Möglichkeiten.

Die für die Wachstumstheorie wesentlichen stilisierten Fakten sind erstmals von Kaldor (1961, die folgenden Fakten 1–4) beschrieben und vor allem von Romer (1989, die Fakten 5–8) erweitert worden. Im folgenden werden sie eingeteilt in solche Fakten, die sich auf ein einzelnes Land beziehen, und solche, die den Vergleich mehrerer Länder zum Gegenstand haben.

1. Die durchschnittliche Arbeitsproduktivität wächst, ohne daß eine Tendenz zu in der Zeit fallenden Wachstumsraten erkennbar ist.

2. Der Kapitalkoeffizient ist konstant.

3. Der Realzinssatz ist konstant.

Zwei weitere von Kaldor genannte stilisierte Fakten (stetig wachsende Kapitalintensität und konstante Lohnquote und Kapitalertragsquote) werden durch die bereits genannten Fakten impliziert und sind daher nicht explizit aufgeführt worden.[1]

Die den Vergleich mehrerer Länder betreffenden Fakten lauten:

4. Die durchschnittlichen Arbeitsproduktivitäten und ihre Wachstumsraten unterscheiden sich zwischen den Ländern beträchtlich.

5. Zwischen den Startwerten des Pro-Kopf-Output und den folgenden Wachstumsraten besteht kein einfacher Zusammenhang. Arme Länder wachsen nicht notwendig schneller als reiche Länder.

---

[1] Wenn der Kapitalkoeffizient K/Y konstant ist und die Arbeitsproduktivität Y/L mit konstanter Rate wächst, muß auch die Kapitalintensität K/L mit konstanter Rate wachsen. Die Kapitalertragsquote ist das Produkt aus Realzinssatz und Kapitalkoeffizient. Zu beachten ist, daß in einem nichtmonetären Modell die Inflationsrate gleich null ist. Unter Berücksichtigung der Inflation wird der Realzinssatz als Differenz des Zinssatzes und der Inflationsrate definiert. Das von Romer (1986) genannte Faktum, daß die Wachstumsrate der Produktionsfaktoren nicht groß genug ist, um die Wachstumsrate des Output zu erklären, wird für die zugrundeliegende linearhomogene Produktionsfunktion durch die Fakten 1 und 2 impliziert.

6. Sowohl hochqualifizierte als auch geringqualifizierte Arbeitnehmer wandern tendenziell in die Länder mit hohem Einkommen.

7. Das Wachstum des Außenhandelsvolumens ist positiv mit dem Wachstum des Output korreliert.

8. Die Wachstumsraten der Bevölkerung sind negativ mit den Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens korreliert.

Die grundlegenden Vorhersagen der neoklassischen Theorie über das langfristige Wachstum sind im Abschnitt 3.1 abgeleitet worden. Mit Bezug zu den stilisierten Fakten ist nun schnell zu sehen, daß das erweiterte neoklassische Grundmodell mit denjenigen Fakten vereinbar ist, die sich auf ein einzelnes Land beziehen. Zum Beispiel gilt im steady state des neoklassischen Grundmodells mit Harrod-neutralem technischen Fortschritt mit der Rate γ, daß

$$g_y = g_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_Y = g_K \quad \text{und} \quad g_K - g_L - g_A = 0,$$
$$\text{also} \quad g_Y = g_K = n + \gamma \quad \text{und} \quad g_{Y/L} = \gamma,$$

wobei die Symbole aus dem Abschnitt 3.1 verwendet worden sind. Also wächst die durchschnittliche Arbeitsproduktivität mit konstanter Rate, während der Kapitalkoeffizient konstant ist. Da der Realzinssatz durch $r = \partial Y/\partial K - \delta$ gegeben ist und $\partial Y/\partial K = f'(k)$ für konstantes k konstant ist, ist auch r konstant. Problematisch ist allerdings, daß der exogene technische Fortschritt **keine Erklärung** für die zugrundeliegenden Mechanismen liefert, die das Wachstum der Arbeitsproduktivität bewirken.

Daraus folgt auch unmittelbar, daß das stilisierte Faktum 4 nicht erklärt werden kann. Insbesondere die empirisch erhebliche Unterschiedlichkeit der Wachstumsraten und der Pro-Kopf-Einkommen im internationalen **Vergleich** läßt sich anhand des neoklassischen Grundmodells nicht befriedigend erklären. Ohne die Berücksichtigung der Faktormobilität können die Länder in einem Ein-Sektor-Modell als isolierte Systeme betrachtet werden, zwischen denen die neoklassische Wachstumstheorie auf der Basis des Grundmodells Unterschiede nur aufgrund unterschiedlicher Parameter wie etwa der exogenen Wachstumsraten der Bevölkerung oder des technischen Fortschritts erklären kann. Eine derartige Vorgehensweise ist nur wenig befriedigend, zumal die erheblichen Einkommensunterschiede zwischen den verschiedenen Ländern auch mit empirisch ermittelten Abweichungen dieser Parameter nur schlecht zu erklären sind.[2]

[2] Wenn die Faktormobilität im neoklassischen Wachstumsmodell berücksichtigt wird, führt die Faktorwanderung bei identischen Produktionstechnologien zu einer Angleichung der Faktorintensitäten und Faktorpreise und somit erst recht zu einer Angleichung der Pro-Kopf-Einkommen. Da ein integrierter Kapitalmarkt zu einem einheitlichen realen Zinssatz im Sinne des realen Faktorpreises führt, können mit diesem Ansatz lediglich Abweichungen der ungleichgewichtigen Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens aufgrund unterschiedlicher gesellschaftlicher Diskontraten erklärt werden (vgl. Helpman, 1988, S. 7–9). Diese Begründung basiert dann wiederum auf Annahmen über exogene Parameter. Ferner trifft die Aussage über die Angleichung der Faktorpreise in der Realität nicht zu.

Wenn man vom neoklassischen Gleichgewichtsparadigma abgeht, ändert sich die Situation. Abseits des gleichgewichtigen Wachstumspfades können Einkommen und Kapitalstock mit unterschiedlichen, nicht konstanten Raten wachsen. Nach Lucas (1988) versagt aber auch diese Erklärungsmöglichkeit für das Faktum 4. Denn aus der Gleichung (3.7) auf der Seite 118 folgt mit der effektiven Kapitalintensität $k = k/A$, daß

$$g_y = \sigma_K(k) g_k + [1 - \sigma_K(k)]\gamma,$$

wobei $\sigma_K(k)$ die Gewinnquote bei vollständiger Konkurrenz ist.[3] Diese Beziehung gilt auch im ungleichgewichtigen Wachstum. Die Differenz $g_y - \sigma_K(k) g_k$ ist für reale Gewinnquoten verschiedener Länder nicht annähernd gleich, woraus die Bedeutung unterschiedlicher Raten des technischen Fortschritts $g_A = \gamma$ ersichtlich wird, der die Annahme exogenen beziehungsweise autonomen technischen Fortschritts in positiven Wachstumsmodellen sicherlich nicht gerecht wird. Eine Erklärung unterschiedlicher internationaler Wachstumsraten durch das Anpassungswachstum außerhalb des jeweiligen steady state hat darüberhinaus den Nachteil, daß die langfristige Konstanz der Wachstumsraten ja gerade eines der stilisierten Fakten ist, die man beschreiben möchte, die aber während des Anpassungsprozesses nicht gegeben ist.

In bezug auf das stilisierte Faktum 5 ist eine genauere Spezifikation der unterstellten Mechanismen des Wissenstransfers erforderlich. Darauf wird weiter unten näher eingegangen. Um die Fakten 6, 7 und 8 zu erklären, ist das neoklassische Grundmodell offensichtlich nicht geeignet. Hinsichtlich des Faktums 6 existiert im betrachteten Ansatz weder Faktormobilität, noch wird zwischen hochqualifizierter und geringqualifizierter Arbeit unterschieden. Auf Faktorwanderungen in Wachstumsmodellen wird im folgenden nicht eingegangen.[4] Allerdings steht das Modell auch nicht im Widerspruch zu dieser Aussage, da der Reallohnsatz in Ländern mit geringerer Kapitalintensität und damit geringerem Pro-Kopf-Einkommen ceteris paribus niedriger als in den reicheren Ländern ist, so daß ein Anreiz für Wanderungen des Faktors Arbeit gemäß dem Faktum 6 besteht. Das Faktum 7 kann in einem Ein-Sektoren-Modell ohne Raum für den Außenhandel nicht sinnvoll analysiert werden, so daß das neoklassische Grundmodell hierzu keine Aussage treffen kann und eine Erweiterung auf offene Volkswirtschaften unumgänglich ist. Ähnlich verhält es sich mit dem Faktum 8. Da die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens im Grundmodell durch die exogene Rate des technischen Fortschritts gegeben ist, besteht keine Abhängigkeit von der Wachstumsrate der Bevölkerung. Zu beachten ist auch, daß die erwähnte Korrelation gegenseitig verursacht sein kann. Da die Wachstumsrate der Bevölkerung im Modell exogen ist, läßt sich der Einfluß des Pro-Kopf-Einkommens auf die Wachstumsrate der Bevölkerung nicht analysieren. Die Annahme des exogenen Bevölkerungswachstums wird im folgenden beibehalten, so daß die noch darzustellenden Modelle sich

[3] Die von Lucas (1988) verwendete Gleichung sieht etwas anders aus, da er **Hicks-neutralen** technischen Fortschritt unterstellt, der für die von ihm benutzte Cobb-Douglas-Funktion zu Harrod-neutralem Fortschritt äquivalent ist.

[4] Ausführliche Darstellungen der Kapitalmobilität und der Wanderung des Faktors Arbeit finden sich in Barro und Sala-i-Martin (1998, Kapitel 2 und 9).

lediglich mit der inversen Wirkungsrichtung von der Wachstumsrate der Bevölkerung zu derjenigen des Pro-Kopf-Output befassen.[5]

Die bisherige Diskussion bezieht sich weitgehend auf die Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts, insbesondere was die Konstanz bestimmter Wachstumsraten anbelangt. Eine Diskussion des Faktums 5 erfordert daneben eine Betrachtung des Anpassungsprozesses an das langfristige Gleichgewicht, der in der neueren empirischen Literatur im Mittelpunkt des Interesses steht. Zunächst ist in diesem Zusammenhang der Begriff der **Konvergenz** zu klären. Man spricht von **β-Konvergenz**,[6] wenn eine Volkswirtschaft umso schneller wächst, je weiter sie sich unterhalb ihres langfristigen Gleichgewichts $\hat{k}$ befindet (für die folgende Diskussion gilt grundsätzlich $k(t) \leqq \hat{k}$). Im neoklassischen Grundmodell wachsen ceteris paribus diejenigen Länder schneller, die noch weiter vom steady state entfernt sind (vgl. die Aussage 3.4 auf der Seite 118). Also beinhaltet das Modell die Vorhersage der β-Konvergenz. Hierbei sind zwei Unterfälle zu trennen. Unterstellt man, daß alle Parameter in allen betrachteten Ländern übereinstimmen, so spricht man von **absoluter Konvergenz**, denn in diesem Fall wächst eine Volkswirtschaft genau dann schneller als eine andere, wenn sie vom gemeinsamen steady state noch weiter entfernt ist. Anders ausgedrückt: arme Volkswirtschaften wachsen immer schneller als reiche. Diese Vorhersage steht in offensichtlichem Widerspruch zum stilisierten Faktum 5 und kann auch in neueren Untersuchungen empirisch in aller Regel nicht bestätigt werden.[7] Wenn sich die Parameter der betrachteten Volkswirtschaften unterscheiden (zum Beispiel die Raten des Bevölkerungswachstums oder die Sparquoten), so wächst eine Volkswirtschaft umso schneller, je weiter sie von ihrem eigenen Gleichgewicht entfernt ist. Ohne die Berücksichtigung weiterer Einzelheiten läßt sich in diesem Fall aber nicht folgern, daß arme Volkswirtschaften immer schneller wachsen als reiche. Man spricht in diesem Fall von **bedingter Konvergenz**. Läßt man unterschiedliche Parameterwerte der betrachteten Länder zu, so beinhaltet das neoklassische Grundmodell also lediglich die Voraussage der bedingten, nicht aber der absoluten Konvergenz. Die bedingte Konvergenz ist empirisch zumindest besser bestätigt als die absolute Konvergenz (vgl. Mankiw et al., 1992). Läßt man unterschiedliche Parameterwerte der betrachteten Länder zu, steht das neoklassische Grundmodell also nicht im direkten Widerspruch zum Faktum 5.[8]

Im Abschnitt 3.5.2 sind bereits die Raten der Konvergenz zum steady state erwähnt worden. Obwohl viele Forscher der Ansicht sind, daß sich die Raten zwischen

[5] Wichtige Analysen des endogenen Bevölkerungswachstums finden sich zum Beispiel in Barro und Becker (1989), Becker et al. (1990), van Marrewijk und Verbeek (1993b) sowie Strulik (1997).

[6] Die Bezeichnung rührt daher, daß β-Konvergenz vorliegt, wenn die Konvergenzrate β positiv ist.

[7] Vgl. hierzu und zu den verschiedenen Konzepten der Konvergenz Barro und Sala-i-Martin (1998, S. 30–38, 444–448).

[8] Der Vollständigkeit halber wird noch der Begriff der **σ-Konvergenz** erwähnt, der sich auf eine Abnahme der Streuung, etwa gemessen als Standardabweichung (σ) des Pro-Kopf-Einkommens in einer Gruppe von Ländern, in der Zeit bezieht. Berücksichtigt man stochastische Elemente mit positiver Varianz, so kann man zeigen, daß β-Konvergenz eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für σ-Konvergenz ist (Barro und Sala-i-Martin, 1998, S. 446).

2 % und 3 % pro Jahr bewegen, sind diese Ergebnisse von Klenow und Rodriguez-Clare (1997) aus gutem Grund kritisiert worden. Sie zitieren andere Schätzungen der Konvergenzraten von bis zu 11 %. Die Analyse der Konvergenzraten wird daher hier nicht weiter verfolgt.

In bezug auf die Diskussion um die Konvergenz wird auf eine wichtige Implikation der exakten Annahmen hinsichtlich identischer Parameterwerte in allen Ländern aufmerksam gemacht. Unter Berücksichtigung des Harrod-neutralen technischen Fortschritts stimmen im steady state bei identischen Parameterwerten nicht nur die Wachstumsraten überein, sondern auch die jeweiligen Kapitalstöcke pro effektiver Arbeitseinheit k und folglich auch das Einkommen pro effektiver Arbeitseinheit $y = f(k)$. Sei $\hat{y}$ der gemeinsame steady state-Wert in den Ländern 1 und 2. Dann gilt für die Pro-Kopf-Einkommen

$$y_1(t) = A_1(t)\hat{y} \quad \text{und} \quad y_2(t) = A_2(t)\hat{y},$$

wobei die Indizes 1 und 2 für die Länder 1 und 2 stehen. Die Annahme identischer Parameterwerte bedeutet zunächst nur, daß $A_1(t) = e^{\gamma(t-t_1)}$ und $A_2(t) = e^{\gamma(t-t_2)}$ ist, wobei t_1 und t_2 die jeweiligen Startzeitpunkte für die beiden Länder sind und γ die technische Fortschrittsrate bezeichnet. Angenommen, $t_1 = 0$ und $t_2 > 0$, so daß das Land 2 die Produktion gemäß der in der Produktionsfunktion verkörperten Technik erst später als das Land 1 aufgenommen hat. Dann gilt

$$y_1(t) = e^{\gamma t}\hat{y} > y_2(t) = e^{\gamma(t-t_2)}\hat{y} \quad \text{und} \quad y_1(t) = e^{\gamma t_2} y_2(t).$$

Der Faktor $e^{\gamma t_2}$ kann für plausible Werte (zum Beispiel $\gamma = 0{,}025$ und $t_2 = 30$) größer als zwei sein. Das bedeutet, wenn die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens 2,5 % beträgt und das Land 2 mit einem zeitlichen Rückstand von 30 Jahren auf das Land 1 die industrielle Produktion aufnimmt, so ist das Pro-Kopf-Einkommen des Landes 1 im steady state mehr als doppelt so hoch wie das des Landes 2 und wird es auch immer bleiben. Von einer Konvergenz der Pro-Kopf-Einkommen kann hier also nicht die Rede sein, obwohl alle Parameterwerte für beide Länder identisch sind.

Die Annahme identischer Parameterwerte wird damit begründet, daß die Produktionstechnik den Charakter eines öffentlichen Gutes habe und allen Ländern gleichermaßen zur Verfügung stehe. Dann ist es konsequent, diese Eigenschaft auch für den Effizienzfaktor $A(t)$ zu unterstellen. In einem solchen Fall hat es keine Auswirkung auf $A(t)$, wann die Produktion aufgenommen wird, und es gilt $A_1(t) = A_2(t) = A(t)$. Im steady state stimmen dann auch die Pro-Kopf-Einkommen beider Länder überein.

Beide Interpretationen sind nicht befriedigend. Wenn der Startzeitpunkt eine Rolle spielt, so fragt es sich, warum denn dann alle Parameterwerte übereinstimmen sollten. Spielt er keine Rolle, so fragt es sich, welcher Startzeitpunkt denn dann zu wählen ist. Ist $t_0 = 0$ zum Beispiel der Anfang der Welt? Die Annahme, daß die Produktionseffizienz durchaus davon abhängt, wann die Produktion aufgenommen worden ist, drängt sich nachgerade auf. Das Konzept des exogenen technischen Fortschritts ist daher nicht adäquat. Eine endogene Variante sollte daher eine größere Rolle spielen.

Ein weiterer empirisch untersuchter Gegenstand ist das Verhalten der Sparquote während des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht. Barro und Sala-i-Martin (1998, Kapitel 12) interpretieren Paneldaten dahingehend, daß die Sparquote während des Übergangs tendenziell steigt. Da es auch Gegenbeispiele gibt (zum Beispiel ist die Sparquote in den Vereinigten Staaten seit Mitte der 1950er Jahre gefallen, vgl. Browning und Lusardi, 1996, S. 1816–1817), ist es sinnvoll, in einem Wachstumsmodell sowohl steigende als auch fallende Sparquoten nicht von vornherein auszuschließen, wie es im neoklassischen Grundmodell mit einer konstanten Sparquote der Fall ist. Die Goldene Faustregel ist in dieser Hinsicht erheblich flexibler, da sie unter Berücksichtigung des endogenen technischen Fortschritts sowohl eine steigende als auch eine fallende Bruttosparquote zuläßt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß das neoklassische Grundmodell zwar nicht in krassem Widerspruch zu den stilisierten Fakten steht, von einer befriedigenden Erklärung dieser Fakten jedoch insbesondere aufgrund der Vernachlässigung des endogenen technischen Fortschritts weit entfernt ist. Im folgenden werden verschiedene Modellerweiterungen aufgezeigt, die eine bessere Erklärung des empirischen Befundes erlauben.

4.2 Grundlagen des endogenen Wachstums

Die Kritik am neoklassischen Grundmodell macht deutlich, daß eine Erklärung des Wirtschaftswachstums nicht auf exogenem technischen Fortschritt basieren kann. Um einen präzisen gedanklichen Rahmen zu schaffen, ist es sinnvoll, zunächst eine genaue Definition des endogenen Wachstums zu geben, die sich an Jones (1995, S. 760–761) anlehnt.

Eine wesentliche Rolle bei der Unterscheidung zwischen Modellen des endogenen und des semi-endogenen Wachstums spielen die Parameter, die die langfristigen Wachstumsraten bestimmen. So ist es einsichtig, daß etwa die Sparquote zum Beispiel durch staatliche Subventionen oder Steuern beeinflußt werden kann. Auch die Allokation der Arbeit auf verschiedene Sektoren kann durch die Wirtschaftspolitik in gewissem Umfang gesteuert werden. Dagegen sind technisch bestimmte Parameter der Produktionsfunktion kaum wirtschaftspolitisch zu verändern. Weniger eindeutig ist die Klassifikation in wirtschaftspolitisch beeinflußbare und nicht beeinflußbare Parameter hinsichtlich der Wachstumsrate der Bevölkerung, die zumindest in gewissem Umfang ebenfalls gelenkt werden kann. Allerdings stellt zum Beispiel eine Regelung der Geburtenrate einen weitaus tieferen Eingriff in die freie Marktwirtschaft dar, als etwa eine Subventionierung des Forschungssektors zur Erhöhung des dort eingesetzten Humankapitals. In Wachstumsmodellen mit exogener Wachstumsrate der Bevölkerung ist es daher üblich, diese Wachstumsrate als wirtschaftspolitisch nicht beeinflußbar anzusehen.

Für die folgenden Definitionen wird unterstellt, daß sich die produktionstechnischen Parameter und die Wachstumsrate der Bevölkerung einer Beeinflussung durch die Wirtschaftspolitik entziehen, während solche Größen wie die Sparquote und die Allokation der Arbeit wirtschaftspolitisch beeinflußbar sind.

Definition 4.1. *Das Wachstum ist* ***endogen****, wenn das Pro-Kopf-Einkommen ohne exogenen technischen Fortschritt langfristig mit positiver Rate wächst und diese Rate wirtschaftspolitisch beeinflußbar ist.*

Definition 4.2. *Das Wachstum ist* ***semi-endogen****, wenn das Pro-Kopf-Einkommen ohne exogenen technischen Fortschritt langfristig mit positiver Rate wächst und diese Rate wirtschaftspolitisch nicht beeinflußbar ist.*

Wenn das Pro-Kopf-Einkommen nur aufgrund des exogenen technischen Fortschritts wächst, der nicht durch das Modell bestimmt wird, ist das Wachstum demnach weder endogen noch semi-endogen. Im Zusammenhang mit den Definitionen 4.1 und 4.2 spielen Skaleneffekte eine Rolle.

Definition 4.3. *Das Wachstum weist* ***Skaleneffekte*** *auf, wenn die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens von der Größe der Volkswirtschaft abhängt, die durch die Bevölkerungszahl bestimmt wird.*

Obwohl die Begriffe *semi-endogenes Wachstum* und *Wachstum ohne Skaleneffekte* teilweise synonym verwendet werden, wird sich später herausstellen, daß Skaleneffekte weder eine notwendige noch eine hinreichende Bedingung für endogenes Wachstum sind. Anstelle der Bevölkerungszahl kann prinzipiell auch eine andere Variable, zum Beispiel die Anzahl der Forscher, zur Messung der Größe einer Volkswirtschaft herangezogen werden. Im allgemeinen ist die Bevölkerungsgröße jedoch ein guter Ansatzpunkt. Denn wenn man etwa die Hypothese verwendet, daß die Anzahl der Forscher mit der Bevölkerungsgröße steigt, impliziert eine größere Bevölkerung auch mehr Forscher.

Wie im Abschnitt 3.1.3 gezeigt worden ist, ist ein langfristiges Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens selbst ohne technischen Fortschritt möglich, wenn die Grenzproduktivität des Kapitals (oder allgemeiner der akkumulierbaren Produktionsfaktoren) hinreichend nach unten beschränkt ist. Auf dieser Tatsache basiert das einfachste Modell der Theorie des **endogenen Wachstums**, das sogenannte AK**-Modell** von Rebelo (1991). Anhand dieses Modells können einige grundlegende Eigenschaften endogener Wachstumsmodelle auf einfache Weise veranschaulicht werden.

Die Darstellung des AK-Modells ist aufgrund der im Abschnitt 3.2.1 durchgeführten Vorarbeiten einfach. Das Optimierungsproblem eines repräsentativen Haushalts entspricht weitgehend dem Problem (3.8) auf der Seite 120, wobei lediglich wie in

(3.22) aufgrund des Wachstums der Bevölkerung mit der Rate n der Zinssatz r durch $(r(t)-n)$ zu ersetzen ist.[9] Das Problem

$$\begin{aligned}
&\max_{c\in\bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\, dt, \quad \theta > 0,\\
&\qquad \text{u. d. N.}\\
&\qquad \dot{a} = w + (r(t)-n)a - c, \quad a(0) = a_0, \liminf_{t\to\infty} e^{-\int_0^t (r(\tau)-n)\, d\tau} a(t) \geqq 0,\\
&\quad c(t) \geqq 0.
\end{aligned}$$

impliziert daher die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= \frac{1}{\theta}(r(t)-n-\rho)c,\\
\dot{a} &= w + (r(t)-n)a - c
\end{aligned} \tag{4.1}$$

als notwendige Optimumbedingungen, wobei c der Pro-Kopf-Konsum, a das Pro-Kopf-Reinvermögen, w der Reallohnsatz, ρ die Diskontrate und θ die inverse intertemporale Substitutionselastizität ist.

Die Produktionsfunktion, die dem Modell seinen Namen gibt, lautet

$$Y = F(K,L) = AK \quad \text{bzw. pro Kopf} \quad y = f(k) = Ak,$$

wobei A eine positive Konstante ist. Weil eine im Kapitalstock K lineare Produktionsfunktion unrealistisch erscheint, wird K in diesem Modell normalerweise weiter interpretiert als üblich. Konkret wird unterstellt, daß K ein **Aggregat aus physischem Kapital und Humankapital** ist. Dann muß sich auch die (hier zunächst endogen bestimmte) Sparquote auf einen weiteren Bereich beziehen als in den volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen üblich. Eine alternativ vertretene Interpretation besteht darin, daß die Linearität in K durch **learning by doing** begründet ist. Angenommen, die Produktionsfunktion lautet $Y = ABK^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$, so daß die Grenzproduktivität des Kapitals zunächst fällt. Die Produktivität kann jedoch durch Lerneffekte steigen, die durch den Faktor B gemessen werden. Wenn man diese Lerneffekte durch die Akkumulation des Kapitals erfassen kann und B die spezielle Form $B = K^{1-\alpha}$ hat, so ergibt sich die obige AK-Funktion. Allerdings ist es dann unrealistisch, daß die Arbeit in der Produktionsfunktion nicht auftaucht (auch nicht in der Form des Humankapitals).

Unter der Annahme der vollständigen Konkurrenz und bei Vernachlässigung der Abschreibungen ist die Grenzproduktivität des Kapitals im statischen Gleichgewicht gleich dem Zinssatz $r(t)$, der also konstant ist:

$$f'(k) = A = r(t).$$

[9] Auf die Modellierung mehrerer identischer Haushalte wie im Abschnitt 3.3.1 wird hier verzichtet, so daß der Index h nicht benötigt wird.

Da die Grenzproduktivität der Arbeit gleich null ist, ist auch der Reallohnsatz $w = 0$. Weil für die geschlossene Volkswirtschaft $a = k$ gilt, erhält man durch Substitution in (4.1) die folgenden Bewegungsgleichungen für das *AK*-Modell:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{1}{\theta}(A - n - \rho)c, \\ \dot{k} &= (A - n)k - c, \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei angenommen wird, daß $A - n > 0$ ist.

Bedenkt man, daß $A - n$ gleich r in (3.10), $w = 0$ und $k = a$ sind, so ist ersichtlich, daß die Gleichungen (4.2) und (3.10) formal übereinstimmen. Mit anderen Worten, die Lösung des *AK*-Modells ist im Abschnitt 3.2.1 bereits abgeleitet worden. Nimmt man wieder an, daß $\theta = 1$ ist, so erhält man analog zum dortigen Vorgehen die Lösungen in offener Schleife[10]

$$\begin{aligned} c^*(t) &= \rho k_0 e^{(A-n-\rho)t}, \\ k^*(t) &= k_0 e^{(A-n-\rho)t}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

beziehungsweise die Rückkopplungslösung

$$c^*(t) = \rho k^*(t).$$

Anhand von (4.3) ist zu erkennen, daß das Modell genau dann endogenes Wachstum generiert, wenn $A > n + \rho$ ist, das heißt, wenn die konstante Grenzproduktivität des Kapitals größer als die Summe der Wachstumsrate der Bevölkerung und der Diskontrate ist. Andernfalls bleiben der Pro-Kopf-Konsum und die Kapitalintensität konstant oder fallen. Wegen $y = Ak$ gilt das auch für das Pro-Kopf-Einkommen, denn für die Wachstumsraten gilt

$$g_y = g_k = A - n - \rho. \tag{4.4}$$

Im Kapitel 3 ist ausführlich argumentiert worden, daß eine positive Interpretation des PFC-Gleichgewichts (vgl. die Definition 3.2 auf der Seite 138) von dynamischen Optimierungsmodellen nicht überzeugend ist. Die Betrachtung des *AK*-Modells mit der Goldenen Faustregel macht wenig Sinn, weil das Arbeitseinkommen im Modell nicht explizit auftaucht. Dagegen ist die Verwendung einer konstanten Sparquote s im Sinne einer einfachen Faustregel problemlos möglich. In diesem Fall folgt aus der Produktionsfunktion für die Wachstumsrate des Kapitalstocks unmittelbar

$$g_K = sA.$$

[10]Man beachte, daß die Lösung etwas anders aussieht, wenn wie zum Beispiel bei Barro und Sala-i-Martin (1998) der Nutzen mit $(\rho - n)$ diskontiert wird. Setzt man für die gegenwärtige Formulierung die Lösung für c und $\theta \neq 1$ in die Momentannutzenfunktion ein, so erkennt man, daß das Zielfunktional nur konvergiert, wenn $(1-\theta)(A-n-\rho)/\theta < \rho$ ist. Da $\theta = 1$ unterstellt worden ist, reicht also die Annahme einer positiven Diskontrate $\rho > 0$ aus, um die Konvergenz zu gewährleisten. Im Falle der Divergenz muß ein allgemeineres als das einfache Maximierungskriterium für die Optimierung des Konsums verwendet werden.

Damit ergibt sich für die Wachstumsrate der Kapitalintensität und des Pro-Kopf-Einkommens

$$g_y = g_k = g_K - n = sA - n. \tag{4.5}$$

Das Pro-Kopf-Einkommen wächst also, wenn $A > n/s$ ist, das heißt, die Grenzproduktivität des Kapitals muß größer als n/s sein (vgl. die Diskussion der Abbildung 3.3 auf der Seite 116).

An den exogenen Bedingungen für das Wachstum setzt die Kritik am *AK*-Modell an. Um das Wachstum endogen zu erklären, muß letztlich auch endogen erklärt werden, warum die Grenzproduktivität des Kapitals nach unten beschränkt ist. Das Wachstum im *AK*-Modell basiert dagegen nur auf der Annahme, daß je nach Konsumhypothese $A > n + \rho$ oder $A > n/s$ ist. Eine befriedigerende Erklärung bietet das Modell des endogenen technischen Fortschritts von Romer (1990), das im nächsten Abschnitt dargestellt wird.

Im Vergleich zum Solow-Modell und zum Ramsey-Koopmans-Cass-Modell ist bemerkenswert, daß Veränderungen der Bereitschaft zur Ersparnis (die hier durch die Diskontrate ρ oder die Sparquote s erfaßt werden) einen Einfluß auf die langfristige Wachstumsrate haben. Eine Verringerung von ρ beziehungsweise eine Erhöhung von s führt gemäß (4.4) beziehungsweise (4.5) zu einer Erhöhung der Wachstumsrate. Im Sinne der Definition 4.1 ist das Wachstum also trotz der exogenen Annahme $A > n + \rho$ (beziehungsweise$A > n/s$) endogen, da die Sparquote beispielsweise durch eine entsprechende Besteuerung zu beeinflussen ist und kein exogener technischer Fortschritt unterstellt wird, so daß das Pro-Kopf-Wachstum allein auf der endogenen Akkumulation des Kapitals basiert. Dagegen ist die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens bei Solow und Ramsey-Koopmans-Cass durch die Wachstumsrate des autonomen technischen Fortschritts exogen vorgegeben, ohne durch die Sparquote beeinflußbar zu sein. Ein Skaleneffekt des Wachstums besteht nicht, weil die Bevölkerungsgröße keinen Einfluß auf die Wachstumsrate des Einkommens hat.

Eine Anmerkung ist mit Bezug zur **Übergangsdynamik** erforderlich. Anhand von (4.4) und (4.5) ist zu erkennen, daß die Wachstumsraten von y und k (und damit wegen $g_L = n$ auch diejenigen von Y und K sowie C) immer konstant sind. Im Gegensatz zum neoklassischen Grundmodell (beziehungsweise dem RKC-Modell) existiert also kein Anpassungsprozeß mit variablen Wachstumsraten an ein langfristiges Gleichgewicht. Das heißt, im *AK*-Modell springt das System schon zu Beginn auf den gleichgewichtigen Wachstumspfad. Diese unrealistische Eigenschaft kann vermieden werden, wenn man die Produktionsfunktion als Summe einer *AK*-Funktion und einer neoklassischen Produktionsfunktion, die die Inada-Bedingungen erfüllt, formuliert (vgl. Jones und Manuelli, 1990). Der Grund für die fehlende Übergangsdynamik ist, daß die Produktionsfunktion linear in der einzigen Zustandsvariablen ist.

4.3 Endogenes Wachstum durch Forschung und Entwicklung

4.3.1 Endogener technischer Fortschritt

Die bekanntesten Modelle der Theorie des endogenen Wachstums von Lucas (1988) und Romer (1990) haben zu einer bemerkenswerten Wiederbelebung der wachstumstheoretischen Forschung geführt. Lucas (1988) behandelt zwei verschiedene Modelle, die auf der Akkumulation von Humankapital beziehungsweise auf dem learning by doing basieren, auf das später noch eingegangen wird. Dagegen modelliert Romer (1990) den endogenen technischen Fortschritt durch die Akkumulation neuer Varianten eines heterogenen Kapitalgutes. Im folgenden wird dieses Modell dargestellt. Es beinhaltet drei Sektoren und die Produktionsfaktoren Kapital, (geringqualifizierte) Arbeit und Humankapital (hochqualifizierte Arbeit) sowie einen Index für das Niveau der Technik beziehungsweise für das bestehende Niveau des Wissens. Der Forschungs- und Entwicklungssektor (F&E) verwendet Humankapital und das bestehende Wissen, um neue Blaupausen (Konstruktionspläne, Designs) für Kapitalgütervarianten zu produzieren und damit das verfügbare Wissen zu erhöhen. Der Kapitalgütersektor nutzt die vom Forschungssektor hervorgebrachten Blaupausen und vom Endproduktsektor erstellten Output, um die Varianten der Kapitalgüter zu produzieren. Der Endproduktsektor schließlich verwendet die Inputs Arbeit, Humankapital und Kapitalgüter. Das Endprodukt kann konsumiert oder gespart werden, um Kapital zu akkumulieren.

Die aggregierte Produktionsfunktion für den **Endproduktsektor**, der unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz agiert, lautet

$$Y = L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} \int_0^\infty x(i)^{\alpha_1} \, di, \tag{4.6}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Das gesamte exogen gegebene Arbeitsangebot wird zur Erzeugung des Endproduktes eingesetzt und zur Unterscheidung mit $\mathscr{L}$ bezeichnet. Der Bestand an Humankapital L ist ebenfalls gegeben und wird sowohl zur Produktion des Endproduktes (L_Y) als auch zur Produktion neuer Blaupausen (L_A) eingesetzt: $L_Y + L_A = L$. Das mit der hochqualifizierten Arbeit verbundene Wissen ist an die betroffenen Arbeiter gebunden und unterscheidet sich dadurch vom allgemeinen Wissen über die Produktionsverfahren, das ein gemeinsam nutzbares öffentliches Gut darstellt. Die Funktion $x(i)$ stellt die Mengen eines Kontinuums an Varianten von Zwischenprodukten dar, die hier als langlebige Gebrauchsgüter beziehungsweise Kapitalgüter interpretiert werden. In jedem Zeitpunkt t sind nur $A(t)$ Varianten der Kapitalgüter verfügbar (genauer: eine Menge mit Maß $A(t)$), so daß $x(i) \equiv 0$ für $i > A$. Die Integral-Darstellung ermöglicht es, A als stetige Variable aufzufassen.

Eine Einheit der Kapitalgüter kann aus η Einheiten des Endproduktes erstellt werden. Wenn der Kapitalstock K in denselben Einheiten wie das Endprodukt gemessen wird, entsprechen also η Einheiten des Kapitalstocks einer Einheit einer beliebigen Kapitalgütervariante, das heißt, es gilt $K = \eta \int_0^\infty x(i) \, di$. Die Gleichung für die Akkumulation des Kapitals kann damit analog zu den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen definiert werden:

$$\dot{K} = Y - C \qquad \left[\Longleftrightarrow d\left(\int_0^\infty x(i)\, di \right) / dt = (Y - C)/\eta \right], \tag{4.7}$$

wobei C den aggregierten Konsum bezeichnet und die Abschreibungen vernachlässigt werden. Zu beachten ist allerdings, daß Y hier nicht mit dem Nationaleinkommen gleichgesetzt werden kann, da auch der Forschungssektor einen Teil zum Nationaleinkommen beiträgt, der in Y nicht erfaßt ist.

Die Nachfrage nach der Nutzung von Kapitalgütern seitens der Produzenten des Konsumgutes im Endproduktsektor ergibt sich für zunächst gegebene Werte von $\mathscr{L}$ und L_Y aus dem Problem der Gewinnmaximierung bezüglich $x(i)$:

$$\max_{x(i)} \int_0^\infty [L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} x(i)^{\alpha_1} - p(i)x(i)]\, di.$$

Die Funktion $p(i)$ deren Werte im Bereich $(0,\infty]$ liegen, stellt das Kontinuum der Nutzungspreise der Kapitalgüter dar. Die Preise der Güter $i > A$, die gegenwärtig nicht produziert werden, werden formal gleich ∞ gesetzt (daraus folgt, daß die Nachfrage nach diesen Varianten gleich null ist). Alle Preise werden in Einheiten des Konsumgutes gemessen. Das Problem kann als degeneriertes Kontrollproblem ohne Zustandsvariable interpretiert werden, in dem die Hamiltonfunktion sich auf den Integranden des Zielfunktionals verkürzt. Die Lösung erhält man demnach, indem die Ableitung des in $x(i)$ konkaven Integranden nach $x(i)$ gleich null gesetzt wird. Die inverse Nachfragefunktion lautet folglich

$$p(i) = p(x(i)) = \alpha_1 L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} x(i)^{\alpha_1 - 1}. \tag{4.8}$$

Die Anzahl der verfügbaren Kapitalgütervarianten wächst gemäß der Produktionsfunktion des **F&E-Sektors**

$$\dot{A} = \psi L_A A. \tag{4.9}$$

Das durch die Anzahl der bisher verfügbaren Kapitalgütervarianten repräsentierte technische Wissen ist ein öffentliches Gut, das den Forschern in nichtrivalisierender Weise kostenlos zur Verfügung steht. Deshalb kann die Produktion $\dot{A}_j = \psi L_{Aj} A$ der einzelnen Produzenten j durch Summation über alle j zu (4.9) aggregiert werden.

Die Produktion einer neuen Blaupause hat zwei wesentliche Implikationen. Einerseits kann für die produzierte Blaupause ein Patent vergeben werden, das dem Patentnehmer die Produktion des entsprechenden Kapitalgutes erlaubt. Dadurch wird eine privatwirtschaftliche Vermarktung neuer Designs ermöglicht. Andererseits erhöht die Produktion der Blaupause das technische Wissen A und beinhaltet so für den Forschungssektor selbst einen externen Effekt als öffentliches Gut, das die Produktivität im Forschungssektor erhöht, ohne daß dafür zusätzliche Kosten entstehen. Die Linearität von (4.9) in A ermöglicht in diesem Modell endogenes Wachstum. Später wird gezeigt, daß sich die Implikationen des Modells wesentlich ändern, wenn (4.9) in A unterlinear steigt.

Um den Preis p_A für ein Patent zu bestimmen, ist zu beachten, daß A den Forschern unentgeltlich zur Verfügung steht. Daher ergeben sich die Kosten der Produktion eines neuen Produktdesigns beziehungsweise einer neuen Blaupause für ein Kapitalgut aus den Kosten des erforderlichen Humankapitals. Für den Forschungssektor gelten die Bedingungen der vollständigen Konkurrenz. Bezeichnet man den Reallohnsatz für das Humankapital mit w und verwendet man (4.9), so liefert die Maximierung des Gewinns $p_A \psi L_A A - wL_A$ bezüglich L_A die Bedingung

$$p_A = w/(\psi A), \tag{4.10}$$

wenn man annimmt, daß die Konkurrenz zu solchen Werten von p_A und w führt, daß diese Gleichung erfüllt ist. Andernfalls ergäbe sich eine Randlösung mit $L_A = 0$ oder $L_A = L$. Im folgenden wird wie bei Romer (1990) unterstellt, daß (4.10) mit Gleichheit erfüllt ist. Der Preis p_A entspricht dann den Kosten der Erfindung einer neuen Blaupause.

Im Unterschied zu den beiden anderen Sektoren gilt im **Kapitalgütersektor** die Marktform der **monopolistischen Konkurrenz**. Hier gibt es ein Kontinuum an Unternehmen, die je eines der patentierten Kapitalgüter aus dem Intervall $[0, A]$ produzieren. Die Preis-Absatz-Funktion (4.8) ist den Produzenten der Kapitalgüter bekannt. Bei monopolistischer Konkurrenz ist es möglich, einen Nutzungspreis für die Kapitalgüter zu setzen, der oberhalb der Grenzkosten ihrer Produktion liegt und so die fixen Kosten p_A für den Erwerb eines Patents abzudecken. Wenn diese fixen Kosten bereits entstanden sind, wird ein Produzent die Menge $x(i)$ anbieten, die den Erlös $p(x(i))x(i)$ abzüglich der variablen Kosten $r\eta x(i)$ maximiert. Die variablen Kosten ergeben sich dabei aus der mit dem Zinssatz r für Kapitalanlagen bewerteten Outputmenge beziehungsweise Kapitalmenge $K_i = \eta x(i)$, die erforderlich ist, um $x(i)$ Einheiten eines spezialisierten Kapitalgutes i zu erstellen. Zu beachten ist, daß das Kapital im Produktionsprozeß verbraucht wird, da angenommen wird, daß das spezialisierte Kapitalgut durch eine Transformation aus dem in Outputeinheiten gemessenen Kapital K_i erstellt wird. Der Einfachheit halber wird jedoch unterstellt, daß das betrachtete Unternehmen das spezialisierte Kapitalgut kostenlos rücktransformieren kann, so daß außer den Patentkosten keine weiteren **irreversiblen Fixkosten (sunk costs)** entstehen. Bezeichnet man die maximale Produzentenrente eines Kapitalgutproduzenten i mit $\pi(i)$, so lautet das Maximierungsproblem unter Verwendung von (4.8) also

$$\pi = \max_x [p(x)x - r\eta x] = \max_x [\alpha_1 L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} x^{\alpha_1 - 1} - r\eta x], \tag{4.11}$$

wobei der Index i der Einfachheit halber vernachlässigt worden ist. Setzt man die erste Ableitung nach x gleich null, so folgt unter Verwendung von (4.8) für den gewinnmaximalen Monopolpreis $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{r\eta}{\alpha_1}. \tag{4.12}$$

Aufgrund der Symmetrie des Modells (alle Kapitalgütervarianten gehen symmetrisch in die Produktionsfunktion (4.6) ein und werden auf die gleiche Art produziert) gilt dieser Nutzungspreis für alle Varianten der Kapitalgüter, das heißt, $\bar{p}$ ist unabhängig vom Index i. Das Ergebnis ist ein Zuschlag auf die Grenzkosten $r\eta$, wobei der Zuschlagssatz $1/\alpha_1$ ist. Setzt man $\bar{p}$ in (4.11) ein, so ergibt sich $\pi = [(1-\alpha_1)r\eta x]/\alpha_1 = (1-\alpha_1)\bar{p}x$. Mit der optimalen Menge $\bar{x}$ (die sich durch die Substitution von $\bar{p}$ in (4.8) ergibt), lautet der Strom der Produzentenrente also

$$\pi = (1-\alpha_1)\bar{p}\bar{x}.$$

Die Entscheidung, ein neues Kapitalgut zu produzieren, hängt vom Vergleich des Barwertes aller zukünftigen Produzentenrenten ab dem Zeitpunkt t mit den Fixkosten p_A für den Erwerb eines Patentes zum Zeitpunkt t ab. Da unterstellt wird, daß die Produzenten der Kapitalgüter ein fortdauernd gültiges Patent auf eine Blaupause erwerben, wird ein Kapitalgut angeboten, wenn im Zeitpunkt t des Patenterwerbs gilt

$$\int_t^\infty e^{-\int_t^\tau r(s)\,ds}\pi(\tau)\,d\tau \geqq p_A(t), \tag{4.13}$$

wobei vollkommene Voraussicht unterstellt wird. Weil auf dem Markt für Kapitalgüter monopolistische Konkurrenz mit freiem Marktzutritt herrscht, werden die Gewinne durch die Konkurrenz beseitigt und im langfristigen Gleichgewicht gilt (4.13) mit Gleichheit. Mit $R(\tau)-R(t) := \int_t^\tau r(s)\,ds$ ergibt sich

$$\int_t^\infty e^{-R(\tau)}\pi(\tau)\,d\tau = e^{-R(t)}p_A(t).$$

Wenn Patente weiterveräußert werden können, muß aufgrund der Symmetrie der Kapitalgütervarianten der Patentpreis $p_A(t)$ zum Zeitpunkt t für jede Variante unabhängig von ihrem Alter gleich sein. Die angegebene Bedingung muß im Gleichgewicht daher in jedem Zeitpunkt t erfüllt sein, so daß auch die Ableitung nach der Zeit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens übereinstimmen muß. Bildet man diese Ableitung nach t, so erhält man nach wenigen Umformungen die Bedingung für ein Arbitragegleichgewicht

$$\frac{\pi(t)}{p_A(t)} + \frac{\dot{p}_A(t)}{p_A(t)} = r(t).$$

Die Summe aus der Rate der Produzentenrente $\pi(t)/p_A(t)$ und dem prozentualen Kursgewinn $\dot{p}_A(t)/p_A(t)$ muß also gleich dem Zinssatz sein. Später wird sich herausstellen, daß im langfristigen Gleichgewicht $p_A(t)$ konstant gleich p_A ist, so daß sich die Bedingung für das Arbitragegleichgewicht zu

$$\pi(t) = r(t)p_A. \tag{4.14}$$

vereinfacht. Demnach ist im Gleichgewicht die Produzentenrente in jedem Zeitpunkt genau groß genug, um die Zinskosten der ursprünglichen Investition in die Blaupause zu decken.

Um das Modell zu schließen, muß noch der **Haushaltssektor** betrachtet werden. Romer (1990) unterstellt das auch in (3.8) auf der Seite 120 verwendete Nutzenfunktional mit konstanter intertemporaler Substitutionselastizität:

$$\int_0^\infty \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\, dt, \quad \theta > 0.$$

Der repräsentative Haushalt maximiert dieses Funktional wie zuvor unter der Nebenbedingung, daß der Barwert seines Endvermögens nicht negativ ist, wobei die Änderung des Vermögens jetzt durch die Lohneinkommen für hochqualifizierte und geringqualifizierte Arbeit sowie das Zinseinkommen abzüglich der Konsumausgaben gegeben ist. Die Gewinne sind annahmegemäß gleich null. Dabei kann der Haushalt weder auf die externen Effekte im Forschungssektor noch auf die monopolistische Preisbildung im Kapitalgütersektor Einfluß nehmen. Die Analyse verläuft analog zu derjenigen im grundlegenden RKC-Modell und führt auf die Keynes-Ramsey-Regel für den optimalen Konsum [vgl. (3.10)]:

$$g_C = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}(r-\rho). \tag{4.15}$$

Da die Bevölkerung konstant ist ($n = 0$), beschreibt (4.15) nun gleichzeitig die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums.

4.3.2 Der gleichgewichtige Wachstumspfad

Aufgrund der Symmetrie der Kapitalgüter (bezüglich ihrer Produktion und ihrer Verwendung als Inputs) wird jede Variante i mit derselben Menge angeboten und nachgefragt, die im folgenden mit $\bar{x}$ bezeichnet wird. Aus $K = \eta \int_0^\infty x(i)\, di = \eta \int_0^A x(i)\, di$ folgt daher $K = \eta A \bar{x}$. Die Produktionsfunktion (4.6) läßt sich also formulieren als

$$\begin{aligned} Y &= L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} \int_0^\infty x(i)^{\alpha_1}\, di \\ &= L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} A \bar{x}^{\alpha_1} \\ &= L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} A \left(\frac{K}{\eta A}\right)^{\alpha_1} \\ &= (L_Y A)^{1-\alpha_1-\alpha_2} (\mathscr{L} A)^{\alpha_2} K^{\alpha_1} \eta^{-\alpha_1}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Anhand von (4.16) ist zu erkennen, daß das Modell eine ähnliche aggregierte Darstellung wie das neoklassische Grundmodell impliziert, erweitert um arbeitsvermehrenden und humankapitalvermehrenden technischen Fortschritt, der sich hier im Wachstum von A manifestiert. Dieser Umstand weist auf die Bedeutung der durch A gemessenen zunehmenden Vielfalt an Varianten der Kapitalgüter hin. Anhand der letzten Zeile erkennt man, daß bei gegebenem Gesamtkapitalstock K der Output Y

steigt, wenn sich die Anzahl der Varianten erhöht. Damit wird der positive Effekt spezialisierter Kapitalgüter auf die Produktion des Endproduktes erfaßt. Die zweite Zeile verdeutlicht, daß die Akkumulation des Kapitals, die sich bei konstantem $\bar{x}$ über A vollzieht, durch die Einführung der neuen Kapitalgüter auch bei konstantem Arbeitseinsatz nicht mit abnehmenden Grenzproduktivitäten verbunden ist.

Ein gleichgewichtiger Wachstumspfad ist dadurch definiert, daß die Variablen A, K, Y und C mit konstanten Raten wachsen, wobei in jedem Zeitpunkt die statischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein müssen. Aus (4.9) folgt für die Wachstumsrate von A

$$g_A := \frac{\dot{A}}{A} = \psi L_A,$$

das heißt, eine konstante Wachstumsrate erfordert wegen $L_A + L_Y = L$ eine konstante Allokation des Humankapitals auf den Endproduktsektor und den Forschungssektor. Diese Allokation wird durch die Bedingung determiniert, daß die Lohnsätze für das Humankapital in beiden Sektoren gleich sein müssen. Das Niveau des Humankapitals im Endproduktsektor, $L_Y = L - L_A$, muß gerade so groß sein, daß die Grenzproduktivität mit dem in (4.10) angegebenen Reallohnsatz im Forschungssektor übereinstimmt:

$$w = p_A \psi A = (1-\alpha_1-\alpha_2) L_Y^{-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} A \bar{x}^{\alpha_1}, \tag{4.17}$$

wobei die zweite Zeile aus (4.16) verwendet worden ist. Eine konstante Wachstumsrate von C impliziert nach (4.15) einen konstanten Zinssatz r. Wenn r konstant ist, sind der optimale Monopolpreis $\bar{p} = r\eta/\alpha_1$ und damit nach (4.8) auch $\bar{x}$ konstant. Also impliziert (4.17) zusammen mit der Konstanz von L_Y, daß p_A konstant ist.

Für konstantes p_A kann man den früher abgeleiteten Strom der Produzentenrente $\pi = (1-\alpha_1)\bar{p}\bar{x}$ im Kapitalgütersektor in (4.14) einsetzen, woraus

$$p_A = \frac{1}{r}\pi = \frac{1-\alpha_1}{r}\bar{p}\bar{x} \overset{(4.8)}{=} \frac{1-\alpha_1}{r}\alpha_1 L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} \bar{x}^{\alpha_1} \tag{4.18}$$

folgt. Die Substitution von (4.18) in (4.17) liefert schließlich

$$L_Y = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\psi\alpha_1(1-\alpha_1)} r. \tag{4.19}$$

Ersetzt man L_A in (4.9) durch $L - L_Y$ gemäß (4.19), so folgt für die Wachstumsrate von A

$$g_A := \frac{\dot{A}}{A} = \psi L_A = \psi L - \underbrace{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1(1-\alpha_1)}}_{=:\Lambda} r = \psi L - \Lambda r.$$

Zu beachten ist, daß $L_A \geqq 0$ und daher $g_A \geqq 0$ ist. Wenn die Beschränkung $L_Y \leqq L$ bindet, ist (4.19) im allgemeinen nur als Ungleichung erfüllt; dann findet keine Forschung und Entwicklung statt (worauf hier nicht weiter eingegangen wird).

Wie bereits gezeigt worden ist, ist für konstantes r auch $\bar{x}$ konstant. Damit muß der Output

$$Y = L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} A \bar{x}^{\alpha_1}$$

unter diesen Umständen mit derselben Rate wie A wachsen. Dasselbe gilt für $K = \eta A\bar{x}$, und daher ist K/Y konstant. Aus (4.7) ergibt sich

$$\frac{C}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{Y} = \text{konst.},$$

weil K/Y konstant ist. Also erhält man für die Wachstumsraten

$$g_Y = g_K = g_C = g_A = \psi L - \Lambda r. \tag{4.20}$$

Die Gleichung (4.20) ist die angebotsseitige Beziehung zwischen der gleichgewichtigen Wachstumsrate und dem Zinssatz. Die nachfrageseitige Beziehung zwischen dem Zinssatz und der Wachstumsrate ist in (4.15) angegeben worden. Setzt man $r = \rho + \theta g_C$ in (4.20) ein, so ergibt sich die reduzierte Form der gleichgewichtigen Wachstumsrate als Lösung des Modells:

$$g_Y = g_K = g_C = g_A = \frac{\psi L - \Lambda\rho}{\theta\Lambda + 1}. \tag{4.21}$$

Dieses langfristige Gleichgewicht stellt gleichzeitig ein PFC-Gleichgewicht gemäß der Definition 3.2 auf der Seite 138 dar. Wenn man diese Wachstumsrate in das Nutzenfunktional einsetzt, so erkennt man, daß $(1-\theta)g_C < \rho$ sein muß, damit das Zielfunktional des Konsumenten konvergiert. Zu beachten ist, daß die Wachstumsraten der Arbeit und des Humankapitals im vorliegenden Modell gleich null sind, so daß die in (4.21) angegebenen Wachstumsraten gleichzeitig die Pro-Kopf-Wachstumsraten sind.

Bemerkung 4.1. Noch einmal wird darauf hingewiesen, daß Y im vorliegenden Modell nicht mit dem Nationaleinkommen gleichgesetzt werden darf, da auch der F&E-Sektor einen Teil zum Einkommen beiträgt, nämlich $p_A\dot{A}$. Bezeichnet man das Nationaleinkommen mit $\mathscr{Y}$, so gilt also

$$\mathscr{Y} = Y + p_A\dot{A}.$$

Da p_A im langfristigen Gleichgewicht konstant und $g_Y = g_A = g_{\dot{A}}$ ist, folgt daraus, daß $g_{\mathscr{Y}} = g_Y$. Das Nationaleinkommen wächst also mit derselben Rate wie der Output des Endproduktes. Im Abschnitt 4.4.4 wird sich herausstellen, daß es in vergleichbaren Modellen auch sein kann, daß im langfristigen Gleichgewicht $g_A \neq g_Y$ ist. In diesem Fall gilt

$$g_{\mathscr{Y}} = g_Y\frac{Y}{\mathscr{Y}} + (g_{p_A} + g_A)\frac{p_A\dot{A}}{\mathscr{Y}}.$$

Wie im Abschnitt 2.1.1 für das Beispiel der Allokation der Arbeit auf zwei Produktionsrichtungen kann man nun zeigen, daß die Konstanz der Wachstumsraten in dieser Gleichung impliziert, daß $g_{\mathscr{Y}} = g_Y = g_{p_A} + g_A$ ist. Im steady state gilt daher grundsätzlich $g_{\mathscr{Y}} = g_Y$. (Der Fall $g_{\mathscr{Y}} \neq g_Y$ kann nur eintreten, wenn sich die Volkswirtschaft auf die Forschung spezialisiert, was aufgrund der unterstellten Produktionsfunktionen nicht möglich ist.) $\Diamond$

Anhand von (4.21) erkennt man unter anderem, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate mit dem Bestand an Humankapital L und der Produktivität im Forschungssektor ψ zunimmt, während sie mit der Diskontrate ρ abnimmt. Die Wachstumsrate hängt also von Parametern ab, die einer wirtschaftspolitischen Beeinflussung zugänglich sind. Beispielsweise erhöht eine geringere Diskontrate und damit eine höhere Sparquote die Wachstumsrate. Ebenso kann man annehmen, daß der Bestand an Humankapital durch Bildung beeinflußbar ist. Das Wachstum kann also beeinflußt werden und ist nicht wie etwa im Solow-Modell durch solche Parameter vorgegeben, die einer wirtschaftspolitischen Beeinflussung weitgehend unzugänglich sind. Da das Pro-Kopf-Einkommen stetig wächst und auch der technische Fortschritt endogen erklärt wird, liegt also endogenes Wachstum im Sinne der Definition 4.1 vor. Wenn man davon ausgeht, daß das Humankapital proportional zur Bevölkerung ist, besteht auch ein Skaleneffekt im Sinne der Definition 4.3. Zusammengefaßt gilt:

Aussage 4.1. *Unter der Voraussetzung, daß der Einsatz des Humankapitals in der Forschung positiv ist, wachsen der Konsum pro Kopf und das Pro-Kopf-Einkommen im langfristigen PFC-Gleichgewicht des Romer-Modells mit der positiven Rate (4.21). Das Wachstum ist endogen und enthält einen Skaleneffekt. Insbesondere steigt die Wachstumsrate, wenn der Bestand an Humankapital zunimmt.*

Jedoch muß angemerkt werden, daß im Romer-Modell letztlich andere exogene Größen für das Wachstum verantwortlich sind. Hier ist insbesondere der die Produktivität im Forschungssektor bestimmende Parameter ψ zu nennen, ohne dessen ausreichende Größe kein positives Wachstum in diesem Modell möglich ist. Ebenso basiert der Vorteil spezialisierter Kapitalgüter auf der unterstellten Produktionsfunktion für den Endproduktsektor. Ohne irgendwelche Annahmen dieser Art wird man wohl kaum ein Wachstumsmodell formulieren können.

4.3.3 Der optimale gleichgewichtige Wachstumspfad

Die dezentrale Lösung des vorliegenden Modells ist aus zwei Gründen keine gesamtwirtschaftlich optimale Lösung. Zum einen bewirkt die Externalität im F&E-Sektor, daß das dort eingesetzte Humankapital einen nicht appropriierbaren positiven Effekt auf die Produktivität künftiger Forschung hat, für den es also nicht entlohnt wird. Zum anderen werden die Patente vom Kapitalgütersektor gekauft, der für die Vermietung der Kapitalgüter einen Zuschlag auf die Grenzkosten erhebt. Beide Effekte bewirken letztlich, daß zu wenig Humankapital im Forschungssektor eingesetzt wird. Von diesem Problem ist im vorliegenden Fall nur die Allokation des exogen gegebenen Bestands an Humankapital betroffen. In dem allgemeineren Fall, in dem Humankapital endogen akkumuliert wird, ist das Gesamtangebot an Humankapital ebenfalls zu gering.

Auch für das zentrale Optimierungsproblem gilt die Symmetrie der Kapitalgüter, so daß es unter Verwendung der Produktionsfunktion (4.16) formuliert werden kann. Da lediglich die langfristig gleichgewichtige optimale Lösung beschrieben werden soll, wird in der Formulierung des Problems auf Randbedingungen verzichtet:

$$
\begin{aligned}
&\max_{C,L_Y\in\bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\,dt, \quad \theta>0,\\
&\text{u. d. N.}\\
&\dot{K} = \eta^{-\alpha_1} A^{1-\alpha_1} L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} K^{\alpha_1} - C,\\
&\dot{A} = \psi L_A A,\\
&L = L_A + L_Y.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Die Beschränkung $\dot{K}$ ist nicht gemeinsam konkav in C, L_Y, A und K, da sich die Exponenten der Produktionsfunktion (4.16) zu mehr als eins addieren. Daher ist keine einfache Anwendung von hinreichenden Bedingungen möglich. Man kann jedoch analog zum Vorgehen im Abschnitt 3.2.1 zeigen, daß für die notwendigen Bedingungen $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden kann. Daher kann die current value-Hamiltonfunktion

$$
\mathscr{H} = \int_0^\infty \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_1^c(\eta^{-\alpha_1} A^{1-\alpha_1} L_Y^{1-\alpha_1-\alpha_2} \mathscr{L}^{\alpha_2} K^{\alpha_1} - C) + \lambda_2^c \psi (L - L_Y) A
$$

verwendet werden, um notwendige Bedingungen gemäß dem Satz 2.20 abzuleiten, die in einem steady state erfüllt sein müssen. Für eine innere Lösung ergeben sich die Optimumbedingungen

$$
\begin{aligned}
C^{-\theta} &= \lambda_1^c,\\
\lambda_1^c(1-\alpha_1-\alpha_2)\frac{Y}{L_Y} &= \lambda_2^c \psi A,\\
\dot{\lambda}_1^c &= \rho\lambda_1^c - \lambda_1^c \alpha_1 \frac{Y}{K},\\
\dot{\lambda}_2^c &= \rho\lambda_2^c - \lambda_1^c(1-\alpha_1)\frac{Y}{A} - \lambda_2^c \psi (L - L_Y).
\end{aligned}
$$

Setzt man die erste in die zweite Bedingung ein, so folgt durch logarithmische Ableitung nach der Zeit

$$
-\theta g_C + g_Y - g_A = g_{\lambda_2^c},
$$

wobei $g_{L_Y} = 0$ wie zuvor aus der Konstanz von $g_A = \psi L_A = \psi(L - L_Y)$ im steady state folgt. Dividiert man die vierte Bedingung durch λ_2^c und ersetzt λ_1^c/λ_2^c mittels der zweiten Bedingung, so erhält man einen weiteren Ausdruck für $g_{\lambda_2^c}$, der mit dem zuerst berechneten Ausdruck gleichgesetzt werden kann:

$$
-\theta g_C + g_Y - g_A = \rho - \frac{(1-\alpha_1)\psi(L - L_A)}{1-\alpha_1-\alpha_2} - \psi L_A.
$$

Unter Verwendung von $g_A = \psi L_A$ läßt sich der Ausdruck vereinfachen zu

$$g_Y - \theta g_C - \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2} g_A = \rho - \frac{(1-\alpha_1)\psi L}{1-\alpha_1-\alpha_2}.$$

Da die Wachstumsrate von C konstant sein muß, impliziert die erste Optimumbedingung die Konstanz von $g_{\lambda_1^c}$. Somit impliziert die dritte Optimumbedingung, daß Y/K konstant ist, das heißt $g_Y = g_K$. Durch die logarithmische Ableitung der Produktionsfunktion erkennt man, daß daraus $g_Y = g_A = g_K$ folgt (wegen $K = \eta A x$ ist daher x auch im zentralen Optimum konstant). Wie im dezentralen Modell kann nun gezeigt werden, daß auch g_C mit g_Y übereinstimmt. Verwendet man diese Informationen in der vorangehenden Gleichung, so folgt nach einigen Umformungen schließlich

$$g_Y = g_K = g_C = g_A = \frac{\psi L - \Phi\rho}{\theta\Phi + 1 - \Phi}, \tag{4.23}$$

wobei $\Phi := (1-\alpha_1-\alpha_2)/(1-\alpha_1)$ ist.

Im Vergleich zur in (4.21) angegebenen Wachstumsrate im dezentralen steady state taucht in (4.23) der Parameter Φ anstelle des Parameters Λ auf, der außerdem im Nenner auch noch subtrahiert wird. Dabei ist Λ gleich dem Produkt von Φ mit dem monopolistischen Zuschlagssatz $1/\alpha_1$ auf die Grenzkosten der Produktion der Kapitalgüter, so daß $\Lambda > \Phi$ ist, wodurch die optimale Wachstumsrate über der dezentralen liegt. Dieser durch die monopolistische Preissetzung bewirkte Effekt wird noch durch die Subtraktion von Φ im Nenner verstärkt, die auf den externen Effekt des Humankapitals im Forschungssektor zurückzuführen ist. Anhand von (4.9) ist zu erkennen, daß beide die Wachstumsrate erhöhenden Effekte auf einer entsprechenden Erhöhung des Anteils des im Forschungssektor eingesetzten Humankapitals beruhen müssen.

Aussage 4.2. *Die gleichgewichtige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in einem dezentralen PFC-Gleichgewicht ist im Romer-Modell geringer als die Wachstumsrate bei zentraler Planung, die die notwendigen Optimumbedingungen in einem steady state erfüllt.*

4.3.4 Kritische Würdigung

Der wichtige Beitrag des Romer-Modells ist es, den endogenen technischen Fortschritt unter Verwendung von Resultaten der Industrieökonomik zur Patententwicklung und zur Herstellung spezialisierter Kapitalgüter im Rahmen der (relativ realistischen) Marktform der monopolistischen Konkurrenz in die neoklassische Wachstumstheorie integriert zu haben. Die kontinuierliche Einführung neuer Kapitalgüter führt dazu, daß das Kapital auch bei konstantem Arbeitseinsatz akkumuliert werden kann, ohne daß die Grenzproduktivität des Kapitals fällt. In diesem Zusammenhang drängen sich einige wirtschaftspolitische Schlußfolgerungen geradezu auf. Verantwortlich für das endogene Wachstum in Romer (1990) ist letztlich der F&E-Sektor, dessen externe Effekte durch den Markt nicht kompensiert werden. Daher besteht eine Politikempfehlung in der Subventionierung der Forschung und Entwicklung sowie einer Subventionierung der Nutzung von Kapitalgütern zum Ausgleich der durch die monopolistische Konkurrenz zu hohen Nutzungspreise des Kapitals, wobei die Subventionen durch eine Pauschalsteuer zu finanzieren sind. Eine alternative, zweitbeste Lösung ist die Subventionierung der Akkumulation des (hier als exogen gegeben unterstellten) Humankapitals, also der Ausbildung.[11]

Neben diesen normativen Schlußfolgerungen hat das Modell bedeutende positive Implikationen. So ist es möglich, daß zum Beispiel Länder mit unterschiedlichen Ausstattungen an Humankapital oder unterschiedlichem Sparverhalten verschieden schnell wachsen, ohne eine Tendenz zur Konvergenz aufzuzeigen. Daher bietet das Romer-Modell Ansatzpunkte zur Erklärung der im Abschnitt 4.1 genannten stilisierten Fakten 4 und 5. Allerdings ist nach Romer (1990, S. S98) davon auszugehen, daß sich die Voraussage zur fehlenden Konvergenz für offene Volkswirtschaften ändern kann. Hierfür können sogenannte **spillover-Effekte** der Forschung und Entwicklung verantwortlich sein, die durch den internationalen Handel begünstigt werden. Damit kann das Modell auch eine mögliche Erklärung für das stilisierte Faktum 7 geben. Das Thema offener Volkswirtschaften wird später im Kapitel 5 aufgegriffen werden.

Bei allen Vorzügen des Romer-Modells sind auch einige Probleme zu nennen. Viele der vereinfachenden Annahmen von Romer (1990) sind von anderen Autoren in ähnlichen Modellen aufgegeben (und durch alternative Vereinfachungen ersetzt) worden. Beispielsweise haben Grossman und Helpman (1991b) und Aghion und Howitt (1992) Modelle mit Qualitätsverbesserungen vorgelegt, bei denen alte Produkte obsolet werden. Dadurch kann die empirische Beobachtung modelliert werden, daß neue Produkte und Technologien die alten verdrängen. Arnold (1998) verwendet einen Ansatz von Grossman und Helpman (1991a, Kapitel 3) und verbindet ihn mit dem Ansatz von Uzawa (1965) und Lucas (1988) zur endogenen Erklärung der Akkumulation des Humankapitals. Dazu ist es erforderlich, die Produktionsfunktion des Forschungssektors abzuändern, die ansonsten exponentiell wachsende Wachstumsraten impliziert (vgl. dazu Jones, 1995, auf dessen Kritik im nächsten Abschnitt ausführlich eingegangen wird). Ein Großteil der angesprochenen Erweiterungen wird in den Büchern von Grossman und Helpman (1991a), Barro und Sala-i-Martin (1998) sowie Aghion und Howitt (1998) dargestellt.

Augenfällig ist die Konzentration des Modells auf das langfristige Gleichgewicht. Eine Analyse der Dynamik des Übergangs zum steady state findet sich bei Arnold (2000). Da der dynamische Optimierungsansatz für die Konsumentscheidung verwendet wird, ist es keine Überraschung, daß das langfristige Gleichgewicht ein Sat-

[11] Eine ausführlichere Analyse der optimalen Wirtschaftspolitik in einem vereinfachten Romer-Modell findet sich in Barro und Sala-i-Martin (1998, S. 267–268). Die Vereinfachung besteht im wesentlichen darin, daß Zwischenprodukte anstelle von Kapitalgütern verwendet werden. Diese Zwischenprodukte sind Verbrauchsgüter und nicht wie die Kapitalgüter Gebrauchsgüter.

telpunkt ist.[12] Im Kapitel 3 ist ausführlich argumentiert worden, daß in diesem Fall keine Stabilität vorliegt, auch wenn dieser Eindruck in der Literatur vermittelt wird. Die alternative Betrachtung von Faustregeln soll für das Romer-Modell hier nicht weiter verfolgt werden, da im nächsten Abschnitt gezeigt wird, daß Modelle des semi-endogenen Wachstums realistischer und letztlich auch einfacher zu analysieren sind.[13] In diesem Zusammenhang wird dann auf alternative Konsumhypothesen zurückzukommen sein. Trotz der genannten Kritik sollte nicht vergessen werden, daß das Romer-Modell zum ersten Mal formal aufzeigt, unter welchen Voraussetzungen endogenes Wachstum durch die Entwicklung neuer Kapitalgütervarianten möglich ist.

4.4 Allgemeine Eigenschaften des semi-endogenen Wachstums

4.4.1 Skaleneffekte in der Theorie des endogenen Wachstums

Die wesentliche Kritik am Ansatz von Romer (1990) hat Jones (1995) formuliert. Anhand von Gleichung (4.21) ist zu erkennen, daß das Modell einen **Skaleneffekt** gemäß der Definition 4.3 beinhaltet.[14] Die Größe der Volkswirtschaft wird im vorliegenden Fall durch den Bestand an Humankapital, L, gemessen. Zumindest wenn man Volkswirtschaften mit vergleichbarem Entwicklungsstand betrachtet, ist es gerechtfertigt, davon auszugehen, daß der Bestand an Humankapital um so größer ist, je größer die Bevölkerung ist. Also nimmt L mit der Größe der Bevölkerung zu und gemäß (4.21) steigt die langfristige Wachstumsrate in L.

Wie Jones (1995, S. 762) bemerkt, sind die Wachstumsraten der Nationaleinkommen in den industrialisierten Ländern während der letzten 25 bis 100 Jahre relativ konstant geblieben, obwohl die Größe der Arbeitsbevölkerung in diesen Ländern erheblich gewachsen ist. Der Skaleneffekt steht also in krassem Widerspruch zu der empirischen Evidenz. Dieses Problem wird noch offensichtlicher, wenn man annimmt, daß die Bevölkerung und das Humankapital mit konstanter Rate $g_L = n$ wachsen, wie es in vielen Ländern zumindest lange Zeit annähernd der Fall gewesen ist. Dann

[12] In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß externe Effekte in einigen Wachstumsmodellen dazu führen können, daß ein Gleichgewicht kein Sattelpunkt, sondern stabil ist. Da es in diesem Fall keinen eindeutigen Sattelpfad gibt, der ins langfristige Gleichgewicht führt, sondern viele Pfade, bezeichnet man dieses Ergebnis als *Unbestimmtheit* des PFC-Gleichgewichts. Formal basiert die Unbestimmtheit auf den externen Effekten, die bewirken, daß die Differentialgleichungen dieser Modelle kein gestörtes Hamilton-System darstellen, so daß der Satz 2.23 auf der Seite 100 nicht angewendet werden kann. Ein bekanntes Beispiel ist das Uzawa-Lucas-Modell mit externen Effekten der Akkumulation des Humankapitals, vgl. Benhabib und Rustichini (1994) und die dort zitierte Literatur.

[13] Eine Analyse der Romer-Modells mit konstanter Sparquote liefert Bräuninger (2001).

[14] Die Wachstumsrate in (4.21) bezieht sich nicht direkt auf das Einkommen. Gemäß der Bemerkung 4.1 gilt jedoch, daß auch das Einkommen mit der angegebenen Rate wächst. Der Einfachheit halber wird hier und in einigen folgenden Modellen jedoch auf die Konsumgüterproduktion Bezug genommen.

folgt aus der Gleichung (4.21)

$$\frac{\dot{g}_Y}{g_Y} = g_L \frac{\psi L}{\psi L - \Lambda \rho} \xrightarrow[\lim L \to \infty]{} n,$$

das heißt, die Wachstumsrate der Konsumgüterproduktion (pro Kopf) wächst selbst asymptotisch mit konstanter Rate! Daraus folgt auch, daß im Gegensatz zu dem stilisierten Faktum 1, das eine langfristig positive und nahezu konstante Wachstumsrate impliziert, kein steady state im Romer-Modell existiert, wenn die Bevölkerung wächst. Diese Kritik trifft zahlreiche andere Modelle der Theorie des endogenen Wachstums, die in den Büchern von Aghion und Howitt (1998) und Grossman und Helpman (1991a) dargestellt werden.

4.4.2 Forschung und Entwicklung

Um die Skaleneffekte im Romer-Modell zu beseitigen, verwendet Jones (1995) eine alternative Spezifikation der Produktionsfunktion im Forschungssektor. Anstelle der Beziehung (4.9), die in der Anzahl A der verfügbaren Blaupausen und dem in der Forschung eingesetzten Humankapital L_A jeweils linear ist, unterstellt er eine Funktion der Form

$$\dot{A} = \psi L_A^{\lambda} A^{\beta} \tag{4.24}$$

Wenn $\beta \leqq 0$ ist, fällt die Anzahl neuer Innovationen $\dot{A}$ mit steigendem Wissen A oder ist davon unabhängig. Obwohl auch derartige Fälle, für $\beta < 0$ in der Literatur als **fishing out** bezeichnet, denkbar sind, wird in der Wachstumstheorie regelmäßig von dem Fall positiver Externalitäten des bestehenden Wissens auf die Forschung mit $\beta > 0$ ausgegangen. Während positive Externalitäten durchaus wahrscheinlich sind, erscheint die Annahme $\beta = 1$ als eine willkürliche Auswahl aus dem Bereich möglicher externer steigender Skalenerträge der Forschung. In bezug auf die stilisierten Fakten des Wachstums stellt sich heraus, daß langfristig konstante, positive Wachstumsraten der Bevölkerung und des Pro-Kopf-Einkommens in F&E-Modellen nur für $0 < \beta < 1$ möglich sind, was im folgenden unterstellt wird. Auch in bezug auf den Parameter λ ist die Annahme $\lambda = 1$ willkürlich. Wenn $\lambda < 1$ ist, spiegelt das die Tatsache wieder, daß etwa eine doppelte Anzahl an Forschern vermutlich nicht auch die doppelte Anzahl an Innovationen hervorbringt, da einige Forscher die gleichen Erfindungen machen und es daher zu **Redundanzen** (Überschneidungen) kommt.

In einem langfristigen Gleichgewicht wachsen alle Variablen mit konstanter Rate. Aus $g_A =$ konst. folgt, daß $\dot{A} =$ konst.$\cdot A$ und damit $g_{\dot{A}} = g_A$. Unter dieser Voraussetzung liefert die logarithmische Ableitung der Gleichung (4.24)

$$g_A = \lambda g_{L_A} + \beta g_A. \tag{4.25}$$

Da die geringqualifizierte Arbeit im Romer-Modell lediglich als konstanter Faktor bei der Endprodukterzeugung auftaucht, wird in vielen Darstellungen des Modells nur die hochqualifizierte Arbeit explizit betrachtet. Dieser Vorgehensweise wird hier gefolgt, so daß $\alpha_2 = 0$ ist und $\mathscr{L}$ im folgenden nicht mehr betrachtet wird. Anstelle von α_1 kann daher einfach der Parameter α verwendet werden. Das Symbol L bezeichnet jetzt also die hochqualifizierte Arbeit, die annahmegemäß zur Bevölkerung proportional ist. Wenn die Bevölkerung und damit die hochqualifizierte Arbeit mit konstanter Rate $n > 0$ wachsen, muß im steady state auch L_A mit der Rate n zunehmen. Denn aus (4.25) folgt, daß g_{L_A} konstant ist, wenn g_A konstant ist, und aus

$$g_L = n = g_{L_A}\frac{L_A}{L} + g_{L_Y}\frac{L_Y}{L}$$

folgt, daß g_{L_A} nur dann konstant sein kann, wenn $g_{L_A} = n$ ist. Damit erhält man aus der Gleichung (4.25)

$$g_A = \frac{\lambda n}{1-\beta}.$$

Anhand dieses Ausdrucks ist zu erkennen, daß $0 \leqq \beta < 1$ die wesentliche Annahme ist, um ein steady state mit positiver Wachstumsrate n der Bevölkerung zu ermöglichen. Dagegen beeinflußt der Parameter λ lediglich die Höhe der Wachstumsrate. Der Einfachheit halber wird daher **im folgenden** $\lambda = 1$ **unterstellt**, so daß

$$\dot{A} = \psi L_A A^{\beta} \tag{4.26}$$

und

$$g_A = \frac{n}{1-\beta}. \tag{4.27}$$

Daher ist die Wachstumsrate von A im steady state größer als die von L, wenn $0 < \beta < 1$ gilt.

Behält man mit Ausnahme der Verwendung von Gleichung (4.26) anstelle von (4.9) sowie von $g_L = n$ (und $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$) alle anderen Annahmen des Romer-Modells bei, so kann man zeigen, daß durch (4.27) auch die anderen Wachstumsraten im langfristigen Gleichgewicht festgelegt werden. Die Gleichung (4.16) gilt mit den offensichtlichen Modifikationen nach wie vor. Ihre logarithmische Ableitung ergibt

$$g_Y = (1-\alpha)(g_{L_Y} + g_A) + \alpha g_K,$$

im steady state mit $g_{L_Y} = n$ und g_A gemäß (4.27) also

$$g_Y = (1-\alpha)\left(n + \frac{n}{1-\beta}\right) + \alpha g_K. \tag{4.28}$$

Wie zuvor impliziert eine konstante Wachstumsrate des Konsums C einen konstanten Zinssatz r und folglich gemäß (4.12) einen konstanten Nutzungspreis $\bar{p}$ der Kapitalgüter. Da L_Y nun mit der Rate n wächst, folgt damit aus der modifizierten Gleichung (4.8), daß $\bar{x} = x(i)$ nicht mehr konstant ist, sondern ebenfalls mit der Rate n

wächst. Verwendet man (4.26) anstelle von (4.9), so ändert sich die Gleichung (4.17) zu

$$p_A\psi = (1-\alpha)L_Y^{-\alpha}A^{1-\beta}\bar{x}^{\alpha},$$

woraus sich in Verbindung mit den vorangehenden Ergebnissen $g_{p_A} = n$ ergibt (im Gegensatz zum Romer-Modell ist der Designpreis also nicht mehr konstant). Da nach wie vor $K = \eta A\bar{x}$ gilt, folgt

$$g_K = \frac{n}{1-\beta} + n.$$

Dieses Ergebnis kann in (4.28) eingesetzt werden, um g_Y zu berechnen. Nun kann man wie im Romer-Modell zeigen, daß C/Y konstant ist, so daß man schließlich das Ergebnis

$$g_Y = g_K = g_C = \frac{n}{1-\beta} + n$$

erhält. Für die Wachstumsraten der Pro-Kopf-Größen $y = Y/L$, $k = K/L$ und $c = C/L$ folgt damit

$$g_y = g_k = g_c = g_A = \frac{n}{1-\beta}. \tag{4.29}$$

Anhand von (4.29) ist zu erkennen, daß die Änderung der Produktionsfunktion des F&E-Sektors die Ergebnisse des Modells dramatisch ändert. Obwohl für $0 < \beta < 1$ nach wie vor eine positive Externalität im Forschungssektor besteht, generiert das Modell kein Pro-Kopf-Wachstum mehr, wenn die Bevölkerung nicht wächst ($n = 0$). Wenn die Bevölkerung zunimmt, wächst auch das Pro-Kopf-Einkommen. Allerdings ist die Wachstumsrate jetzt weitgehend unabhängig von politisch beeinflußbaren Parametern. Vielmehr hängt sie von der Wachstumsrate der Bevölkerung und dem Parameter β der Produktionsfunktion des F&E-Sektors ab. Das Wachstum ist insofern also nicht endogen, sondern durch exogene Parameter bestimmt, und die Implikationen des Modells ähneln denjenigen des neoklassischen Grundmodells von Solow (1956). Trotzdem wird der technische Fortschritt endogen auf die gleiche Weise wie im Romer-Modell erklärt. Im vorliegenden Fall liegt also **semi-endogenes Wachstum** im Sinne der Definition 4.2 und gleichzeitig, da der anhand von (4.21) zu erkennende Skaleneffekt im Romer-Modell beseitigt ist, **Wachstum ohne Skaleneffekte (non-scale growth)** vor. Allerdings ist anhand dieses Modells zu erkennen, daß diese Bezeichnung insofern etwas irreführend ist, als zwar keine Skaleneffekte des **Niveaus** der Bevölkerung, jedoch mit Bezug zur **Wachstumsrate** der Bevölkerung auftreten.

Aussage 4.3. *Verwendet man anstelle der im Niveau des Wissens A linearen Produktionsfunktion des Forschungssektors eine in A^{β} mit $0 < \beta < 1$ lineare Funktion, so werden sowohl der Skaleneffekt als auch die Endogenität des Wachstums im Romer-Modell beseitigt. Das Wachstum ist semi-endogen und der Pro-Kopf-Konsum wächst im langfristigen Gleichgewicht nur, wenn das Wachstum der Bevölkerung positiv ist.*

Da die gleichgewichtige Wachstumsrate durch exogene Konstanten festgelegt ist, stimmt die dezentrale gleichgewichtige Wachstumsrate im Unterschied zum Romer-Modell mit der optimalen gleichgewichtigen Wachstumsrate überein. Trotzdem ist die dezentrale Lösung aufgrund der Externalität im F&E-Sektor und der monopolistischen Preisbildung im Kapitalgütersektor keine gesamtwirtschaftlich optimale Lösung. Wiederum gilt auch für das zentrale Optimierungsproblem die Symmetrie der Kapitalgüter, so daß die Produktionsfunktion (4.16) verwendet werden kann. Für die gleichgewichtige optimale Lösung wird in der Formulierung des Problems auf Randbedingungen wie zuvor verzichtet:

$$
\begin{aligned}
&\max_{C,L_Y\in\bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty \frac{(C/L)^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t}\,dt, \quad \theta>0,\\
&\text{u. d. N.}\\
&\dot{K} = \eta^{-\alpha} A^{1-\alpha} L_Y^{1-\alpha} K^\alpha - C,\\
&\dot{A} = \psi L_A A^\beta,\\
&L = L_A + L_Y, \quad \dot{L} = nL.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Geht man wie im Romer-Modell vor, so lautet die current value-Hamiltonfunktion jetzt

$$
\mathscr{H} = \frac{(C/L)^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_1^c(\eta^{-\alpha}A^{1-\alpha}L_Y^{1-\alpha}K^\alpha - C) + \lambda_2^c\psi(L-L_Y)A^\beta + \lambda_3^c nL,
$$

wobei der letzte Summand für die optimale Lösung keine Bedeutung hat, da er weder eine Kontrollvariable noch eine beeinflußbare Zustandsvariable enthält. Für eine innere Lösung ergeben sich die Optimumbedingungen

$$
\begin{aligned}
C^{-\theta}L^{\theta-1} &= \lambda_1^c,\\
\lambda_1^c(1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} &= \lambda_2^c\psi A^\beta,\\
\dot{\lambda}_1^c &= \rho\lambda_1^c - \lambda_1^c\alpha\frac{Y}{K},\\
\dot{\lambda}_2^c &= \rho\lambda_2^c - \lambda_1^c(1-\alpha)\frac{Y}{A} - \lambda_2^c\beta\psi(L-L_Y)A^{\beta-1}.
\end{aligned}
$$

Da g_C und $g_L = n$ im steady state konstant sind, impliziert die erste Bedingung, daß auch $g_{\lambda_1^c}$ konstant ist. Die Division der dritten Bedingung durch λ_1^c impliziert daher die Konstanz von Y/K, das heißt, $g_Y = g_K$. Wegen $g_{L_Y} = g_{L_A} = n$ ist g_A durch (4.27) gegeben. Die logarithmische Ableitung der Produktionsfunktion ergibt damit unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse

$$
g_Y = g_K = \frac{n}{1-\beta} + n.
$$

Da $\dot{K} = Y - C$ und damit $g_K = Y/K - C/K$, ist auch C/K konstant, so daß die angegebene Wachstumsrate auch für C gilt. Mit diesen Ergebnissen erhält man also

$$g_y = g_k = g_c = g_A = \frac{n}{1-\beta},$$

das heißt, die Wachstumsraten stimmen allesamt mit den in (4.29) angegebenen Raten für das dezentrale Modell überein.

Trotzdem unterscheidet sich die optimale von der dezentralen Lösung. Im vorliegenden Fall ist der im Forschungssektor eingesetzte Anteil der Arbeit L_A/L aufgrund der positiven Externalität neuen Wissens und der monopolistischen Preissetzung im Kapitalgütersektor zu gering.[15] Daher ergeben sich prinzipiell die gleichen Politikempfehlungen wie im Romer-Modell, also etwa eine Subventionierung der Forschung und Entwicklung. Allerdings sind zwei einschränkende Anmerkungen zu machen. Erstens hat die Subventionierung anders als im Romer-Modell keinen Einfluß auf die Wachstumsrate, sondern lediglich auf das Wachstumsniveau, da die Wachstumsrate wie im Solow-Modell exogen vorgegeben ist. Zweitens ist es nach Jones (1995, S. 771) auch möglich, daß im dezentralen Fall zu viel geforscht wird, wenn der Parameter λ in (4.24), der hier gleich eins gesetzt worden ist, kleiner als eins ist. Da es in diesem Fall zu mehrfachen Erfindungen desselben Gutes kommen kann, führt eine Erhöhung des Anteils der in der Forschung eingesetzten Arbeit zu einer negativen Externalität, die die beiden anderen Effekte je nach den Parameterwerten überkompensieren kann. Allerdings bewertet Jones diese Möglichkeit aufgrund numerischer Simulationen als eher unbedeutend.

Zur Stabilität des langfristigen Gleichgewichts sind die gleichen Anmerkungen wie zum Romer-Modell angebracht, die hier nicht wiederholt werden sollen. Jones (1995, S. 773–775) analysiert allerdings die Übergangsdynamik anhand eines vereinfachten Modells, für das er eine konstante Sparquote bezüglich Y und einen konstanten Anteil der in der Forschung eingesetzten Arbeit unterstellt. Dadurch spielt auch die Dynamik der Designpreise p_A keine Rolle, weil die Wachstumsrate von A durch diese Annahme exogen gegeben ist. Das langfristige Gleichgewicht ist unter diesen Annahmen wie im Solow-Modell global stabil, wenn $\beta < 1$ ist. Wenn man also in semi-endogenen Wachstumsmodellen die Annahme der dynamischen Optimierung aufgibt und durch eine einfache Faustregel ersetzt, ist Stabilität möglich. Später wird der Fall der Goldenen Faustregel in einem Wachstumsmodell mit learning by doing analysiert.

4.4.3 Analyse der Politikinvarianz

Das F&E-Modell von Romer hat die bedeutende Eigenschaft, daß die Wirtschaftspolitik Einfluß auf die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens nehmen kann, ist

[15] Auf eine Berechnung der Anteile im dezentralen und im optimalen Fall wird hier verzichtet, vgl. dazu Jones (1995).

jedoch aufgrund des involvierten Skaleneffektes der Bevölkerungsgröße empirisch nicht haltbar. Das Modell von Jones (1995) beseitigt diesen Skaleneffekt und gleichzeitig auch die mögliche Einflußnahme der Wirtschaftspolitik auf die Wachstumsrate. Damit gilt in bezug auf das Pro-Kopf-Wachstum in einer Volkswirtschaft dieselbe **Politikinvarianz** wie im neoklassischen Grundmodell von Solow (1956). Diese Tatsache hat zu der Frage geführt, ob der Skaleneffekt auch beseitigt werden kann, ohne die Politikinvarianz zu bewirken. Modelle, die diese Eigenschaft haben, sind unter anderem von Young (1998), Peretto (1998) und Aghion und Howitt (1998) vorgelegt worden. Auf eine ausführliche Darstellung wird hier verzichtet. Stattdessen werden die Unterschiede der F&E-Modelle anhand eines von Jones (1999) formulierten *toy model* veranschaulicht, das zwar viele der tieferen Einsichten der Originalansätze vernachlässigt, aber eine einfache Darstellung der grundlegenden Eigenschaften verschiedener F&E-Modelle ermöglicht.

Das **toy model** verwendet eine Produktionsfunktion für den Endproduktsektor, in die nur von die Arbeit L_Y und das vorhandene Wissen A als Faktoren eingehen:

$$Y = A^{\alpha} L_Y, \quad \alpha > 0. \tag{4.31}$$

Die neuen Ideen, die das Wissen erhöhen, werden ebenfalls mit dem Faktor Arbeit L_A produziert:

$$\dot{A} = \psi L_A A^{\beta}, \quad \psi > 0,\ 0 \leqq \beta \leqq 1. \tag{4.32}$$

Dabei wird unterstellt, daß ein konstanter Anteil l_A an der gesamten Arbeitsmenge L im Forschungssektor eingesetzt wird:

$$L_A = l_A L, \quad L_Y = (1 - l_A)L. \tag{4.33}$$

Setzt man $\beta = 1$ wie im **Romer-Modell**, so folgt aus (4.32) und (4.33) unmittelbar

$$g_A = \psi l_A L,$$

so daß ein steady state nur existiert, wenn $g_L = n = 0$ ist. Mit (4.31) und $y = Y/L$ ergibt sich für $n = 0$

$$g_y = g_Y = \alpha \psi l_A L.$$

Wie im Romer-Modell besteht also ein Skaleneffekt, da die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums[16] mit der Bevölkerungsgröße steigt. Die Wachstumsrate kann auch bei konstanter Bevölkerung erhöht werden, indem der Anteil l_A der in der Forschung eingesetzten Arbeit erhöht wird. Im vorliegenden Modell besteht allgemein keine Politikinvarianz, wenn l_A die gleichgewichtige Wachstumsrate beeinflußt und umgekehrt. Das Modell enthält keine Übergangsdynamik, da (4.32) linear in A ist, so daß A und damit auch Y für konstantes L_A immer mit konstanter Rate wachsen.

[16]Wie zuvor wird grundsätzlich der Pro-Kopf-Konsum anstelle des Pro-Kopf-Einkommens als zentrale Variable betrachtet.

Unterstellt man nun wie im **Jones-Modell**, daß $0 < \beta < 1$ und $g_L = n > 0$, so liefert die logarithmische Ableitung von (4.32) in Verbindung mit (4.33) die Wachstumsrate von A im steady state

$$g_A = \frac{n}{1-\beta}, \tag{4.34}$$

woraus in Verbindung mit (4.31) die Wachstumsraten

$$g_Y = \frac{\alpha n}{1-\beta} + n \quad \text{und} \quad g_y = \frac{\alpha n}{1-\beta}$$

im langfristigen Gleichgewicht folgen. Der Skaleneffekt des Bevölkerungsniveaus wird also wie im Modell von Jones beseitigt, wenn man die willkürliche Annahme $\beta = 1$ fallen läßt. Ein Einfluß der Wirtschaftspolitik auf die Wachstumsrate mittels der Veränderung von l_A ist nicht mehr gegeben. Das Pro-Kopf-Einkommen wächst langfristig genau dann mit positiver Rate, wenn die Wachstumsrate der Bevölkerung positiv ist.

Anhand dieses Modells kann ein Verfahren der Stabilitätsanalyse erläutert werden, daß noch mehrfach zur Anwendung kommen wird. Da A im steady state mit der Rate $n/(1-\beta)$ wächst, ist das **niveauangepaßte Pro-Kopf-Wissen**

$$a = \frac{A}{L^{1/(1-\beta)}} = \frac{A}{L^\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma := \frac{1}{1-\beta}$$

im langfristigen Gleichgewicht konstant. Daher ist es naheliegend, die Dynamik des Modells in dieser Variablen auszudrücken. Die logarithmische Ableitung von a liefert außerhalb des steady state $g_a = g_A - \gamma n$, nach Multiplikation mit a und unter Verwendung von (4.32) und (4.33) also

$$\dot{a} = g_A a - \gamma n a = \psi l_A L A^{\beta-1} a - \gamma n a.$$

Da

$$L A^{\beta-1} = \left(\frac{A}{L^\gamma}\right)^{\beta-1} = a^{\beta-1}$$

ist, folgt

$$\dot{a} = \psi l_A a^\beta - \gamma n a. \tag{4.35}$$

Anhand der im Abschnitt 2.1.4 dargestellten Methoden ist unmittelbar zu erkennen, daß diese Gleichung für $0 < \beta < 1$ ein eindeutiges, stabiles Gleichgewicht

$$\hat{a} = \left(\frac{\psi(1-\beta) l_A}{n}\right)^\gamma$$

für den Bereich $a > 0$ hat. Da a in diesem Gleichgewicht konstant ist, gilt hier

$$g_a = g_A - \gamma n = 0,$$

so daß (4.34) erfüllt ist. Im langfristigen Gleichgewicht kann man A in (4.31) durch $A = \hat{a}L^{\gamma}$ ersetzen:

$$Y = \hat{a}^{\alpha} L^{\alpha\gamma} (1 - l_A) L.$$

Damit erhält man für das Pro-Kopf-Einkommen unter Verwendung von $\hat{a}$ schließlich:

$$y = (1 - l_A) \left(\frac{\psi(1-\beta)}{n} l_A L \right)^{\alpha\gamma}.$$

Anhand dieser Formel ist unmittelbar zu erkennen, daß eine Erhöhung des Anteils l_A der Arbeit in der Forschung zwar nicht die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens, aber sein Niveau im steady state beeinflußt. Die Politikineffektivität bezieht sich also auf die Wachstumsrate, nicht aber auf das Wachstumsniveau. Daraus folgt auch, daß Änderungen von l_A kurzfristige Wirkungen auf die Wachstumsrate während des Übergangs zum neuen Gleichgewicht haben.

Dieser einfache Ansatz eignet sich auch zur Darstellung der Dynamik für den **Fall** $\beta > 1$, der in der Literatur bisher nicht behandelt worden ist. Die Gleichung (4.34) gilt wie zuvor, so daß ein steady state nur existieren kann, wenn die Wachstumsrate $g_A < 0$ ist (für $n = 0$ muß auch $g_A = 0$ sein). Ein solches langfristiges Gleichgewicht existiert nur für $a \leqq 0$, wobei negative Werte von a ökonomisch sinnlos sind. Das Gleichgewicht bei $a = 0$ ist instabil. Denn die Ableitung der Gleichung (4.35) ist für $\beta > 1$ unverändert gültig. Wegen $\gamma = 1/(1-\beta) < 0$ erkennt man, daß im Unterschied zum Fall $0 < \beta < 1$ für $a > 0$ kein Gleichgewicht mehr existiert. Die Instabilität des Gleichgewichtes $a = 0$ ergibt sich aus[17]

$$\left.\frac{d\dot{a}}{da}\right|_{a=0} = -\gamma n > 0.$$

Wenn $a_0 > 0$ ist, wächst a mit ständig steigender Rate, denn

$$\frac{\dot{a}}{a} = \psi l_A a^{\beta-1} - \gamma n$$

steigt in a. Die Gleichung (4.32) impliziert, daß dieses Ergebnis auch für $n = 0$ gilt, da L^{γ} dann konstant ist und A mit steigender Rate wächst. Für $\beta > 1$ existiert also kein steady state. Wenn $a_0 > 0$ ist, wächst die Volkswirtschaft mit ständig steigenden Raten. Während also der Skaleneffekt für $\beta = 1$ schon fragwürdig ist, ist die Annahme $\beta > 1$ offensichtlich irrelevant. Auf diesen Fall wird daher im folgenden nicht mehr eingegangen.

Die folgende Aussage faßt die wesentlichen Ergebnisse zusammen.

Aussage 4.4. *Ein ökonomisch sinnvoller steady state existiert im toy model für* $n > 0$ *(*$n = 0$*) nur, wenn* $0 \leqq \beta < 1$ *(*$0 \leqq \beta \leqq 1$*) ist. Der Pro-Kopf-Konsum wächst im langfristigen Gleichgewicht mit positiver Rate, wenn* $n = 0$ *und* $\beta = 1$ *(endogenes Wachstum mit Skaleneffekt) oder* $n > 0$ *und* $0 < \beta < 1$ *(semi-endogenes Wachstum ohne Skaleneffekt).*

[17] Abhängig von dem Wert von β hat die Gleichung $\dot{a} = 0$ unter Umständen noch eine negative Lösung für a, die ökonomisch sinnlos ist. Für bestimmte Werte von β, etwa $\beta = 3$, erhält man eine komplexe Zahl.

Die Beseitigung des Skaleneffektes der Bevölkerungsgröße bei Vermeidung der Politikineffektivität in den Modellen von **Young (1998)** und anderen basiert auf der realistischen Annahme, daß eine Erhöhung der Bevölkerung zwar zu mehr Forschung führt, daß sich diese Forschung aber auf eine zunehmende Anzahl verschiedener Forschungsrichtungen verteilt, wodurch der Skaleneffekt beseitigt wird. Im Rahmen des toy model wird angenommen, daß die Konsumenten ein Aggregat von Varianten eines heterogenen Gutes gemäß

$$C = \left(\int_0^B Y(i)^{1/\theta} \, di \right)^\theta, \quad \theta > 1$$

konsumieren, wobei B das Maß für die Anzahl der Gütervarianten und $Y(i)$ der Konsum der i-ten Variante ist. Jede dieser Varianten wird gemäß einer Produktionsfunktion (4.31) produziert. Die Anzahl der Konsumgütervarianten entwickelt sich gemäß

$$B = L^\zeta, \tag{4.36}$$

wobei die Bevölkerung L mit der Rate n wächst. Dieser Ansatz kann durch eine Produktionsfunktion der Form $\dot{B} = LB^{(\zeta-1)/\zeta}$ begründet werden, die im steady state ebenso wie (4.36) die Wachstumsrate $g_B = \zeta n$ impliziert, so daß man mit entsprechender Normierung des Startwertes von B den Ausdruck (4.36) erhält. Um die Analyse so einfach wie möglich zu gestalten, wird ferner angenommen, daß von jeder Konsumgütervariante die gleiche Menge konsumiert wird, das heißt $Y(i) = Y$ und

$$C = \left(Y^{1/\theta} \int_0^B 1 \, di \right)^\theta = B^\theta Y.$$

Mit $y = Y/L$ ist der Pro-Kopf-Konsum unter diesen Annahmen $c = C/L = B^\theta y$. Da B gemäß (4.36) mit der Rate ζn wächst und jedes $Y(i)$ und damit Y gemäß (4.31) mit der Rate $\alpha g_A + n$ zunimmt, folgt für die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums

$$g_c = \theta \zeta n + \alpha g_A.$$

Da sich die Forschung und Entwicklung neuer Varianten der heterogenen Kapitalgüter nun auf spezialisierte Varianten pro Konsumgütervariante bezieht, gilt anstelle von (4.32) mit $\beta = 1$, daß die Wachstumsrate von A von der Forschung pro Konsumgütervariante abhängt:

$$\dot{A} = \frac{\psi l_A L A}{B}, \quad \text{also mit (4.36)} \quad g_A = \psi l_A L^{1-\zeta}.$$

Somit ergibt sich für die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums schließlich

$$g_c = \theta \zeta n + \alpha \psi l_A L^{1-\zeta}. \tag{4.37}$$

Anhand dieser Gleichung sieht man, daß das Verhalten des Modells entscheidend von dem Parameter ζ abhängt. Der erste Summand auf der rechten Seite entspricht qualitativ dem Fall des Jones-Modells, in dem die Wachstumsrate pro Kopf linear in der Wachstumsrate der Bevölkerung ist, wobei keine Möglichkeit der Beeinflussung durch eine Erhöhung des Anteils der in der Forschung eingesetzten Arbeit gegeben ist. Der zweite Summand dagegen läßt eine solche Beeinflussung zu. Wenn l_A steigt, so erhöht sich auch die Wachstumsrate pro Kopf, wobei für den Spezialfall $\zeta = 1$ kein Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße besteht. In diesem Fall erschließt sich auch, daß ein exponentielles Pro-Kopf-Wachstums des Konsums selbst dann möglich ist, wenn die Bevölkerung nicht wächst ($n = 0$). Für $\zeta = 1$ sind also die kontroversen Vorhersagen des Romer-Modells und des Jones-Modells jeweils beseitigt und man erhält ein Modell mit **endogenem Wachstum ohne Skaleneffekte**. Allerdings gilt diese Eigenschaft des Modells nur für den Grenzfall $\zeta = 1$. Wenn $\zeta < 1$ ist, erkennt man unmittelbar einen Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße. Ein steady state existiert dann nur für $n = 0$. Wenn $\zeta > 1$ ist, fällt der Skaleneffekt negativ aus. Zudem erreicht mit wachsender Bevölkerung der zweite Summand asymptotisch den Wert null, so daß auch die Wirkung von l_A auf die Wachstumsrate immer geringer wird und langfristig wieder die Politikinvarianz folgt. Für $\zeta < 1$ verhält sich das Modell also ähnlich wie das Romer-Modell; für $\zeta > 1$ verhält es sich asymptotisch wie das Jones-Modell.

Mit Bezug zu den stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums fällt insbesondere die Bedeutung der Bevölkerungsgröße und ihres Wachstums auf. So kann das Romer-Modell das stilisierte Faktum 1 erklären, wenn die Bevölkerung nicht zunimmt. Bei wachsender Bevölkerung existiert dagegen kein steady state. Vielmehr impliziert das Modell die empirisch unhaltbare Voraussage einer exponentiell wachsenden Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums. Die anhand des toy model aufgezeigte Möglichkeit, diesen Skaleneffekt zu beseitigen, ohne dabei die Politikineffektivität des Jones-Modells zu implizieren, gilt nur für den Grenzfall $\zeta = 1$. Daher spricht vieles dafür, daß nur Ansätze nach der Art von Jones (1995) empirisch haltbar sind. Dieses Ergebnis wird in etwas allgemeinerem Zusammenhang auch durch Li (2000) bestätigt, der zeigt, daß in einem Modell mit zwei Forschungssektoren, das das Jones-Modell als Spezialfall enthält, zwei Grenzfälle (knife-edge conditions) für die Parameterwerte unterstellt werden müssen, um endogenes Wachstum zu erhalten. Mit anderen Worten, **semi-endogenes Wachstum ohne Skaleneffekte ist die Regel**, nicht die Ausnahme. Hierauf wird auch im folgenden Abschnitt noch einmal eingegangen. Allerdings steht das Ergebnis, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in der Wachstumsrate der Bevölkerung linear steigt, im Widerspruch zum stilisierten Faktum 8. Im Abschnitt 4.5 wird ein Modell des semi-endogenen Wachstums durch learning by doing formuliert, das sich ähnlich wie das Jones-Modell verhält und das später auf offene Volkswirtschaften erweitert wird. In diesem Zusammenhang ist es möglich, auch dem stilisierten Faktum 8 Rechnung zu tragen.

4.4.4 Ein allgemeines Zwei-Sektoren-Modell

Eigenschaften des semi-endogenen Wachstums Die Eigenschaften der langfristigen Gleichgewichte in semi-endogenen Wachstumsmodellen sind von Eicher und Turnovsky (1999c) anhand eines allgemeinen Ansatzes mit zwei Sektoren analysiert worden, der die Kernaussagen einer Reihe von Standardmodellen als Spezialfälle umfaßt.[18] Die Funktionsformen werden nicht von vornherein vorgegeben. Das Wissen wird prinzipiell unter Verwendung aller Inputs (Arbeit, Kapital, Wissen) produziert. Dieser allgemeine Ansatz wird dadurch ermöglicht, daß eine Beschränkung auf die Analyse des steady state erfolgt und die mikroökonomische Fundierung – etwa der Produktion neuer Kapitalgütervarianten wie bei Romer (1990) – vernachlässigt wird. In bezug auf die Bezeichnung als **Zwei-Sektoren-Modell** ist anzumerken, daß einer der Sektoren Wissen produziert, während der andere Sektor ein Endprodukt erstellt, das sowohl konsumiert als auch in den physischen Kapitalstock investiert werden kann. Daher gibt es letztlich nur ein handelbares Endprodukt, so daß sich das Modell grundlegend von dem neoklassischen Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell von Uzawa (1961a) unterscheidet, in dem ein Konsumgut und ein physisches Kapitalgut in den jeweiligen Sektoren produziert werden. Da diese beiden Güter prinzipiell handelbar sind, eignet sich Uzawas Modell grundsätzlich besser als der hier betrachtete Ansatz zur Erweiterung auf offene Volkswirtschaften und die Betrachtung endogener komparativer Vorteile. Auf diese Problematik wird im nächsten Kapitel eingegangen.

Während Eicher und Turnovsky (1999c) die Nachfrageseite durch die Verwendung der dynamischen Optimierungslösung einer zentralen Planungsbehörde einbeziehen, wird im folgenden der Ansatz von Christiaans (2004) unter (weitestgehender) Vernachlässigung der Nachfrageseite gewählt. Da in semi-endogenen Wachstumsmodellen ohne Skaleneffekte allgemein gilt, daß die Wachstumsraten im langfristigen Gleichgewicht allein durch die Angebotsseite determiniert werden, gehen dadurch für diesen Fall praktisch keine Einsichten verloren, obwohl sich die Darstellung erheblich vereinfacht. In diesem Zusammenhang kann zusätzlich gezeigt werden, daß semi-endogenes Wachstum und Wachstum ohne Skaleneffekte zwar logisch voneinander unabhängig sind, daß aber nur diejenigen Modelle des gleichgewichtigen Wachstums robust gegenüber Parameteränderungen sind, die semi-endogenes Wachstum ohne Skaleneffekte implizieren. Da die Produktionsfunktionen nicht konkret spezifiziert werden, ist dieses Ergebnis allgemeiner als das Fazit des letzten Abschnitts, das in den Analysen von Jones (1999) und Li (2000) auf verallgemeinerten Cobb-Douglas-Funktionen beruht. Allerdings ist anzumerken, daß im Unterschied zu diesen Ansätzen im folgenden nur ein Forschungssektor betrachtet wird und daß die Semi-Endogenität des Wachstums nur mit einer noch zu spezifizierenden Einschränkung gilt.

Als weitere Ergänzung des Ansatzes von Eicher und Turnovsky (1999c) hat Chri-

[18] Im folgenden werden nur die zentralen Aussagen von Eicher und Turnovsky (1999c) wiedergegeben, allerdings ergänzt um weitere Aspekte. Insbesondere die Aussagen 4.6, 4.7 und 4.8 finden sich nicht bei Eicher und Turnovsky (1999c). Zusätzlich wird das Modell als Drei-Sektoren-Modell interpretiert und auf das Problem der Nachhaltigkeit des Wachstums eingegangen.

stiaans (2004) eine verallgemeinerte Drei-Sektoren-Version unter Verwendung einer *Produktionsfunktion* für das Bevölkerungswachstum formuliert. In diesem Rahmen kann allgemein gezeigt werden, daß exponentielles Gleichgewichtswachstum generell auf Grenzfällen von Parametern beruht. Unter diesen Grenzfällen gibt es jedoch einen, der plausibler als alle anderen ist: das exponentielle Wachstum der Bevölkerung, das die Grundlage der semi-endogenen Wachstumstheorie liefert. Schließlich wird auch kurz auf das Problem der **Nachhaltigkeit** des Wachstums eingegangen.

Die Produktionsfunktionen für das Endprodukt Y und das zusätzliche Wissen $\dot{A}$ lauten

$$\begin{aligned} Y &= F(A, l_Y L, k_Y K), \\ \dot{A} &= G(A, (1-l_Y)L, (1-k_Y)K), \end{aligned} \tag{4.38}$$

wobei A das Wissen, L die Arbeit, K das Kapital und l_Y (k_Y) den in der Produktion des Endprodukts eingesetzten Anteil der Arbeit (des Kapitals) bezeichnen. Da das Wissen A die Eigenschaften eines öffentlichen Gutes hat, erscheint es in nichttrivalisierender Weise in beiden Produktionsfunktionen (für das Endprodukt und für die Forschung).

Eicher und Turnovsky (1999c, S. 399) definieren ein langfristiges Gleichgewicht durch die Konstanz der unterschiedlichen Wachstumsraten aller realen Größen **und** eine konstante durchschnittliche Kapitalproduktivität Y/K. Stattdessen kann analog zu der Bemerkung 3.3 auf der Seite 117 auch unterstellt werden, daß die verwendete Konsumfunktion eine konstante durchschnittliche Konsumquote (hier bezogen auf den Output des Endprodukts) im steady state impliziert, was für die meisten in der Regel verwendeten Konsumhypothesen zutrifft. Denn mit dem Konsum C folgt aus der Akkumulationsgleichung

$$\dot{K} = Y - C$$

und der Konstanz von

$$g_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{Y}{K} - \frac{C}{Y}\frac{Y}{K}$$

im steady state, daß K/Y konstant ist, wenn $C/Y < 1$ konstant ist. Also gilt im langfristigen Gleichgewicht

$$g_Y = g_K = g_C.$$

Abschreibungen werden im folgenden der Einfachheit halber vernachlässigt.

Da in einem steady state alle Variablen mit konstanter Rate wachsen, gilt diese Eigenschaft auch für die Anteile der Faktoren in den jeweiligen Produktionsrichtungen. Da zum Beispiel l_Y und $1-l_Y$ nur dann beide mit konstanten Raten wachsen können, wenn diese Rate jeweils null ist,[19] müssen l_Y und k_Y im steady state konstant sein.

[19] Eicher und Turnovsky (1999c) unterstellen die Konstanz der relativen Faktorallokation implizit bei der Ableitung ihrer Formeln (3a) und (3b) auf S. 400. Da ihre Definition des steady state auf S. 399 diese Konstanz nicht explizit beinhaltet, leiten sie sie auf S. 401 her. Dabei entsteht allerdings ein Zirkelschluß, weil in dieser Herleitung die durch die Formeln (3a) und (3b) implizierten konstanten Wachstumsraten verwendet werden. Daher ist die Annahme erforderlich, daß die Anteile der Faktoren mit konstanter Rate wachsen. Wenn $g_{l_Y} \neq 0$ ist, folgt aus $g_{(1-l_Y)} = -g_{l_Y} l_Y/(1-l_Y)$, daß $l_Y/(1-l_Y)$ nicht konstant ist. Also müssen diese Wachstumsraten gleich null sein.

Unter dieser Voraussetzung liefert die logarithmische Ableitung der Produktionsfunktionen im steady state

$$g_Y = \sigma_A g_A + \sigma_L g_L + \sigma_K g_K,$$
$$g_A = \eta_A g_A + \eta_L g_L + \eta_K g_K,$$

wobei σ_x und η_x, $x = K, A, L$, die jeweiligen Produktionselastizitäten der Funktionen F und G darstellen. Alle diese Elastizitäten sind nicht-negativ und müssen zunächst nicht konstant sein. Mit $g_Y = g_K$ und $g_L = n$ folgt

$$\begin{aligned} (1-\sigma_K)g_K - \sigma_A g_A &= \sigma_L n, \\ -\eta_K g_K + (1-\eta_A) g_A &= \eta_L n. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Wenn die rechte Seite mindestens ein positives Element hat, also für $n > 0$ sowie $\sigma_L > 0$ und/oder $\eta_L > 0$, hat dieses Gleichungssystem in g_K und g_A genau dann eine eindeutige Lösung, wenn für die Determinante der Koeffizientenmatrix Δ gilt:

$$\Delta := (1-\sigma_K)(1-\eta_A) - \sigma_A \eta_K \neq 0.$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet unter dieser Voraussetzung

$$\begin{aligned} g_K &= \underbrace{\frac{\sigma_L(1-\eta_A) + \eta_L \sigma_A}{\Delta}}_{=:\gamma_K} n = \gamma_K n, \\ g_A &= \underbrace{\frac{\eta_L(1-\sigma_K) + \sigma_L \eta_K}{\Delta}}_{=:\gamma_A} n = \gamma_A n. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Bemerkung 4.2. Anhand der Berechnung von (4.39) und (4.40) ist zu erkennen, daß sich diese Ergebnisse nicht ändern, wenn A kein öffentliches Gut ist und mit den konstanten Anteilen a_Y beziehungsweise $1-a_Y$ in die beiden Produktionsfunktionen eingeht. Analog gilt das auch für den Fall, daß L und/oder K öffentliche Güter sind. Insofern enthält das Modell auch solche Modifikationen als Spezialfälle, in denen etwa A nicht das Wissen als öffentliches Gut, sondern das Humankapital als privates Gut repräsentiert. Auch das später im Abschnitt 4.5 ausführlich analysierte Modell des learning by doing ist daher ein Spezialfall, wenn man annimmt, daß alle Faktoren öffentliche Güter sind und $F \equiv G$ setzt. ◊

Die Nichtdiagonalelemente der Koeffizientenmatrix in (4.39) sind nicht-positiv, da die Produktionselastizitäten nicht-negativ sind. Auf das Gleichungssystem (4.39) kann daher die **Hawkins-Simon-Bedingung** angewendet werden, die für eine positive rechte Seite ($\sigma_L n > 0$, $\eta_L n > 0$) besagt, daß das System genau dann eine positive Lösung für g_K und g_A hat, wenn alle natürlich geordneten Hauptminoren positiv sind,[20] also

$$1 - \sigma_K > 0 \quad \text{und} \quad \Delta > 0.$$

[20] Vgl. zum Beispiel Takayama (1985, S. 392, Theorem 4.D.1 in Verbindung mit Endnote 1 auf S. 406).

Anhand der Formel für Δ erkennt man, daß damit auch $1-\eta_A > 0$ sein muß. Wenn $n > 0$ ist, aber nur eine der beiden Elastizitäten σ_L und η_L positiv und die andere gleich null ist, kann die Hawkins-Simon-Bedingung in dieser Form nicht angewendet werden. Sie ist jedoch hinreichend dafür, daß die Wachstumsraten nicht negativ sind. Falls $\sigma_L = \eta_L = 0$ oder $n = 0$ gilt, impliziert $\Delta \neq 0$, daß $g_K = g_A = 0$ ist.

Aussage 4.5. *Alle Produktionselastizitäten seien nichtnegativ. Wenn σ_L, η_L und n positiv sind, ergeben sich die gleichgewichtigen Wachstumsraten von Y, C, K und A genau dann als positiv, wenn $\Delta > 0$ und $\sigma_K < 1$. Wenn $n = 0$ und $\Delta \neq 0$ ist, gilt $g_Y = g_C = g_K = g_A = 0$ im steady state.*

Der Fall $\sigma_L = 0$ oder $\eta_L = 0$ wird von Eicher und Turnovsky (1999c) nicht behandelt. Daß die Hawkins-Simon-Bedingung in diesem Fall nur hinreichend und nicht notwendig für nicht-negative Wachstumsraten ist, kann wie folgt gezeigt werden. Angenommen, für $\Delta < 0$ gilt $\sigma_L > 0$ und $\eta_L = 0$. Dann folgt aus (4.40), daß $\eta_A \geqq 1$ und $\eta_K = 0$ sein muß, damit keine negative Wachstumsraten auftreten, und $\Delta < 0$ kann nur für $\sigma_K < 1$ und $\eta_A > 1$ erfüllt sein. Wegen $\eta_K = \eta_L = 0$ gilt $\dot{A} = G(A)$, also $g_A = \eta_A g_A$, woraus wegen $\eta_A > 1$ folgt, daß $g_A = 0$ ist, so daß $\dot{A} = G(A) = 0$ sein muß. Das heißt, daß A in der Funktion F als Konstante angesehen werden kann, so daß $Y = F(L, K)$ gilt. Eine ökonomisch sinnvolle Lösung für die gleichgewichtigen Wachstumsraten ist also möglich, ohne daß die Hawkins-Simon-Bedingung erfüllt ist. Allerdings reduziert sich das Modell in diesem Fall letztlich auf ein Ein-Sektor-Modell. Wenn $G(A) > 0$ ist (und gegebenenfalls auch $\sigma_A > 0$), existiert kein steady state. Das Beispiel hat dann ähnliche Implikationen wie der auf der Seite 212 diskutierte Fall $\beta > 1$ im *toy model*. Für den Fall $\Delta < 0$ mit $\sigma_L = 0$ und $\eta_L > 0$ kann man analog argumentieren. Damit ist gezeigt worden:

Aussage 4.6. *Sei $\sigma_L = 0$ oder $\eta_L = 0$. Für $\Delta < 0$ existiert kein steady state, es sei denn man betrachtet letztlich nur ein Ein-Sektor-Modell, für das die Bedingung $\Delta < 0$ irrelevant ist.*

Ein positives Pro-Kopf-Wachstum erfordert gemäß der ersten Gleichung in (4.40), daß $\gamma_K > 1$ ist. Mit der Definition von Δ läßt sich diese Bedingung umformen zu

$$\sigma_K + \frac{\eta_L + \eta_K}{1-\eta_A}\sigma_A > 1 - \sigma_L.$$

Daran erkennt man, daß

$$\sigma_K > 1 - \sigma_L \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_K + \sigma_L > 1$$

in Verbindung mit der notwendigen Bedingung $1-\eta_A > 0$ für positives Gleichgewichtswachstum eine hinreichende Bedingung für positives Wachstum pro Kopf ist. Dem entsprechen steigende Skalenerträge bezüglich des eingesetzten Kapitals und der Arbeitsmenge im Endproduktsektor.

Die abgeleiteten Bedingungen beziehen sich auf das langfristige Gleichgewicht. Dessen Existenz setzt voraus, daß γ_K und γ_A in (4.40) konstant sind. Eicher und Turnovsky (1999c) identifizieren drei hinreichende Bedingungen, unter denen diese Anforderung erfüllt ist.

1. In beiden Produktionsrichtungen herrschen konstante Skalenerträge: $\sigma_A + \sigma_K + \sigma_L = 1$ und $\eta_A + \eta_K + \eta_L = 1$. Setzt man diese Gleichungen in (4.40) ein, so folgt $\gamma_K = \gamma_A = 1$, so daß $g_Y = g_K = g_A = n$. Dieses Ergebnis entspricht dem Solow-Modell ohne technischen Fortschritt, wobei hier jedoch ein endogener technischer Fortschritt besteht, der erforderlich ist, um das Pro-Kopf-Einkommen konstant zu halten, da fallende Skalenerträge bezüglich K und L vorliegen.

2. Beide Produktionsfunktionen haben die Cobb-Douglas Form, für die die Produktionselastizitäten definitionsgemäß konstant sind. In diesem Fall sind steigende Skalenerträge möglich und K und A können mit unterschiedlichen Raten wachsen.

3. Beide Produktionsfunktionen sind in den exogen und endogen wachsenden Faktormengen separabel gemäß

$$\begin{aligned} Y &= (l_Y L)^{\sigma_L} \tilde{F}(A, k_Y K), \\ \dot{A} &= ((1 - l_Y)L)^{\eta_L} \tilde{G}(A, (1 - k_Y)K), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$ jeweils homogen vom Grade $h_{\tilde{F}} := \sigma_K + \sigma_A < 1$ beziehungsweise $h_{\tilde{G}} := \eta_K + \eta_A < 1$ sind und die Beziehung

$$\frac{1 - h_{\tilde{F}}}{1 - h_{\tilde{G}}} = \frac{\sigma_L}{\eta_L} \tag{4.41}$$

mit konstanten σ_L und η_L gilt. In diesem Fall wachsen beide Sektoren mit der gemeinsamen konstanten Rate[21]

$$g_Y = g_K = g_A = \left(\frac{\sigma_L}{1 - h_{\tilde{F}}}\right) n = \left(\frac{\eta_L}{1 - h_{\tilde{G}}}\right) n > 0,$$

die wegen der Annahmen über $h_{\tilde{F}}$, $h_{\tilde{G}}$, σ_L und σ_A konstant und positiv sind.

Der erste Fall ist für die (semi-) endogene Wachstumstheorie uninteressant, da das Pro-Kopf-Einkommen im langfristigen Gleichgewicht nicht wächst. Der dritte Fall ist nicht wesentlich allgemeiner als der zweite Fall mit Cobb-Douglas-Funktionen. Da zum Beispiel die Funktion $\tilde{F}$ eine konstante Skalenelastizität $g_{\tilde{F}} < 1$ haben muß, ist Y letztlich eine Cobb-Douglas-Funktion von der exogen wachsenden Variablen L und einem Aggregat aus den beiden endogen akkumulierbaren Faktoren A

[21] Zum Beweis ersetzt man zum Beispiel σ_L in γ_A gemäß (4.40) durch $\sigma_L = \eta_L(1 - h_{\tilde{F}})/(1 - h_{\tilde{G}})$ gemäß (4.41) und erweitert mit $(1 - h_{\tilde{G}})$. Nach einigen Umformungen folgt dann das Ergebnis.

und K. Wenn man ein Modell mit nur einem endogen akkumulierbaren Faktor betrachtet, so reduziert sich der dritte Fall auf eine Cobb-Douglas-Funktion (wobei im Gegensatz zum ersten Fall steigende Skalenerträge bezüglich aller Faktoren möglich sind). Obwohl die angegebenen Ergebnisse nur hinreichende Bedingungen darstellen, weisen sie darauf hin, daß die häufige Beschränkung auf den zweiten Fall der Cobb-Douglas-Funktionen in Wachstumsmodellen mehr als nur eine Vereinfachung ist. Die Cobb-Douglas-Funktion ermöglicht (semi-) endogenes Gleichgewichtswachstum, wobei Verallgemeinerungen nur sehr eingeschränkt möglich sind. Wenn nur ein endogen akkumulierbarer Faktor betrachtet wird, muß wie im neoklassischen Grundmodell eine Cobb-Douglas-Funktion verwendet werden, wenn man nicht auf konstante Skalenerträge (eventuell mit Harrod-neutralem technischen Fortschritt) festgelegt sein will. In allen folgenden Modellen werden daher Cobb-Douglas-Funktionen unterstellt. Abgesehen von Spezialfällen wie dem neoklassischen Grundmodell ist die Frage nach den notwendigen Bedingungen bezüglich der Produktionsfunktionen für die Existenz von Wachstumsgleichgewichten ungeklärt.

Spezialfälle Das allgemeine Zwei-Sektoren-Modell enthält die Grundaussagen vieler bekannter Wachstumsmodelle als Spezialfälle. So erhält man die Ergebnisse des Jones-Modells (unter Vernachlässigung der expliziten Betrachtung der Produktion von Kapitalgütervarianten), wenn man zwei Cobb-Douglas-Funktionen mit $\sigma_L = \sigma_A = 1-\sigma_K = 1-\alpha$, $\eta_K = 0$, $\eta_L = 1$ und $\eta_A = \beta$ mit $0<\beta<1$ unterstellt, wobei α und β Konstanten sind. Setzt man die Werte für die Elastizitäten in (4.40) ein, so folgt

$$g_Y - n = g_K - n = g_A = \frac{1}{1-\beta} n.$$

Das Romer-Modell unterscheidet sich vom Jones-Modell durch die Annahme $\eta_A = 1$. Ein steady state existiert dann nur für $n = 0$. Im Hinblick auf die Wachstumsraten folgt aus $\dot{A} = \psi(1-l_Y)LA$ unmittelbar $g_A = \psi(1-l_Y)L$. Für $n = 0$ ergibt sich damit aus $Y = (Al_Y L)^{1-\alpha} K^\alpha$, daß

$$g_c = g_C = g_Y = g_K = g_A = \psi(1-l_Y)L,$$

woran der Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße L auf die Wachstumsraten zu erkennen ist. Zu beachten ist, daß $\Delta = 0$ gilt.

Bei der Anwendung der Hawkins-Simon-Bedingung zur Ableitung der notwendigen Bedingung $\Delta > 0$ für positives Gleichgewichtswachstum ist von der Annahme ausgegangen worden, daß $n > 0$ ist. Dagegen zeigt sich jetzt, daß für $n = 0$ ein steady state mit positiven Wachstumsraten existieren kann, wenn $\Delta = 0$ ist. Allgemein lautet das Gleichungssystem (4.39) für $n = 0$

$$\begin{aligned}(1-\sigma_K)g_K - \sigma_A g_A &= 0,\\ -\eta_K g_K + (1-\eta_A)g_A &= 0.\end{aligned}$$

Wenn $\Delta \neq 0$ ist, folgt daraus $g_K = g_A = 0$. Also ist $\Delta = 0$ eine notwendige Bedingung für positives Gleichgewichtswachstum, wenn $n = 0$ ist. Die beiden Gleichungen sind dann linear abhängig und bestimmen die Wachstumsraten von K und A nicht eindeutig. Die Wachstumsraten werden also nicht durch die Produktionstechnik allein festgelegt, sondern erst durch die zusätzliche Berücksichtigung der Größe der Volkswirtschaft und/oder der Allokation der Faktormengen auf die beiden Produktionsrichtungen. Dazu ist im allgemeinen die Betrachtung der Nachfrageseite erforderlich. Dieser Grenzfall führt daher zu einem endogenen Wachstumsmodell mit oder ohne Skaleneffekte oder zu einem semi-endogenen Wachstumsmodell mit Skaleneffekten. Das Romer-Modell des endogenen Wachstums enthält einen Skaleneffekt. Dagegen zeigt das folgende Beispiel des Uzawa-Lucas-Modells, das auch endogenes Wachstum ohne Skaleneffekte möglich ist. Schließlich wird ein Beispiel für ein semi-endogenes Wachstumsmodell mit Skaleneffekten gegeben.

Das Uzawa-Lucas-Modell Eines der in der Theorie des endogenen Wachstums verwendeten Grundmodelle ist bisher nicht dargestellt worden. In dem auf Uzawa (1965) zurückgehenden und von Lucas (1988, Abschnitt 4) weiterentwickelten Uzawa-Lucas-Modell basiert das Pro-Kopf-Wachstum auf der Akkumulation von Humankapital. Mit wenigen Modifikationen kann man auch diesen Ansatz mittels des allgemeinen Zwei-Sektoren-Modells veranschaulichen. Die Produktionsfunktionen lauten

$$\begin{aligned} Y &= K^{\alpha_1}(l_Y AL)^{1-\alpha_1} A^{\alpha_2}, \\ \dot{A} &= \psi(1 - l_y)A. \end{aligned}$$

Die Darstellung weicht von derjenigen der Funktionen (4.38) dadurch ab, daß A nun nicht mehr als Wissen interpretiert wird und ein öffentliches Gut darstellt, sondern als Humankapital, das ein an den Faktor Arbeit gebundenes privates Gut ist und daher als Produkt $l_Y AL$ in die Produktion des Konsumgutes eingeht. Zusätzlich wird jedoch ein externer Effekt des Humankapitals in der Funktion F in (4.38) unterstellt, der sich im Faktor A^{α_2} niederschlägt. Die Spezifikation der zweiten Gleichung macht deutlich, daß Humankapital ausschließlich mit Humankapital produziert wird, wobei die Bevölkerungsgröße hierbei keine Rolle spielt.

Leitet man die beiden Produktionsfunktionen logarithmisch ab und verwendet wieder die Bedingung, daß C/Y im langfristigen Gleichgewicht konstant ist und daher $g_Y = g_K$ gilt, so erhält man für die Wachstumsraten im steady state

$$g_Y = g_K = \frac{1-\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1}\underbrace{\psi(1-l_Y)}_{=g_A} + n \quad \text{und} \quad g_y = \frac{1-\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1}\psi(1-l_Y).$$

Das Modell generiert also auch für $n = 0$ endogenes Wachstum, ohne einen Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße aufzuweisen. Man beachte, daß dieses Ergebnis nicht von dem externen Effekt abhängt, sondern auch für $\alpha_2 = 0$ gilt. In der vollständigen Spezifikation von Lucas (1988) kann der Anteil l_Y des in der Produktion des Endproduktes eingesetzten Humankapitals im Zusammenspiel mit der Nachfrage und der Bedingung für die (privat oder unter Berücksichtigung der Externalität gesellschaftlich) effiziente Allokation des Humankapitals bestimmt werden. Dabei stellt sich heraus, daß l_Y im Gleichgewicht nicht nur von den technischen Parametern α_1, α_2 und ψ sowie von n, sondern auch von den Präferenzparametern θ und ρ abhängt. Insbesondere steigt l_Y bei zunehmender der Diskontrate ρ, so daß eine höhere Sparquote $(1-l_Y)$ vergrößert und damit zu einer Steigerung der Wachstumsrate führt. Das Modell hat also alle Eigenschaften eines endogenen Wachstumsmodells, ohne dabei einen Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße zu implizieren. Leitet man für das Uzawa-Lucas-Modell ein zum Gleichungssystem (4.39) analoges System durch logarithmische Ableitung der Produktionsfunktionen her, so lautet die zweite Gleichung $g_A = g_A$, so daß die analog gebildete Determinante $\tilde{\Delta}$ den Wert null hat.

Damit steht auch das Uzawa-Lucas-Modell auf des *Messers Schneide*. Ändert man die Spezifikation der Produktionsfunktion für das Humankapital geringfügig ab, so entsteht entweder ein Skaleneffekt oder ein semi-endogenes Wachstumsmodell. Hinsichtlich der Produktionsfunktion für den Forschungssektor fällt auf, daß das Humankapital hier linear eingeht und auch unabhängig von der Arbeit L auftaucht, an die es ja eigentlich gebunden ist. Denn das Produkt LA gibt die Anzahl der Arbeiter multipliziert mit deren jeweiligem, hier als für alle identisch unterstelltem Humankapital an. Eine mögliche Spezifikation ist es, $\dot{A}$ in Abhängigkeit von AL zu formulieren:

$$\dot{A} = \psi(1-l_Y)AL, \quad \text{so daß} \quad g_A = \psi(1-l_Y)L.$$

Setzt man dieses Ergebnis für $g_L = 0$ in die Wachstumsrate

$$g_Y = \frac{1-\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1} g_A$$

ein, so erkennt man den Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße. Für $g_L = n > 0$ folgt $g_{g_A} = n$, so daß kein steady state existiert. Verwendet man anstelle des linearen Grenzfalls die Formulierung

$$\dot{A} = \psi(1-l_Y)(AL)^{\beta} \quad \text{mit} \quad g_A = \frac{\beta}{1-\beta} n,$$

die zu einer Determinante $\tilde{\Delta} \neq 0$ führt, so folgt

$$g_Y = \frac{(1-\alpha_1+\alpha_2)\beta}{(1-\alpha_1)(1-\beta)} n + n \quad \text{und} \quad g_y = \frac{(1-\alpha_1+\alpha_2)\beta}{(1-\alpha_1)(1-\beta)} n.$$

Man erhält also ein semi-endogenes Wachstumsmodell ohne Einfluß der Allokation der Arbeit auf die Wachstumsrate. Wenn man die Originalgleichung von Lucas mit $\beta < 1$ formuliert, gibt es kein Pro-Kopf-Wachstum. Denn aus

$$\dot{A} = \psi(1-l_Y)A^{\beta} \quad \text{und damit} \quad g_A = 0$$

im steady state folgt $g_Y = n$ und $g_y = 0$.

Semi-endogenes Wachstum mit Skaleneffekten Das Wachstum im Jones-Modell ist semi-endogen ohne Skaleneffekte, im Romer-Modell ist es endogen mit Skaleneffekten, und im Uzawa-Lucas-Modell ist das Wachstum endogen ohne Skaleneffekte. Da in der Literatur kein Modell bekannt ist, in dem das Wachstum semi-endogen mit Skaleneffekten ist, wird durch die Praxis, die Begriffe des semi-endogenen Wachstums und des Wachstums ohne Skaleneffekte teilweise synonym zu verwenden, nahegelegt, daß semi-endogenes Wachstum hinreichend für die Abwesenheit von Skaleneffekten ist. Im folgenden wird ein Beispiel für semi-endogenes Wachstum mit Skaleneffekten gegeben, das in Verbindung mit den bereits genannten Beispielen zeigt, daß die Begriffe des semi-endogenen Wachstums und des Wachstums ohne Skaleneffekte logisch voneinander unabhängig sind.

Die beiden Produktionsfunktionen lauten

$$Y = K^{\alpha_1}(AL)^{\alpha_2},$$
$$\dot{A} = \psi AL.$$

Das Endprodukt wird also mit Kapital, Arbeit und Wissen erzeugt, während das Wissen in Abhängigkeit vom bestehenden Wissen und der Bevölkerungsgröße wächst, wobei beide Inputs hier öffentliche Güter für die Forschung darstellen. Dieser Ansatz kann durch das learning by doing begründet werden, auch wenn die Funktionsform für die Lerneffekte $\dot{A}$ nicht besonders realistisch erscheint. Um die prinzipielle Möglichkeit des semi-endogenen Wachstums mit Skaleneffekten und damit die logische Unabhängigkeit der genannten Begriffe aufzuzeigen, spielt die Realitätsnähe allerdings keine Rolle. Zu beachten ist, daß auch für dieses Modell $\Delta = 0$ gilt.

Aus der zweiten Gleichung folgt $g_A = \psi L$, so daß ein steady state nur für $n = 0$ existiert. Aus der ersten Gleichung folgt für diesen Fall, daß $g_Y = g_K = \alpha_2 g_A/(1-\alpha_1)$. Setzt man $g_A = \psi L$ ein, so erhält man für die Wachstumsrate $g_y = g_Y$ des Pro-Kopf-Einkommens

$$g_y = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}\psi L.$$

Demnach besteht ein Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße, obwohl das Wachstum semi-endogen ist, da in diesem einfachen Modell gar keine Möglichkeit besteht, die Wachstumsrate durch eine Reallokation der Arbeit zu beeinflussen. Da also sowohl semi-endogenes als auch endogenes Wachstum jeweils mit oder ohne Skaleneffekte denkbar ist, gilt die

Aussage 4.7. *Die Begriffe **semi-endogenes Wachstum** und **Wachstum ohne Skaleneffekte** sind logisch voneinander unabhängig.*

Die Bedeutung des semi-endogenen Wachstums Während endogenes Wachstum oder Wachstum mit Skaleneffekten nur in Grenzfällen entsteht, erscheint das Ergebnis der Theorie des semi-endogenen Wachstums, daß die langfristigen Pro-Kopf-Wachstumsraten die Form

$$g_y = \text{Konstante} \cdot n \tag{4.42}$$

haben, für den Fall geschlossener Volkswirtschaften sehr robust. Dabei ist die Konstante wirtschaftspolitisch kaum zu beeinflussen, und sie enthält auch keinen Skaleneffekt. Nur für den Grenzfall, in dem die partiellen Produktionselastizitäten die Bedingung $\Delta = 0$ erfüllen, ist es möglich, daß das Wachstum endogen mit oder ohne Skaleneffekte beziehungsweise semi-endogen mit Skaleneffekten ist. Auch wenn sich die Beschränkung $\Delta = 0$ nicht auf einen spezifischen Parameter, sondern auf eine Parameterkombination bezieht, stellt die Erfüllung dieser Bedingung einen nur theoretisch interessanten Grenzfall dar. Das durch einen solchen Grenzfall definierte dynamische System ist **strukturell instabil**, da eine geringfügige Änderung eines Parameters dazu führt, daß sich das langfristige Verhalten der Trajektorien radikal ändert. Während etwa für $n > 0$ und $\Delta > 0$ im Jones-Modell ein langfristiges Gleichgewicht existiert, entsteht bei $\Delta = 0$ eine **Bifurkation**, in der dieses Gleichgewicht verschwindet. Wenn die Bevölkerung nicht wächst, also für $n = 0$, ist ein Wachstum nur für den Grenzfall $\Delta = 0$ möglich. Wenn $\Delta < 0$ ist, sind für $n = 0$ die gleichgewichtigen Wachstumsraten alle gleich null. Für $\sigma_L n > 0$ und $\eta_L n > 0$ folgt aus der Hawkins-Simon-Bedingung, daß im steady state nicht alle Wachstumsraten nichtnegativ sein können.

Eine Einschränkung ist in bezug auf die Semi-Endogenität des Wachstums für $\Delta > 0$ zu machen. Die Konstante in (4.42) setzt sich aus verschiedenen partiellen Produktionselastizitäten zusammen. Die von Eicher und Turnovsky (1999c) angegebenen hinreichenden Bedingungen für die Konstanz der Wachstumsraten in (4.40) implizieren, daß diese Wachstumsraten exogen gegeben sind, so daß das Wachstum im Sinne der Definition 4.2 semi-endogen ist. Allerdings ist nicht gezeigt worden, daß diese Bedingungen auch notwendig sind. Prinzipiell ist also die Existenz von Produktionsfunktionen denkbar, deren Produktionselastizitäten zwar für eine gegebene Allokation der Faktoranteile konstant sein können, so daß gleichgewichtiges Wachstum möglich ist, die aber trotzdem von den jeweiligen Anteilen der Faktornutzung in den beiden Produktionsrichtungen abhängen. In diesem Fall ist es möglich, daß sich die in (4.40) angegebenen Wachstumsraten durch die Faktorallokation beeinflussen lassen, so daß das Wachstum endogen im Sinne der Definition 4.1 ist. Allerdings ist in der Literatur keine Produktionsfunktion mit dieser Eigenschaft bekannt, die mit gleichgewichtigem positivem Pro-Kopf-Wachstum vereinbar ist. Solange man sich mit dem gleichgewichtigen Wachstum befaßt, muß also nach dem gegenwärtigen Wissensstand davon ausgegangen werden, daß das Wachstum semi-endogen ist.

Die folgende Aussage faßt die zentralen Schlußfolgerungen aus der gesamten Analyse zusammen, wobei der Fall $\Delta < 0$ aufgrund der Aussagen 4.5 und 4.6 ausgeklammert bleibt.

Aussage 4.8. *Wenn $\Delta > 0$ ist, werden die Wachstumsraten allein durch die Produktionstechnik gemäß (4.39) festgelegt, so daß das Wachstum keine Skaleneffekte enthält. Wenn eine der drei auf der Seite 219 angegebenen hinreichenden Bedingungen für die Konstanz von γ_K und γ_A erfüllt ist, ist das Wachstum für $\Delta \neq 0$ semi-endogen. Nur für den Grenzfall $\Delta = 0$ kann dann endogenes Wachstum und/oder Wachstum mit Skalen-*

effekten auftreten. Im Fall von Skaleneffekten existiert kein steady state, wenn $n > 0$ *ist.*

Daß eine Bedingung wie $\Delta = 0$ einen theoretischen Grenzfall darstellt, kann man formal auch wie folgt begründen. Gemäß dem Satz 3 auf der Seite 157 in Hirsch und Smale (1974) ist die Menge aller quadratischen Matrizen ohne verschwindende Eigenwerte eine in der Menge aller quadratischen Matrizen dichtliegende und offene Teilmenge. Da eine Matrix genau dann einen verschwindenden Eigenwert hat, wenn ihre Determinante gleich null ist, besagt dieser Satz also auch, daß die Menge aller quadratischen Matrizen mit nicht verschwindender Determinante offen und dichtliegend ist. Offene und dichtliegende Teilmengen O einer Menge M haben die Eigenschaft, daß jedes Element $y \in M$, das hinreichend nahe bei $x \in O$ liegt, selbst in O liegt. Wenn umgekehrt $x \notin O$ und $x \in M$ gilt, so kann man x beliebig nahe durch Werte $y \in O$ approximieren. In diesem Sinne kann man davon ausgehen, daß die Determinanten von quadratischen Matrizen in der Regel ungleich null sind.

Die Darstellung hat sich auf die Eigenschaften des steady state beschränkt. Analysen der Übergangsdynamik spezieller Fälle oder spezifischer Abwandlungen des Zwei-Sektoren-Modells finden sich in Mulligan und Sala-i Martin (1993), Ladrón-de-Guevara et al. (1997) sowie Eicher und Turnovsky (1999a), wobei der dynamische Optimierungsansatz für die Konsumenten verwendet wird. Für den in Eicher und Turnovsky (1999a) behandelten vereinfachten Cobb-Douglas-Fall des Zwei-Sektoren-Modells ohne Kapital im Forschungssektor kann zum Beispiel kein allgemeines Ergebnis analytisch abgeleitet werden, abgesehen davon, daß $\Delta > 0$ eine notwendige Bedingung für einen Sattelpunkt ist. Unter plausiblen Annahmen für die Parameterwerte stellt sich jedoch (erwartungsgemäß) heraus, daß das langfristige Gleichgewicht ein Sattelpunkt ist. Darauf wird hier nicht weiter eingegangen. Im Abschnitt 4.5 wird stattdessen ein Spezialfall des Modells unter Verwendung der Goldenen Faustregel betrachtet, der einer vollständigen Stabilitätsanalyse zugänglich ist und der später einfach auf offene Volkswirtschaften übertragen werden kann.

Interpretation als Drei-Sektoren-Modell Als Argument gegen die hier vertretene Auffassung kann man einwenden, daß die Gleichung (4.42) zwar nicht auf einem Grenzfall für die Parameter der Produktionsfunktionen, aber auf einem Grenzfall des Bevölkerungswachstums basiert. Denn eine konstante Wachstumsrate der Bevölkerung bedeutet, daß

$$\dot{L} = nL^{\beta_L} \quad \text{mit} \quad \beta_L = 1 \tag{4.43}$$

ist. Anstelle einer linearen Produktionsfunktion für das Humankapital im Lucas-Modell wird also letztlich eine lineare *Produktionsfunktion* der Bevölkerung unterstellt, die angibt, um welchen Betrag die Bevölkerung in Abhängigkeit von der bestehenden Bevölkerungsgröße zunimmt. Setzt man dagegen $\beta_L \neq 1$, so konvergiert die Wachstumsrate der Bevölkerung entweder gegen null oder gegen unendlich, so daß gemäß

(4.42) entweder langfristig $g_y = 0$ gilt oder kein steady state existiert. Exponentielles Gleichgewichtswachstum basiert demnach grundsätzlich auf Grenzfällen für bestimmte Parameterwerte.

Diese Tatsache ist in Christiaans (2004) in einem allgemeinen Rahmen bewiesen worden, der hier in modifizierter Form dargestellt wird. Dazu werden die Gleichungen (4.38) um eine *Produktionsfunktion* für die Bevölkerungszunahme ergänzt:

$$\begin{aligned} Y &= F(A, l_Y L, k_Y K), \\ \dot{A} &= G(A, l_A L, k_A K), \\ \dot{L} &= H(A, l_L L, k_L K)L. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Im Unterschied zu (4.38) ist zu beachten, daß L und K nun, soweit es sich um private Inputs handelt, auf drei Sektoren zu verteilen sind, wobei l_Y, l_A und l_L die entsprechenden Anteile des Arbeitseinsatzes bezeichnen, die sich zu eins addieren (analog für die Anteile des Kapitaleinsatzes). Gemäß der Bemerkung 4.2 gelten auch die folgenden Schlußfolgerungen weiterhin, wenn das Kapital oder die Arbeit öffentliche Güter sind.[22]

Die Funktion H bedarf näherer Erläuterung. Da die Wachstumsrate $\dot{L}/L$ der Bevölkerung gleich der Differenz aus der Geburtenrate b und der Sterberate d ist, gilt generell

$$\dot{L} = (b - d)L. \tag{4.45}$$

Sowohl die Geburtenrate als auch die Sterberate können im allgemeinen vom Wissen A und den für die Kindererziehung und die Senkung der Sterberate (Medizin) eingesetzten Ressourcen $l_L L$ und $k_L K$ abhängen. Wenn zum Beispiel die Anzahl der Nachfahren in die Nutzenfunktion von optimierenden Haushalten eingeht, so wird die aus der Sicht der Haushalte optimale Geburtenrate (in der Darstellung als Rückkopplungslösung) im allgemeinen von den Zustandsvariablen des Modells abhängen.[23] Ob die Abhängigkeit der Funktion H von diesen Größen aus dem Optimierungsansatz folgt oder allein aufgrund technischer Sachverhalte, ist für die Analyse hier jedoch unbedeutend. Die allgemeine Formulierung der Funktion $H := b - d$ in Abhängigkeit von all diesen Variablen ist in jedem Fall plausibel.

Geht man nun wie im Fall der Produktionsfunktionen (4.38) vor und differenziert die Gleichungen (4.44) logarithmisch, so folgt unter analogen Voraussetzungen, daß im langfristigen Gleichgewicht

$$\begin{pmatrix} (1-\sigma_K) & -\sigma_A & -\sigma_L \\ -\eta_K & (1-\eta_A) & -\eta_L \\ -\mu_K & -\mu_A & -\mu_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_K \\ g_A \\ g_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

[22] Die Gleichung (4.43) ergibt sich als Spezialfall für $H := nL^{\beta_L - 1}$, wenn L als externer Effekt in die Funktion H eingeht.

[23] Vgl. zur endogenen Modellierung der Geburtenrate zum Beispiel Becker und Barro (1988) sowie Barro und Becker (1989). Jones (2001) verwendet eine stetige Version des diskreten Ansatzes von Becker und Barro (1988).

gelten muß, wobei μ_x (Index $x = K, A, L$), die jeweiligen Elastizitäten der Funktion H in bezug auf die drei Variablen darstellt.

Wenn die Determinante $\bar{\Delta}$ der Koeffizientenmatrix in (4.46) ungleich null ist, folgt unmittelbar, daß ein steady state nur für $g_Y = g_K = g_A = g_L = 0$ existieren kann. Also sind langfristig positive Wachstumsraten nur für $\bar{\Delta} = 0$ möglich, was wiederum einen Grenzfall darstellt. Also gilt die

Aussage 4.9. *Gleichgewichtiges Wachstum mit positiven Wachstumsraten basiert stets auf Grenzfällen für die Werte der Produktionselastizitäten.*

Wenn man sich trotz dieser Aussage mit gleichgewichtigem Wachstum befaßt, so benötigt man eine plausible Rechtfertigung für die notwendigen Annahmen. Im Verlaufe dieses Kapitels ist bereits darauf hingewiesen worden, daß zum Beispiel die Annahme einer linearen Produktionsfunktion für das Wissen oder das Humankapital, die endogenes Wachstum ermöglicht, völlig willkürlich ist. Verdoppelt sich die Produktion des Humankapitals, wenn sich der Bestand an Humankapital verdoppelt? Ebenso unwahrscheinlich ist es, daß sich die Produktion des zusätzlichen Wissens bei einer Verdoppelung des bestehenden Wissens verdoppelt. Die diesbezüglichen Annahmen im Uzawa-Lucas-Modell und im Romer-Modell sind daher kaum zu rechtfertigen.

Anders verhält es sich mit der Funktion H, die die Wachstumsrate der Bevölkerung angibt. Im folgenden wird lediglich mit Bezug zur Geburtenrate b argumentiert; für die Sterberate d gelten analoge Ausführungen. Da man die Geburtenrate als Anzahl der Kinder pro Einwohner interpretieren kann, ist es sinnvoll, daß H nicht direkt von $l_L L$, sondern lediglich vom Anteil l_L der für die Nachkommen eingesetzten Zeit jedes Einwohners abhängt. Zwar ist es möglich, daß l_L im Rahmen eines Optimierungsproblems selbst wiederum von L abhängig ist, doch in jedem Fall ist der Anteil durch null und eins nach unten beschränkt. Die Existenz eines steady state mit konstantem Wert von l_L ist daher nicht von Grenzfällen der Parameterwerte abhängig.

Wenn die Wachstumsrate der Bevölkerung durch $n = H(A, l_L, k_L K)$ gegeben ist und l_L sowie k_L konstant sind, dann kann n nur konstant sein, wenn $H_A \dot{A} + H_{k_L K} k_L \dot{K} = 0$ beziehungsweise $\mu_A g_A + \mu_K g_K = 0$ gilt. Für positive Wachstumsraten kann diese Bedingung zum Beispiel dann nicht erfüllt sein, wenn die Wachstumsrate der Bevölkerung sowohl mit zunehmendem Wissen als auch mit zunehmendem aggregierten Kapitalstock steigt. Allerdings ist zu beachten, daß die Anzahl der Kinder, die eine Familie wählt, biologisch nach oben und unten beschränkt ist. Das bedeutet, daß selbst in dem Fall, in dem sowohl ein wachsender Kapitalstock als auch das zunehmende Wissen die Wachstumsrate der Bevölkerung positiv beeinflussen, die Ableitungen H_A und $H_{k_L K}$ beide gegen null konvergieren müssen, wenn A und K gegen unendlich gehen. In diesem Fall folgt daher, daß $n = H(A, l_L, k_L K)$ für $A \to \infty$ und $K \to \infty$ gegen eine Konstante konvergiert, wobei für $t \to \infty$ gilt, daß $\mu_A = \mu_K = 0$ ist. Wegen $\mu_L = 0$ ist daher die Determinante $\bar{\Delta}$ der Koeffizientenmatrix in (4.46) zumindest asymptotisch gleich null. Mit anderen Worten, die Existenz eines steady state mit positiven Wachstumsraten ist auch ohne die willkürliche Unterstellung von Grenzfällen für die Parameter zumindest dann asymptotisch möglich, wenn man die biologische Beschränktheit der Wachstumsrate der Bevölkerung berücksichtigt.

Im Gegensatz zu den alternativen möglichen Hypothesen, die $\bar{\Delta} = 0$ gewährleisten, ist die Annahme $H = n =$ konst. also plausibel zu erklären. Wenn alle Personen sich hinsichtlich der Geburten ähnlich verhalten, gilt ceteris paribus prinzipiell, daß sich die Anzahl der Nachkommen verdoppelt, wenn sich die Anzahl der Eltern verdoppelt. Wie Jones (2001) bemerkt, folgt eine Funktion der Form (4.43) für die Bevölkerungsentwicklung mit $\beta_L = 1$ analog zu dem Standardargument bezüglich der Wiederholung der Produktion in der Theorie der Unternehmung, das eine linearhomogene Produktionsfunktion impliziert. Ebenso wie der Grenzfall der linearhomogenen Produktionsfunktion aufgrund des Wiederholungsarguments zum Standardfall wird, impliziert das Wiederholungsargument für das Wachstum der Bevölkerung, daß der Grenzfall einer konstanten Wachstumsrate der Bevölkerung zum Standardfall wird.

Aufgrund des Arguments der biologischen Beschränktheit der Wachstumsrate der Bevölkerung kann sogar auch dann asymptotisch ein steady state erreicht werden, wenn die Funktion H nicht konstant ist. Die Unterstellung einer exogenen Wachstumsrate $n > 0$ der Bevölkerung kann als vereinfachte Annäherung an diesen Sachverhalt interpretiert werden. Wie die Bevölkerungsentwicklung der Vergangenheit zeigt, ist diese Annahme als Arbeitshypothese vertretbar. Die Gleichung (4.42) kann daher unter vertretbaren Annahmen eine zutreffende Beschreibung das Wirtschaftswachstums sein.

Hinsichtlich der Beeinflußbarkeit des Wirtschaftswachstums ist in diesem Zusammenhang darauf aufmerksam zu machen, daß das Wachstum nicht mehr semi-endogen ist, wenn $n = H$ durch die Wirtschaftspolitik beeinflußbar ist. Wenn man die Wachstumsrate der Bevölkerung in einem Modell des semi-endogenen Wachstums endogenisiert, entsteht also im Sinne der Definition 4.1 streng genommen wieder ein Modell des endogenen Wachstums. Da im folgenden die Wachstumsrate n exogen ist, werden jedoch alle noch betrachteten Modelle als semi-endogene Ansätze bezeichnet.

Die Berücksichtigung erschöpfbarer Ressourcen Im Rahmen des bisher analysierten Modells ist langfristig exponentielles Wachstum möglich, wenn die Bevölkerung exponentiell wächst. In diesem Zusammenhang wird auf die Diskussion über die Grenzen des Wachstums im Anschluß an den Bericht von Meadows et al. (1972) für den Club of Rome hingewiesen. Im vorliegenden Zusammenhang soll lediglich geprüft werden, ob exponentielles Wachstum auch dann noch theoretisch langfristig möglich ist, wenn man die Abhängigkeit der Produktion von erschöpfbaren natürlichen Ressourcen berücksichtigt. Damit ist das Problem der **Nachhaltigkeit** des Wachstums angesprochen.

Als einfacher Spezialfall des Zwei-Sektoren-Modells wird die Produktionsfunktion

$$Y = A^{\beta} K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1}, \quad 1 - \alpha_1 - \beta > 0$$

betrachtet, wobei das Wissen A im steady state mit derselben Rate wie Y wächst.

(Eine ausführliche Begründung dieses Ansatzes wird im Abschnitt 4.5.1 gegeben.) Zusätzlich wird eine natürliche Ressource R mit einer Produktionselastizität α_2 als Input benötigt, die nicht erneuerbar ist und deren verfügbare Einsatzmenge mit der Rate $-r < 0$ fällt, so daß $R(t) = R_0 e^{-rt}$ ist. Unter der Voraussetzung, daß die dementsprechend erweiterte Produktionsfunktion linearhomogen in K, L und R ist, erhält man damit

$$Y = A^{\beta} K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1-\alpha_2} R^{\alpha_2}.$$

Wegen $g_L = n$, $g_R = -r$ sowie $g_Y = g_A = g_K$ im langfristigen Gleichgewicht liefert die logarithmische Ableitung dieser Funktion im steady state

$$g_Y = \beta g_Y + \alpha_1 g_Y + (1-\alpha_1-\alpha_2)n - \alpha_2 r.$$

Löst man die Gleichung nach g_Y auf und subtrahiert n, so ergibt sich schließlich die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens y als

$$g_y = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta}\left[(\beta-\alpha_2)n - \alpha_2 r\right]. \tag{4.47}$$

Anhand von (4.47) ist zu erkennen, daß ein langfristig positives und damit nachhaltiges Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens auch unter Berücksichtigung nicht erneuerbarer Ressourcen möglich ist, falls $(\beta-\alpha_2)n > \alpha_2 r$ ist. Wenn also zum Beispiel die Wachstumsrate n der Bevölkerung gleich der Verfallsrate r der verfügbaren Einsatzmenge der natürlichen Ressource R ist, so entsteht nachhaltiges Wachstum, wenn die Produktionselastizität β des Wissens A mehr als doppelt so groß wie die Produktionselastizität α_2 der natürlichen Ressource R ausfällt.

In einem von Nordhaus (1992) betrachteten Modell mit exogenem technischem Fortschritt reicht es unter Verwendung realistischer Parameterwerte für langfristig positives Pro-Kopf-Wachstum aus, daß die exogene Rate des technischen Fortschritts größer als 0,0025 ist. Allerdings geht der exogene technische Fortschritt dort mit einer Produktionselastizität von eins in die Produktionsfunktion ein. Dagegen besteht im vorliegenden Modell endogener technischer Fortschritt (vgl. den Abschnitt 4.5.1). Unterstellt man wie Nordhaus (1992) einen Wert der Produktionselastizität der natürlichen Ressource in Höhe von $\alpha_2 = 0{,}1$, so reicht es hier für die Nachhaltigkeit aus, wenn $n \geqq r$ und $\beta = 0{,}3$ ist. Wie sich später herausstellen wird, ist dieser Wert von β realistisch.

Mit diesen einfachen Berechnungen soll nicht die Bedeutung des Buches von Meadows et al. (1972) in Zweifel gezogen werden. Sicherlich kann das Wirtschaftswachstum zu Umweltschäden und weiteren Problemen führen, insbesondere, wenn die Produzenten negativer externer Effekte nicht für die verursachten Schäden aufkommen müssen. Einfache Beispiele wie das hier angeführte zeigen jedoch, daß es zumindest theoretisch möglich ist, natürliche Ressourcen durch den technischen Fortschritt zu substituieren. Auf das Problem der Nachhaltigkeit wird im folgenden nicht mehr weiter eingegangen.

4.5 Semi-endogenes Wachstum durch Learning by Doing

4.5.1 Ein einfaches Grundmodell

Im Abschnitt 4.4 ist gezeigt worden, daß Modelle des semi-endogenen Wachstums nicht nur empirisch besser haltbar, sondern auch robuster gegenüber Parametervariationen sind als Modelle des endogenen Wachstums. Alle strukturell stabilen semi-endogenen Wachstumsmodelle führen zu einer Vorhersage der langfristigen Wachstumsrate g_y des Pro-Kopf-Einkommens oder des Pro-Kopf-Konsums gemäß der Gleichung (4.42). Obwohl sich je nach Formulierung des Modells unterschiedliche Determinanten der involvierten Konstanten ergeben, ist allen semi-endogenen Modellen gemeinsam, daß diese Determinanten wirtschaftspolitisch weitgehend nicht zu beeinflussen sind. Um zu einem prinzipiellen Denkmodell zu gelangen, daß sich nicht auf die Eigenschaften des steady state beschränkt und eine Erweiterung um wichtige Aspekte wie den internationalen Handel erlaubt, ist es daher naheliegend, eine möglichst einfache Grundversion eines semi-endogenen Wachstumsmodells zu entwickeln. Die Verwendung eines **learning by doing**-Modells vereinfacht die Analyse im Vergleich zum F&E-Ansatz erheblich und empfiehlt sich darüber hinaus durch die empirisch abgesicherte Bedeutung des learning by doing, worauf in diesem Abschnitt noch eingegangen wird.[24]

Aufgrund der Kritik am dynamischen Optimierungsansatz im Kapitel 3 werden die Konsumentscheidungen durch einen alternativen Ansatz modelliert. Im folgenden wird die früher auf der Seite 162 formulierte **Goldene Faustregel** (3.36) verwendet und mit der dezentralen und der zentralen Optimierungslösung verglichen. Das Modell wird in Übereinstimmung mit empirischen Ergebnissen zum learning by doing formuliert. Dabei stellt sich heraus, daß es mit den **stilisierten Fakten** über das Wirtschaftswachstum weitgehend vereinbar ist, was auch als vorläufiger Test der Goldenen Faustregel interpretiert werden kann, die demnach eine sinnvolle Arbeitshypothese über das langfristige Verhalten der Haushalte darstellt.

Lucas (1988, Abschnitt 5) hat neben dem bereits angesprochenen Uzawa-Lucas-Modell auch ein learning by doing-Modell mit kleinen offenen Volkswirtschaften formuliert. Er nimmt an, daß die Lernelastizitäten gleich eins sind, um ein langfristig positives Pro- Kopf-Wachstum zu erhalten. Diese Annahme – die im Widerspruch zu den empirischen Ergebnissen steht – ist nicht erforderlich, wenn das learning by doing nicht die einzige Ursache des Wachstums ist. Unter Berücksichtigung der Akkumulation des Kapitals und des Wachstums der Bevölkerung wächst der Pro-Kopf-Output langfristig auch dann mit einer positiven Rate, wenn die Lernelastizität Werte in der Größenordnung der empirisch geschätzten Elastizitäten von ungefähr 0,32 (dem Wert der **80 %-Kurve**, vgl. zum Beispiel Hirsch, 1956) hat. Dieses Ergebnis ist nicht neu, sondern findet sich bereits bei Arrow (1962) und Sheshinski (1967a), die als frühe Beiträge zur Theorie des semi-endogenen Wachstums interpretiert werden

[24]Ein von der Produktionsseite her ähnliches Modell mit Erweiterungen wird von Göcke (2000) numerisch analysiert.

können, wobei zu jener Zeit die Betonung noch nicht so sehr wie heute auf das langfristige Pro-Kopf-Wachstum gelegt worden ist. Im Unterschied zu diesen frühen Ansätzen wird im folgenden die kumulierte Produktion anstelle der kumulierten Investitionen als Lernindex verwendet. Dieser Ansatz ist direkter mit learning **by doing** verbunden und hat den Vorteil, mit einer steigenden Sparquote während des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht vereinbar zu sein, wenn die Goldene Faustregel als Konsumhypothese verwendet wird. Allerdings vereinfacht die Verwendung der kumulierten Investitionen das Modell noch weiter. Später wird im Abschnitt 5.3 daher auch ein Modell mit diesem Lernindex formuliert.

Trotz der Kritik an dem Standardansatz der dynamischen Optimierung in neoklassischen Wachstumsmodellen enthält das folgende Modell auch einige Ergebnisse, die die Implikationen der neoklassischen Wachstumstheorie stützen. Zum Beispiel wird gezeigt, daß dieselbe abgestimmte Steuer- und Subventionspolitik, mit der die externen Effekte des learning by doing im langfristigen Gleichgewicht einer dezentralen Volkswirtschaft mit optimierenden Konsumenten internalisiert werden können, auch in einer Volkswirtschaft mit Konsumenten, die die Goldene Faustregel befolgen, verwendet werden kann. Dieses Ergebnis ist zum einen darauf zurückzuführen, daß beide Konsumhypothesen zu demselben Niveau der im steady state konstanten Variablen führen. Zum anderen ist die Produktionsseite ein Spezialfall des im Abschnitt 4.4.4 beschriebenen allgemeinen semi-endogenen Zwei-Sektoren-Modells, in dem die gleichgewichtige Wachstumsrate unabhängig von der Nachfrageseite vollständig durch die Produktionstechnologie und das Wachstum der Bevölkerung determiniert ist. Viele der Implikationen neoklassischer Modelle, die im wesentlichen angebotsseitig determiniert sind, verhalten sich insofern robust gegenüber Änderungen auf der Nachfrageseite.

In der Wachstumstheorie folgt man üblicherweise Arrow (1962), indem die kumulierten Brutto- oder Nettoinvestitionen als **Lernindex** verwendet werden (vgl. zum Beispiel Sheshinski, 1967a; Romer, 1986). Dieser Ansatz hat den offensichtlichen Vorteil, daß außer dem Kapitalstock keine weitere Zustandsvariable verwendet werden muß. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß der Begriff des **Lernens** eher mit der Produktion statt mit der Investition verbunden ist. Entsprechend befassen sich die meisten empirischen Studien zum learning by doing mit der kumulierten Produktionsmenge als dem Lernindex (vgl. zum Beispiel Wright, 1936; Hirsch, 1956). Obwohl auch die kumulierten Investitionen eine wichtige Rolle für das Lernen spielen (vgl. Sheshinski, 1967b; Lieberman, 1984), ist es wichtig zwischen learning by **doing**, gemessen durch die Produktion, und learning by **investment** zu unterscheiden. Einige der empirischen Ergebnisse, im wesentlichen zusammengefaßt aus Lieberman (1984), sind für die folgende theoretische Analyse von besonderer Bedeutung:[25]

[25] Eine detailliertere Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse zum learning by doing und eine Bewertung des alternativen Ansatzes der Schätzung der **Lernkurve** anstelle der **Lernfunktion** findet sich in Christiaans (1997, Kapitel II.2). Anzumerken ist, daß die meisten empirischen Studien spezifische Branchen betreffen. Die Studie von Lieberman (1984) befaßt sich zum Beispiel mit der Chemieindustrie. Obwohl diese Tatsache die Allgemeinheit der Ergebnisse etwas einschränkt, hat zumindest Sheshinski (1967b)

(1) Die Forschung und Entwicklung (F&E) wirkt als ein Akzelerator des Lernprozesses. Es ist sogar möglich, daß das learning by doing zu Steigerungen der Produktivität in einer Größenordnung führt, die diejenige der ursprünglichen Innovationen erheblich übertrifft.[26]

(2) Mit learning by doing ist ein hoher Grad an Externalitäten verbunden (knowledge spillovers).[27]

(3) Die **Lernelastizität** (der Parameter β in der noch folgenden Gleichung (4.48)) hat Werte um $\beta = 0{,}32$ (entsprechend der sogenannten 80 %-Kurve). Obwohl auch andere Schätzwerte existieren, sind sie im allgemeinen positiv und deutlich kleiner als eins.

(4) In allen zitierten Artikeln zu den empirischen Schätzungen wird angenommen, daß der endogene technische Fortschritt Hicks-neutral ist.

(5) Die Lernelastizität steigt, wenn das Kapital in der Produktion intensiver genutzt wird.

Diese Ergebnisse begründen die folgenden Annahmen für das nachstehend dargestellte Modell: (1) Learning by doing ist die Quelle des technischen Fortschritts. Damit soll keinesfalls der Eindruck erweckt werden, daß die Forschung und Entwicklung nicht von erheblicher Bedeutung ist, sondern nur, daß es hinreichend interessant und begründet ist, die Implikationen des learning by doing zu analysieren. (2) Als vereinfachte Approximation an einen hohen Grad der knowledge spillovers wird unterstellt, daß das learning by doing für die einzelnen Unternehmen einen externen Effekt darstellt. Durch diese Annahme kann der Ansatz der vollständigen Konkurrenz beibehalten werden. (3) Die Lernelastizität β ist positiv, aber deutlich kleiner als eins. (4) Die Lernfunktion geht multiplikativ in die Produktionsfunktion ein, das heißt, der technische Fortschritt ist Hicks-neutral. Diese Annahme hat zwar den Nachteil, daß nur dann ein steady state existiert, wenn eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterstellt wird (die die Äquivalenz von Hicks und Harrod-Neutralität impliziert), stimmt aber besser mit den empirischen Ansätzen überein als die zum Beispiel in Sheshinski (1967a) unterstellte Harrod-neutrale Version. Aufgrund der genannten Äquivalenz kann man zwar argumentieren, daß das Modell tatsächlich Harrod-Neutralität beinhaltet; eine alternative Interpretation besteht jedoch darin, die Formulierung als einfache Approximation an andere funktionale Formen zu betrachten, für die diese Äquivalenz nicht gilt. (5) Weil ein aggregiertes Modell mit nur einem produzierten Gut verwendet wird, ist es nicht möglich, unterschiedliche Lernelastizitäten einzuführen. Dieses empirische Ergebnis ist jedoch nützlich im Hinblick auf eine spätere Erweiterung auf zwei Sektoren.

---

sowohl aggregierte Daten als auch Daten mehrerer Branchen zugrunde gelegt.

[26] Zum Beispiel haben Mak und Walton (1972) gezeigt, daß die Einführung der Dampfschiffahrt die Frachtkosten nicht so stark gesenkt hat, wie die darauf folgenden Verbesserungen der Dampfschiffe.

[27] Die Existenz von knowledge spillovers aufgrund des learning by doing wird auch durch eine neuere Studie von Irwin und Klenow (1994) bestätigt.

In Übereinstimmung mit der vorangehenden Diskussion wird eine aggregierte Cobb-Douglas-Produktionsfunktion unterstellt:

$$Y = A^{\beta} K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1, \tag{4.48}$$

wobei Y den Strom des produzierten Output bezeichnet. Die Inputs sind das physische Kapital K und Arbeit L. Man beachte, daß die Annahmen bezüglich der involvierten Parameter gut mit der Empirie übereinstimmen; wie bereits angemerkt worden ist, sollte β positiv aber deutlich kleiner als eins (um 0,32) sein. Eine vergleichbare Größenordnung sollte auch α, die Produktionselastizität des Kapitals beziehungsweise die Kapitalertragsquote haben. Der Arbeitseinsatz ist proportional zur Bevölkerung, die mit der exogenen, konstanten Rate n wächst:

$$g_L := \frac{\dot{L}}{L} = n.$$

Die Variable A ist der Lernindex und als kumulierte Produktionsmenge definiert:

$$A(t) = A_0 + \int_0^t Y(\tau)\, d\tau.$$

Die Zeitableitung von A ist demnach

$$\dot{A} = A^{\beta} K^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{4.49}$$

Der Output Y kann sowohl konsumiert als auch investiert werden. Wenn ein kurzfristiges Gleichgewicht in jedem Zeitpunkt unterstellt wird, ist die aggregierte Bruttoinvestition I durch die Differenz zwischen der Produktionsmenge und dem Konsum C gegeben:

$$I = Y - C.$$

Mit der konstanten Abschreibungsrate δ erhält man die Zeitableitung des Kapitalstocks, die den Nettoinvestitionen entspricht, gemäß

$$\dot{K} = I - \delta K = Y - C - \delta K. \tag{4.50}$$

Anhand von (4.48), (4.49) und (4.50) ist einzusehen, daß das Modell ein Spezialfall des im Abschnitt 4.4.4 dargestellten allgemeinen Zwei-Sektoren-Modells ist, erweitert um Abschreibungen mit der Rate δ. Dabei stimmen die beiden Produktionsfunktionen F und G jetzt überein. Formal sind alle Inputs öffentliche Güter. Das frühere Argument bezüglich der Konstanz des Kapitalkoeffizienten im langfristigen Gleichgewicht gilt auch unter Berücksichtigung von Abschreibungen, vgl. die Bemerkung 3.3 auf der Seite 117. Da alle im folgenden verwendeten Konsumhypothesen eine konstante Bruttosparquote im langfristigen Gleichgewicht implizieren, gilt $g_K = g_Y$ im steady state. Die logarithmische Differentiation der Gleichung (4.48) liefert

$$g_Y = \beta g_A + \alpha g_K + (1-\alpha) g_L.$$

Aus $g_A =$ konst. und damit $g_{\dot{A}} = g_A$ folgt mit (4.49), daß $g_A = g_Y$. Unter Berücksichtigung von $g_K = g_Y$ im steady state und $g_L = n$ ergibt sich schließlich[28]

$$g_Y = g_K = g_A = \underbrace{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}_{=:\gamma} n = \gamma n. \tag{4.51}$$

Aufgrund der Annahme $1-\alpha-\beta > 0$ folgt, daß $\gamma > 1$ und $g_Y > g_L = n$ ist. Das Modell generiert also semi-endogenes Pro-Kopf-Wachstum:

$$g_{Y/L} = (\gamma - 1)\, n > 0. \tag{4.52}$$

Da in einem langfristigen Gleichgewicht $g_Y - \gamma g_L = 0$ gilt, sind die folgenden **niveauangepaßten Pro-Kopf-Variablen** im gleichgewichtigen Wachstum konstant:

$$y := \frac{Y}{L^\gamma}, \; k := \frac{K}{L^\gamma}, \; a := \frac{A}{L^\gamma}. \tag{4.53}$$

Bemerkung 4.3. In diesem Abschnitt **unterscheidet sich die Bedeutung der Variablen** von derjenigen in den vorangehenden Abschnitten. Insbesondere ist k nicht einfach die Kapitalintensität, sondern die niveauangepaßte Kapitalintensität. Das Symbol a bezeichnet nicht wie im Kapitel 3 das Reinvermögen pro Kopf, sondern den niveauangepaßten Pro-Kopf-Lernindex. ♢

Bemerkung 4.4. Wenn die Bedingung $1-\alpha-\beta > 0$ nicht erfüllt ist, sind zwei Fälle möglich. Für $1-\alpha-\beta = 0$ impliziert die logarithmische Differentiation der Gleichung (4.48) in Verbindung mit $g_Y = g_K = g_A$

$$\underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{=0} g_Y = 0 = (1-\alpha)\, n \quad \Longrightarrow \quad n = 0.$$

Gleichermaßen kann die vorangehende Gleichung für $n = 0$ nur erfüllt sein, wenn $1-\alpha-\beta = 0$ oder $g_Y = 0$ ist. Wenn also ein langfristiges Gleichgewicht mit positiven Wachstumsraten von Y, K, und A existiert, gilt $1-\alpha-\beta = 0$ genau dann, wenn $n = 0$. Damit liegt ein Fall des endogenen Wachstums vor, in dem die gleichgewichtige Wachstumsrate g_Y nicht durch die Produktionstechnologie allein determiniert ist. Im Anhang zu diesem Abschnitt wird die Analyse des Modells für diesen Fall kurz dargestellt. Für $1-\alpha-\beta < 0$ ist die Ableitung der Gleichung (4.51) wie zuvor gültig. Wegen $\gamma < 0$ in diesem Fall folgt unmittelbar, daß kein langfristiges Gleichgewicht existiert, in dem alle Wachstumsraten positiv sind. ♢

Das Modell wird nun in den niveauangepaßten Pro-Kopf-Variablen ausgedrückt. Dividiert man die Produktionsfunktion (4.48) durch L^γ, so folgt

$$\frac{Y}{L^\gamma} = A^\beta K^\alpha L^{1-\alpha-\gamma} = \left(\frac{A}{L^\gamma}\right)^\beta \left(\frac{K}{L^\gamma}\right)^\alpha L^{1-\alpha-\gamma} L^{\beta\gamma} L^{\alpha\gamma} = a^\beta k^\alpha L^{1-\alpha-(1-\alpha-\beta)\gamma}.$$

[28] Die Bedingung $\Delta > 0$ für das Modell im Abschnitt 4.4.4 reduziert sich hier auf $1-\alpha-\beta > 0$.

Mit $(1-\alpha-\beta)\gamma = 1-\alpha$ und $y := Y/L^\gamma$ ergibt sich daraus die niveauangepaßte Pro-Kopf-Produktionsfunktion

$$y = a^\beta k^\alpha. \tag{4.54}$$

Ähnlich kann aus (4.49) die Bewegungsgleichung für den niveauangepaßten Pro-Kopf-Lernindex a abgeleitet werden. Die Division von (4.49) durch L^γ liefert

$$\frac{\dot{A}}{L^\gamma} = a^\beta k^\alpha. \tag{4.55}$$

Aus der Definition von a folgt

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{A}}{A} - \gamma n \quad \text{und} \quad \dot{a} = \frac{\dot{A}}{L^\gamma} - \gamma n a.$$

Setzt man (4.55) in diese Gleichung ein, so folgt

$$\dot{a} = a^\beta k^\alpha - \gamma n a. \tag{4.56}$$

Um die Bewegungsgleichung für die niveauangepaßte Kapitalintensität k zu berechnen, wird (4.50) durch K dividiert. Berücksichtigt man $g_k = g_K - \gamma n$ gemäß (4.53), so folgt

$$\dot{k} = \frac{Y}{K}\frac{K}{L^\gamma} - \frac{C}{K}\frac{K}{L^\gamma} - \delta\frac{K}{L^\gamma} - \gamma n \frac{K}{L^\gamma}.$$

Unter Verwendung von (4.54) und der Definition

$$c := \frac{C}{L^\gamma}$$

ergibt sich schließlich

$$\dot{k} = a^\beta k^\alpha - (\gamma n + \delta) k - c. \tag{4.57}$$

Die Relationen (4.56) und (4.57) stellen ein System zweier Differentialgleichungen in k und a dar. Die Startwerte $a(0) = a_0$ und $k(0) = k_0$ seien historisch gegeben. Um das Modell zu schließen, fehlt noch eine Hypothese über die Konsumentscheidung der Haushalte und damit den Zeitpfad von $c(t)$. Im nächsten Abschnitt wird das Modell insbesondere unter Verwendung der Goldenen Faustregel analysiert. Die Lösung mittels der dynamischen Optimierung wird ebenfalls kurz dargestellt, um die normative Güte der Goldenen Faustregel durch einen Vergleich der jeweiligen langfristigen Gleichgewichte zu bewerten. Außerdem ist es dadurch möglich, geeignete Politikinstrumente zur Internalisierung der externen Effekte des learning by doing abzuleiten.

4.5.2 Die Goldene Faustregel als Konsumhypothese

Die Goldene Faustregel Entsprechend der Goldenen Faustregel (3.36) ist der aggregierte Konsum durch die Gleichung

$$C = wL + \rho K \tag{3.36}$$

gegeben. Dabei bezeichnet w den Reallohnsatz und ρ die Diskontrate des repräsentativen Haushalts. Im kurzfristigen Gleichgewicht bei vollständiger Konkurrenz gilt

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A^{\beta} K^{\alpha} L^{-\alpha}.$$

Durch Substitution in (3.36) erhält man

$$C = (1-\alpha) Y + \rho K. \tag{4.58}$$

Die Division durch L^{γ} liefert unter Verwendung von (4.54) den niveauangepaßten Pro-Kopf-Konsum

$$c = (1-\alpha) y + \rho k = (1-\alpha) a^{\beta} k^{\alpha} + \rho k.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichung (4.57) ein, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$\dot{k} = \alpha a^{\beta} k^{\alpha} - (\gamma n + \delta + \rho) k. \tag{4.59}$$

Die Abbildung 4.1 zeigt das Phasendiagramm des dynamischen Systems (4.56), (4.59). Die Gestalt der Isoklinen $\dot{a} = 0$ und $\dot{k} = 0$ kann wie folgt begründet werden. Gemäß (4.56) ist die Isokline $\dot{a} = 0$ gegeben durch die k-Achse und

$$a = \left(\frac{k^{\alpha}}{\gamma n}\right)^{1/(1-\beta)}.$$

Für $\alpha + \beta < 1$ folgt

$$\left.\frac{\partial a}{\partial k}\right|_{\dot{a}=0} = \frac{\alpha}{1-\beta} \left(\frac{1}{\gamma n}\right)^{1/(1-\beta)} k^{(\alpha+\beta-1)/(1-\beta)} > 0,$$

und

$$\left.\frac{\partial^2 a}{\partial k^2}\right|_{\dot{a}=0} = \frac{(\alpha+\beta-1)\alpha}{(1-\beta)^2} \left(\frac{1}{\gamma n}\right)^{1/(1-\beta)} k^{(\alpha+2\beta-2)/(1-\beta)} < 0.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{k\to 0} \left.\frac{\partial a}{\partial k}\right|_{\dot{a}=0} = \infty, \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \left.\frac{\partial a}{\partial k}\right|_{\dot{a}=0} = 0.$$

Also hat $\dot{a} = 0$ den in der Abbildung 4.1 dargestellten konkaven Verlauf. Analog kann gezeigt werden, daß die Isokline $\dot{k} = 0$ für $\alpha + \beta < 1$ durch den Ursprung geht, eine positive Steigung hat und konvex ist mit $\lim_{k\to 0} \frac{\partial a}{\partial k}|_{\dot{k}=0} = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{\partial a}{\partial k}|_{\dot{k}=0} = \infty$. Diese Ergebnisse implizieren, daß im positiven Orthanten ein eindeutiges Gleichgewicht $(\bar{k}, \bar{a})$ existiert.

Anhand des Phasendiagramms ist zu erkennen, daß das Gleichgewicht $E = (\bar{k}, \bar{a})$ asymptotisch global stabil für alle strikt positiven Startwerte ist.[29] Obwohl die Übergangsdynamik zum Beispiel im Hinblick auf das Verhalten der Sparquote interessante Implikationen hat, worauf im Abschnitt 4.5.3 noch eingegangen wird, rechtfertigt

[29] Die Analyse kann ähnlich wie die der Abbildung 2.5 (a) auf der Seite 40 erfolgen, wobei zu beachten ist, daß die Isoklinen in der Abbildung 4.1 den positiven Quadranten in vier Bereiche aufteilen, wobei nur zwei dieser Bereiche, *I* und *II*, positiv invariant sind. Diese Bereiche werden aber von den Trajektorien erreicht, die in den anderen Bereichen starten und sie verlassen, wenn sie nicht innerhalb dieser Bereiche gegen das Gleichgewicht konvergieren.

es die Stabilität des Gleichgewichts, den Schwerpunkt der folgenden Betrachtungen auf die Analyse des steady state zu legen. Zunächst wird lediglich auf eine interessante Implikation hingewiesen. Wie man zum Beispiel anhand der Trajektorie O in der Abbildung 4.1 erkennt, müssen sich a und k nicht monoton entwickeln (im Gegensatz zum monotonen Verlauf der Kapitalintensität im RKC-Modell).

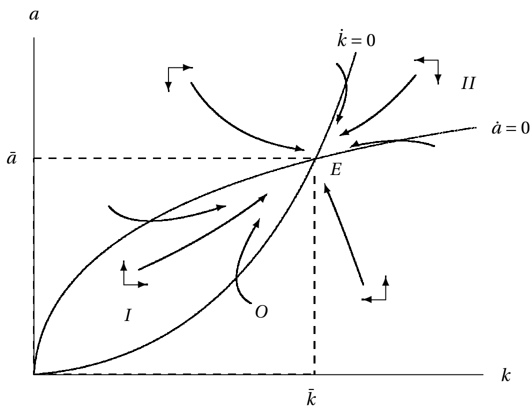

Abbildung 4.1
Das Phasendiagramm des Modells unter Verwendung der Goldenen Faustregel

Aussage 4.10. *Unter den Annahmen in (4.48), (4.49) und (4.50) existiert bei Verwendung der Goldenen Faustregel ein für positive Startwerte global stabiles langfristiges Gleichgewicht mit semi-endogenem Wachstum ohne Skaleneffekte. Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens ist* $g_{Y/L} = (\gamma - 1)n > 0$, *wobei* n *die exogene Wachstumsrate der Bevölkerung ist.*

Bemerkung 4.5. Die Bedeutung der Bedingung $1-\alpha-\beta > 0$ für die Stabilität erkennt man aufgrund der linearen Approximation des Systems (4.56), (4.59) um das Gleichgewicht. Die entsprechende Jacobi-Matrix lautet

$$J = \begin{pmatrix} \partial\dot{a}/\partial a & \partial\dot{a}/\partial k \\ \partial\dot{k}/\partial a & \partial\dot{k}/\partial k \end{pmatrix}\Bigg|_{\dot{a}=\dot{k}=0} = \begin{pmatrix} (\beta-1)\gamma n & \gamma n + \delta + \rho \\ \alpha\beta\gamma n & (\alpha-1)(\gamma n + \delta + \rho) \end{pmatrix},$$

wobei die Bedingungen $\bar{a}^{\beta-1}\bar{k}^{\alpha} = \gamma n$ und $\alpha\bar{a}^{\beta}\bar{k}^{\alpha-1} = \gamma n + \delta + \rho$ verwendet worden sind, die für die Gleichgewichtswerte $\bar{a}$ und $\bar{k}$ erfüllt sind. Man kann unmittelbar zeigen, daß aus $1-\alpha-\beta > 0$ folgt, daß $\mathrm{Sp}(J) < 0$ und $|J| > 0$. Damit sind die Routh-Hurwitz-Bedingungen erfüllt und das Gleichgewicht ist lokal asymptotisch stabil. ♢

Zum Zwecke der komparativ-statischen Analyse des steady state können die langfristigen Gleichgewichtswerte $E = (\bar{k}, \bar{a})$ explizit berechnet werden, indem (4.56) und

(4.59) gleich null gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \left[\frac{\alpha}{(\gamma n + \delta + \rho)(\gamma n)^{\beta/(1-\beta)}} \right]^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \\ \bar{a} &= \left[\frac{\alpha}{(\gamma n + \delta + \rho)(\gamma n)^{(1-\alpha)/\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Obwohl man die partiellen Ableitungen nach allen Parametern berechnen kann, wird hier darauf verzichtet, die komplizierten Ausdrücke anzugeben (man beachte, daß γ selbst eine Funktion von α und β ist). Die Wirkung derjenigen Parameter, die auch die Wachstumsrate $(\gamma - 1)n$ des Pro-Kopf-Output beeinflussen, auf die Gleichgewichtswerte von k und a ist ohnehin nicht besonders aufschlußreich, wie das folgende Beispiel verdeutlicht. Wenn die Wachstumsrate n der Bevölkerung steigt, folgt aus (4.60), daß sowohl $\bar{k}$ als auch $\bar{a}$ fallen. Ein Land mit einer höheren Wachstumsrate der Bevölkerung hat also ceteris paribus einen geringeren niveauangepaßten Pro-Kopf-Output $y = Y/L^{\gamma}$ im steady state [vgl. (4.54)]. Tatsächlich kommt es aber nicht auf Y/L^{γ}, sondern auf den Pro-Kopf-Output Y/L an. Da eine höhere Wachstumsrate der Bevölkerung eine höhere Wachstumsrate $(\gamma - 1)n$ des Pro-Kopf-Output impliziert, hat ein Land mit einem höheren Wert von n trotz des mit n fallenden niveauangepaßten Pro-Kopf-Output im langfristigen Gleichgewicht ceteris paribus langfristig einen höheren Pro-Kopf-Output.

Damit sind lediglich die Parameter δ und ρ in den Gleichungen (4.60) sinnvolle Kandidaten für eine komparativ-statische Analyse des langfristigen Gleichgewichts. Man sieht auch ohne Berechnung auf den ersten Blick, daß $\bar{k}$ und $\bar{a}$ und daher auch der steady state-Wert von y mit steigenden Werten von δ und ρ fallen. Da beide Parameter die Wachstumsrate $(\gamma - 1)n$ nicht beeinflussen, fällt auch der Pro-Kopf-Output zu jedem Zeitpunkt ceteris paribus in δ und ρ. Ein höherer Wert von ρ impliziert eine geringere Sparquote. Damit wird das klassische Ergebnis von Solow (1956), daß die Sparquote keine Wachstumseffekte, aber Niveaueffekte hat, in diesem Modell bestätigt.

Die Auswirkungen der Modellparameter auf die gleichgewichtige Wachstumsrate des Output, γn, beziehungsweise die des Pro-Kopf-Output, $(\gamma - 1)n$, sind von größerer Bedeutung und einfach zu berechnen:

$$\frac{\partial \gamma n}{\partial n} = \gamma > 0, \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial \gamma n}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{(1-\alpha-\beta)^2} n > 0, \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial \gamma n}{\partial \beta} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha-\beta)^2} n > 0. \tag{4.63}$$

Weil $\gamma - 1 > 0$ ist, haben die Ableitungen von $(\gamma - 1)n$ nach diesen Parametern jeweils dieselben Vorzeichen, wie die von γn. Also gilt

Aussage 4.11. *Ein Land hat ceteris paribus eine größere Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens, wenn die Wachstumsrate der Bevölkerung n höher ist, die Produktion das Kapital intensiver nutzt (größerer Wert von α) oder die Lernelastizität β höher ist.*

Dynamische Optimierung in der zentralen Volkswirtschaft Aufgrund der Externalität des learning by doing in diesem Modell ist es erforderlich, zwei verschiedene Lösungen mit dynamischer Optimierung zu analysieren. Während unterstellt wird, daß die Regierung in der zentralen Volkswirtschaft die Externalität des Lernens berücksichtigt, gilt diese Annahme nicht für die Haushalte und Unternehmen in der dezentralen Version. Später wird gezeigt, daß die langfristigen Gleichgewichte der dezentralen Optimierungslösung und der Lösung mit Konsumenten, die die Goldene Faustregel befolgen, übereinstimmen. Dieselbe Steuer- und Subventionspolitik, mit der eine optimale Lösung im steady state des dezentralen Optimierungsmodells erreicht wird, kann auch für das Modell mit der Goldenen Faustregel verwendet werden, um die Haushalte asymptotisch zum optimalen langfristigen Gleichgewicht zu führen.

Ebenso wie im Ramsey-Koopmans-Cass-(RKC)-Modell ist es Ziel der Planungsbehörde, das diskontierte Integral des Nutzens in Abhängigkeit vom Pro-Kopf-Konsum zu maximieren. Früher ist bereits gezeigt worden, daß der steady state unter Berücksichtigung des technischen Fortschritts im allgemeinen nicht unabhängig von der Form der Momentannutzenfunktion ist. Da es keinen zusätzlichen Nutzen bringt, dieses Ergebnis erneut abzuleiten, und um die Darstellung so einfach wie möglich zu halten, wird die logarithmische Momentannutzenfunktion mit einer intertemporalen Substitutionselastizität σ von eins verwendet, für die im RKC-Modell mit arbeitsvermehrendem technischen Fortschritt gezeigt worden ist, daß die Goldene Faustregel das optimale langfristige Gleichgewicht asymptotisch erreicht. Ein analoges Ergebnis trifft für das vorliegende Modell hinsichtlich des steady state der dezentralen Optimierungslösung zu. Ferner kann mit den früher dargestellten Ansätzen gezeigt werden, daß die Annahme $\sigma = 1$ in Verbindung mit einer positiven Zeitpräferenzrate, $\rho > 0$, hinreichend ist, um die Konvergenz des Zielfunktionals zu gewährleisten. Daher ist es nicht nötig, allgemeinere Optimierungskriterien als die Maximierung zu verwenden.

Das Optimierungsproblem der Planungsbehörde lautet

$$
\begin{aligned}
&\max_{c\in\bar{C}[0,\infty)} \int_0^\infty \ln(cL^{\gamma-1})e^{-\rho t}\,dt,\\
&\qquad \text{u. d. N.}\\
&\qquad \dot{k} = a^\beta k^\alpha - (\gamma n+\delta)k - c, \quad k(0)=k_0,\ \liminf_{t\to\infty} k(t) \geqq 0,\\
&\qquad \dot{a} = a^\beta k^\alpha - \gamma n a, \quad a(0)=a_0,\\
&\quad c(t) \geqq 0,
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

wobei der Pro-Kopf-Konsum wegen $c = C/L^\gamma$ durch $cL^{\gamma-1} = C/L$ gegeben ist. Aus der

Sicht der Planungsbehörde ist $L = L(t)$ eine exogene Funktion der Zeit.

Um hinreichende Bedingungen für eine optimale Lösung abzuleiten, wird die current-value Hamiltonfunktion verwendet.

$$\mathscr{H} = \ln(cL^{\gamma-1}) + \lambda[a^\beta k^\alpha - (\gamma n + \delta)k - c] + \mu[a^\beta k^\alpha - \gamma n a]$$

Gemäß dem Satz 2.21 auf der Seite 90 ergeben sich die folgenden Optimumbedingungen:

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0,$$
$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda(\alpha a^\beta k^{\alpha-1} - \gamma n - \delta) - \mu\alpha a^\beta k^{\alpha-1},$$
$$\dot{\mu} = \rho\mu - \lambda\beta a^{\beta-1} k^\alpha - \mu(\beta a^{\beta-1} k^\alpha - \gamma n).$$

Die erste Gleichung impliziert $\dot{c}/c = -\dot{\lambda}/\lambda$, woraus unter Verwendung von $\mu/\lambda = \mu c$ und Substitution in die zweite Gleichung

$$g_c := \frac{\dot{c}}{c} = (1 + \mu c)\alpha a^\beta k^{\alpha-1} - (\gamma n + \delta + \rho)$$

folgt. Ersetzt man λ in der dritten Bedingung durch $1/c$, so erhält man ein System von vier Differentialgleichungen in k, a, c, und μ. Dieses System besteht aus den Gleichungen für $\dot{k}$ und $\dot{a}$ in (4.64) und den eben abgeleiteten Gleichungen für $\dot{c}$ und $\dot{\mu}$.

Für die gegebenen Zwecke ist es ausreichend, das langfristige Gleichgewicht zu analysieren und zu zeigen, daß es eine optimale Lösung für passende Startwerte der Zustandsvariablen k und a ist. Setzt man $\dot{k} = \dot{a} = \dot{c} = \dot{\mu} = 0$ und verwendet die Bedingung, daß alle Variablen positiv sein sollen, so erhält man ein Gleichungssystem, daß die optimalen steady state-Werte bestimmt (die ersten beiden Gleichungen sind durch k beziehungsweise a dividiert worden).

$$a^\beta k^{\alpha-1} = (\gamma n + \delta) + c/k \tag{4.65}$$
$$a^{\beta-1} k^\alpha = \gamma n \tag{4.66}$$
$$(1 + \mu c)\alpha a^\beta k^{\alpha-1} = \gamma n + \delta + \rho \tag{4.67}$$
$$(1 + 1/(\mu c))\beta a^{\beta-1} k^\alpha = \gamma n + \rho \tag{4.68}$$

Mittels (4.66) kann $a^{\beta-1}k^\alpha$ in (4.68) durch γn substituiert werden:

$$\hat{\mu}\hat{c} = \beta\gamma n/[(1-\beta)\gamma n + \rho] > 0, \tag{4.69}$$

wobei $\hat{\mu}$ und $\hat{c}$ die steady state-Werte von μ und c bezeichnen. Setzt man dieses Ergebnis in (4.67) ein, so folgt

$$\alpha a^\beta k^{\alpha-1} = \frac{(1-\beta)\gamma n + \rho}{\gamma n + \rho}(\gamma n + \delta + \rho). \tag{4.67a}$$

Die Gleichungen (4.66) und (4.67a) definieren die Gleichgewichtswerte $\hat{a}$ und $\hat{k}$ von a und k. Die Gleichungen (4.65) und (4.68) können rekursiv verwendet werden, um $\hat{c}$ und $\hat{\mu}$ zu bestimmen. Unter Beachtung von $1+\hat{\mu}\hat{c}>1$ lauten die Lösungen für k und a

$$\begin{aligned}
\hat{k} &= \left[\frac{(1+\hat{\mu}\hat{c})\alpha}{(\gamma n+\delta+\rho)(\gamma n)^{\beta/(1-\beta)}}\right]^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} > \bar{k}, \\
\hat{a} &= \left[\frac{(1+\hat{\mu}\hat{c})\alpha}{(\gamma n+\delta+\rho)(\gamma n)^{(1-\alpha)/\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} > \bar{a},
\end{aligned} \tag{4.70}$$

mit $\bar{k}$ und $\bar{a}$ aus den Gleichungen (4.60). Die steady state-Werte von k und a im Fall der Goldenen Faustregel liegen also unter den optimalen Werten. Dieses Ergebnis ist darauf zurückzuführen, daß die Sparquote, ebenso wie in der später analysierten dezentralen Optimierungslösung, aufgrund der mit dem learning by doing verbundenen Externalität zu gering ist. Eine erhöhte Akkumulation des Kapitals impliziert einen größeren Output und daher höhere Lerneffekte.

Um zu beweisen, daß die steady state-Lösung tatsächlich optimal ist, wenn $k_0=\hat{k}$ und $a_0=\hat{a}$ gilt, ist zu beachten, daß die current-value Hamiltonfunktion aufgrund der Annahme $1-\alpha-\beta>0$ und der Positivität der Kozustandsvariablen gemeinsam konkav in den Zustands- und Kontrollvariablen ist. Darüber hinaus müssen gemäß dem Satz 2.21 die folgenden Grenztransversalitätsbedingungen erfüllt sein.

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t}\hat{\lambda}[k(t)-\hat{k}] &\geqq 0 \\
\liminf_{t\to\infty} e^{-\rho t}\hat{\mu}[a(t)-\hat{a}] &\geqq 0
\end{aligned}$$

Man kann ähnlich wie für das RKC-Modell zeigen, daß $k(t)$ und $a(t)$ für alle t und alle zulässigen Kontrollpfade nichtnegativ sind. Da sämtliche Zustands- und Kozustandsvariablen im steady state positiv sind, sind die Grenztransversalitätsbedingungen erfüllt. Damit ist die stationäre steady state Lösung optimal. Die zentrale Optimierungslösung ist auch Pareto-effizient, weil jedes Wohlstandsmaximum Pareto-effizient ist (vgl. Varian, 1992, S. 333).

Dynamische Optimierung in der dezentralen Volkswirtschaft Ebenso wie im Fall des RKC-Modells ist es möglich, eine einfache aggregierte Version dieses Modells zu analysieren, die dieselbe aggregierte Dynamik impliziert wie das PFC-Gleichgewicht in einer explizit dezentral formulierten Version. (Der Vollständigkeit halber wird die dezentrale Formulierung im Anschluß an diesen Abschnitt kurz dargestellt.) Man sollte allerdings beachten, daß die in der Regel freimütig getroffene Annahme der vollkommenen Voraussicht in derartigen Modellen extreme Anforderungen an die Haushalte stellt. Sie müssen die vollständigen zukünftigen Zeitpfade des Zinssatzes und des Reallohnsatzes kennen, die ihrerseits von den Zeitpfaden von $k(t)$ und $a(t)$ sowie der Produktionsfunktion abhängen. In der hier betrachteten aggregierten Formulierung unterscheidet sich die dezentrale von der zentralen Lösung dadurch, daß die Haushalte und Unternehmen die durch das learning by doing verursachte Externalität nicht berücksichtigen. Trotzdem müssen die Haushalte über den Zeitpfad von $a(t)$ informiert sein, den sie als exogen gegeben ansehen.

Die current-value Hamiltonfunktion ergibt sich nun unter Vernachlässigung der Gleichung für die Akkumulation des niveauangepaßten Pro-Kopf-Lernindex a gemäß

$$\mathscr{H} = \ln(cL^{\gamma-1}) + \lambda[a^{\beta}k^{\alpha} - (\gamma n + \delta)k - c].$$

Daraus erhält man die Optimumbedingungen

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial c} = \frac{1}{c} - \lambda = 0,$$
$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda(\alpha a^{\beta}k^{\alpha-1} - \gamma n - \delta).$$

Verwendet man die erste Gleichung, um λ in der zweiten Gleichung zu eliminieren, so folgt

$$\frac{\dot{c}}{c} = \alpha a^{\beta}k^{\alpha-1} - (\gamma n + \delta + \rho).$$

Der steady state ist durch $\dot{k} = \dot{a} = \dot{c} = 0$ definiert. Die privatwirtschaftliche Optimalität des langfristigen Gleichgewichts kann für den Fall, daß die Startwerte die Gleichgewichtswerte sind, ähnlich wie im Fall der zentralen Volkswirtschaft nachgewiesen werden.

Die explizit dezentrale Formulierung des Modells läßt sich folgendermaßen skizzieren. Die bisher verwendeten Symbole werden beibehalten, betreffen aber die Variablen eines repräsentativen Haushalts. Das Ziel dieses Haushalts, dessen Personenzahl mit der Rate n wächst, ist die Maximierung seines Nutzens

$$\int_0^{\infty} \ln(cL^{\gamma-1})e^{-\rho t}\,dt. \tag{4.71}$$

In der Bemerkung 4.3 ist bereits darauf hingewiesen worden, daß die in diesem Abschnitt zugrunde gelegten Symbole teils von den sonst in diesem Kapitel verwendeten Symbolen abweichen. Da $A(t)$ hier den Lernindex bezeichnet, wird das Vermögen des Haushalts zur Zeit t hier (in Abweichung zum Kapitel 3) mit $B(t)$ bezeichnet. Die Budgetbedingung des Haushalts zum Zeitpunkt t ist

$$C + \dot{B} = wL + rB,$$

oder, nach Division durch L^{γ}, in niveauangepaßten Pro-Kopf-Größen:

$$c + \frac{\dot{B}}{L^{\gamma}} = wL^{1-\gamma} + rb. \tag{4.72}$$

Unter Verwendung von $\dot{b}/b = \dot{B}/B - \gamma n$ kann der Term $\dot{B}/L^{\gamma}$ als $\dot{B}/L^{\gamma} = \dot{b} + \gamma nb$ ausgedrückt werden. Nimmt man an, daß alle Haushalte identisch sind, so stimmt das niveauangepaßte Vermögen pro Kopf b des repräsentativen Haushalts mit demjenigen der gesamten Volkswirtschaft überein. Da physisches Kapital das einzige Vermögensaktivum in dieser geschlossenen

Volkswirtschaft ist, muß b auch mit der niveauangepaßten Kapitalintensität übereinstimmen: $b = k$. Setzt man diese Ergebnisse in (4.72) ein, so ergibt sich

$$\dot{k} = wL^{1-\gamma} + (r - \gamma n)k - c. \tag{4.73}$$

Die Maximierung von (4.71) unter der Nebenbedingung (4.73) sowie entsprechenden Randbedingungen impliziert die Keynes-Ramsey-Regel

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \gamma n - \rho, \tag{4.74}$$

wobei der Haushalt die Größen L, r und w als exogene Funktionen der Zeit betrachtet, über deren Entwicklung er vollkommene Voraussicht hat.

Die Unternehmen maximieren ihren Gewinn. Da das learning by doing aus der Sicht der Unternehmen ein externer Effekt ist, sind der Zinssatz und der Reallohnsatz im Gleichgewicht durch

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} - \delta = \alpha a^{\beta} k^{\alpha-1} - \delta,$$
$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) a^{\beta} k^{\alpha} L^{\gamma-1}$$

gegeben. Setzt man diese Werte in (4.73) und (4.74) ein, so folgt

$$\dot{k} = a^{\beta} k^{\alpha} - (\gamma n + \delta)k - c,$$
$$\frac{\dot{c}}{c} = \alpha a^{\beta} k^{\alpha-1} - (\gamma n + \delta + \rho).$$

Diese Differentialgleichungen stimmen exakt mit den zuvor abgeleiteten Beziehungen überein. Da auch die Zielfunktionale übereinstimmen, ist die abgeleitete steady state-Lösung für den repräsentativen Haushalt optimal, wenn er im langfristigen Gleichgewicht startet.

Vergleich der Lösungen Die Differentialgleichungen der drei betrachteten Modelle werden wie folgt zusammengefaßt.

1. Zentralisierte Optimierungslösung:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= a^{\beta} k^{\alpha} - (\gamma n + \delta)k - c \\ \dot{a} &= a^{\beta} k^{\alpha} - \gamma n a \\ \dot{c} &= (1 + \mu c)\alpha a^{\beta} k^{\alpha-1} c - (\gamma n + \delta + \rho)c \\ \dot{\mu} &= (\rho + \gamma n)\mu - (\mu + 1/c)\beta a^{\beta-1} k^{\alpha} \end{aligned} \tag{4.75}$$

2. Dezentrale Optimierungslösung:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= a^{\beta} k^{\alpha} - (\gamma n + \delta)k - c \\ \dot{a} &= a^{\beta} k^{\alpha} - \gamma n a \\ \dot{c} &= \alpha a^{\beta} k^{\alpha-1} c - (\gamma n + \delta + \rho)c \end{aligned} \tag{4.76}$$

3. Goldene Faustregel:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \alpha a^{\beta} k^{\alpha} - (\gamma n + \delta + \rho) k \\ \dot{a} &= a^{\beta} k^{\alpha} - \gamma n a \end{aligned} \tag{4.77}$$

Vergleicht man die Bewegungsgleichungen der dezentralen Optimierungslösung mit der Lösung der Goldenen Faustregel, so ist unmittelbar zu erkennen, daß die langfristigen Gleichgewichtswerte von k, a und c für beide Lösungen übereinstimmen. In beiden Fällen sind die steady state-Werte von k und a also $\bar{k}$ und $\bar{a}$ gemäß (4.60), die im Vergleich zur zentralen Optimierungslösung zu klein sind. Da der steady state-Wert von c durch die entsprechenden Werte von k und a impliziert wird, reicht es aus, sich auf diese beiden Variablen zu konzentrieren.

Mit Bezug zur optimalen Wirtschaftspolitik ist es sinnvoll, zunächst die Gleichungen (4.76) der dezentralen Optimierungslösung zu betrachten. Diese Gleichungen implizieren denselben Zeitpfad von k, a und c wie die Gleichungen (4.75), wenn der Nutzungspreis des Kapitals, $r+\delta = \alpha a^{\beta} k^{\alpha-1}$, mit der Rate μc subventioniert wird, die durch die Gleichungen (4.75) impliziert wird.[30] Die Kapitaleigner sollten also mehr als den privaten Nutzungspreis des Kapitals erhalten.[31]

Die externen Effekte des learning by doing können in diesem Modell durch die Subventionierung des Nutzungspreises des Kapitals internalisiert werden. Zu diesem Ergebnis sind zwei Anmerkungen angebracht. Erstens ist die Ursache des learning by doing nicht die Akkumulation des Kapitals, sondern die Produktion, weil die kumulierte Produktionsmenge als Lernindex dient. Daher erwartet man eher, daß die Subventionierung der Produktion die optimale Politik darstellt. Die Subventionierung des Nutzungspreises des Kapitals und damit der Kapitalakkumulation bedeutet im vorliegenden Modell aber letztlich, daß die Produktion subventioniert wird. Denn es gibt nur einen Sektor, der die gesamte exogene Erwerbsbevölkerung und den gesamten Kapitalstock beschäftigt. Durch die verstärkte Akkumulation des Kapitals wird daher die Produktion erhöht. In einem Zwei-Sektoren-Modell mit learning by doing in einem der Sektoren ist es darüber hinaus notwendig, die Produktion in diesem Sektor zu subventionieren und damit den relativen Preis für die Anbieter des entsprechenden Gutes zu erhöhen (vgl. zum Beispiel Bardhan, 1971, der allerdings die Akkumulation des Kapitals nicht berücksichtigt). Zweitens erfordert ein ausgeglichenes Budget der Regierung eine Pauschalsteuer, wenn keine anderweitigen Verzerrungen entstehen sollen. Da es in der betrachteten Volkswirtschaft keine Entscheidung zwischen Arbeitszeit und Freizeit gibt, stellt eine Lohnsteuer letztlich eine Pauschal-

[30] Man beachte, daß der optimale Pfad für Startwerte abseits des steady state nicht analysiert worden ist. Darauf wird verzichtet, weil hier die Ableitung einer einfachen Lösung für die Wirtschaftspolitik in bezug auf die Goldene Faustregel gesucht wird.

[31] In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, daß die Kozustandsvariable μ (der Schattenpreis des Lernens) auch außerhalb des steady state für alle t positiv ist. Denn der optimale Wert von μ im steady state ist $\hat{\mu} > 0$, und dieser Wert kann nicht erreicht werden, wenn es ein $\bar{t} > 0$ mit $\mu(\bar{t}) = 0$ gibt, da $\mu(t)$ stetig ist und die vierte Gleichung in (4.75) in diesem Fall impliziert, daß $\dot{\mu}(\bar{t}) < 0$.

steuer dar. Die Feststellung, daß eine effiziente Subvention nicht ohne eine begleitende Steuererhebung möglich ist, ist wesentlich für die folgenden Ausführungen.

Wie können Konsumenten, die die Goldene Faustregel befolgen, in ihrem Verhalten so beeinflußt werden, daß sie das optimale langfristige Gleichgewicht erreichen? Der optimale Subventionssatz auf den Nutzungspreis des Kapitals im langfristigen Gleichgewicht für den Fall optimierender Konsumenten ist durch $\hat{\mu}\hat{c} > 0$ gemäß (4.69) gegeben. Da es nur zwei Arten von Einkommen gibt, ist es naheliegend, das Arbeitseinkommen zur Finanzierung der Subventionen zu besteuern. Der zutreffende Steuersatz τ_w im Falle einer Subventionierung des Nutzungspreises des Kapitals mit der konstanten Rate $\tau_r = \hat{\mu}\hat{c}$ kann abgeleitet werden, indem das Nettonationaleinkommen (das hier gleich dem Volkseinkommen ist) mit dem verfügbaren Einkommen gemäß der Verteilungsrechnung gleichgesetzt wird, was aufgrund der Definition beider Größen eine ausgeglichenes Staatsbudget impliziert:

$$
\begin{aligned}
& Y - \delta K = (1+\tau_r)(r+\delta)K - \delta K + (1-\tau_w)wL \\
\iff \quad & Y = (1+\hat{\mu}\hat{c})\alpha a^\beta k^{\alpha-1} K + (1-\tau_w)(1-\alpha) a^\beta k^\alpha L^{\gamma-1} L.
\end{aligned}
$$

Bei der Umrechnung sind der Nutzungspreis des Kapitals $r+\delta = \alpha a^\beta k^{\alpha-1}$ und der Reallohnsatz $w = (1-\alpha)a^\beta k^\alpha L^{\gamma-1}$ verwendet worden. Ausgedrückt im niveauangepaßten Pro-Kopf-Output, $Y/L^\gamma = y = a^\beta k^\alpha$, lautet diese Gleichung

$$
\begin{aligned}
& a^\beta k^\alpha = (1+\hat{\mu}\hat{c})\alpha a^\beta k^\alpha + (1-\tau_w)(1-\alpha)a^\beta k^\alpha \\
\iff \quad & \tau_w = \hat{\mu}\hat{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Der so berechnet Steuersatz stellt ein ausgeglichenes Budget der Regierung sicher, weil die Kapitaleigner den Betrag als Subvention bekommen, den die Arbeiter an Steuern abführen müssen.[32]

Wenn der Reallohnsatz mit dem Satz τ_w besteuert wird, ist der Konsum gemäß der Goldenen Faustregel gegeben durch

$$
C = (1-\tau_w)wL + \rho K = \left(1 - \hat{\mu}\hat{c}\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)(1-\alpha)a^\beta k^\alpha L^\gamma + \rho K,
$$

beziehungsweise ausgedrückt in niveauangepaßten Pro-Kopf-Variablen:

$$
c = [1-\alpha(1+\hat{\mu}\hat{c})]a^\beta k^\alpha + \rho k.
$$

Verwendet man diese Konsumfunktion in der Gleichung (4.57), so folgt

$$
\dot{k} = (1+\hat{\mu}\hat{c})\alpha a^\beta k^\alpha - (\gamma n + \delta + \rho)k.
$$

[32] Im Hinblick auf die Plausibilität des Ergebnisses ist es wichtig zu beachten, daß der Steuersatz $\tau_w < 1$ ist:

$$
\tau_w = \hat{\mu}\hat{c}\frac{\alpha}{1-\alpha} \overset{(4.69)}{=} \frac{\beta\gamma n\alpha}{[(1-\beta)\gamma n + \rho](1-\alpha)} = \frac{\alpha\beta\gamma n}{\alpha\beta\gamma n + (1-\alpha-\beta)\gamma n + (1-\alpha)\rho} < 1,
$$

weil $1-\alpha-\beta > 1$ gilt.

Im Vergleich mit (4.75) zeigt sich, daß für $\dot{k} = \dot{a} = 0$ das langfristige Gleichgewicht nun mit dem optimalen steady state übereinstimmt. Die Stabilität des Modells unter Vernachlässigung einer Lohnsteuer wird durch die Einführung des konstanten Faktors $1 + \hat{\mu}\hat{c}$ nicht beeinträchtigt. Zusammengefaßt gilt daher

Aussage 4.12. *Wenn die Konsumenten die Goldene Faustregel befolgen, impliziert eine Besteuerung des Reallohnsatzes w mit dem Satz $\hat{\mu}\hat{c}\alpha/(1-\alpha)$ in Kombination mit einer Subventionierung des Nutzungspreises des Kapitals mit dem Satz $\hat{\mu}\hat{c}$, daß sich die Volkswirtschaft asymptotisch dem langfristigen Optimum nähert. Dabei ist $\hat{\mu}\hat{c}$ der optimale Subventionssatz des Nutzungspreises des Kapitals im steady state für den Fall einer dezentralen Optimierungslösung.*

Dieses Ergebnis erhöht die Verläßlichkeit der Politikempfehlungen, die aus Optimierungsmodellen abgeleitet werden. Die Tatsache, daß hier eine Politik mit konstanten Steuersätzen und Subventionssätzen vorgeschlagen wird, basiert auch auf der Überlegung, daß Regierungen in der Regel wohl kaum in der Lage sind, in der Zeit variierende optimale Steuersätze und Subventionssätze zu berechnen und zu erheben. Die Berechnung konstanter Sätze, die im steady state optimal sind, kann als Empfehlung von Faustregeln für die Regierung interpretiert werden. Schließlich sollte angemerkt werden, daß die optimalen Steuer- und Subventionssätze im allgemeinen von der intertemporalen Substitutionselastizität σ abhängen, die hier gleich eins gesetzt worden ist. Allgemein stimmen die langfristigen Gleichgewichte der dezentralen Optimierungslösung und der Lösung der Goldenen Faustregel und damit auch die optimalen Subventionssätze in diesen beiden Fällen nicht überein. Doch wer kennt schon die tatsächlichen Werte von σ genau genug, um optimale Lösungen zu bestimmen, die davon abhängen? Daher ist es sinnvoller, sich mit möglichst einfachen Empfehlungen zu begnügen.

4.5.3 Zu den stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums

Zu Beginn dieses Kapitels ist geprüft worden, inwieweit das neoklassische Grundmodell die stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums erklären kann. Dabei hat sich herausgestellt, daß die neoklassische Theorie gut mit denjenigen Fakten vereinbar ist, die sich auf ein einzelnes Land beziehen, mit der Ausnahme, daß durch den exogenen technischen Fortschritt keine Erklärung für das Wachstum der Arbeitsproduktivität gewonnen werden kann. Hinsichtlich der Fakten, die den Vergleich verschiedener Länder betreffen, ist das Grundmodell von einer befriedigenden Erklärung weit entfernt.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß das in diesem Abschnitt dargestellte learning by doing-Modell die stilisierten Fakten so gut erklären kann, wie man es von einem Ein-Sektor-Modell ohne Berücksichtigung des internationalen Handels erwarten kann. Zum einfachen Nachweis wird angenommen, daß sich eine Volkswirtschaft zu Beginn der Betrachtung in der Nähe des steady state befindet, so daß man sich auf die Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts konzentrieren kann. Dieser Ansatz ist aufgrund der Stabilität des langfristigen Gleichgewichts bei Verwendung der Goldenen Faustregel gerechtfertigt. Wie zuvor werden die stilisierten Fakten eingeteilt in solche, die sich auf ein einzelnes Land beziehen, und solche, die den Vergleich mehrerer Länder zum Gegenstand haben. Soweit nichts Anderes festgestellt wird, bezieht sich die Analyse auf das langfristige Gleichgewicht.

Mit Bezug zu den Fakten, die ein einzelnes Land betreffen, erkennt man schnell, daß sie generell mit semi-endogenen Wachstumsmodellen vereinbar sind.

1. Die durchschnittliche Arbeitsproduktivität wächst: $g_{Y/L} = (\gamma - 1)\,n > 0$, vgl. die Gleichung (4.52).

2. Der Kapitalkoeffizient ist stationär: $g_{K/Y} = g_K - g_Y = 0$, vgl. die Gleichung (4.51).

3. Der Realzinssatz ist konstant: $r = \partial Y/\partial K - \delta = \alpha a^{\beta} k^{\alpha-1} - \delta =$ konst. im langfristigen Gleichgewicht.

Hinsichtlich einer Anwendung des Modells auf eine Welt mit mehreren Ländern ist es wichtig, die Externalität des learning by doing genauer zu spezifizieren. Im Abschnitt 4.5.1 ist angemerkt worden, daß es einen hohen Grad an knowledge spillovers gibt. Fraglich ist, ob diese spillovers nur national oder auch international wirken. Die empirischen Ergebnisse von Branstetter (2001), der allerdings hauptsächlich mit knowledge spillovers in der Forschung und Entwicklung befaßt ist, legen es jedenfalls nahe, daß diese spillovers in erster Linie intranational und nicht international auftreten (vgl. auch den Abschnitt 5.1.1). Wie im Verlaufe dieses Kapitels gezeigt worden ist, sind die Implikationen der Modelle des semi-endogenen Wachstums hinsichtlich der langfristigen Wachstumsraten ohnehin weitgehend davon unabhängig, ob der technische Fortschritt auf der Forschung und Entwicklung, der Akkumulation des Humankapitals oder dem learning by doing beruht. Daher ist es möglich, den Lernindex A als extern für die einzelnen Unternehmen und intern für ein Land zu betrachten. Diese Annahme ermöglicht eine endogene Erklärung unterschiedlicher Produktivitätsniveaus verschiedener Länder und der komparativen Vorteile im Fall des Außenhandels.

Da die Wachstumsrate der durchschnittlichen Arbeitsproduktivität $g_{Y/L} = (\gamma - 1)\,n$ konstant und positiv ist, gibt es keine Möglichkeit für die armen Länder, die reichen Länder hinsichtlich des Pro-Kopf-Einkommens einzuholen. Das Modell kann daher unterschiedliche Arbeitsproduktivitäten zwischen den Ländern durch das learning by doing erklären. Der erste Teil des stilisierten Faktums 4 kann also einfach dadurch erzeugt werden, daß man annimmt, daß die Produktion in einem Land früher als in einem anderen aufgenommen worden ist. Langfristig unterschiedliche Wachstumsraten können lediglich durch die Unterstellung unterschiedlicher Parameter generiert werden. Eine wirkliche Erklärung erfordert aber sicher mehr als eine Argument, das auf exogenen Konstanten basiert. Ein entsprechender Ansatz wird später weiter verfolgt. Die Vereinbarkeit mit dem Faktum 5 folgt direkt aus der vorangegangenen

Argumentation. Zwei Länder, die die Produktion zu unterschiedlichen Zeitpunkten aufgenommen haben, aber beide bereits in der Nähe des steady state sind, wachsen etwa gleich schnell, obwohl die Einkommensunterschiede pro Kopf erheblich sein können.

Im Rahmen eines neoklassischen Modells ist davon auszugehen, daß Länder mit relativ hohem Reallohnsatz tendenziell Einwanderungsländer sind. Da der Reallohnsatz $w = (1-\alpha)a^{\beta}k^{\alpha}L^{\gamma-1}$ im steady state mit derselben Rate $(\gamma-1)n$ wie der Pro-Kopf-Output wächst, hat ein Land mit einem höheren Pro-Kopf-Output auch einen höheren Reallohnsatz. Obwohl im Modell nicht zwischen hochqualifizierter und geringqualifizierter Arbeit unterschieden wird, sind die Implikationen also mit dem Faktum 6 vereinbar. Zusätzlich ist darauf hinzuweisen, daß der Realzinssatz $r = \alpha a^{\beta}k^{\alpha-1} - \delta$ im steady state in allen Ländern übereinstimmt. Daher impliziert das Modell in Übereinstimmung mit der Empirie auch keine Tendenz für das Kapital, in relativ arme Länder zu wandern (vgl. Lucas, 1990).

Das den Zusammenhang zwischen dem Außenhandel und dem Wirtschaftswachstum betreffende Faktum 7 kann in einem Ein-Sektoren-Modell ohne Raum für den internationalen Handel nicht sinnvoll analysiert werden. Allerdings ist es denkbar, daß eine Zwei-Sektoren-Erweiterung des vorliegenden Modells sowohl das Faktum 7 als auch das Faktum 8 über die negative Korrelation des Bevölkerungswachstums mit dem Pro-Kopf-Wachstum,[33] das im Widerspruch zum hier betrachteten Modell steht, und den zweiten Teil von 4 erklären kann. Angenommen, es existieren zwei Sektoren. Der Sektor 1 produziert high tech-Güter und nutzt das Kapital relativ intensiv, während der Sektor 2 Agrargüter produziert und die Arbeit relativ intensiv nutzt. Wenn α_1 und α_2 die Produktionselastizitäten des Kapitals in den Sektoren 1 und 2 bezeichnen, gilt $\alpha_1 > \alpha_2$. Die Lernelastizität β_1 im Sektor 1 sei größer als β_2 im Sektor 2 (entsprechend dem Ergebnis (5) der im Abschnitt 4.5.1 dargestellten empirischen Untersuchungen des learning by doing). In einer Welt mit zwei Ländern sei die Wachstumsrate n der Bevölkerung im Inland kleiner als n^* im Ausland, also $n < n^*$. Ansonsten seien beide Länder identisch. Vereinfachend wird unterstellt, daß sich das Ausland, das die größere Erwerbsbevölkerung hat, bei Freihandel vollständig auf die Produktion des relativ arbeitsintensiven Gutes 2 und das Inland auf das relativ kapitalintensive Gut 1 spezialisiert. Obwohl die Gleichung (4.61) eine höhere Wachstumsrate des Auslands impliziert, zeigen die Gleichungen (4.62) und (4.63), daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens im Inland per Saldo höher sein kann. Damit ist das Faktum 8 und, weil die Arbeitsproduktivitäten nun ebenfalls mit unterschiedlichen Raten wachsen können, der zweite Teil des Faktums 4 erklärt. Ein Problem mit diesem Ansatz besteht darin, daß nichts über die Entwicklung des relativen Preises des high tech-Gutes in Einheiten des Agrargutes gesagt worden ist.

Im Hinblick auf das stilisierte Faktum 7 kann das Argument aus dem vorhergehen-

[33] Die im stilisierten Faktum 8 erwähnte Korrelation kann gegenseitig verursacht sein. Weil n im betrachteten Modell konstant ist, kann natürlich nicht erklärt werden, warum ein höheres Pro-Kopf-Einkommen eine geringere Wachstumsrate der Bevölkerung implizieren kann. Das Modell ist lediglich mit der inversen Verursachung von der Wachstumsrate der Bevölkerung zum Pro-Kopf-Output befaßt.

den Absatz lediglich erklären, warum das Inland mit Außenhandel schneller wächst als ohne Außenhandel. Unter den angegebenen Bedingungen wächst das Ausland tatsächlich langsamer. Das Faktum 7 ist allerdings sehr ungenau spezifiziert. Keineswegs wird behauptet, daß ein Land mit **Frei**handel schneller wächst. Das eben skizzierte Zwei-Sektoren-Modell steht in enger Beziehung zum Erziehungsargument der Protektion, demzufolge nicht Zölle, sondern Subventionen das geeignete Mittel zur Förderung junger Industrien sind (vgl. zum Beispiel Bardhan, 1971; Clemhout und Wan, 1970; Christiaans, 1997). Eine solche Subventionierung von Exportindustrien kann zu einem steigenden Volumen des Außenhandels in einigen Ländern und einer steigenden Wachstumsrate des Output führen. Daher ist es möglich, daß in einer Welt mit vielen Ländern auch ein Land wie das im vorhergehenden Absatz beschriebene Ausland mit zunehmendem Außenhandelsvolumen schneller wächst.

Ein Ein-Sektoren-Modell ohne den internationalen Handel vernachlässigt also einige Aspekte der Realität, die von großer Bedeutung für das Wachstum und die Entwicklung der Volkswirtschaften sind. Eine Erklärung aller stilisierten Fakten ist daher sicherlich nur anhand eines Modells möglich, das mindestens zwei Sektoren enthält und eine Möglichkeit für die endogene Erklärung komparativer Vorteile liefert, die ihrerseits das Wachstum beeinflussen. Eine derartige Zwei-Sektoren-Erweiterung des Modells mit learning by doing beinhaltet konzeptionelle Probleme, die die Formulierung eines adäquaten Modells schwierig machen. So ist die Existenz eines steady state mit Außenhandel generell nicht gewährleistet, wenn sich die Wachstumsraten im Inland und im Ausland unterscheiden (vgl. den Abschnitt 5.1.2). Auch wenn ein steady state existiert, aber die beiden Sektoren mit unterschiedlichen Raten wachsen, muß der relative Preis des Gutes mit der höheren Wachstumsrate der Produktion bei den üblicherweise unterstellten homothetischen Präferenzen stetig abnehmen. Ob im Falle der Spezialisierung das die high tech-Güter produzierende Land tatsächlich eine höhere Wachstumsrate des Pro-Kopf-Output aufweist, hängt von anderen Modellparametern ab.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten werden in der Literatur über das learning by doing regelmäßig weitere vereinfachende Annahmen getroffen, indem etwa die Akkumulation des Kapitals vernachlässigt wird (zum Beispiel Bardhan, 1971; Lucas, 1988; Boldrin und Scheinkman, 1988; Christiaans, 1997), nur ein Sektor betrachtet wird (zum Beispiel das erste Modell von Sheshinski, 1967a) oder eine kleine offene Volkswirtschaft mit teils linearen Produktionsfunktionen oder einer linearen Transformationskurve unterstellt wird (zum Beispiel das zweite Modell von Sheshinski, 1967a, oder Wong und Yip, 1999). Im Kapitel 5 werden zwei unterschiedliche Ansätze aufgezeigt, das hier verwendete Modell auf offene Volkswirtschaften zu erweitern und damit zu einer Erklärung der stilisierten Fakten 7 und 8 beizutragen.

Neuerdings werden einige weitere empirische Regelmäßigkeiten diskutiert, die ein sinnvolles Wachstumsmodell zu generieren hat. Die Analyse der Konvergenzraten ist bereits im Abschnitt 4.1 kritisiert worden und wird hier nicht weiter verfolgt. Mit Bezug zum Verhalten der Sparquote während des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht ist festgestellt worden, daß ein sinnvolles Wachstumsmodell sowohl steigende als auch fallende Sparquoten nicht von vornherein ausschließen sollte. Im Abschnitt 3.5 ist gezeigt worden, daß die Bruttosparquote im neoklassischen Grundmodell, das unter Verwendung der Goldenen Faustregel formuliert worden ist, mit steigender Kapitalintensität fällt. Im vorliegenden Modell ist die Bruttosparquote durch

$$s = \frac{Y-C}{Y} \overset{(4.58)}{=} 1 - \frac{(1-\alpha)Y + \rho K}{Y} = \alpha - \rho\frac{K}{Y} \overset{(4.53)}{=} \alpha - \rho\frac{k}{y} \overset{(4.54)}{=} \alpha - \rho\frac{k^{1-\alpha}}{a^{\beta}}$$

gegeben. Demnach steigt die Bruttosparquote mit wachsender niveauangepaßter Kapitalintensität k, wenn

$$(1-\alpha)g_k < \beta g_a$$

gilt, und umgekehrt. Ob diese Bedingung erfüllt ist, hängt von den Startwerten von a und k ab. Wenn zum Beispiel a_0 relativ klein und weit von der Isokline $\dot{a} = 0$ in der Abbildung 4.1 entfernt ist, während k_0 in der Nähe der Isokline $\dot{k} = 0$ liegt, sollte die Bedingung erfüllt sein. Die Sparquote steigt sicher, wenn k fällt und a steigt, wie zum Beispiel entlang des ersten Teils der Trajektorie O in der Abbildung 4.1. In jedem Fall ist es wichtig, daß das Modell sowohl steigende als auch fallende Sparquoten während des Übergangs generieren kann. Diese Eigenschaft ist nicht erfüllt, wenn der Kapitalstock K anstelle der kumulierten Produktionsmenge A als Lernindex verwendet wird, wie es in Wachstumsmodellen mit learning by doing üblich ist (eine Ausnahme ist Wong und Yip, 1999). Denn wenn man A in der Gleichung (4.48) durch K ersetzt, so lautet die Bruttosparquote

$$s = \alpha - \rho\frac{k}{y} = \alpha - \rho k^{1-\alpha-\beta}.$$

Wegen $1-\alpha-\beta > 0$ fällt dieser Ausdruck in k, so daß s während des Übergangs zum steady state fällt, wenn k_0 kleiner als der Wert im langfristigen Gleichgewicht ist (in diesem Fall steigt k monoton). Die Verwendung der kumulierten Produktion anstelle der kumulierten Nettoinvestitionen als Lernindex hat also mehr Vorteile, als lediglich plausibler zu sein.

Anhang: Der Fall des endogenen Wachstums Der Vollständigkeit halber wird das Modell nun kurz unter der alternativen Annahme $1-\alpha-\beta = 0$ analysiert. Anstelle eines Modells des semi-endogenen Wachstums entsteht dadurch ein Modell des endogenen Wachstums mit Skaleneffekten. Um die Darstellung möglichst einfach zu halten, werden die Abschreibungen vernachlässigt ($\delta = 0$) und ein konstante Sparquote s unterstellt. Für $n = 0$ und $g_Y = g_K$ folgt aus der logarithmischen Ableitung der Produktionsfunktionen (4.48) und (4.49) lediglich $g_Y = g_A$ und

$$(1-\alpha-\beta)g_K = 0,$$

so daß die Wachstumsrate hieraus nicht bestimmt werden kann. Im steady state sind $\mathsf{y} := Y/K$ und $\mathsf{a} := A/K$ konstant. Es bietet sich daher an, das dynamische System in der Variablen a auszudrücken. Wegen $\beta = 1 - \alpha$ gilt

$$g_K = \frac{sY}{K} = sA^\beta K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = sa^\beta L^\beta. \tag{4.78}$$

Analog gilt $\dot{A}/K = a^\beta L^\beta$. Aus $g_a = g_A - g_K$ folgt damit

$$\dot{a} = \frac{\dot{A}}{K} - g_K a = (a^\beta - sa^{\beta+1}) L^\beta.$$

Da L konstant ist, beschreibt diese Gleichung die dynamische Entwicklung vollständig. Die Dimension des dynamischen Systems ist also für das Modell des endogenen Wachstums um eins geringer als im Fall des semi-endogenen Wachstums. Bildet man die Ableitung von $\dot{a}$ nach a, so erkennt man, daß die Dynamik durch das Phasendiagramm der Abbildung 4.2 beschrieben wird, wobei aus $\dot{a} = 0$ der Gleichgewichtswert $a = 1/s$ folgt.

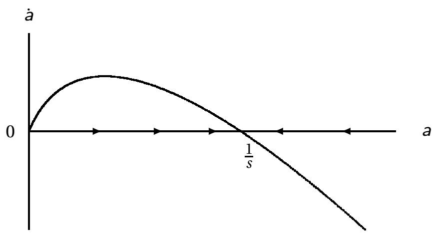

Abbildung 4.2
Stabilität im Fall des endogenen Wachstums mit konstanter Sparquote

Das langfristige Gleichgewicht ist also global stabil. Setzt man $a = 1/s$ in (4.78) ein, so erhält man schließlich die Wachstumsraten im steady state:

$$g_Y = g_K = g_A = s^\alpha L^\beta.$$

Anhand dieser Formel ist unmittelbar zu erkennen, daß die Wachstumsraten in der Sparquote und der Bevölkerungsgröße steigen, so daß das Wachstum endogen ist und einen Skaleneffekt enthält.

4.6 Zusammenfassung

Die ältere neoklassische Wachstumstheorie kann die sogenannten stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums nur zum Teil erklären. So ist sie zwar mit denjenigen Fakten vereinbar, die sich auf einzelne Länder und nicht deren internationalen Vergleich betreffen, doch liefert der exogene technische Fortschritt letztlich keine Erklärung für das langfristig positive Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens in zahlreichen Ländern. Hier liegt der Ansatzpunkt für die neuere Theorie des endogenen Wachstums, die den technischen Fortschritt in den Modellen zu erklären beabsichtigt. Eine solche Erklärung stellt sich insbesondere für den Vergleich verschiedener Länder als wichtig heraus, mit deren empirisch festgestellten Unterschieden die ältere neoklassische Theorie nur unter Berücksichtigung unterschiedlicher exogener Parameter wie etwa der exogenen Rate des Harrod-neutralen technischen Fortschritts vereinbar ist. Einige der Fakten befinden sich außerhalb des Erklärungsbereichs des neoklassischen Grundmodells einer geschlossenen Volkswirtschaft, das weder internationale Faktorwanderungen noch den internationalen Handel zum Gegenstand hat. Eine Erweiterung auf offene Volkswirtschaften ist daher unumgänglich, wobei argumentiert worden ist, daß dadurch auch die negative Korrelation zwischen dem Wachstum der Bevölkerung und dem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens erklärt werden kann, die in keinem offensichtlichen Zusammenhang mit der Offenheit einer Volkswirtschaft steht. Während die Analyse offener Volkswirtschaften der Gegenstand des Kapitels 5 ist, sind in diesem Kapitel verschiedene Theorien des endogenen und des semi-endogenen Wachstums in geschlossenen Volkswirtschaften dargestellt, klassifiziert und erweitert worden.

Die Grundidee der Theorie des endogenen Wachstums ist anhand des sogenannten *AK*-Modells veranschaulicht worden, für das eine im Kapitalstock lineare und vom Arbeitseinsatz unabhängige Produktionsfunktion unterstellt wird. Anhand dieses Modells kann gezeigt werden, daß die Beschränkung der Grenzproduktivität nach unten endogenes Wachstum impliziert, weil eine vermehrte Akkumulation des Kapitals nicht zu schließlich auf null fallenden Grenzproduktivitäten führt. In diesem Zusammenhang sind präzise Definitionen des endogenen und des semi-endogenen Wachstums eingeführt worden. Das Wachstum ist demnach endogen (semi-endogen), wenn das Pro-Kopf-Einkommen ohne exogenen technischen Fortschritt mit langfristig positiver Rate wächst und diese Rate wirtschaftspolitisch, etwa durch eine Änderung der Sparquote, (nicht) beeinflußbar ist. Schließlich weist das Wachstum Skaleneffekte auf, wenn die Höhe der Wachstumsrate von der Größe einer Volkswirtschaft abhängt, hier gemessen durch die Bevölkerungszahl. Das *AK*-Modell generiert endogenes Wachstum ohne Skaleneffekte. Allerdings ist es problematisch, daß dieses Wachstum von exogenen Parameterkonstellationen abhängt und daß die Arbeit als Produktionsfaktor völlig vernachlässigt wird, wodurch es auch keine Dynamik des Übergangs zum langfristigen Gleichgewicht gibt, das unmittelbar erreicht wird.

Einen befriedigenderen Ansatz stellt daher das Romer-Modell des endogenen technischen Fortschritts dar, der durch den die Produktivität steigernden Effekt neuer Kapitalgütervarianten und die Externalität des Wissens in der Forschung und Entwicklung ermöglicht wird und zu einem langfristig positiven Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens führt. Das große Verdienst von Romer (1990) ist es, den endogenen technischen Fortschritt unter Verwendung der relativ realistischen Marktform der monopolistischen Konkurrenz im Kapitalgütersektor in ein neoklassisches Wachstumsmodell integriert zu haben. Ein wesentliches Problem des Ansatzes besteht in dem implizierten Skaleneffekt. Je größer die betrachtete Volkswirtschaft ist, desto größer ist im Romer-Modell auch die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens. Wenn die Bevölkerung mit positiver Rate wächst, existiert kein steady state. Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens wächst dann selbst exponentiell. Jones (1995) hat darauf hingewiesen, daß diese Voraussagen empirisch unhaltbar sind, und ein alternatives Modell konstruiert, das den Skaleneffekt beseitigt und gleichzeitig das endogene Wachstum durch semi-endogenes Wachstum ersetzt.

Semi-endogenes Wachstum bedeutet, daß die Wirtschaftspolitik die langfristige Wachstumsrate im Gegensatz zum Fall des endogenen Wachstums nicht beeinflussen kann, was eine Rückkehr zu den Implikationen des Solow-Modells darstellt. Obwohl einige Ansätze existieren, die die empirisch nicht haltbaren Skaleneffekte in Modellen des endogenen technischen Fortschritts eliminieren und trotzdem zu endogenem Wachstum führen, ist gezeigt worden, daß diese Modelle auf Grenzfällen der Parameterwerte basieren, die endogenes Wachstum ohne Skaleneffekte praktisch unwahrscheinlich machen. Obwohl die Endogenität des Wachstums und die Existenz von Skaleneffekten logisch voneinander unabhängig sind, ist gezeigt worden, daß ausschließlich diejenigen Modelle robust gegenüber Parameteränderungen sind, in denen das Wachstum semi-endogen und frei von Skaleneffekten ist. Ein robustes Modell des Wachstums einer geschlossenen Volkswirtschaft mit exogenem Bevölkerungswachstum sagt voraus, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens proportional zur Wachstumsrate der Bevölkerung ist. Sofern man also Wachstumsmodelle mit endogenem technischem Fortschritt und exogenem Bevölkerungswachstum konstruiert, sollte es sich dabei um semi-endogene Wachstumsmodelle ohne Skaleneffekte handeln.

Die prinzipiellen Implikationen der semi-endogenen Wachstumsmodelle ohne Skaleneffekte in geschlossenen Volkswirtschaften sind im wesentlichen davon unabhängig, worauf der technische Fortschritt letztlich basiert. Im Sinne des Postulats der Einfachheit ist daher ein Modell formuliert worden, in dem der technische Fortschritt auf dem learning by doing statt auf der Forschung und Entwicklung beruht. Diese Annahme wird durch die empirische Bedeutung des learning by doing gerechtfertigt. Anhand dieses Modell ist gezeigt worden, daß die stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums mit zwei Ausnahmen gut unter Verwendung der im Kapitel 3 eingeführten Goldenen Faustregel im Rahmen einer geschlossenen Volkswirtschaft erklärt werden können. Durch den Vergleich mit den optimalen Lösungen bei zentraler und dezentraler Planung hat sich darüber hinaus gezeigt, daß eine optimale Wirtschaftspolitik, die für die dezentrale Optimierungslösung im steady state gilt, auch für die Goldene Faustregel optimal sein kann, wenn man sich auf das Optimum im langfristigen Gleichgewicht beschränkt. Hierdurch werden zum einen die Implikationen neoklassischer Optimierungsmodelle gestützt, die also auch bei Verletzung der strikt neoklassischen Annahmen sinnvoll sein können. Zum anderen weist das Argument darauf hin, daß eine Betrachtung der optimalen Wirtschaftspolitik für den steady state unter Umständen hinreichend ist. Denn die Bestimmung etwa optimaler Subventionssätze während der Übergangsdynamik, die sich in der Zeit ändern, dürfte in der Realität ohnehin bei weitem zu anspruchsvoll sein.

Die beiden genannten Ausnahmen bezüglich der Erklärung der stilisierten Fakten betreffen die positive Korrelation zwischen dem Wachstum des Außenhandelsvolumens und dem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens sowie die negative Korrelation zwischen den Wachstumsraten der Bevölkerung und denjenigen des Pro-Kopf-Einkommens. Die Erklärung dieser Fakten steht im Mittelpunkt des Kapitels 5, das sich mit dem Wachstum in offenen Volkswirtschaften beschäftigt.

Kapitel 5:
Wachstum in offenen Volkswirtschaften

5.1 Die Bedeutung des Außenhandels für das Wachstum

5.1.1 Allgemeine Ansatzpunkte

Im Abschnitt 4.5.3 ist gezeigt worden, daß die auf den Seiten 183-184 aufgeführten stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums mit Ausnahme der Fakten 7 (positive Korrelation zwischen dem Wachstum des Außenhandels und dem Wirtschaftswachstum) und 8 (negative Korrelation zwischen dem Bevölkerungswachstum und dem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens) gut anhand eines einfachen semi-endogenen Wachstumsmodells einer geschlossenen Volkswirtschaft zu erklären sind. In diesem Kapitel steht die Erklärung dieser beiden Fakten im Rahmen von Wachstumsmodellen ohne Skaleneffekte im Mittelpunkt. Dabei wird sich auch zeigen, daß die strenge Beziehung zwischen semi-endogenem Wachstum und Wachstum ohne Skaleneffekte im Rahmen offener Volkswirtschaften nicht mehr gilt.

Die genannte Beziehung zwischen dem Bevölkerungswachstum und der Entwicklung des Pro-Kopf-Einkommens im Sinne eines stilisierten Faktums bedeutet nicht, daß es keine Gegenbeispiele gibt. Eine Reihe von Querschnittsanalysen hat jedoch gezeigt, daß die Wachstumsraten der Bevölkerung und des Pro-Kopf-Einkommens entweder unkorreliert oder sogar negativ korreliert sind (vgl. zum Beispiel De Long und Summers, 1991; Mankiw et al., 1992). Nach Goodfriend und McDermott (1995, S. 128) ist die empirische Beziehung zwischen beiden Größen schwach, was auch durch die Analyse eines Querschnitts von Ländern von Kuznets (1973) bestätigt wird. Die Autoren schließen, daß die Wachstumstheorie einem **Bevölkerungspuzzle (population puzzle)** gegenübersteht. Für den Fall semi-endogener Wachstumsmodelle offenbart sich dieses Puzzle anhand der Gleichung (4.42) auf der Seite 223.

In der Literatur existieren einige Versuche, dieses Bevölkerungspuzzle zu erklären. So argumentiert Jones (1995, S. 777–778) in seinem Originalbeitrag zum semi-endogenen Wachstum, daß sein Modell nicht im Widerspruch zur Empirie stehe, da es lediglich auf bereits entwickelte Volkswirtschaften oder sogar einen Teil der gesamten Welt anwendbar sei. Außerdem sei nicht das Wachstum der Bevölkerung selbst, sondern dasjenige der Anzahl der Forscher für das Wachstum verantwortlich. Diese Argumente sind zwar stichhaltig, implizieren aber schließlich, daß das Modell von Jones keine Aussage über die Implikationen des Bevölkerungswachstums für internationale Unterschiede in den Wachstumsraten der Pro-Kopf-Einkommen machen kann. Darüber hinaus verträgt sich das die Anzahl der Forscher betreffende Argument nicht mit der plausiblen Annahme, daß es in größeren Volkswirtschaften mehr Forscher als in kleineren Volkswirtschaften gibt. Die Argumente von Goodfriend und McDermott (1995, S. 128–129) sind insoweit ähnlich, als sie hinsichtlich der Erklärung unterschiedlich hoher Pro-Kopf-Einkommen in den industrialisierten Ländern die Bedeutung des Humankapitals pro Kopf anstelle der Bevölkerung selbst betonen. Mit Bezug zu den Entwicklungsländern kann in ihrem Modell ein temporärer Rückgang des Pro-Kopf-Einkommens durch das Bevölkerungswachstum auftreten, weil sich der Pro-Kopf-Output als Durchschnitt aus dem Output eines traditionellen Sektors mit abnehmenden Skalenerträgen und dem eines marktwirtschaftlichen Sektors mit steigenden Skalenerträgen ergibt. Ein langfristig negativer Effekt des Bevölkerungswachstums auf das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens ist auch in ihrem Modell nicht möglich.

Ein positiver Einfluß der Bevölkerungsgröße auf das Pro-Kopf-Einkommen findet sich schon in dem Modell des learning by doing, das Simon und Steinmann (1984) einige Jahre vor der Entwicklung der Theorie des endogenen Wachstums formuliert haben. Ähnlich wie Jones (1995) argumentieren diese Autoren, daß die empirischen Daten nicht im Widerspruch zu ihrer Analyse stehen, da der technische Fortschritt über die nationalen Grenzen hinweg diffundiere, woraus sie folgern, daß die relevante Untersuchungseinheit nicht ein einzelnes Land, sondern die gesamte westliche industrialisierte Welt sei (Simon und Steinmann, 1984, S. 180). Allerdings ist diese Annahme der internationalen **knowledge spillovers** empirisch fragwürdig. Zwar bestehen knowledge spillovers aufgrund des learning by doing laut Irwin und Klenow (1994) nicht nur intranational, sondern auch international, doch basieren diese Ergebnisse nach Branstetter (2001) auf erheblichen Beschränkungen der verfügbaren Daten. Obwohl Branstetter (2001) selbst mit den spillovers der Forschung und Entwicklung befaßt ist, sprechen seine Ergebnisse dafür, daß die Diffusion des Wissens in erster Linie auf der nationalen statt auf der internationalen Ebene auftritt, unabhängig davon, ob dieses Wissen durch das learning by doing oder durch die Forschung entstanden ist. Diese Interpretation wird auch durch empirische Studien des **Heckscher-Ohlin-Samuelson(HOS)-Modells** der Außenhandelstheorie nahegelegt,[1] die zu dem Ergebnis kommen, daß die Handelsrichtungen nicht allein durch die Faktorbestände erklärt werden können, sondern auch auf Unterschieden in der Produktionstechnik zwischen den betrachteten Ländern basieren (vgl. zum Beispiel Trefler, 1995; Gustavson et al., 1999).[2] Dementsprechend werden in den Abschnitten 5.2 und 5.3 Modelle analysiert, in denen die spillovers des technischen Fortschritts nur innerhalb der Grenzen eines Landes auftreten. Die Erklärung des stilisierten Fak-

[1] Das HOS-Theorem wird in beinahe jedem beliebigen Lehrbuch zur Außenhandelstheorie oder auch in Christiaans (1997, S. 62) dargestellt. Für den Fall eines 2×2×2-Modells (mit zwei Ländern, zwei Sektoren und zwei Faktoren) besagt es: *Wenn zwei Länder über identische linearhomogene Produktionsfunktionen und identische homothetische Präferenzen verfügen und im Bereich der gegebenen gesamtwirtschaftlichen Faktorintensitäten keine sektoralen Faktorintensitätsumkehrungen auftreten, exportiert jedes Land das Gut, dessen Produktion den relativ reichlich vorhandenen Faktor relativ intensiv nutzt und importiert das Gut, das den relativ knappen Faktor relativ intensiv nutzt.*

[2] Damit soll keineswegs behauptet werden, daß der internationale Wissenstransfer vernachlässigbar gering ist, sondern lediglich, daß die stilisierende Annahme intranationaler learning spillovers gerechtfertigt ist. Eine komplementäre Analyse mit vollständigen internationalen spillovers ist zum Beispiel aufgrund der Ergebnisse von Coe und Helpman (1995) zu rechtfertigen. Die empirische Wirtschaftsforschung ist nach wie vor in einem Stadium, in dem man zu einem gegebenen empirischen Ergebnis so gut wie immer auch ein entgegengesetztes Ergebnis finden kann, was allerdings auch daran liegen kann, daß die Wahrheit in der Mitte liegt.

tums 8 beziehungsweise die Lösung des Bevölkerungspuzzles ist der Gegenstand des Abschnitts 5.2.

Wie bereits früher angemerkt worden ist, ist die Analyse der Wirkung des Pro-Kopf-Einkommens auf die Wachstumsrate der Bevölkerung nicht der Gegenstand der vorliegenden Erörterungen, die sich ausschließlich mit der umgekehrten Wirkungsrichtung befassen. In Ansätzen mit endogener Wachstumsrate der Bevölkerung muß das Bevölkerungspuzzle nicht auftreten. Zum Beispiel zeigen Becker et al. (1990) für den Fall steigender Grenzproduktivitäten des Humankapitals die Möglichkeit auf, daß arme Gesellschaften größere Familien wählen als reiche Gesellschaften, die in die Akkumulation des Humankapitals investieren. Insofern kann das im Abschnitt 5.2 betrachtete Modell als komplementäre Analyse angesehen werden, die zeigt, daß das Bevölkerungspuzzle auch in einem semi-endogenen Wachstumsmodell mit exogener Wachstumsrate der Bevölkerung gelöst werden kann, wenn man spezifische Charakteristika wie die Abhängigkeit von importierten Zwischenprodukten in sich entwickelnden Volkswirtschaften berücksichtigt.

Die neuere Literatur zum Wachstum in offenen Volkswirtschaften befaßt sich vornehmlich mit der Beziehung zwischen dem Grad der Offenheit und dem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens, also mit dem stilisierten Faktum 7, sowie der Konvergenz der Pro-Kopf-Einkommen. Wie Feenstra (1996) bemerkt, finden sich dabei zwei entgegengesetzte Ergebnisse, wobei er sich auf die Theorie des endogenen Wachstums bezieht. Während die Modelle des learning by doing (zum Beispiel Young, 1991; Lucas, 1988, Abschnitt 5) in der Regel eine Divergenz der Wachstumsraten in den beteiligten Ländern vorhersagen, wobei nur eines der beiden Länder einen Wachstumsgewinn hat, implizieren die Romer (1990) folgenden Ansätze des endogenen technischen Fortschritts in der Regel eine Erhöhung und Konvergenz der Wachstumsraten als Konsequenz des internationalen Handels (zum Beispiel Rivera-Batiz und Romer, 1991a,b; Grossman und Helpman, 1991a). Dieses Ergebnis ist allerdings in vielen Fällen davon abhängig, daß unterstellt wird, daß die internationale Diffusion des Wissens gleichzeitig mit der Aufnahme des Außenhandels auftritt. Wie bereits angemerkt worden ist, erscheint diese Annahme aufgrund der empirischen Evidenz als nicht unproblematisch. Die Aussage, daß die Wissensdiffusion in erster Linie intranational stattfindet, bedeutet natürlich nicht, daß es gar keine internationalen knowledge spillovers gibt. Offensichtlich vermittelt der internationale Handel zumindest die Kenntnis von der Existenz der gehandelten Produkte, wenn sie bei Autarkie nicht verfügbar gewesen sind. Insofern kann es zwar gerechtfertigt sein, eine internationale Wissensdiffusion in theoretischen Modellen zu berücksichtigen, doch sollte man dabei nicht so weit gehen, eine Konvergenz der Wachstumsraten allein damit zu begründen.

Während das stilisierte Faktum 7 auch durch zahlreiche neuere empirische Untersuchungen gestützt wird, haben Rodriguez und Rodrik (2000) in einer vielbeachteten kritischen Evaluierung der empirischen Studien ernsthafte Zweifel an der Gültigkeit dieser Ergebnisse geäußert. So kritisieren die Autoren die Eignung einiger empirisch verwendeter Meßgrößen für die Offenheit eines Landes (hinsichtlich des Außenhandels) ebenso wie die verwendeten ökonometrischen Methoden. Ihr Fazit lautet: *The issue is far from having been settled on empirical grounds. We are in fact skeptical that there is a general, unambiguous relationship between trade openness and growth waiting to be discovered. We suspect that the relationship is a contingent one, dependent on a host of country and external characteristics* (Rodriguez und Rodrik, 2000, S. 6). Diese Einschätzung steht im Einklang mit anderen Ergebnissen, die eine einfache Beziehung derart, daß freierer Handel immer zu mehr Wachstum führt, zweifelhaft erscheinen lassen. So wird Süd-Korea häufig als Beispiel für eine erfolgreiche Entwicklungspolitik unter Freihandel genannt. Eine genauere Analyse zeigt jedoch, daß Süd-Korea zwar Außenhandel, aber keineswegs Freihandel im klassischen Sinne des Wortes, sondern tatsächlich eine aktive Industriepolitik verfolgt hat (vgl. Pack und Westphal, 1986).

Wenn es keine stets gültige Beziehung zwischen dem Freihandel und dem Wachstum gibt, erscheint die Formulierung eines Modells sinnvoll, daß sowohl eine positive als auch eine negative Beziehung zuläßt. Dadurch wird die Möglichkeit eröffnet, Ursachen für das eine oder andere Verhalten auszumachen. Ein solches, wenn auch sehr einfaches Modell, wird im Abschnitt 5.3 eingeführt. Dabei wird sich herausstellen, daß die Wachstumsrate der Bevölkerung entscheidend für die Industrialisierung oder Deindustrialisierung eines Landes sein kann, wobei sich der Begriff der *Deindustrialisierung* auf einen Abbau der industriellen Konkurrenzfähigkeit und eine immer stärkere Spezialisierung auf die landwirtschaftliche Produktion bezieht. Daraus ergibt sich, daß die Wachstumsrate der Bevölkerung für eine positive oder negative Beziehung zwischen dem Außenhandel und dem Wachstum verantwortlich sein kann. In diesem Zusammenhang wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Bedeutung der Faktorausstattung der am internationalen Handel beteiligten Länder, die in der HOS-Theorie des internationalen Handels die zentrale Rolle spielt, in der Theorie des endogenen Wachstums mit Bezug zu offenen Volkswirtschaften nur wenig beachtet wird.[3] Im dynamischen Umfeld des Wirtschaftswachstums ist die Faktorausstattung nicht gegeben, sondern sie entwickelt sich in der Zeit, das heißt, die Wachstumsrate der Bevölkerung und die Bestimmungsgründe der Akkumulation des Kapitals übernehmen hier die Rolle der Faktorausstattung in der statischen Theorie. Die geringe Beachtung dieser Tatbestände in Modellen des endogenen Wachstums mit Skaleneffekten kann wohl dadurch erklärt werden, daß die Berücksichtigung des Bevölkerungswachstums in diesen Modellen nicht sinnvoll möglich ist.

Diese Überlegungen zeigen, daß die stilisierten Fakten 7 und 8 in einem engen Zusammenhang stehen und daher letztlich nur anhand von Modellen offener Volkswirtschaften befriedigend erklärt werden können. Der Außenhandel ist in der Theorie des semi-endogenen Wachstums bisher kaum berücksichtigt worden,[4] wenn man

[3] In Grossman und Helpman (1991a) finden sich zwar auch Modelle mit komparativen Vorteilen aufgrund der Faktorausstattung, wobei die Primärfaktoren Arbeit und Humankapital aber exogen gegeben sind und die Akkumulation des Kapitals keine Rolle spielt, weil die Zwischenprodukte keine Gebrauchsgüter, sondern Verbrauchsgüter sind.

[4] Zu den wenigen Ausnahmen gehören die Artikel von Eicher und Turnovsky (1999b) und Dinopoulos

von einigen frühen Ansätzen wie Sheshinski (1967a) absieht, in deren Mittelpunkt nicht die Erklärung langfristig unterschiedlicher Wachstumsraten gestanden hat. In den Abschnitten 5.2 und 5.3 werden zwei neue Modelle dargestellt. Zuvor wird ein knapper Überblick über die Berücksichtigung des Außenhandels in der älteren neoklassischen Theorie und der Theorie des endogenen Wachstums gegeben. Mit Bezug zu allen folgenden Analysen wird darauf hingewiesen, daß Wanderungen und der Kapitalverkehr sowie die internationale Verschuldungsproblematik vernachlässigt werden. Die *Offenheit* der betrachteten Volkswirtschaften bezieht sich also lediglich auf den internationalen Handel. Ohne Dienstleistungen und Kapitalverkehr besteht in einem realen Modell des Außenhandels in jedem Zeitpunkt ein **Ausgleich der Handelsbilanz**.

5.1.2 Außenhandel in der älteren neoklassischen Theorie

Ansatzpunkte Die Analyse des Zusammenhangs zwischen dem Wachstum des Nationaleinkommens und dem Außenhandel hat in der neoklassischen Theorie eine lange Tradition. Zu unterscheiden sind hier zwei unterschiedliche Ansätze. Zum einen kann man das neoklassische Grundmodell der Wachstumstheorie explizit um den Außenhandel erweitern. Obwohl auch das Solow-Modell oder das RKC-Modell für den Fall offener Volkswirtschaften analysiert werden können (vgl. zum Beispiel Barro und Sala-i-Martin, 1998, Kapitel 3), kann der Außenhandel selbst nur dann sinnvoll erklärt werden, wenn mindestens zwei Sektoren berücksichtigt werden. Daher bietet sich zu diesem Zweck insbesondere das Zwei-Sektoren-Wachstumsmodell von Uzawa (1961a, 1963) an, dessen Produktionsstruktur weitestgehend mit derjenigen des Heckscher-Ohlin-Samuelson-(HOS)-Modells des Außenhandels übereinstimmt. Diese dynamische Version des $2 \times 2 \times 2$-Außenhandelsmodells ist von Oniki und Uzawa (1965) und von Bardhan (1965, 1966) entwickelt worden. Zum anderen kann man das Wirtschaftswachstum auch als einmalige exogene Änderung etwa des Kapitalstocks oder der Produktionseffizienz in einem statischen Außenhandelsmodell berücksichtigen. Zur Unterscheidung von der dynamischen Theorie werden solche Ansätze häufig unter dem Stichwort **ökonomische Expansion** geführt. Ein klassischer Artikel zu diesen Modellen, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, ist Johnson (1959), und moderne Darstellungen findet man zum Beispiel in Dixit und Norman (1998, Kapitel 5) oder Woodland (1982, Kapitel 13).

---

und Segerstrom (1999). Eicher und Turnovsky (1999b) betrachten ein Modell des semi-endogenen Wachstums mit internationalem Kapitalverkehr. Da in diesem Ansatz jedoch nur ein Gut produziert wird, spielen etwa komparative Vorteile für den Außenhandel keine Rolle. Das Zwei-Länder-Modell von Dinopoulos und Segerstrom (1999) befaßt sich mit einer Erklärung der zunehmenden Lohndifferentiale zwischen hochqualifizierter und geringqualifizierter Arbeit in den USA aufgrund einer *Schumpeterschen Version* des Stolper-Samuelson-Theorems. Obwohl der internationale Handel in diesem Modell die Wachstumsraten beeinflussen kann, ist die Erklärung unterschiedlicher Wachstumsraten nicht sein Sinn. Trotz der Vernachlässigung der Akkumulation des physischen Kapitals ist das Modell darüber hinaus bei weitem zu komplex, um eine Analyse außerhalb des steady state zu ermöglichen.

Eine vollständige Analyse des Oniki-Uzawa-Bardhan-(OUB)-Modells ist relativ aufwendig und findet sich zum Beispiel bei Bardhan (1970). Aus diesem Grund gibt es einige Versuche, vereinfachte Versionen graphisch zu erörtern (vgl. etwa Johnson, 1971; Deardorff, 1974). Jedoch sind diese graphischen Ansätze zum einen kein vollständiger Ersatz und zum anderen ebenfalls nur mit einigem Aufwand wiederzugeben. Im nächsten Unterabschnitt wird das OUB-Modell daher lediglich für den Spezialfall der Diversifikation der Produktion dargestellt, wobei einige der verwendeten Aussagen, wie etwa über die Eigenschaften der Erlösfunktion oder das Rybczynski-Theorem, **Standardergebnisse der Außenhandelstheorie** sind, die hier vorausgesetzt und nur knapp skizziert werden. Vollständige Beweise zu diesen Resultaten findet man zum Beispiel in Christiaans (1997) oder in den meisten fortgeschrittenen Lehrbüchern zur Außenhandelstheorie.

Das Oniki-Uzawa-Bardhan-Modell Zunächst wird das Inland mit zwei Sektoren betrachtet, wobei der **Sektor 1 ein reines Investitionsgut** und der **Sektor 2 ein reines Konsumgut** produziert. Abschreibungen werden vernachlässigt. Beide Produktionsfunktionen $F_1(K_1, L_1)$ und $F_2(K_2, L_2)$ sind neoklassisch und erfüllen die Inada-Bedingungen, wobei K_i und L_i, $i = 1, 2$, den Kapitaleinsatz und den Arbeitseinsatz im ersten und zweiten Sektor bezeichnen. Da die Produktionsfunktionen linearhomogen sind, lassen sie sich umformen zu

$$Y_1 = L_1 f_1(k_1), \quad Y_2 = L_2 f_2(k_2),$$

wobei $k_i := K_i/L_i$ und $f_i(k_i) := F_i(k_i, 1)$ ist. Definiert man $y_i := Y_i/L$ und $l_i := L_i/L$, wobei L die der Bevölkerung entsprechende Gesamtarbeitsmenge ist, so ergibt sich für den Output des ersten und des zweiten Gutes pro Kopf der Bevölkerung

$$y_1 = (1 - l_2) f_1(k_1), \quad y_2 = l_2 f_2(k_2), \tag{5.1}$$

wobei $l_1 = 1 - l_2$ aus der Bedingung $L_1 + L_2 = L$ für die Vollbeschäftigung der Arbeit folgt. Der gesamte Kapitalstock ist gleich K. Bei Vollbeschäftigung gilt daher $K_1 + K_2 = K$. Durch Division der beiden Bedingungen für die Vollbeschäftigung erhält man die Beziehung

$$k = (1 - l_2) k_1 + l_2 k_2, \quad \text{und damit} \quad l_2 = \frac{k - k_1}{k_2 - k_1}, \tag{5.2}$$

wenn $k_2 \neq k_1$ ist. Wie zuvor ist $k := K/L$.

Da angenommen worden ist, daß die Produktionsfunktionen neoklassisch sind und die Inada-Bedingungen erfüllen, läßt sich für den Fall der **Diversifikation** der Produktion zeigen, das heißt, wenn beide Güter produziert werden, daß die sektoralen Kapitalintensitäten bei vollständiger Konkurrenz steigende Funktionen des Faktorpreisverhältnisses $\omega := w/r$ sind, wobei w der Reallohnsatz und r der Nutzungspreis des Kapitals ist. Nimmt man zusätzlich an, daß sich die Faktorintensitäten nicht umkehren, so ist das Faktorpreisverhältnis eine Funktion des Güterpreisverhältnisses, also eindeutig durch das Güterpreisverhältnis bestimmt. Die Produktion des **Investitionsgutes 1 sei relativ arbeitsintensiv**, das heißt $k_1(\omega) < k_2(\omega)$ für alle $\omega > 0$. Dann gilt mit dem relativen Preis p des Investitionsgutes in Einheiten des Konsumgutes (p hat die Dimension Konsumguteinheiten pro Investitionsguteinheit), daß $\omega = \omega(p)$ mit $\omega'(p) > 0$, wobei ω von der Faktorausstattung unabhängig ist, solange die Volkswirtschaft diversifiziert ist.[5] Zusammen mit (5.1) und (5.2) erkennt man, daß y_1 und y_2 als Funktionen von p und k dargestellt werden können. Das Pro-Kopf-Einkommen in Einheiten des Konsumgutes ist also

$$y(p,k) = py_1(p,k) + y_2(p,k). \tag{5.3}$$

In diesem Zusammenhang besagt das **Rybczynski-Theorem**, daß $\partial y_1/\partial k < 0$, weil Gut 1 relativ arbeitsintensiv hergestellt wird. Nach **Hotellings Lemma** ist $\partial y/\partial p = y_1(p,k)$. Der **Umhüllendensatz** liefert $\partial y/\partial k > 0$, wobei diese Ableitung den Nutzungspreis des Kapitals ergibt. Für den **eigenen Preiseffekt** des ersten Gutes gilt $\partial y_1/\partial p > 0$. Solange Diversifikation herrscht, impliziert das **Theorem vom Ausgleich der Faktorpreise**, daß $\partial y/\partial k$ für gegebenes p konstant ist und nicht von der Größe der betrachteten Volkswirtschaft abhängt. Eine analoge Aussage gilt für $\partial y_1/\partial k < 0$.

Exemplarisch wird der Beweis des **Rybczynski-Theorems** skizziert. Zunächst setzt man (5.2) in (5.1) ein und leitet y_1 nach k ab. Weil im Bereich der Diversifikation $k_i = k_i(\omega(p))$ gilt, ist k_i von k unabhängig. Das Ergebnis ist

$$\frac{\partial y_1}{\partial k} = \frac{f_1(k_1)}{k_1 - k_2},$$

also für gegebenes p wegen $k_1 < k_2$ eine negative Konstante (solange die Produktion diversifiziert ist). Während das Rybczynski-Theorem hier lediglich in bezug auf die Angebotsmenge pro Kopf in Abhängigkeit von der Kapitalintensität berechnet worden ist, gilt unter den getroffenen Annahmen allgemeiner, daß bei einer Erhöhung des Kapitalstocks die Gesamtangebotsmenge des ersten Gutes fällt, während die Menge des zweiten Gutes überproportional steigt.

Bezeichnet man die konstante Sparquote mit s und die Wachstumsrate der Bevölkerung mit n, so verändert sich die Kapitalintensität analog zum neoklassischen Grundmodell gemäß

$$\dot{k} = sy(p,k)/p - nk, \tag{5.4}$$

wobei zu beachten ist, daß $sy(p,k)/p$ nicht mit $y_1(p,k)$ übereinstimmen muß, weil Investitionsgüter auch importiert oder exportiert werden können. Die Variablen des Auslands werden durch einen Stern gekennzeichnet. Damit gilt analog

$$\dot{k}^* = s^* y(p,k^*)/p - nk^*, \tag{5.5}$$

[5] Wenn in beiden betrachteten Volkswirtschaften beide Güter produziert werden und die Produktionstechnik in beiden Ländern jeweils übereinstimmt, bewirkt der internationale Handel also nicht nur einen Ausgleich des Relativpreises p, sondern auch von ω und damit letztlich auch der Faktorpreise. Das ist das berühmte **Theorem vom Ausgleich der Faktorpreise**.

wobei angenommen wird, daß sich das Ausland lediglich durch die Höhe der Sparquote vom Inland unterscheidet und daß der internationale Handel zu einem Ausgleich des relativen Preises p des Investitionsgutes führt. Daher stimmen die Angebotsfunktionen und damit auch die **Pro-Kopf-Erlösfunktion** y in beiden Ländern überein, so daß hier ebenso wie bei der Wachstumsrate n der Bevölkerung keine Kennzeichnung der ausländischen Größen durch einen Stern erfolgt.

Aufgrund des **Walras-Gesetzes** reicht die Betrachtung eines Marktes aus. Das gleichgewichtige Preisverhältnis am Weltmarkt ergibt sich daher aus der Bedingung, daß die Summe der Überschußnachfragen nach dem Gut 1 gleich null ist. Die Überschußnachfrage des Inlands pro Kopf ist

$$e_1(p,k) = sy(p,k)/p - y_1(p,k),$$

analog für das Ausland. Da die Wachstumsraten der Bevölkerung in beiden Ländern übereinstimmen, ist $L^* = \theta L$ mit einer Konstanten $\theta > 0$. Also kann man die Bedingung $Le_1 + L^* e_1^* = 0$ durch L dividieren und erhält die Gleichgewichtsbedingung

$$e_1(p,k) + \theta e_1^*(p,k^*) = 0.$$

In jedem Zeitpunkt sind k und k^* gegeben, so daß sich der kurzfristige Gleichgewichtswert von p aus dieser Gleichung als Funktion von (k,k^*) ergibt.[6] Durch implizite Differentiation erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial k} = -\frac{\partial e_1/\partial k}{\partial e_1/\partial p + \theta \partial e_1^*/\partial p}$$

Aufgrund des früher angegebenen Umhüllendensatzes und des Rybczynski-Theorems ist der Zähler in dieser Gleichung positiv. Der Nenner ist negativ, weil $\partial(y/p)/\partial p$ unter Verwendung von Hotellings Lemma gleich $-y_2/p^2 < 0$ und $\partial y_1/\partial p > 0$ ist (analog gilt das für die Ableitung von e_1^*). Für die Ableitung von p nach k^* erhält man entsprechende Ergebnisse, so daß gilt:

$$\frac{\partial p}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial k^*} > 0.$$

Setzt man $p = p(k,k^*)$ in die Gleichungen (5.4) und (5.5) ein, so erhält man $\dot{k}$ und $\dot{k}^*$ als Funktionen von (k,k^*). Die Ableitungen dieser Funktionen können unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse wie folgt berechnet werden:

$$\left.\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\right|_{\dot{k}=0} < 0, \quad \frac{\partial \dot{k}}{\partial k^*} < 0, \quad \frac{\partial \dot{k}^*}{\partial k} < 0, \quad \left.\frac{\partial \dot{k}^*}{\partial k^*}\right|_{\dot{k}^*=0} < 0.$$

[6] Die Existenz und Eindeutigkeit des kurzfristigen Gleichgewichts sind aufgrund von Standardargumenten gewährleistet, so daß in der Tat eine Funktion $p = p(k,k^*)$ vorliegt, vgl. Christiaans (1997, S. 57–58).

Der **Beweis** wird für $\partial\dot{k}/\partial k$ angegeben:

$$\frac{\partial\dot{k}}{\partial k} = -s\frac{y_2}{p^2}\frac{\partial p}{\partial k} + \frac{s}{p}\frac{\partial y}{\partial k} - n.$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist negativ. Für $\dot{k} = 0$ gilt gemäß (5.4)

$$\frac{s}{p}\frac{y(p,k)}{k} - n = 0.$$

Daher sind der zweite und dritte Term zusammen negativ, wenn $\partial y/\partial k < y(p,k)/k$ ist. Die Pro-Kopf-Erlösfunktion $y(p,k)$ ist unter den getroffenen Annahmen über die Produktionsfunktionen konkav in k. Sei $\underline{k}$ der Wert von k, für den die vollständige Spezialisierung auf die Produktion des relativ arbeitsintensiven Gutes 1 einsetzt, und $\overline{k}$ der Wert, bei dem es zur vollständigen Spezialisierung auf das Gut 2 kommt. Dann entspricht die Pro-Kopf-Erlösfunktion für $k \leqq \underline{k}$ einfach $pf_1(k)$, und für $k \geqq \overline{k}$ ist sie gleich $f_2(k)$. Daher übertragen sich die Inada-Bedingungen für diese Intervalle von den Produktionsfunktionen auf die Pro-Kopf-Erlösfunktion. Das Intervall $(\underline{k}, \overline{k})$ entspricht dem sogenannten Diversifikationskegel, in dem die Steigung von y bezüglich k konstant ist. Anhand der Abbildung 5.1 ist nun unmittelbar zu erkennen,

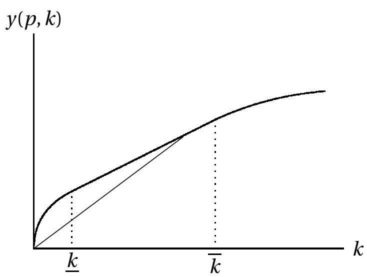

Abbildung 5.1
$y(p,k)$ in Abhängigkeit von k und ein Ursprungsstrahl

daß $\partial y/\partial k$ (die Steigung von $y(p,k)$ in k) für alle $k > 0$ kleiner als $y(p,k)/k$ (die Steigung des Ursprungsstrahls) ist. Also ist $\partial\dot{k}/\partial k$ für $\dot{k} = 0$ negativ. Der Beweis für $\partial\dot{k}/\partial k^*$ ist einfacher. Die Beweise für die Ableitungen von $\dot{k}^*$ verlaufen analog.

Durch die berechneten Ableitungen werden die Steigungen der Isoklinen $\dot{k} = 0$ und $\dot{k}^* = 0$ im (k, k^*)-Raum festgelegt. Zum Beispiel ist

$$\left.\frac{dk^*}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = -\left.\frac{\partial\dot{k}/\partial k}{\partial\dot{k}/\partial k^*}\right|_{\dot{k}=0} < 0,$$

was analog für die Ableitung der $\dot{k}^* = 0$-Isokline gilt. Berechnet man alle Ableitungen, so ergibt sich nach einer mühsamen, aber einfachen Umformung, daß die $\dot{k} = 0$-Isokline im (k, k^*)-Diagramm steiler verläuft als die $\dot{k}^* = 0$-Isokline. Damit gilt

$$\left.\frac{dk^*}{dk}\right|_{\dot{k}=0} < \left.\frac{dk^*}{dk}\right|_{\dot{k}^*=0} < 0.$$

Daran ist schnell zu erkennen, daß die Determinante $|J|$ der im Gleichgewicht berechneten Jacobi-Matrix J des Systems (5.4) und (5.5) [mit $p = p(k, k^*)$] positiv ist, während die Spur negativ ist. Also ist die Routh-Hurwitz-Bedingung für die **lokale Stabilität** des Gleichgewichts erfüllt. Anhand von J kann man auch den Einfluß der Sparquote auf die Kapitalintensitäten berechnen. Bildet man das totale Differential der Gleichungen $\dot{k} = 0$ und $\dot{k}^* = 0$ bezüglich k, k^* und s, so folgt

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{(y/p)(\partial\dot{k}^*/\partial k^*)}{|J|} > 0, \quad \frac{dk^*}{ds} = \frac{(y/p)(\partial\dot{k}^*/\partial k)}{|J|} < 0,$$

weil $\partial\dot{k}^*/\partial k^* < 0$, $\partial\dot{k}^*/\partial k < 0$ und $|J| > 0$ ist. Ausgehend von $s = s^*$ gilt also, daß das Inland mit der höheren Sparquote ($ds > 0$) eine höhere gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität als das Ausland hat.

Beschränkt man sich auf eine geschlossene Volkswirtschaft, so kann man mit analogen Methoden zeigen, daß bei Autarkie im steady state die Kapitalintensität und der Relativpreis p des Investitionsgutes mit der Sparquote steigen.[7] Wenn sich das Inland und das Ausland nur durch die Sparquote unterscheiden, so hat das Inland mit $s > s^*$ also vor Aufnahme des Handels eine höhere Kapitalintensität und einen komparativen Vorteil bei den kapitalintensiven Konsumgütern. Daher exportiert das Inland das Konsumgut und importiert das Investitionsgut. Wie in der statischen Außenhandelstheorie gilt auch in diesem Fall, daß der relative Weltmarktpreis nach Aufnahme des Handels zwischen den Preisverhältnissen bei Autarkie liegt. Durch den Außenhandel sinkt also aus der Sicht des Inlands der relative Preis p. Durch die Bildung des Differentials von (5.4) für $\dot{k} = 0$ bezüglich k und p kann man ableiten, daß $dk/dp|_{\dot{k}=0} < 0$, daß also die gleichgewichtige Kapitalintensität steigt, wenn p sinkt. Das bedeutet, daß die Kapitalintensität k des Inlands, die schon bei Autarkie größer als diejenige des Auslands ist, durch den Außenhandel weiter steigt, während k^* fällt. Im OUB-Modell werden also **bestehende komparative Vorteile** durch die Öffnung der Volkswirtschaften **verstärkt**.

Ebenso wie in statischen Modellen hat der internationale Handel auch in diesem dynamischen Modell eine Auswirkung auf den Wohlstand, hier gemessen durch das Konsumniveau pro Kopf. Man kann zeigen, daß der Außenhandel zwar immer eine potentielle Pareto-Verbesserung in dem Sinne mit sich bringt, daß der Pro-Kopf-Konsum in jedem Zeitpunkt durch eine angemessene Anpassung der Sparquote potentiell steigt, daß es allerdings möglich ist, daß der Pro-Kopf-Konsum im steady state nach Aufnahme des Handels bei konstanter Sparquote sinkt. Hier spielen die Höhe der Sparquote (die wie im Solow-Modell ineffizient sein kann) und im Fall eines großen Landes die Erhebung eines Optimalzolls eine Rolle. Eine diesbezügliche Analyse des Zwei-Sektoren-Modells liefert Smith (1977).

Die Darstellung hier hat sich auf den Fall der Diversifikation der Produktion in beiden Ländern beschränkt. Unter den sonstigen getroffenen Annahmen kann man

[7] Die Gleichgewichtsbedingungen bei Autarkie lassen sich formulieren als $sy(p, k) - pnk = 0$ und $sy(p, k) - py_1(p, k) = 0$. Unter den hier getroffenen Annahmen erhält man daraus durch Bildung des totalen Differentials bezüglich p, k und s, daß $dp/ds > 0$ und $dk/ds > 0$.

auch für den allgemeinen Fall zeigen, daß das langfristige Gleichgewicht eindeutig ist, wobei allerdings auch vollständige Spezialisierung der Produktion in einer oder in beiden Volkswirtschaften auftreten kann. Dieses eindeutige Gleichgewicht ist in allen Fällen global stabil, so daß sich an den wesentlichen Schlußfolgerungen in bezug auf die durch die Sparquoten determinierten Handelsrichtungen und die Verstärkung der komparativen Vorteile durch den internationalen Handel nichts ändert. Während Oniki und Uzawa (1965) den hier behandelten Fall der konstanten Sparquote betrachtet haben, hat Bardhan (1965) den Fall der klassischen Sparfunktion analysiert. Auf die Unterschiede, die sich hieraus ergeben, weist Bardhan (1970, Kapitel 3) in seiner Darstellung des Modells von Oniki und Uzawa (1965) hin. Diese Unterschiede sind weitgehend technischer Natur. So ist das Gleichgewicht bei Diversifikation im Fall einer klassischen Sparfunktion nicht eindeutig und nicht isoliert, wenn es überhaupt existiert, so daß das Konzept der Quasistabilität an die Stelle der Stabilität treten muß (vgl. die Bemerkung 2.8 auf der Seite 36). Anstelle der Bedingung, daß der Investitionsgütersektor relativ arbeitsintensiv produziert, kann die Bedingung treten, daß die Substitutionselastizitäten beider Produktionsfunktionen nicht kleiner als eins sind. Ein Ansatz auf der Grundlage der dynamischen Optimierungslösung schließlich findet sich bei Woodland (1982, Kapitel 14).

Kritische Würdigung Die wesentlichen Kritikpunkte am Modell von Oniki-Uzawa und Bardhan betreffen zwei restriktive Annahmen, die zum Beweis der Stabilität des langfristigen Gleichgewichts (insbesondere bei Diversifikation) getroffen werden. So ist die Bedingung, daß das Konsumgut relativ kapitalintensiv hergestellt wird, häufig kritisiert worden. Takayama (1972, Kapitel 14) analysiert das Modell mit einer klassischen Sparfunktion ohne diese Annahme. Zumindest solange die Überschußnachfrage nach dem Investitionsgut mit dem Relativpreis fällt,[8] ändert sich an den Implikationen für die Wachstumsraten im steady state nichts. Allerdings wird der Fall eines langfristigen Gleichgewichts mit Diversifikation in beiden Ländern zu einem Grenzfall, so daß sich langfristig mindestens eines der beiden Länder vollständig spezialisiert.

Die andere kritisierte Annahme ist die Übereinstimmung der Wachstumsraten der Bevölkerung im Inland und im Ausland. Wie Bardhan (1965) gezeigt hat, ist diese Bedingung **notwendig für die Existenz** eines steady state. Bezeichnet man die Überschußnachfrage nach dem Investitionsgut mit E_1, so gilt für die Wachstumsrate des Kapitalstocks

$$g_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{Y_1}{K} + \frac{E_1}{K}. \tag{5.6}$$

Da im steady state $K/L = k$ und k^* konstant sind, sind auch $p = p(k, k^*)$ und $Y_1/L = y_1 = y_1(p, k)$ konstant. Also wachsen K und Y_1 mit der Rate n des Bevölkerungswachs-

[8] Hinreichend für diese Bedingung, die die Stabilität des statischen Gleichgewichts impliziert, ist etwa, daß das Konsumgut relativ kapitalintensiv produziert wird, oder andernfalls die von Bardhan (1965) angegebene Bedingung, daß die Substitutionselastizitäten beider Produktionsfunktionen nicht kleiner als eins sind.

tums, so daß g_K und Y_1/K konstant sind. Die Gleichung (5.6) impliziert folglich, daß auch E_1/K konstant sein muß. Damit gilt im langfristigen Gleichgewicht $g_{E_1} = n$; analog ist im Ausland $g_{E_1^*} = n^*$. Das Gleichgewicht auf dem Weltmarkt für das Gut 1 bedeutet

$$E_1 = -E_1^* \quad \text{für alle} \quad t.$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt sein, wenn $g_{E_1} = g_{E_1^*}$ und damit $n = n^*$ ist. Die Raten des Bevölkerungswachstums müssen also in beiden Ländern übereinstimmen.

Da die Voraussetzung von identischen Wachstumsraten die Anwendung des Modells erheblich einschränkt, hat Khang (1971) den Fall mit unterschiedlichen Wachstumsraten der Bevölkerung untersucht und gezeigt, daß beide Länder trotzdem asymptotisch ein langfristiges Gleichgewicht erreichen. In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß für Startwerte, die außerhalb eines steady state liegen, dieses langfristige Gleichgewicht grundsätzlich nur asymptotisch erreicht wird. Doch gibt es zum Beispiel im Solow-Modell oder im OUB-Modell mit gleichen Wachstumsraten der Bevölkerung immer (theoretische) Startwerte, für die sich die Länder direkt im steady state befinden. Die asymptotische Aussage von Khang (1971) bezieht sich dagegen auf langfristige Gleichgewichte, die nicht durch die passende Wahl der Startwerte unmittelbar, sondern eben immer nur asymptotisch erreichbar sind, es sei denn im steady state findet gar kein Außenhandel statt. Für den Fall einer klassischen Sparfunktion in beiden Ländern, nach der mit der konstanten Quote s beziehungsweise s^* aus dem Zinseinkommen gespart wird, während das gesamte Lohneinkommen konsumiert wird, zeigt er, daß ein steady state mit Diversifikation in beiden Ländern nur möglich ist, wenn $n/s = n^*/s^*$ gilt. Allerdings ist dieser Fall uninteressant, da es im steady state dann gar keinen Außenhandel gibt.

In der hier verwendeten Notation gilt für eine geschlossene Volkswirtschaft im steady state mit der klassischen Sparfunktion

$$s\frac{\partial y(p,k)}{\partial k}k = pnk \quad \text{und} \quad s\frac{\partial y(p,k)}{\partial k}k = py_1(p,k).$$

Da annahmegemäß sowohl konsumiert als auch investiert wird, ist $\partial y(p,k)/\partial k$ unabhängig von k (vgl. das Theorem vom Ausgleich der Faktorpreise). Diese Aussage gilt auch für die gesamte erste Gleichung, aus der k gekürzt werden kann. Daher ist das Gleichungssystem rekursiv, das heißt, p wird durch die erste Gleichgewichtsbedingung festgelegt und kann dann in die zweite Bedingung eingesetzt werden, um k zu bestimmen. Die erste Bedingung kann man umformen zu

$$\frac{n}{s} = \frac{\partial y(p,k)/\partial k}{p}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nur von p abhängig, das heißt, durch diese Gleichung wird p in Abhängigkeit von n/s festgelegt. Wenn also $n/s = n^*/s^*$ ist, haben beide Volkswirtschaften das gleiche Preisverhältnis im langfristigen Gleichgewicht bei Autarkie, so daß im langfristigen Gleichgewicht nicht gehandelt wird. Daraus ergibt sich wegen $E_1 = -E_1^* = 0$ keine Restriktion für die Wachstumsraten n und n^*.

Für $n/s \neq n^*/s^*$ existieren nach Khang (1971) zwar asymptotische steady states, in denen das Inland mit der größeren Wachstumsrate der Bevölkerung ($n > n^*$) seine Produktion diversifiziert und das Ausland vollständig auf die Erzeugung des arbeitsintensiven Investitionsgutes (falls $n/s < n^*/s^*$) oder die des kapitalintensiven Konsumgutes (falls $n/s > n^*/s^*$) spezialisiert ist. Zu beachten ist, daß die relative Größe $L/(L + L^*)$ der Bevölkerung des Inlandes wegen $n > n^*$ gegen eins und die Importe pro Kopf gegen null konvergieren. Das größere Inland ist also asymptotisch nicht nur im steady state, sondern asymptotisch autark, und das asymptotisch im reinsten Sinne der Außenhandelstheorie *kleine* Ausland ist vollständig spezialisiert, so daß es seine Importe aus dem Inland decken kann, das dadurch gar nicht berührt wird. Damit bleibt festzuhalten, daß ein gleichgewichtiges Wachstum mit Außenhandel tatsächlich nur dann sinnvoll möglich ist, wenn die Wachstumsraten der Bevölkerung übereinstimmen. Darauf ist das Modell schon von seiner Natur her ausgelegt, denn sobald sich die Wachstumsraten unterscheiden, wird eines der beiden Länder langfristig zu einem kleinen Land, so daß von einer Analyse des steady state im klassischen Sinne des Zwei-Länder-Falls nicht mehr die Rede sein kann.

Die Implikationen des OUB-Modells hinsichtlich der im vorliegenden Zusammenhang insbesondere interessierenden Wachstumsraten im steady state sind unmittelbar einsichtig. Da die gesamtwirtschaftliche Kapitalintensität konstant ist und die Bevölkerung in beiden Ländern mit der exogenen Rate n zunimmt, wachsen auch der Kapitalstock, das Nationaleinkommen und der Konsum mit der Rate n. Daran kann der internationale Handel nichts ändern. Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens ist also im langfristigen Gleichgewicht sowohl bei Autarkie als auch bei Freihandel jeweils gleich null. Die Erklärung unterschiedlicher Wachstumsraten hat in diesem Ansatz auch gar nicht so sehr wie heute im Mittelpunkt gestanden. Vielmehr ist es den Autoren darum gegangen, die Kritik an der statischen Außenhandelstheorie zu überwinden, in der das Kapital, das ja selbst ein *produzierter* Produktionsfaktor ist, exogen gegeben ist.[9] Insofern ist das OUB-Modell eher mit den Auswirkungen der Akkumulation des Kapitals und allgemeiner des Wirtschaftswachstums auf den Außenhandel als mit den Wirkungen des Außenhandels auf das Wirtschaftswachstum befaßt. Die Implikationen des Außenhandels für das Wachstum sind früher unter dem Stichwort **Entwicklungstheorie** analysiert worden, wobei allerdings bei weitem keine so homogene Formulierung wie in der neoklassischen Wachstumstheorie und der Außenhandelstheorie zu erkennen gewesen ist.[10] Die neuere Wachstumstheorie rückt dagegen die Wirkung des Außenhandels auf das Wachstum in den Mittelpunkt einer systematischen Modellentwicklung.

Trotz aller Einwände gehört das OUB-Modell nach wie vor zu den elegantesten und überzeugendsten Ansätzen der Wachstumstheorie in offenen Volkswirtschaften, da es als Modell des allgemeinen Gleichgewichts alle Interdependenzen vollständig berücksichtigt und im dynamischen Rahmen die Implikationen der HOS-Theorie des

[9] Vgl. Smith (1984) zur Bedeutung der Kapitaltheorie für die Außenhandelstheorie.

[10] Vgl. Findlay (1984) zu einem Überblick über formale Ansätze der Entwicklungstheorie in offenen Volkswirtschaften.

Außenhandels enthält. Die Bedeutung der Faktorausstattung, die im dynamischen Zusammenhang durch die Wachstumsrate der Bevölkerung und die Sparquote determiniert wird, spielt in der Theorie des endogenen Wachstums dagegen eine untergeordnete Rolle, da zum Beispiel das Bevölkerungswachstum aufgrund der in der Regel involvierten Skaleneffekte nicht sinnvoll integriert werden kann. Die der älteren neoklassischen Wachstumstheorie näher stehende Theorie des semi-endogenen Wachstums, die in den folgenden Abschnitten 5.2 und 5.3 im Mittelpunkt steht, ist hier weitaus vielversprechender.

In diesem Zusammenhang wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Wachstumsraten im OUB-Modell im steady state zwar in allen Ländern gleich sind (und zwar pro Kopf gleich null), daß sich aber trotzdem Hinweise auf einige Tatbestände ergeben, die für den Entwicklungsstand der Volkswirtschaften relevant sind. Zum einen ist gezeigt worden, daß der internationale Handel die bestehenden komparativen Vorteile verstärkt. Ohne endogenen technischen Fortschritt hat das zwar keine Auswirkungen auf das Wachstum, doch liegt es nahe, daß der technische Fortschritt in unterschiedlichen Produktionsrichtungen potentiell verschieden wirksam werden kann. Wenn man also die Möglichkeit des endogenen technischen Fortschritts berücksichtigen würde, sollten sich je nach Spezialisierung der Produktion unterschiedliche Fortschrittsraten ergeben. Zum anderen kann man das Modell ohne Umstände durch exogenen, in beiden Sektoren gleichmäßig wirkenden Harrod-neutralen technischen Fortschritt erweitern, was formal letztlich auf eine Substitution der Wachstumsrate der Bevölkerung n durch die Summe aus n und der Fortschrittsrate hinausläuft. Obwohl exogener technischer Fortschritt keine echte Erklärung liefern kann, ist es interessant, sich zu überlegen, was das OUB-Modell für den Fall impliziert, daß sich beide Länder in einem diversifizierten steady state befinden, Außenhandel treiben und unterschiedliche Wachstumsraten der Bevölkerung aufweisen. Dann muß das Land mit der kleineren Rate des Bevölkerungswachstums eine höhere Rate des technischen Fortschritts (so, daß die Wachstumsraten des Nationaleinkommens in beiden Ländern übereinstimmen) und damit des Wachstums des Pro-Kopf-Einkommens realisieren. Aus rein neoklassischen Erwägungen, die mit dem gleichgewichtigen Wachstum verbunden sind, folgt also nicht die Konvergenz, sondern ein exponentielles Auseinanderdriften der Pro-Kopf-Einkommen.

Trotz der Dominanz der Theorie des endogenen Wachstums werden auch Abwandlungen des OUB-Modells in neuerer Zeit wieder verwendet, um unterschiedliche Entwicklungen in verschiedenen Ländern zu analysieren. Zum Beispiel betrachtet Deardorff (2001) eine Verallgemeinerung auf drei Sektoren anhand von graphischen Darstellungen, wobei er annimmt, daß die gesamte Ersparnis aus dem Lohneinkommen erbracht wird. Dabei stellt sich heraus, daß mehrere Diversifikationskegel und Gleichgewichte existieren. Wenn alle betrachteten Länder sich lediglich durch die anfängliche Faktorausstattung unterscheiden, ist es wahrscheinlich, daß sie verschiedene durch diese Anfangsausstattungen determinierte langfristige Gleichgewichte erreichen. Diese unterschiedlichen Gleichgewichte teilen die Welt in eine arme und eine reiche Gruppe ein. Damit gibt Deardorff (2001) eine Erklärung für

Armutsfallen, wie sie in der Abbildung 3.2 auf der Seite 113 illustriert worden sind, die auf der Faktorausstattung beruht.

Derartige Ansätze liefern aufgrund der Berücksichtigung der verschiedenen Faktorausstattungen der Volkswirtschaften die vielleicht überzeugendsten verfügbaren Argumente. Eine erfolgreiche Theorie des Wachstums und der Entwicklung sollte wohl wie Deardorff (2001) die Faktorausstattungen in offenen Volkswirtschaften berücksichtigen. Allerdings besteht das Problem mit Deardorffs Modell darin, daß eine rein graphische Analyse keine definitiven Aussagen über die Stabilität von Gleichgewichten ergibt. Darüber hinaus ist die verwendete Hypothese über die Ersparnis zumindest fragwürdig. Ohne die Berücksichtigung des endogenen technischen Fortschritts läßt sich ferner lediglich eine Erklärung für unterschiedliche Einkommensniveaus, nicht aber für deren Wachstumsraten geben. Daher ist es angebracht, zunächst weiter vereinfachte Modelle zu betrachten, die dafür den endogenen technischen Fortschritt berücksichtigen. Im Abschnitt 5.3 wird ein solcher Ansatz eingeführt.

5.1.3 Außenhandel in der Theorie des endogenen Wachstums

F&E-Modelle Die theoretischen Ansätze des endogenen Wachstums sind auf vielfältige Weise auf offene Volkswirtschaften erweitert worden. Im Gegensatz zur Analyse offener Volkswirtschaften in der älteren neoklassischen Theorie steht dabei die Erklärung des Einflusses der Öffnung einer Volkswirtschaft auf die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens im Vordergrund. Zu den ersten Ansätzen in dieser Richtung zählt die Erweiterung des Romer-Modells (1990) des endogenen technischen Fortschritts durch Rivera-Batiz und Romer (1991a, b). Dabei werden zwei Länder unterstellt, die bei Autarkie beide jeweils durch das im Abschnitt 4.3 dargestellte Modell (oder eine geringfügige Modifikation) beschrieben werden. Im folgenden soll lediglich skizziert werden, welche Effekte die Öffnung der Volkswirtschaften in diesem Modellrahmen hat, wobei generell eine Beschränkung auf die Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts erfolgt.

Zunächst wird angenommen, daß beide Länder völlig identisch sind. Wenn das Wissen A durch die Öffnung der inländischen Volkswirtschaft international vollständig **diffundiert**, so steht es allen Forschern in beiden betrachteten Ländern zur Verfügung. Vorläufig wird unterstellt, daß es keine **Redundanzen** in der Forschung und Entwicklung vor Aufnahme des Außenhandels gegeben hat, das heißt, daß alle im Ausland bekannten Kapitalgütervarianten sich von denjenigen im Inland unterscheiden. Wie zuvor werden die Variablen des Auslands durch einen Stern gekennzeichnet. Damit lauten die Produktionsfunktionen des F&E-Sektors anstelle von (4.9) auf der Seite 194 nun

$$\dot{A} = \psi L_A(A + A^*), \quad \dot{A}^* = \psi L_A^*(A + A^*), \tag{5.7}$$

wobei L_A wie zuvor das im Forschungssektor eingesetzte Humankapital bezeichnet.

Die Wachstumsrate des gesamten internationalen Wissens ist daher

$$g_{A+A^*} = \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{A + A^*} = \psi(L_A + L_A^*). \tag{5.8}$$

Wie im Modell der geschlossenen Volkswirtschaft kann man zeigen, daß auch der Output des Endproduktes Y mit dieser Rate wächst. Unter der Voraussetzung, daß die in der Forschung eingesetzte Arbeit durch den Außenhandel nicht geringer wird, und da beide Länder vollständig identisch sind (also $A = A^*$ und $L_A = L_A^*$ gilt), ist die Wachstumsrate des gesamten Wissens jetzt zumindest doppelt so hoch wie bei Autarkie. International gehandelt werden lediglich die unterschiedlichen Varianten der Kapitalgüter.

Dieses Ergebnis ist keineswegs überraschend. Die Betrachtung zweier Länder, die bis auf die erzeugten Varianten der Kapitalgüter identisch sind und nun die Möglichkeit erhalten, diese Varianten zu importieren beziehungsweise zu exportieren und gleichzeitig Zugriff auf das gesamte Wissen des jeweils anderen Landes zu erhalten, bedeutet letztlich nichts Anderes, als daß die Größe der ursprünglich analysierten inländischen Volkswirtschaft verdoppelt wird. Tatsächlich ist die gleichgewichtige Wachstumsrate nun anstelle von (4.21) auf der Seite 199 durch

$$g_{A+A^*} = \frac{\psi 2L - \Lambda\rho}{\theta\Lambda + 1} \tag{5.9}$$

gegeben, das heißt, im Vergleich zur geschlossenen Volkswirtschaft wird in (4.21) einfach der Bestand an Arbeit beziehungsweise Humankapital verdoppelt, was man auch durch die explizite Lösung des Zwei-Länder-Modells nachweisen kann. Anhand von (5.9) ist zu ersehen, daß die Wachstumsrate dadurch um mehr als das Doppelte steigt. Dieser Effekt ist ökonomisch dadurch zu erklären, daß die anhand von (5.8) zu erkennende höhere Produktivität im Forschungssektor zu einer Reallokation des Humankapitals in diesen Sektor führt (L_A und L_A^* sind größer als bei Autarkie), wodurch die Wachstumsrate zusätzlich gesteigert wird. Wie im Kapitel 4 beziehen sich die abgeleiteten Wachstumsraten zunächst nicht auf das Nationaleinkommen, sondern auf das Endprodukt Y und das Wissen A. Solange die betrachtete Volkswirtschaft diversifiziert ist, entspricht die gleichgewichtige Wachstumsrate von Y jedoch derjenigen des Nationaleinkommens, vgl. die Bemerkung 4.1 auf der Seite 199. Wenn der Patentpreis p_A konstant ist, gilt auch $g_Y = g_A$.

Der Wachstumseffekt der Öffnung der Volkswirtschaft basiert also letztlich auf dem früher schon ausführlich kritisierten Skaleneffekt im Romer-Modell. Der Ansatz offener Volkswirtschaften macht dieses Problem besonders offensichtlich. Man führe das obige Gedankenexperiment für ein Land durch, das von Autarkie zu Freihandel übergeht, wobei der Rest der Welt aus 100 vergleichbar großen Ländern besteht. Dann muß sich die Wachstumsrate des Inlands mehr als verhundertfachen.

Während also der Wachstumseffekt der Grenzöffnung letztlich unrealistisch ist, gibt es daneben einen realistischeren Niveaueffekt, der nicht die Wachstumsrate, aber das Nationaleinkommen erhöht. Auch wenn Redundanzen nicht auszuschließen sind, führt die Grenzöffnung wohl dazu, daß zumindest einige zusätzliche Varianten der Kapitalgüter importiert werden können, wodurch die Produktivität im Endproduktsektor steigt, vgl. (4.16). Dieser Niveaueffekt tritt auch dann auf, wenn man alle Annahmen des Modells beibehält, aber unterstellt, daß es keine internationale Diffusion des Wissens gibt. Dann können zwar zusätzliche Varianten der Kapitalgüter importiert werden, aber die Produktivität im Forschungssektor erhöht sich nicht. Wenn man die mit dem Skaleneffekt der Bevölkerungsgröße in bezug auf die Forschung verbundene Wissensdiffusion vernachlässigt, die die Wachstumsrate erhöht, gibt es also nur noch diesen Niveaueffekt, der Gewinne aus dem Außenhandel für die beteiligten Länder mit sich bringt. Insofern ergänzt dieser Ansatz die ältere neoklassische Theorie um eine formale Modellierung des **Verfügbarkeitsarguments**. Wenn es bestimmte Produkte wie hier die ausländischen Varianten der Kapitalgüter im Inland nicht gibt, so ergeben sich Gewinne aus dem Außenhandel, wenn diese Güter verfügbar gemacht werden.

Die Annahme, daß die betrachteten Volkswirtschaften bis auf die produzierten Varianten der Kapitalgüter (ohne jegliche Redundanzen) völlig identisch sind, kann aufgehoben werden. Eine ausführliche Darstellung verschiedener Modifikationen des Modells findet sich bei Trauth (1997, Kapitel 4), der auch weitere Literaturhinweise gibt. Unterstellt man zum Beispiel, daß die in den beiden Ländern vor Aufnahme des Außenhandels entwickelten Varianten der Kapitalgüter identisch sind (vollständige Redundanz), so tritt bei Öffnung der Grenzen kein Niveaueffekt auf, da keine neuen Varianten für ein Land verfügbar werden. Die langfristige Wachstumsrate stimmt jedoch mit derjenigen im Fall ohne Redundanzen überein, wenn man unterstellt, daß nach Grenzöffnung keine neuen Varianten der Kapitalgüter mehr sowohl im Inland als auch im Ausland erfunden werden, was damit begründet werden kann, daß sich die erneute Erfindung einer bekannten Variante aufgrund des internationalen Wettbewerbs nicht lohnt.

Auch wenn die Niveaus des technischen Wissens in beiden Ländern vor Aufnahme des Handels unterschiedlich sind, hängt das Ergebnis davon ab, ob das Wissen international diffundiert oder nicht. Angenommen, vor Aufnahme des Handels gilt $A > A^*$. Ohne Wissensdiffusion kann man zeigen, daß eine Reallokation des Humankapitals stattfindet, die zu verstärkter Forschung im Inland führt, das Kapitalgüter bei unvollständiger Spezialisierung exportiert, während das Ausland sich vollständig auf die Produktion des Endproduktes spezialisiert. Das Ausland profitiert allerdings trotz der Einstellung der Forschung und der Produktion von Kapitalgütern vom internationalen Handel, weil die Wachstumsrate im Inland durch die erhöhte Forschung und Entwicklung steigt und das Ausland Zugriff auf die neuen Varianten der Kapitalgüter erhält, wobei die Wachstumsraten der Nationaleinkommen in beiden Ländern übereinstimmen. Letztlich stellen beide Länder einen Wachstumsverbund dar, wobei die Forschung auf das Inland konzentriert ist und schneller als bei Autarkie wächst, da relativ mehr Humankapital in der Forschung eingesetzt wird. Wenn das Wissen international vollständig diffundiert, erhält man nahezu identische Ergebnisse im

Vergleich zu dem Fall mit in der Ausgangslage gleich großen Wissensbeständen.

Wenn die betrachteten Länder unterschiedlich hohe Ausstattungen an Humankapital haben ($L > L^*$) und keine Wissensdiffusion auftritt, wird sich das Inland (unvollständig) auf die Forschung spezialisieren und das Ausland ausschließlich Endprodukte herstellen. Beide Länder erzielen in diesem Fall eine Steigerung ihrer Wachstumsraten, wobei der Gewinn des vorher langsamer wachsenden Auslands höher ist.[11] Wenn eine internationale Wissensdiffusion eintritt, ist Diversifikation in beiden Ländern möglich, wobei wiederum die Wachstumsraten in den Ländern gleich und höher als vor Aufnahme des Handels sind. Die Analyse weiterer Fälle bestätigt im wesentlichen die bisher gewonnenen Ergebnisse. Im Fall des Romer-Modells kann also davon ausgegangen werden, daß der Außenhandel die Wachstumsraten in der Regel erhöht und zu einer Angleichung der Wachstumsraten führt, so daß der Wachstumsgewinn für die vorher rückständigeren Länder sogar höher als für die weiter fortgeschrittenen Länder ist. Diese Ergebnisse für den Zwei-Länder-Fall werden in einem neueren Ansatz von Ben-David und Loewy (1998) im wesentlichen auch für eine Welt mit vielen Ländern bestätigt.

Neben der Erweiterung des Romer-Modells auf offene Volkswirtschaften haben vor allem Grossman und Helpman (1990, 1991a) die Wirkungen des Außenhandels in Modellen der Forschung und Entwicklung analysiert. In Grossman und Helpman (1995) geben diese Autoren einen Überblick über die Literatur zur Bedeutung der (exogenen und endogenen) Produktionstechnik in der Außenhandelstheorie, wobei sie die Forschung und Entwicklung unter Verwendung neuer Zwischenprodukte spezifizieren, die im Unterschied zum Romer-Modell keine Gebrauchsgüter (Kapitalgüter), sondern Verbrauchsgüter sind. Im folgenden werden einige der Ergebnisse angegeben, soweit sie von denjenigen des Romer-Modells offener Volkswirtschaften abweichen.

Unterstellt man zunächst international vollkommene knowledge spillovers und nur einen primären Produktionsfaktor, Arbeit beziehungsweise Humankapital, so entsprechen die Ergebnisse im wesentlichen denjenigen des Romer-Modells. Der Außenhandel führt zu einer höheren Wachstumsrate in beiden Ländern, die darüber hinaus auch einen direkten Gewinn durch die erhöhte Verfügbarkeit von Varianten der Zwischenprodukte haben. Eine interessante Abwandlung ergibt sich, wenn man zwei primäre Produktionsfaktoren, Arbeit *und* Humankapital, unterstellt und ein zweites Endprodukt einführt, das gemäß einer linearhomogenen Produktionsfunktion mit diesen beiden Produktionsfaktoren ohne technischen Fortschritt hergestellt wird. Unterscheiden sich die Faktorintensitäten in der Entwicklung neuer Varianten,

[11] Dieses Ergebnis gilt nur unter der Voraussetzung, daß der komparative Vorteil des Inlands in der Forschung aufgrund der höheren Ausstattung mit Humankapital nicht durch einen höheren Wissensstand des Auslands zum Zeitpunkt des Übergangs zum Freihandel überkompensiert wird. Ansonsten besteht die Möglichkeit, daß nur noch das Ausland forscht, wodurch die Wachstumsrate der Welt nach Aufnahme des Handels kleiner als diejenige des Inlands bei Autarkie sein kann. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß zwar die Wachstumsraten in beiden Ländern übereinstimmen, im allgemeinen aber nicht die Niveaus der Nationaleinkommen. Sofern eines der Länder vollständig spezialisiert ist, kommt es im allgemeinen auch nicht zum Ausgleich der Faktorpreise.

der Produktion der bestehenden Varianten und der Produktion des zweiten Endproduktes, so bestimmt allein die relative Faktorausstattung der beiden Länder das Außenhandelsmuster (wie in der HOS-Theorie), da das Niveau des technischen Wissens aufgrund der internationalen knowledge spillovers im Inland und im Ausland identisch ist. Das erste Endprodukt wird nur mit den Zwischenprodukten erstellt. Daher kann man den Ansatz auch so interpretieren, daß dieses Gut ein Aggregat verschiedener Varianten der Konsumgüter darstellt, die in die Nutzenfunktion des Haushaltes eingehen, so daß dieses Gut nicht gehandelt wird. Wenn die Forschung und Entwicklung das Humankapital am intensivsten und die Produktion des zweiten Endprodukts die Arbeit am intensivsten nutzt, dann exportiert das relativ humankapitalreiche Land per Saldo Zwischenprodukte und importiert das zweite Endprodukt. Neben dem **intrasektoralen Handel** mit Zwischenprodukten besteht also auch ein **intersektoraler Handel**. In bezug auf die langfristigen Wachstumsraten des Nationaleinkommens und des Konsums kann man zeigen, daß sich eine Konvergenz der Raten in den beiden Ländern ergibt. Allerdings ist es möglich, daß die Größe des F&E-Sektors in der gesamten Welt kleiner als für das humankapitalreichere Land bei Autarkie ist. In diesem Fall fällt die Wachstumsrate des humankapitalreichen Landes durch den Übergang zum Freihandel.

Alternativ wird nun angenommen, daß es keine internationale Wissensdiffusion gibt. Ferner wird unterstellt, daß Humankapital der einzige primäre Produktionsfaktor ist und daß ein zweites Endprodukt ohne technischen Fortschritt in beiden Ländern produziert wird, wobei die Produktionsfunktion linear im Humankapital ist. Die Lohnsätze im Inland und im Ausland müssen dann übereinstimmen, wenn dieses Gut gehandelt wird. Wenn beide Länder gleich groß sind, gilt ähnlich wie im Romer-Modell für offene Volkswirtschaften, daß sich das Inland mit einem anfangs größeren Wissensstand unvollständig auf die Forschung spezialisiert, während das Ausland keine Forschung mehr betreibt. Wiederum bilden beide Länder einen Wachstumsverbund, wobei die Wachstumsraten der Nationaleinkommen in beiden Ländern übereinstimmen. Die Angleichung der Lohnsätze impliziert eine Angleichung des Wohlstands. Diese Situation ändert sich allerdings, wenn die Nachfrageverhältnisse derart sind, daß das Land mit dem anfänglichen komparativen Vorteil das zweite Endprodukt nicht mehr produziert. Die Nachfrage nach dem ersten (mit den Zwischenprodukten erstellten) Endprodukt ist dann so groß, daß der Reallohnsatz im Inland größer als im Ausland wird. Während das Inland Gewinne aus dem Außenhandel hat, können für das Ausland Verluste entstehen. Ein entgegengesetztes Ergebnis ist möglich, wenn das Ausland erheblich größer als das Inland ist, da der anfängliche Wissensvorsprung des Inlands dann durch den höheren Bestand an Humankapital im Ausland langfristig überkompensiert werden kann.

Learning by Doing-Modelle Anders als in den Modellen des endogenen technischen Fortschritts durch die Forschung und Entwicklung, in denen die Angleichung der Wachstumsraten die Regel ist, führen etwa die Modelle des learning by doing in offenen Volkswirtschaften von Lucas (1988, Abschnitt 5) oder Young (1991) zu der Vorhersage, daß sich die Wachstumsraten bei Freihandel in den entwickelten und sich entwickelnden Volkswirtschaften unterscheiden. Das Lucas-Modell basiert zum Beispiel auf dem Ansatz einer ricardianischen Produktionsstruktur mit zwei Sektoren, deren Arbeitsproduktivitäten sich aufgrund des learning by doing ändern. Im Fall des Außenhandels kommt es zu vollständiger Spezialisierung, wobei sich das Spezialisierungsmuster nach den Arbeitsproduktivitäten zum Zeitpunkt der Grenzöffnung richtet. Da die Arbeitsproduktivitäten in den beiden betrachteten Sektoren mit unterschiedlichen Raten wachsen, führt der Außenhandel im allgemeinen also je nach Spezialisierung zu verschiedenen Wachstumsraten der Nationaleinkommen der beteiligten Länder, wobei die Substitutionselastizität der verwendeten CES-Nutzenfunktion darüber entscheidet, wie stark sich die terms of trade der schneller wachsenden Länder verschlechtern. Wenn diese Substitutionselastizität größer als eins ist, wächst das Nationaleinkommen der Länder schneller, die das Gut mit der schneller wachsenden Arbeitsproduktivität herstellen, und umgekehrt.

Die meisten Ansätze des learning by doing in offenen Volkswirtschaften basieren auf vereinfachenden Annahmen wie etwa der Unterstellung einer ricardianischen Produktionstechnik. Welches Land welches Gut produziert, kann daher nur aufgrund des historischen Zufalls entschieden werden, der über die komparativen Vorteile beim Übergang zum Freihandel entscheidet. In Christiaans (1997, Abschnitt III.1.2) werden die Auswirkungen der Faktorausstattungen auf die Lerneffekte in einem allgemeinen Gleichgewichtsmodell zweier Länder mit zwei Sektoren unter der Annahme neoklassischer Produktionsfunktionen analysiert. Wenn zum Beispiel das relativ kapitalintensiv produzierte Gut Lerneffekte aufweist und das andere nicht, so wird ein relativ kapitalreiches Land mehr von dem kapitalintensiven Gut produzieren und entsprechend höhere Lerneffekte aufweisen als ein relativ arbeitsreiches Land (wenn beide Länder von vergleichbarer Größe sind). Die komparativen Vorteile aufgrund der Faktorausstattung werden also durch das learning by doing verstärkt. Dieses Modell kann allerdings kein langfristiges Wachstum generieren, da es die Akkumulation des Kapitals bei nichtlinearen Lernfunktionen vernachlässigt.

Eine Ausnahme von der Regel, daß internationale Unterschiede des Wohlstands und/oder der Wachstumsraten durch das learning by doing verstärkt werden, liefert der Ansatz von Goh und Olivier (2002). Obwohl das Drei-Sektoren-Modell völlig anders als die F&E-Modelle aufgebaut ist, sorgt letztlich ein vergleichbarer Mechanismus für dieses Ergebnis. Denn wenn das Land mit einem komparativen Vorteil für das Gut mit geringeren Lernmöglichkeiten ein Kapitalgut importiert, so profitiert es ähnlich wie in den F&E-Modellen durch die geringeren Kosten für das importierte Gut. Dadurch kann der die Wachstumsrate verringernde Effekt der (unvollständigen) Spezialisierung auf Güter mit geringeren Lernmöglichkeiten überkompensiert werden, da die Investitionen und damit das learning by doing erhöht werden.

In den genannten Ansätzen wird angenommen, daß es keine internationale Diffusion des durch das Lernen erzeugten technischen Wissens gibt. Ähnlich wie in den F&E-Modellen gilt auch für das learning by doing, daß die komparativen Vorteile allein aufgrund der Faktorausstattungen bestimmt werden können, wenn das Wissen international vollständig diffundiert. Allerdings basieren die meisten theoretischen Ansätze auf der Annahme, daß keine internationalen spillovers auftreten. Denn learning by doing bedeutet letztlich, daß die Produktivität durch die Erfahrung steigt. Damit ist kaum anzunehmen, daß diese Erfahrung sich durch den internationalen Handel unmittelbar übertragen kann. Eine kurze Darstellung der Implikationen internationaler spillovers des learning by doing findet sich bei Grossman und Helpman (1995).

Fazit Obwohl im auf offene Volkswirtschaften erweiterten Romer-Modell eine Konvergenz der Wachstumsraten auch dann möglich ist, wenn keine internationale Wissensdiffusion auftritt, weist Feenstra (1996) darauf hin, daß das Ergebnis der Konvergenz in den Modellen, die Romer (1990) folgen, doch häufig von der Annahme der Wissensdiffusion abhängt. Für ein Modell nach der Art von Grossman und Helpman (1990), in dem sich die aus den Zwischenprodukten erstellten Endprodukte in beiden Ländern unterscheiden, wobei beide Endprodukte in die Nutzenfunktionen der Konsumenten eingehen, zeigt er, daß ohne internationalen Wissenstransfer und ohne den Handel von Zwischenprodukten das größere Inland eine höhere langfristige Wachstumsrate hat, als das kleinere Ausland, wenn die Substitutionselastizität im Konsum größer als eins ist. Zwar fällt der Relativpreis des inländischen Endproduktes aufgrund des schnelleren Wachstums im Vergleich zum Ausland, doch wird dieser Effekt durch das stärkere Wachstum der Produktivität überkompensiert. Das Inland erfährt durch den Übergang zum Freihandel einen temporären Wachstumsschub, während die Wachstumsrate im Ausland langfristig abnimmt. Wenn Zwischenprodukte gehandelt werden, steigt die Wachstumsrate des Auslands zwar durch den Freihandel, doch ist sie weiterhin geringer als die des Inlands. Wenn die Substitutionselastizität kleiner als eins ist, folgt ein umgekehrtes Ergebnis. Die Bedeutung der Substitutionselastizität entspricht damit weitgehend derjenigen im Lucas-Modell des learning by doing.[12] Die Implikationen beider Ansätze zur Modellierung des technischen Fortschritts sind also durchaus vergleichbar, wenn für das learning by doing und die Forschung und Entwicklung jeweils dieselben Annahmen über die internationale Diffusion des Wissens unterstellt werden.

Alle diese Ergebnisse basieren jedoch letztlich auf dem empirisch unhaltbaren Skaleneffekt in den Modellen des endogenen Wachstums, der einen theoretischen Grenzfall darstellt.[13] Mit Bezug zum Romer-Modell für offene Volkswirtschaften werden nun anstelle von (5.7) analog zu (4.26) auf der Seite 206 die Produktionsfunktionen

$$\dot{A} = \psi L_A (A + A^*)^\beta, \quad \dot{A}^* = \psi L_A^* (A + A^*)^\beta$$

[12] In den vorangehend beschriebenen Erweiterungen des Romer-Modells auf offene Volkswirtschaften können diese Effekte nicht auftreten, weil das Inland und das Ausland in diesen Ansätzen identische Endprodukte erzeugen.

[13] Die genannten Modelle von Lucas (1988, Abschnitt 5) und Goh und Olivier (2002) enthalten zwar keine Skaleneffekte, basieren aber auf linearen Lernfunktionen und stellen daher ebenfalls den Grenzfall des endogenen Wachstums dar. Das Modell von Christiaans (1997, Abschnitt III.1.2) basiert zwar nicht auf einem Grenzfall, ist aber kein echtes Wachstumsmodell.

mit Wissensdiffusion für die Forschungssektoren unterstellt. Dann gilt

$$\dot{A} + \dot{A}^* = \psi(L_A + L_A^*)(A + A^*)^\beta, \tag{5.10}$$

wobei $0 < \beta < 1$ ist. Um die Implikationen für das langfristige Wachstum in Abhängigkeit von der Wissensdiffusion aufzuzeigen, wird angenommen, daß die Bevölkerung in beiden Ländern mit der gleichen Rate n wächst, und daß jeweils ein konstanter Anteil der Arbeit im Forschungssektor beschäftigt ist, der sich der Einfachheit halber durch den Außenhandel nicht ändert. Dann erhält man aus (5.10) anstelle von (5.8) die langfristige Wachstumsrate

$$g_{A+A^*} = \frac{n}{1-\beta},$$

die durch die Diffusion des Wissens nicht beeinflußt wird. In einem Modell des semi-endogenen Wachstums kann die Diffusion des Wissens für sich genommen also keinen langfristigen Wachstumseffekt haben. Alle Wirkungen, die sich ergeben, können daher lediglich auf die unterschiedlichen Spezialisierungsmuster zurückzuführen sein. Diese Implikationen von Modellen des semi-endogenen Wachstums in offenen Volkswirtschaften ergeben sich auch, wenn der technische Fortschritt auf dem learning by doing beruht. Nachstehend werden zwei entsprechende Ansätze eingeführt.

Eine letzte Anmerkung ist in bezug auf den Vergleich der verschiedenen theoretischen Ansätze erforderlich. Im Abschnitt 5.1.2 ist für das Oniki-Uzawa-Bardhan-Modell gezeigt worden, daß ein steady state bei Freihandel mit Diversifikation in beiden Ländern im allgemeinen nur dann existiert, wenn die Wachstumsraten der Bevölkerung und damit des Nationaleinkommens in beiden Ländern übereinstimmen. Für die Modelle des endogenen Wachstums hat sich herausgestellt, daß die Wachstumsraten des Einkommens in beiden Ländern gleich hoch sind, wenn in beiden Ländern Diversifikation vorliegt. Da die Bevölkerung in diesen Modellen konstant ist und das Wirtschaftswachstum auf anderen Triebkräften basiert, die formal an die Stelle des Bevölkerungswachstums in der älteren Theorie treten, entsprechen sich diese Ergebnisse. Abweichungen der Wachstumsraten beider Länder ergeben sich im langfristigen Gleichgewicht nur, wenn in zumindest einem der Länder nicht mehr in allen Sektoren produziert wird. Das ist in den beiden folgenden Modellen des semi-endogenen Wachstums der Fall. Im ersten Modell wird die Spezialisierung dabei exogen vorgegeben, während sie im zweiten Modell endogen bestimmt wird.

5.2 Beschränkung des Wachstums durch die Handelsbilanz

5.2.1 Das statische Gleichgewicht

In den Abschnitten 4.5.3 und 5.1.1 ist argumentiert worden, daß eine befriedigende Lösung des Bevölkerungspuzzles wohl nur im Rahmen von Modellen offener

Volkswirtschaften erreicht werden kann, wobei eine allgemeine Gleichgewichtsanalyse unter Einbeziehung des endogenen technischen Fortschritts sowie der Berücksichtigung unterschiedlicher Wachstumsraten der Bevölkerung in den beteiligten Ländern generell kompliziert ist. Angesichts der analytischen Probleme ist es sinnvoll, zunächst ein möglichst einfaches Modell zu formulieren, daß eine Analyse der Bedeutung der Wachstumsrate der Bevölkerung für das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens bei internationalem Handel und eine Lösung des erläuterten Bevölkerungspuzzles erlaubt. Christiaans (2003a) hat das von Khang (1968) und Bardhan (1970, Kapitel 4) eingeführte Modell einer offenen Volkswirtschaft, die auf den Import von Zwischenprodukten im Austausch für das Endprodukt angewiesen ist, mit dem im Abschnitt 4.5 dargestellten semi-endogenen Wachstumsmodell kombiniert. Das sich dadurch ergebende Modell, das im folgenden dargestellt wird, ist analytisch lösbar, weil die Wachstumsrate der übrigen Welt und damit die Weltexportnachfrage nach inländischen Gütern exogen vorgegeben wird. Obwohl also letztlich nur ein Partialmodell betrachtet wird, zeigt sich trotzdem, daß es relativ einfach ist, die grundlegenden semi-endogenen Wachstumsmodelle so zu modifizieren, daß sie realistischere Ergebnisse erbringen.

Das Bevölkerungspuzzle stellt insbesondere im Hinblick auf die Entwicklungsländer ein Problem dar, die häufig durch ein hohes Wachstum der Bevölkerung bei geringem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens charakterisiert sind. Die angesprochene Partialanalyse bedeutet ökonomisch, daß das betrachtete Inland einer exogenen **Nachfragebeschränkung** seitens des Auslands gegenübersteht, die für viele Länder mit geringem Einkommensniveau in der Tat ein Problem darstellt. Die Einkommenselastizitäten der Exportnachfrage nach Gütern aus den Entwicklungsländern sind generell kleiner als für Güter aus den industrialisierten Ländern (vgl. zum Beispiel Senhadji und Montenegro, 1999), obwohl sie trotzdem meistens größer als eins sind (insbesondere in den asiatischen Ländern). Wie sich herausstellen wird, tritt das Bevölkerungspuzzle in einem Modell des semi-endogenen Wachstums nicht mehr auf, wenn man diese Beschränkung der Exportnachfrage für Länder mit geringem Einkommensniveau berücksichtigt.

Je geringer die Einkommenselastizität der Nachfrage nach Exporten eines Landes ist, desto geringer fällt das Wachstum der Nachfrage nach diesen Gütern aufgrund des Wachstums des Auslands aus. Wie sich herausstellen wird, beschränkt eine exogene Exportnachfrage das Wachstum eines Landes nicht nur dann, wenn die Weltexportnachfrage einkommensunelastisch ist, sondern unter Umständen auch dann, wenn sie einkommenselastisch ist. Falls zum Beispiel das Produkt aus der Einkommenselastizität und der Wachstumsrate des Volkseinkommens in den Industrieländern geringer als die Wachstumsrate der Bevölkerung in den Entwicklungsländern ist, so werden ohne technischen Fortschritt sowohl der Konsum als auch das Einkommen pro Kopf in den Entwicklungsländern fallen. Eine zwar kompliziertere, aber doch vergleichbare Aussage gilt auch unter Berücksichtigung des technischen Fortschritts. Wie etwa die Daten der Weltbank über die durchschnittlichen Wachstumsraten von 1980 bis 1999 (World Development Indicators 2001, Tabellen 2.1 und 4.1) zeigen, sind die Wachstumsraten der Bevölkerung in einigen Entwicklungsländern tatsächlich größer als die Wachstumsraten des Bruttoinlandsprodukts in den großen Industriestaaten gewesen. Unter anderem wird im folgenden gezeigt, daß die Nachfragebeschränkung in Verbindung mit dem endogenen technischen Fortschritt impliziert, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums aufgrund einer steigenden Rate des Bevölkerungswachstums sowohl zunehmen als auch fallen kann, je nach den Größenverhältnissen bestimmter Produktions-, Lern- und Nachfrageelastizitäten. Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens fällt mit steigender Wachstumsrate der Bevölkerung, wenn die Weltexportnachfrage für das heimische Gut preisunelastisch ist. Daher zeigt das Modell, daß eine höhere Wachstumsrate der Bevölkerung in Abhängigkeit von der speziellen Situation sowohl günstige als auch widrige Auswirkungen auf die wirtschaftliche Entwicklung haben kann.

Die Bedeutung der Importe von Zwischenprodukten und Kapitalgütern der Entwicklungsländer aus den Industrieländern wird durch die Studie von Havrylyshyn und Civan (1985) über den intraindustriellen Handel zwischen Entwicklungsländern belegt. Insbesondere hinsichtlich der sogenannten Schwellenländer (newly industrialized countries) stellen die Autoren fest, daß nur 5 % der Importe an Investitionsgütern der Schwellenländer aus anderen Schwellenländern kommen. Offenbar gilt, daß die industrialisierten Länder einen Wettbewerbsvorteil beim Verkauf von Industriegütern haben und daß der globale komparative Vorteil der Schwellenländer bei relativ arbeitsintensiven Konsumgütern liegt. Daher ist es sinnvoll, die Handelsbeziehung zwischen industrialisierten Ländern und Entwicklungsländern durch die Annahme zu modellieren, daß die Entwicklungsländer Zwischenprodukte importieren und Endprodukte exportieren. Um das Modell so einfach wie möglich zu halten, werden importierte Kapitalgüter im folgenden allerdings vernachlässigt.

Die Grundannahmen des Modells entsprechen denjenigen im Abschnitt 4.5. Wesentlich für die Übertragung des dort formulierten Modells auf eine offene Volkswirtschaft ist die im Abschnitt 5.1.1 auf der Grundlage empirischer Schätzungen diskutierte Annahme, daß knowledge spillovers hauptsächlich auf nationaler Ebene erfolgen. Stilisierend wird hier unterstellt, daß die Lerneffekte in der Produktion einen externen Effekt mit vollkommenen knowledge spillovers innerhalb eines Landes darstellen, daß aber keine internationalen spillovers auftreten.

Bezeichnet man den aggregierten Output des Inlands mit X, so lautet die Produktionsfunktion

$$X = A^{\beta} K^{\alpha_1} M^{\alpha_2} L^{1-\alpha_1-\alpha_2}, \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1,\ 1-\alpha_1-\alpha_2 > 0,\ \beta > 0. \tag{5.11}$$

Die Unternehmen agieren unter den Voraussetzungen der vollständigen Konkurrenz. Neben den beiden bisher verwendeten Faktoren Kapital, K, und Arbeit, L, wird jetzt auch ein importiertes Zwischenprodukt, M, in der Produktion eingesetzt. Die Variable A bezeichnet den Lernindex. Für das Modell der geschlossenen Volkswirtschaft mit $\alpha_2 = 0$ ist gezeigt worden, daß die Bedingung $1-\alpha_1-\beta > 0$ notwendig für die Existenz eines steady state mit positiven Wachstumsraten der Produktion und der Bevölkerung ist. Die scheinbar analoge Bedingung $1-\alpha_1-\alpha_2-\beta > 0$ für das vorliegende Modell wird durch empirisch festgestellte Parameterwerte nahegelegt. Denn die Lernelastizität β sollte positiv, aber erheblich kleiner als eins sein, so daß $1-\alpha_1-\alpha_2$, die Lohnquote, diesen Wert hinreichend übersteigt, um $1-\alpha_1-\alpha_2-\beta>0$ zu gewährleisten. Wie sich herausstellt, ist diese Bedingung für die Formulierung des Modells restriktiver als nötig [vgl. (5.26)].

Um den Output gemäß der in (5.11) spezifizierten Produktionstechnik zu erstellen, muß das Inland die Menge M des Zwischenproduktes aus dem Ausland importieren. Vernachlässigt man Dienstleistungen, Transfers und internationale Kreditbeziehungen, so muß die Handelsbilanz in jedem Zeitpunkt ausgeglichen sein:

$$p\mathscr{X} = M, \tag{5.12}$$

wobei $\mathscr{X}$ die Exportmenge des inländischen Produktes bezeichnet und p der relative Preis des Exportgutes in Einheiten des Zwischenproduktes ist, das als Numéraire verwendet wird. Da Freihandel unterstellt wird, entspricht p den **terms of trade** des Inlands. Wie in Bardhan (1970, Kap. 4) wird angenommen, daß die Weltexportnachfrage nach dem heimischen Gut durch

$$\mathscr{X} = p^{\eta} e^{\lambda t}, \quad \eta < 0\ (!),\ \lambda > 0 \tag{5.13}$$

gegeben ist. Die Weltexportnachfrage wächst mit der Rate λ, wenn die terms of trade konstant sind. Daher wird λ im folgenden als *Wachstumsrate der Weltexportnachfrage bei konstanten Preisen* bezeichnet.

Da die Funktion der Weltexportnachfrage die Ergebnisse des Modells erheblich beeinflußt, werden die zugrundeliegenden Präferenzen kurz analysiert. Setzt man $e^{\lambda t} = \mu_1 Y^{*\mu_2}$, wobei Y^* das ausländische Einkommen in Einheiten des Zwischenproduktes und $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ Parameter sind, und wächst Y^* mit der konstanten Rate $\bar{\lambda}$, also $Y^* = Y_0^* e^{\bar{\lambda} t}$, so muß gelten $e^{\lambda t} = \mu_1 Y_0^{*\mu_2} e^{\mu_2 \bar{\lambda} t}$, wobei die Einheiten so normiert sind, daß $\mu_1 Y_0^{*\mu_2} = 1$ und $\lambda := \mu_2 \bar{\lambda}$ gesetzt werden kann. Die Gleichung (5.13) wird daher so interpretiert, daß sie aus der Nachfragefunktion

$$\mathscr{X} = \mu_1 p^{\eta} Y^{*\mu_2} \tag{5.14}$$

mit konstanten Preis- und Einkommenselastizitäten η und μ_2 resultiert, wobei Y^* mit der konstanten Rate $\bar{\lambda} = \lambda/\mu_2$ wächst. Nimmt man an, daß die Haushalte im Ausland zwei Güter konsumieren und löst die Integrierbarkeitsgleichung (die die Ermittlung der zu einer Nachfragefunktion gehörenden Nutzenfunktion zum Gegenstand hat), so erhält man in Abhängigkeit von den Werten von η und μ_2 unterschiedliche indirekte Nutzenfunktionen, die diese Nachfragefunktion generieren. Wenn $\mu_2 = 1$ ist, sind die Präferenzen homothetisch, wobei der Spezialfall der Cobb-Douglas-Präferenzen für $\eta = -1$ enthalten ist. Wenn $\mu_2 \neq 1$ ist, sind die Präferenzen nicht homothetisch. Diese Ergebnisse sind wichtig, weil sich herausstellt, daß einige Implikationen des Modells von dem numerischen Wert von λ abhängen, der seinerseits durch die Homothetizität der ausländischen Präferenzen und die Wachstumsrate des ausländischen Einkommens bestimmt wird.

Das Verfahren der Lösung von Integrierbarkeitsgleichungen wird zum Beispiel in Varian (1992, S. 125–129) erklärt. Anstelle der formal relativ aufwendigen Herleitung der indirekten Nutzenfunktionen v werden hier lediglich die Ergebnisse für die unterstellte Nachfragefunktion angegeben. Zu beachten ist dabei, daß alle Nutzenfunktionen einer streng monoton steigenden Transformation unterworfen werden können.

- $-\eta \neq 1,\ \mu_2 \neq 1$: $\quad v(p, Y^*) = (Y^*)^{1-\mu_2} - \dfrac{\mu_1(1-\mu_2)}{1+\eta} p^{\eta+1}$
- $-\eta \neq 1,\ \mu_2 = 1$: $\quad v(p, Y^*) = Y^* e^{-\mu_1 p^{\eta+1}/(1+\eta)}$
- $-\eta = 1,\ \mu_2 \neq 1$: $\quad v(p, Y^*) = (Y^*)^{1-\mu_2} - \mu_1(1-\mu_2)\ln p$
- $-\eta = 1,\ \mu_2 = 1$: $\quad v(p, Y^*) = Y^* p^{-\mu_1}$

Man kann nun durch Anwendung von Roys Identität direkt nachweisen, daß diese indirekten Nutzenfunktionen tatsächlich die angegebene Weltexportnachfrage für die jeweiligen Parameterwerte generieren. Um zu sehen, daß der Fall $-\eta = \mu_2 = 1$ tatsächlich Cobb-Douglas-Präferenzen impliziert, ist es naheliegend, auf absolute Preise überzugehen. Ersetzt man etwa p durch p_X/p_M und Y^* durch $\tilde{Y}^*/p_M$, so folgt

$$v(p_X, p_M, \tilde{Y}^*) = p_X^{-\mu_1} p_M^{-(1-\mu_1)} \tilde{Y}^*,$$

also die zur direkten Cobb-Douglas-Nutzenfunktion duale indirekte Nutzenfunktion.

Das Nationaleinkommen in Einheiten des importierten Zwischenproduktes, das eine Vorleistung darstellt, ist

$$Y = pX - M. \tag{5.15}$$

Unter den Annahmen der vollständigen Konkurrenz ist die Grenzproduktivität von M gleich dem auf eins normierten Preis des Zwischenproduktes, woraus mit (5.11)

$$M = p\alpha_2 X \tag{5.16}$$

folgt. Setzt man in (5.15) ein, so ergibt sich

$$Y = p(1-\alpha_2)X. \tag{5.17}$$

Um die statische Gleichgewichtslösung des Modells zu erhalten, wird die Weltexportnachfrage (5.13) in die Handelsbilanzgleichung (5.12) eingesetzt und nach p beziehungsweise M aufgelöst:

$$\begin{aligned} p &= M^{\frac{1}{\eta+1}} e^{-\frac{\lambda}{\eta+1}t}, \quad \text{wenn} \quad \eta \neq -1, \\ M &= e^{\lambda t}, \quad \text{wenn} \quad \eta = -1. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Substitution in (5.16) liefert [unter Verwendung von (5.11) für den Fall $\eta \neq -1$]

$$M = \alpha_2^{\frac{\eta+1}{\eta-\alpha_2(\eta+1)}} A^{\frac{\beta(\eta+1)}{\eta-\alpha_2(\eta+1)}} K^{\frac{\alpha_1(\eta+1)}{\eta-\alpha_2(\eta+1)}} L^{\frac{(1-\alpha_1-\alpha_2)(\eta+1)}{\eta-\alpha_2(\eta+1)}} e^{-\frac{\lambda}{\eta-\alpha_2(\eta+1)}t}, \text{ für } \eta \neq -1,$$

$$p = \frac{1}{\alpha_2 X} e^{\lambda t}, \text{ für } \eta = -1.$$

Die jeweiligen Werte von M können in (5.11) eingesetzt werden, um

$$X = BA^{\beta\varphi}K^{\alpha_1\varphi}L^{(1-\alpha_1-\alpha_2)\varphi}e^{-(\lambda\alpha_2\varphi/\eta)t} \tag{5.19}$$

zu erhalten. Diese Gleichung ist unabhängig davon gültig, ob $\eta \neq -1$ oder $\eta = -1$. Zur Vereinfachung der Schreibweise sind die folgenden Parameter eingeführt worden:

$$\varphi := \frac{\eta}{\eta - \alpha_2(\eta+1)} \quad \text{and} \quad B := \alpha_2^{\frac{\alpha_2(\eta+1)}{\eta-\alpha_2(\eta+1)}}. \tag{5.20}$$

Zu beachten ist, daß $\varphi = B = 1$ gilt, wenn $\eta = -1$ ist. Die Gleichung (5.19) ist die grundlegende Beziehung des Modells, die die statische Gleichgewichtslösung für den Output X als Funktion der Variablen angibt, die in jedem Zeitpunkt vorherbestimmt sind. Der Nenner in dem Ausdruck für φ ist negativ für $\eta < 0$; es gilt

$$B > 0, \quad \varphi > 0, \quad \varphi \lesseqgtr 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \eta \gtreqless -1.$$

5.2.2 Dynamische Entwicklung und langfristiges Gleichgewicht

Dynamische Entwicklung Die Bevölkerung ist zum gesamten Arbeitseinsatz proportional und wächst mit der exogenen und konstanten Rate $g_L = n > 0$. Der Lernindex A wird wie zuvor als kumulierte Produktionsmenge definiert, so daß die Zeitableitung von A gegeben ist durch

$$\dot{A} = X = A^{\beta}K^{\alpha_1}M^{\alpha_2}L^{1-\alpha_1-\alpha_2}. \tag{5.21}$$

Der Output kann sowohl konsumiert als auch investiert werden. Die heimischen Haushalte entscheiden über den Konsum C und die Ersparnis S, die im kurzfristigen Gleichgewicht mit den Investitionen I übereinstimmt. Für den Fall einer konstanten Sparquote s in bezug auf das Nationaleinkommen Y/p in Einheiten des heimischen Gutes gilt $pS = sY$. Der Konsum ist unter Verwendung von (5.17) gleich

$$C = (1-s)Y/p = (1-s)(1-\alpha_2)X. \tag{5.22}$$

Allgemeiner sind die aggregierten Bruttoinvestitionen I durch den Output X abzüglich der Summe aus dem Konsum C und den Exporten $\mathscr{X}$ gegeben, wobei alle Größen in Einheiten des heimischen Gutes gemessen werden. Vernachlässigt man die Abschreibungen des Kapitalstocks der Einfachheit halber, so entsprechen die Bruttoinvestitionen den Nettoinvestitionen und die Zeitableitung des Kapitalstocks ist

$$\dot{K} = I = X - \mathscr{X} - C = \frac{Y}{p} - C = (1-\alpha_2)X - C, \tag{5.23}$$

wobei (5.12), (5.15) und (5.17) verwendet worden sind.[14] Setzt man für den Fall einer konstanten Sparquote (5.22) ein, so folgt

$$\dot{K} = s(1-\alpha_2)X. \tag{5.24}$$

Obwohl in diesem Abschnitt vornehmlich eine konstante Sparquote zugrundegelegt wird, ändern sich die wesentlichen Ergebnisse nicht, wenn stattdessen die Goldene Faustregel verwendet wird; vgl. die folgende Bemerkung 5.1.

Im steady state sind alle Wachstumsraten konstant. Aus g_K = konst. und Gleichung (5.24) folgt $g_K = g_X$, und g_A = konst. in Verbindung mit (5.21) impliziert $g_A = g_X$. Die logarithmische Differentiation der Gleichung (5.19) liefert

$$g_X = \beta\varphi g_A + \alpha_1\varphi g_K + (1-\alpha_1-\alpha_2)\varphi g_L - \alpha_2\varphi\lambda/\eta.$$

Mit $g_L = n$ und $g_K = g_A = g_X$ im steady state folgt

$$(1-\alpha_1\varphi-\beta\varphi)g_X = (1-\alpha_1-\alpha_2)\varphi n - \alpha_2\varphi\lambda/\eta. \tag{5.25}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung aufgrund der Annahmen über die Parameter in den Gleichungen (5.11) und (5.13) positiv ist, wenn $n > 0$ und/oder $\lambda > 0$ ist, erfordert die Existenz eines steady state mit $g_X > 0$, daß $1-\alpha_1\varphi-\beta\varphi > 0$. Verwendet man die Definition von φ aus (5.20), so erhält man die Bedingung

$$1-\alpha_1-\alpha_2-\beta > \alpha_2/\eta \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha_2-(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\eta > 0 \tag{5.26}$$

Die rechte Seite der ersten Ungleichung ist negativ, weil $\eta < 0$ ist. Die nach der Gleichung (5.11) genannte Bedingung $1-\alpha_1-\alpha_2-\beta > 0$ ist daher hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz eines steady state, es sei denn man betrachtet ein kleines Land mit $\eta \to -\infty$. Im folgenden wird unterstellt, daß (5.26) gilt.

Setzt man die Definition von φ in (5.25) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} g_X = g_K = g_A &= \underbrace{\frac{-(1-\alpha_1-\alpha_2)\eta}{\alpha_2-(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\eta}}_{=:\gamma_1>0} n + \underbrace{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\eta}}_{=:\gamma_2>0}\lambda \\ &= \gamma_1 n + \gamma_2\lambda. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Die Gleichung (5.16) impliziert $g_M = g_p + g_X$. Substituiert man darin $g_M = (\eta+1)g_p + \lambda$ gemäß (5.18), so folgt

$$g_p = \frac{1}{\eta}g_X - \frac{\lambda}{\eta}, \tag{5.28}$$

und (5.17) impliziert unmittelbar

$$g_Y = g_p + g_X. \tag{5.29}$$

[14] In Analogie zu den Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnungen ist $Y = pC + pI + p\mathscr{X} - M$ das Nationaleinkommen in Einheiten des Importgutes. Wegen $p\mathscr{X} = M$ gilt also $I = Y/p - C$.

Wegen der Bedingung (5.26) ist der Nenner in den Definitionen von γ_1 und γ_2 positiv. Da in den Gleichungen (5.11) und (5.13) angenommen worden ist, daß $1-\alpha_1-\alpha_2>0$, $\alpha_2>0$ und $\eta<0$, sind γ_1 und γ_2 positiv. Die Gleichungen (5.27)–(5.29) enthalten die zentralen Implikationen des Modells und werden später umfassend analysiert.

Im langfristigen Gleichgewicht ist $g_X-\gamma_1 n-\gamma_2\lambda=0$. Dieselbe Bedingung gilt für g_A, g_K und, wie sich später herausstellt, auch für g_C. Daher sind die folgenden **niveauangepaßten Pro-Kopf-Variablen** im steady state konstant:

$$x:=\frac{X}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}},\ a:=\frac{A}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}},\ k:=\frac{K}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}},\ c:=\frac{C}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}. \tag{5.30}$$

Deshalb wird die Gleichung (5.19) in diesen niveauangepaßten Variablen ausgedrückt. Dazu wird (5.19) durch $L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}$ dividiert:

$$\begin{aligned}x=\frac{X}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}&=B\left(\frac{A}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}\right)^{\beta\varphi}\left(\frac{K}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}\right)^{\alpha_1\varphi}\\&\quad\cdot L^{\gamma_1(\beta+\alpha_1)\varphi+(1-\alpha_1-\alpha_2)\varphi-\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda(\beta+\alpha_1)\varphi t-\lambda\alpha_2\varphi t/\eta-\gamma_2\lambda t}.\end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von γ_1, γ_2 und φ, so ist nach einigen Umformungen zu erkennen, daß die Exponenten von L und e gleich null sind. Also ergibt sich schließlich

$$x=Ba^{\beta\varphi}k^{\alpha_1\varphi}. \tag{5.31}$$

Auch ohne die Annahme einer konstanten Sparquote kann das Modell nun auf ein System zweier Differentialgleichungen in k und a reduziert werden, daß allerdings noch von c abhängt. Aus der Definition von k in (5.30) folgt

$$g_k=g_K-(\gamma_1 n+\gamma_2\lambda)\quad\text{und}\quad\dot{k}=\frac{\dot{K}}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}-(\gamma_1 n+\gamma_2\lambda)k.$$

Setzt man (5.23), die Definitionen in (5.30) und schließlich (5.31) ein, so erhält man die erste Differentialgleichung

$$\dot{k}=(1-\alpha_2)Ba^{\beta\varphi}k^{\alpha_1\varphi}-(\gamma_1 n+\gamma_2\lambda)k-c. \tag{5.32}$$

Aus den Gleichungen (5.21) und (5.31) ergibt sich

$$\frac{\dot{A}}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}=Ba^{\beta\varphi}k^{\alpha_1\varphi}, \tag{5.33}$$

und die Definition von a impliziert

$$\frac{\dot{a}}{a}=\frac{\dot{A}}{A}-(\gamma_1 n+\gamma_2\lambda)\quad\text{and}\quad\dot{a}=\frac{\dot{A}}{L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}}-(\gamma_1 n+\gamma_2\lambda)a.$$

Unter Verwendung von (5.33) folgt daraus die zweite Differentialgleichung

$$\dot{a}=Ba^{\beta\varphi}k^{\alpha_1\varphi}-(\gamma_1 n+\gamma_2\lambda)a. \tag{5.34}$$

Anhand der Gleichung (5.32) können verschiedene Konsumhypothesen analysiert werden. Insbesondere erkennt man, daß jede Konsumhypothese, die $g_K = g_X$ im steady state impliziert (die einzige bezüglich des Konsums getroffene Annahme, die erforderlich ist, um die langfristigen Wachstumsraten und (5.32) abzuleiten), zu einem langfristig konstanten Wert von c führt. Also wächst C im steady state ebenfalls mit der in (5.27) spezifizierten Rate. Im Falle einer konstanten Sparquote impliziert die Substitution von (5.22) in (5.32) unter Verwendung von (5.30) und (5.31) die Differentialgleichung

$$\dot{k} = s(1-\alpha_2)Ba^{\beta\varphi}k^{\alpha_1\varphi} - (\gamma_1 n + \gamma_2\lambda)k. \tag{5.35}$$

Bemerkung 5.1. Als alternative Konsumhypothese kann die auf der Seite 162 eingeführte Goldene Faustregel (3.36) verwendet werden. Im vorliegenden Zusammenhang muß anstelle von w, dem Reallohnsatz in Einheiten des Zwischenproduktes, der Reallohnsatz in Einheiten des heimischen Gutes w/p verwendet werden. Mit der Rate ρ der Zeitpräferenz lautet die Faustregel demnach

$$C = \frac{w}{p}L + \rho K. \tag{5.36}$$

Differenziert man (5.11) nach L, so erhält man die Grenzproduktivitätsbedingung

$$(1-\alpha_1-\alpha_2)X = \frac{w}{p}L.$$

Die Substitution in (5.36) liefert nach Division durch $L^{\gamma_1}e^{\gamma_2\lambda t}$

$$c = (1-\alpha_1-\alpha_2)x + \rho k.$$

Verwendet man diese Gleichung in (5.32) zusammen mit (5.31), so folgt die Differentialgleichung

$$\dot{k} = \alpha_1 Ba^{\beta\varphi}k^{\alpha_1\varphi} - (\gamma_1 n + \gamma_2\lambda + \rho)k. \tag{5.37}$$

Alle folgenden Berechnungen können ebenso gut mit den Gleichungen (5.34) und (5.37) wie mit den Gleichungen (5.34) und (5.35) durchgeführt werden. Insbesondere ergibt sich ein qualitativ äquivalentes Phasendiagramm, obwohl die Werte von a und k im steady state im allgemeinen unterschiedlich ausfallen werden. Die langfristigen Wachstumsraten werden durch diese alternative Konsumhypothese jedoch nicht beeinflußt. Daher bleiben alle Folgerungen bezüglich der langfristigen Entwicklung der Volkswirtschaft gültig. $\Diamond$

Die Abbildung 5.2 zeigt das Phasendiagramm der Differentialgleichungen (5.34) und (5.35). Offenbar ist dieses Phasendiagramm qualitativ identisch zur Abbildung 4.1 auf der Seite 237, mit der die globale Stabilität des Gleichgewichts der Differentialgleichungen (4.56) und (4.59) nachgewiesen worden ist. Obwohl die Variablen k und a hier anders als im Abschnitt 4.5 definiert sind, verläuft der Beweis für den Verlauf der Isoklinen $\dot{k} = 0$ und $\dot{a} = 0$ und damit für die Eindeutigkeit des Gleichgewichts E

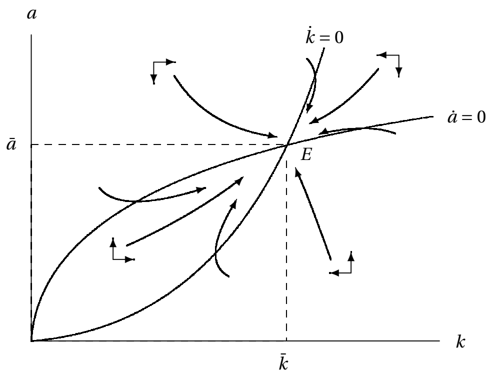

Abbildung 5.2
Globale Stabilität des Systems (5.34), (5.35)

im positiven Orthanten in beiden Fällen analog.[15] Daher ist das Gleichgewicht E wie im Abschnitt 4.5 asymptotisch global stabil für alle positiven Startwerte. Auch wenn die Übergangsdynamik zum steady state interessante Implikationen hat, rechtfertigt die Stabilität die ausführliche Analyse der Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts im nächsten Abschnitt.

Eigenschaften des langfristigen Gleichgewichts Die wesentlichen Implikationen des Modells für das langfristige Gleichgewicht werden in diesem Abschnitt in einer Reihe von Aussagen formuliert, denen jeweils die in den Gleichungen (5.11), (5.13) und (5.26) getroffenen Annahmen über die Parameterwerte zugrundeliegen, ohne daß diese Annahmen jedesmal wiederholt werden.

Zunächst wird der Spezialfall ohne technischen Fortschritt mit $\beta = 0$ betrachtet. Die Zustandsvariable a fällt dann weg. Das Modell reduziert sich somit auf Bardhans Originalbeitrag (1970, Kapitel 4), in dem $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ gilt. Daher ist die Wachstumsrate g_X der Produktion in diesem Fall ein gewichteter Durchschnitt der Wachstumsrate der Bevölkerung n und der Wachstumsrate der Weltexportnachfrage nach dem heimischen Gut bei konstanten Preisen λ. Wenn $\lambda < n$ ist, wächst der Output X daher mit einer Rate, die kleiner als n ist, so daß der Pro-Kopf-Output stetig abnimmt. Da sich die terms of trade p unter diesen Umständen stetig verschlechtern (vgl. die folgende Aussage 5.1), fällt das Nationaleinkommen pro Kopf erst recht. Bardhan (1970, p. 68, fn. 4) führt diese Eigenschaft auf die Beschränkung der Exportnachfrage zurück und

[15] Im Vergleich zum Beweis im Abschnitt 4.5 ist im wesentlichen zusätzlich zu berücksichtigen, daß die Exponenten $\beta\varphi$ und $\alpha_1\varphi$ in (5.34) und (5.35) aufgrund der Annahmen über die Parameter in (5.11) und (5.13) positiv sind, und daß die Summe der Exponenten wegen (5.26) kleiner als eins ist:

$$\beta\varphi + \alpha_1\varphi = \frac{(\beta + \alpha_1)\eta}{\eta - \alpha_2(\eta + 1)} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta > \alpha_2/\eta.$$

fügt hinzu, daß eine solche Situation in der Realität aufgrund ausgleichender Faktoren wie dem technischen Fortschritt und der Entwicklungshilfe nicht von Dauer sein könne. Allerdings wird sich herausstellen, daß der technische Fortschritt allein eine derartige Abnahme des Pro-Kopf-Einkommens nicht notwendigerweise verhindert (vgl. die Aussage 5.3).

Für den allgemeineren Fall mit $\beta > 0$ liefert die Substitution von (5.27) in (5.28) die folgende Bedingung, die die Wachstumsrate der terms of trade p bestimmt:

$$g_p = \frac{(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\lambda-(1-\alpha_1-\alpha_2)n}{\alpha_2-(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\eta}. \tag{5.38}$$

Dabei ist zu beachten, daß $1-\alpha_1-\alpha_2-\beta$ die Differenz zwischen der Produktionselastizität der Arbeit (also der Lohnquote) und der Lernelastizität ist. Da der Nenner in (5.38) positiv ist, impliziert diese Gleichung unmittelbar

Aussage 5.1. *Wenn die Wachstumsrate der Weltexportnachfrage bei festen Preisen λ geringer als die Wachstumsrate der inländischen Bevölkerung n ist, verschlechtern sich die terms of trade des Inlands stetig ($g_p < 0$). Die terms of trade verbessern sich genau dann, wenn $\lambda > n$ ist und λ, gewichtet mit der Differenz zwischen der Lohnquote und der Lernelastizität, größer als n, gewichtet mit der Lohnquote, ist.*

Man beachte, daß sich die terms of trade für den Spezialfall $\beta = 0$ verschlechtern, konstant bleiben oder verbessern, je nachdem ob λ kleiner, gleich oder größer als n ist.

Die Wachstumsrate des Konsums C ist gleich der in (5.27) angegebenen Wachstumsrate des Output, des Kapitals und des Lernindex. Verwendet man die Definitionen von γ_1 und γ_2 in $g_{C/L} = \gamma_1 n + \gamma_2\lambda - n$, so erhält man

$$g_{C/L} = \frac{\alpha_2\lambda-(\beta\eta+\alpha_2)n}{\alpha_2-(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\eta}. \tag{5.39}$$

Daraus folgt, daß

$$g_{C/L} \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \gtreqless \frac{\alpha_2+\beta\eta}{\alpha_2} n.$$

Also wächst der Konsum pro Kopf nur, wenn die Wachstumsrate λ der Weltexportnachfrage bei festen Preisen die Wachstumsrate n der heimischen Bevölkerung, gewichtet mit $(\alpha_2+\beta\eta)/\alpha_2$, übersteigt. Positives Pro-Kopf-Wachstum ist um so wahrscheinlicher, je größer λ, der absolute Wert der negativen Preiselastizität $|\eta|$ oder die Lernelastizität β sind und je kleiner n oder die Produktionselastizität der importierten Zwischenprodukte α_2 sind. Die Gleichung (5.39) impliziert, daß der heimische Pro-Kopf-Konsum mit einer positiven Rate wächst, wenn es technischen Fortschritt gibt ($\beta > 0$) und die Weltexportnachfrage mindestens so schnell wie die heimische Bevölkerung wächst ($\lambda \geqq n$). Wenn die Wachstumsrate der Weltexportnachfrage kleiner als die Wachstumsrate der heimischen Bevölkerung ist, kann der Pro-Kopf-Konsum allerdings abnehmen. Genauer gilt, daß $g_{C/L} < 0$, wenn $\alpha_2 > -\beta\eta$ ist und n den Grenzwert $\bar{n} = \alpha_2\lambda/(\alpha_2 + \beta\eta) > \lambda$ übersteigt. Hierbei ist es wichtig zu beachten, daß der Wert von n sehr groß sein muß, um $\bar{n}$ zu übersteigen, weil der Nenner $\alpha_2 + \beta\eta$ positiv sein muß und daher numerisch klein ist. Eine negative Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums ergibt sich daher nur, wenn die Rate des technischen Fortschritts gering ist und die Wachstumsrate der heimischen Bevölkerung die Wachstumsrate der Weltexportnachfrage bei festen Preisen bei weitem übersteigt.

Bildet man die Ableitung

$$\frac{\partial g_{C/L}}{\partial n} = \frac{-(\beta\eta + \alpha_2)}{\alpha_2 - (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta)\eta} \gtreqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_2 \lesseqgtr -\beta\eta,$$

so erhält man in Verbindung mit der vorangehenden Analyse eine **Lösung des Bevölkerungspuzzles**.

Aussage 5.2. *Die Wachstumsrate $g_{C/L}$ des Pro-Kopf-Konsums steigt, bleibt konstant oder fällt mit einer steigenden Wachstumsrate der heimischen Bevölkerung, je nachdem ob die Produktionselastizität der importierten Zwischenprodukte geringer, gleich oder größer als die mit dem Absolutwert der Preiselastizität der Exportnachfrage gewichtete Lernelastizität ist. Wenn $g_{C/L}$ in n fällt, gibt es einen Grenzwert $\bar{n} = \alpha_2\lambda/(\alpha_2 + \beta\eta)$, so daß $g_{C/L} \gtreqless 0$, wenn $n \lesseqgtr \bar{n}$. Falls $g_{C/L}$ mit zunehmenden Werten von n steigt, ist die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums positiv.*

Also impliziert eine größere Wachstumsrate der Bevölkerung um so eher eine kleinere Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums, je größer die Produktionselastizität der importierten Zwischenprodukte ist und je geringer die Preiselastizität der Weltexportnachfrage und die Lernelastizität sind. Diese Ergebnisse sind naheliegend. Denn die empirischen Befunde von Havrylyshyn und Civan (1985) zeigen, daß die Entwicklungsländer Zwischenprodukte hauptsächlich aus den industrialisierten Ländern importieren (α_2 ist positiv) und Güter mit relativ geringen Kapitalintensitäten exportieren, die in Verallgemeinerung der Ergebnisse von Lieberman (1984) relativ geringe Lernelastizitäten β aufweisen sollten. Die Größenverhältnisse dieser Parameter ändern sich vermutlich bei steigendem Grad der Industrialisierung. Zumindest wenn das Inland im Modell als eine Gruppe ähnlicher Länder interpretiert wird, verlangt eine Ausweitung der gesamten Exporte beträchtlich geringere Exportpreise, so daß $|\eta|$ relativ klein ist. Tatsächlich zeigen die Schätzungen von Senhadji und Montenegro (1999), daß die Preiselastizitäten der Exporte sogar in bezug auf einzelne Länder relativ gering sind (durchschnittlich $|\eta| \approx 1$). Daher erklärt die Aussage 5.2, warum die Pro-Kopf-Wachstumsraten in den Wachstumsraten der Bevölkerung sowohl steigen als auch fallen können.

Das stilisierte Faktum 8 bezieht sich nicht auf die Wachstumsraten des Pro-Kopf-Konsums, sondern des Pro-Kopf-Einkommens. Während der Output X gemäß (5.27) eindeutig wächst, kann die Wachstumsrate g_Y des Nationaleinkommens aufgrund eines fallenden relativen Preise des heimisch produzierten Gutes negativ sein. Eine negative Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens Y/L ist daher erst recht möglich. Wegen $g_{Y/L} = g_p + g_X - n = g_p + g_{C/L}$ liefert die Addition der Wachstumsraten in (5.38) und (5.39)

$$g_{Y/L} = \frac{(1-\alpha_1-\beta)\lambda - (1-\alpha_1+\eta\beta)n}{\alpha_2 - (1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\eta}. \tag{5.40}$$

Für den Spezialfall $\lambda = n$ und $\eta = -1$ oder $\beta = 0$ ist das Pro-Kopf-Einkommen konstant. Ohne technischen Fortschritt (für $\beta = 0$), fällt das Pro-Kopf-Einkommen, bleibt konstant oder steigt, je nachdem ob $\lambda \lesseqqgtr n$ ist.

Die Vorzeichen der Koeffizienten im Zähler von (5.40) unterliegen den folgenden Restriktionen. Addiert man $1-\alpha_1$ auf beiden Seiten der zweiten Ungleichung in (5.26), so folgt nach einigen Umformungen

$$1-\alpha_1+\eta\beta > (1+\eta)(1-\alpha_1-\alpha_2).$$

Wenn die Weltexportnachfrage preisunelastisch ist ($\eta > -1$), ist die rechte Seite positiv. Also ist $1-\alpha_1+\eta\beta > 0$, wenn $\eta > -1$. Gleichermaßen kann man anhand von (5.26) zeigen, daß $1-\alpha_1-\beta > 0$ gilt, wenn $\eta \leqq -1$ ist. Aus (5.40) folgt damit

$$\begin{aligned} g_{Y/L} \gtreqqless 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad n \lesseqqgtr \frac{1-\alpha_1-\beta}{1-\alpha_1+\eta\beta}\lambda, \quad \text{wenn} \quad \eta > -1, \\ g_{Y/L} \gtreqqless 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda \gtreqqless \frac{1-\alpha_1+\eta\beta}{1-\alpha_1-\beta}n, \quad \text{wenn} \quad \eta \leqq -1. \end{aligned} \tag{5.41}$$

In beiden Fällen ist der Quotient auf der rechten Seite der jeweils zweiten Ungleichung kleiner als eins. Der jeweilige Zähler kann auch negativ sein, während die jeweiligen Nenner positiv sind. Differenziert man $g_{Y/L}$ nach n, so folgt

$$\frac{\partial g_{Y/L}}{\partial n} \gtreqqless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1-\alpha_1+\eta\beta \lesseqqgtr 0.$$

Diese Beziehung, die Aussagen (5.41) und die vorangehende Analyse implizieren die

Aussage 5.3. *Wenn die Weltexportnachfrage preisunelastisch ist ($\eta > -1$), fällt die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens $g_{Y/L}$ mit zunehmender Wachstumsrate der Bevölkerung n. In diesem Fall ist $g_{Y/L}$ nur dann positiv, wenn $1-\alpha_1-\beta > 0$ ist und λ dabei n um mindestens den Faktor $(1-\alpha_1+\eta\beta)/(1-\alpha_1-\beta) > 1$ übersteigt. Wenn die Exportnachfrage preiselastisch ist ($\eta \leqq -1$), kann $g_{Y/L}$ auch positiv sein, falls $\lambda < n$ ist. In diesem Fall steigt $g_{Y/L}$, ist konstant oder fällt in n, je nachdem, ob $1-\alpha_1+\eta\beta$ negativ, gleich null oder positiv ist.*

Die Aussage 5.3 bestätigt die Lösung des Bevölkerungspuzzles mit Bezug zum Pro-Kopf-Einkommen.

Abschließend wird $g_{Y/L}$ als Funktion der Lernelastizität β betrachtet. Leitet man (5.40) nach β ab, so folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial g_{Y/L}}{\partial \beta} \gtreqless 0 \iff (1+\eta)\eta(1-\alpha_1-\alpha_2)n \gtreqless (1+\eta)\alpha_2\lambda \iff 1+\eta \lesseqgtr 0.$$

Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens im Inland steigt mit dem Ausmaß des technischen Fortschritts also nur, wenn die Weltexportnachfrage nach dem heimischen Gut preiselastisch ist. Im Fall einer preisunelastischen Nachfrage entsteht eine dynamische Version des sogenannten **verarmenden Wachstums (immiserizing growth)** in bezug auf das gemessene Pro-Kopf-Einkommen. Während sich das verarmende Wachstum in der statischen Version von Bhagwati (1958) und Johnson (1959) in einem sinkenden Pro-Kopf-Einkommen oder Nutzen durch eine einmalige ökonomische Expansion im Inland (beispielsweise eine einmalige technische Neuerung, die die Produktionsmöglichkeiten erhöht) niederschlägt, bewirkt hier eine Erhöhung der Rate des technischen Fortschritts eine geringere Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens.

5.2.3 Exkurs: Thirlwalls Gesetz

Die Einführung einer exogenen Weltexportnachfrage in ein angebotsorientiertes Modell des semi-endogenen Wachstums bedeutet letztlich, daß **keynesianische Elemente** der Nachfragebeschränkung in ein **neoklassisches Modell** aufgenommen werden. Daher liegt es nahe, die bisher abgeleiteten Ergebnisse mit der keynesianischen Version des durch den Zahlungsbilanzausgleich beschränkten Wachstums (**balance of payments constrained growth**) zu vergleichen. Dieser Begriff ist mit dem Namen von Thirlwall (1979) verbunden, dessen Ansatz kurz skizziert wird, wobei die hier verwendeten Symbole genutzt werden.

Thirlwall (1979) verwendet die Handelsbilanzbedingung (5.12), die Weltexportnachfrage (5.13) und eine Funktion der Importnachfrage des Inlands

$$M = \left(\frac{1}{p}\right)^{\tilde{\eta}} Y^{\tilde{\mu}_2}, \quad \tilde{\eta} < 0,\ \tilde{\mu}_2 > 0.$$

Hinsichtlich der Weltexportnachfrage ist die Interpretation gemäß (5.14) mit $\lambda = \bar{\lambda}\mu_2 = \mu_2 g_{Y^*}$ zu berücksichtigen. Die logarithmische Differentiation der drei Beziehungen liefert

$$\begin{aligned} g_M &= g_p + g_{\mathscr{X}}, \\ g_{\mathscr{X}} &= \eta g_p + \mu_2 g_{Y^*}, \\ g_M &= -\tilde{\eta} g_p + \tilde{\mu}_2 g_Y. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der ersten Gleichung $g_{\mathscr{X}}$ und g_M durch die zweite und dritte Gleichung, so folgt

$$g_Y = \frac{(1+\eta+\tilde{\eta})g_p + \mu_2 g_{Y^*}}{\tilde{\mu}_2}. \tag{5.42}$$

Diese Gleichung gibt die Wachstumsrate des inländischen Einkommens in Abhängigkeit von der Wachstumsrate des ausländischen Einkommens und der Entwicklung der terms of trade an. Unterstellt man nun noch, daß sich die terms of trade nicht verändern ($g_p = 0$), so gilt $g_{\mathscr{X}} = \mu_2 g_{Y^*}$. Setzt man diese beiden Bedingungen in (5.42) ein, so folgt schließlich

$$g_Y = \frac{g_{\mathscr{X}}}{\tilde{\mu}_2} \tag{5.43}$$

Die Gleichung (5.43) wird als **Thirlwalls Gesetz** bezeichnet. Demnach ist die langfristige Wachstumsrate des heimischen Einkommens durch das Verhältnis der Wachstumsrate der Weltexportnachfrage zur heimischen Einkommenselastizität der Importnachfrage gegeben beziehungsweise beschränkt, wenn man dieses Verhältnis als Maximalwert der heimischen Wachstumsrate interpretiert.

Setzt man wie Thirlwall in dem im Abschnitt 5.2.1 formulierten Modell $g_p = 0$, so folgt aus (5.28) und (5.29), daß $g_Y = \lambda$. Unter Berücksichtigung von $g_{\mathscr{X}} = \mu_2 \bar{\lambda} = \lambda$ gemäß (5.14) für $g_p = 0$ ergibt sich damit

$$g_Y = g_{\mathscr{X}}. \tag{5.44}$$

Die heimische Importnachfrage in Abhängigkeit vom Einkommen erhält man, indem (5.15) nach X aufgelöst und in (5.16) eingesetzt wird, als

$$M = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} Y.$$

Die heimische Einkommenselastizität der Importnachfrage ist also $\tilde{\mu}_2 = 1$. Damit ist (5.44) ein Spezialfall von (5.43). Unter der (im Gesamtrahmen des Modells nicht haltbaren) Annahme konstanter terms of trade gilt Thirlwalls Gesetz also auch für den vorliegenden Ansatz.

Gemäß der Gleichung (5.38) ist g_p nur gleich null, wenn entweder $(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\lambda = (1-\alpha_1-\alpha_2)n$ oder $\eta \to -\infty$ ist. Thirlwalls Gesetz gilt also im Rahmen des vorliegenden Modells nur für theoretische Grenzfälle. Interessant ist dabei, daß die Bedeutung der Beschränkung des Wachstums durch die Zahlungsbilanz gemäß (5.27) zunimmt, wenn die Preiselastizität η absolut kleiner wird. Für $\eta \to 0$ erhält man $g_X = g_C = \lambda$, also den keynesianischen Fall, in dem die Wachstumsrate der Exportnachfrage die Wachstumsraten der Produktion und des Konsums im Inland bestimmt, obwohl g_p in diesem Fall nicht gleich null ist, so daß $g_Y \neq g_X$ folgt. Wenn dagegen $\eta \to -\infty$ gilt, so erhält man $g_p \to 0$, und auch für sehr hohe Preiselastizitäten ist g_p schon relativ klein, ohne daß weitere Grenzfälle für die Parameter erfüllt sein müssen. Wendet man die Regel von l'Hôspital auf (5.27) an, so ergibt sich für $\eta \to -\infty$

$$g_Y = g_X = g_C = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2-\beta} n = \gamma_1 n. \tag{5.45}$$

Diese Gleichung beschreibt den neoklassischen Fall des kleinen Landes, in dem die Exportnachfrage die heimischen Wachstumsraten nicht beschränkt.[16] Keynesianische Implikationen entstehen also nicht, wenn $g_p = 0$ ist, sondern wenn η gleich null beziehungsweise allgemeiner sehr klein ist, während Thirlwalls Annahme $g_p = 0$ im vorliegenden Modell erfordert, daß $\eta \to -\infty$ [abgesehen von dem Grenzfall $(1-\alpha_1-\alpha_2-\beta)\lambda = (1-\alpha_1-\alpha_2)n$]. In diesem Fall sind die Implikationen des Modells rein neoklassisch.

Obwohl insbesondere die Annahme konstanter terms of trade sehr restriktiv erscheint, ist Thirlwalls Gesetz von Thirlwall (1979) selbst und in zahlreichen weiteren empirischen Studien positiv getestet worden.[17] Zum Beispiel stützt die Analyse von Hieke (1997) das Gesetz für die USA, wenn man die Nachkriegszeit in die Perioden 1950–66 und 1967–90 einteilt. Der Ansatz einer Nachfragebeschränkung wird dagegen in der neoklassischen Theorie vollständig vernachlässigt. Das vorliegende Modell kann daher auch als Integration der neoklassischen und der keynesianischen Theorie betrachtet werden, in der die Wachstumsrate des Einkommens sowohl von der Angebotsseite als auch von der Nachfrageseite abhängt. Im Gegensatz zum rein keynesianischen Modell kann auch die Entwicklung der terms of trade im Zusammenspiel mit der Angebotsseite erklärt werden.

5.2.4 Wirtschaftspolitische Implikationen

Die Ergebnisse dieses Modells unterscheiden sich erheblich von den Implikationen eines analog aufgebauten Modells einer geschlossenen Volkswirtschaft, in dem alle Wachstumsraten mit zunehmender Wachstumsrate der Bevölkerung steigen (vgl. den Abschnitt 4.5). Diese Unterschiede sind darauf zurückzuführen, daß die Weltexportnachfrage die Verfügbarkeit der Zwischenprodukte und damit die Wachstumsraten des Output und des Volkseinkommens beschränkt. Obwohl eine endogene Erklärung der Weltexportnachfrage wünschenswert ist, sind die grundlegenden aus der exogenen Nachfrage gewonnenen Folgerungen überzeugend. Die im Abschnitt 5.2.1 zitierten empirischen Ergebnisse über die Bedeutung der Importe von Zwi-

---

[16] Für eine explizite Analyse des Falls des kleinen Landes muß die Gleichung (5.13) durch die Annahme eines exogenen relativen Weltmarktpreises p ersetzt werden. Verwendet man dieses p in (5.16) und setzt das Ergebnis in (5.11) ein, so erhält man die Version von (5.19) für das kleine Land. Die durch diese Gleichung implizierte gleichgewichtige Wachstumsrate stimmt exakt mit derjenigen in (5.27) für $\eta \to -\infty$ überein, also

$$g_X = g_C = \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2-\beta}\, n = \gamma_1 n.$$

[17] Die zu den empirischen Ergebnissen über die Reichweite von knowledge spillovers sowie die Beziehung zwischen dem Außenhandel und dem Wachstum gemachten Anmerkungen gelten analog für die Ergebnisse zur langfristigen Entwicklung der terms of trade der Entwicklungsländer. Nach Maizels (2000) haben sich die terms of trade der Entwicklungsländer langfristig verschlechtert. Die Lektüre von Powell (1991) und der dort zitierten Literatur vermittelt einen Eindruck von den Schwierigkeiten, eindeutige Aussagen über die langfristige Entwicklung der terms of trade zu machen.

schenprodukten und die Beziehung der Wachstumsraten der Weltexportnachfrage zu den Wachstumsraten der Bevölkerung in den Entwicklungsländern zeigen, daß das Modell die Auswirkungen des Bevölkerungswachstums auf das Wachstum der Pro-Kopf-Einkommen plausibel erklären kann. Das Bevölkerungspuzzle kann daher mittels eines einfachen, analytisch zugänglichen Modells gelöst werden. Dabei zeigt sich, daß eine höhere Wachstumsrate der Bevölkerung in Abhängigkeit von den Größenverhältnissen verschiedener Elastizitäten sowohl günstige als auch widrige Auswirkungen auf die wirtschaftliche Entwicklung haben kann. Diese Implikation verträgt sich gut mit der auch empirisch nicht eindeutigen Beziehung zwischen dem Wirtschaftswachstum und dem Bevölkerungswachstum.

Hinsichtlich der spezifizierten funktionalen Form der Funktion der Weltexportnachfrage ist es wichtig, auf eine korrekte Interpretation der Ergebnisse zu achten. In der Theorie des Außenhandels werden verschiedene Niveaus der internationalen Beziehungen unterschieden. Das eine Extrem stellt die Annahme des kleinen Landes in einer großen Welt dar, für das die Preise exogen gegeben sind, das andere Extrem ist eine Welt mit zwei Ländern, die beide groß genug sind, um die Weltmarktpreise zu beeinflussen. Während sich diese beiden Länder in der theoretischen Hauptströmung lediglich in bezug auf die Größenordnung einiger Parameter unterscheiden, ergänzen die sogenannten **Nord-Süd-Modelle** diese Ansätze durch die Berücksichtigung struktureller Unterschiede zwischen den Ländern. Nach Findlay (1984, S. 221–223) sind der Ansatz des kleinen Landes und der Ansatz eines Nord-Süd-Modells komplementäre Sichtweisen des Zusammenhangs zwischen dem Außenhandel und der wirtschaftlichen Entwicklung, wobei spezifische Probleme auch Modelle erfordern können, die zwischen diesen beiden Extremen liegen. Für das hier betrachtete Modell ist es naheliegend, es als Beschreibung einer Gruppe von ähnlichen Ländern des Südens aufzufassen, die einer gegebenen Exportnachfrage des Nordens gegenüberstehen. Diese Exportnachfrage kann preisunelastisch sein und wächst nicht mit einer unendlichen Rate. Die Bedeutung der Betrachtung unterschiedlicher Niveaus der internationalen Beziehungen wird durch die Sensitivität des vorliegenden Modells in bezug auf die Annahme über die Preiselastizität η der Exportnachfrage deutlich. Der Fall des kleinen Landes ist als Spezialfall für $\eta \to -\infty$ enthalten. Gemäß der Gleichung (5.45) gilt für diesen Parameterwert, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsum $g_{C/L} = (\gamma_1 - 1)\, n > 0$ ist. Dieses Ergebnis stimmt im wesentlichen mit dem im Abschnitt 4.5 betrachteten Fall einer geschlossenen Volkswirtschaft überein, in dem $g_{C/L}$ mit zunehmender Wachstumsrate n der Bevölkerung steigt.

Hinsichtlich derjenigen Aussagen des Modells, die von der Höhe der Wachstumsrate λ der Weltexportnachfrage bei festen Preisen abhängen, ist zu betonen, daß es verschiedene Gründe dafür geben kann, daß zum Beispiel λ kleiner als n ist. Wie im Abschnitt 5.2.1 gezeigt worden ist, muß λ als das Produkt der Wachstumsrate des ausländischen Einkommens $\bar{\lambda}$ mit der Einkommenselastizität μ_2 interpretiert werden. Wenn zum Beispiel $\lambda < n$ ist, verschlechtern sich die heimischen terms of trade unabhängig davon stetig, ob λ aufgrund einer relativ geringen Wachstumsrate im Ausland relativ klein ist oder ob das heimische Produkt ein inferiores Gut ist ($\mu_2 < 1$).

Gleichermaßen profitiert das Inland von einer hohen Wachstumsrate des ausländischen Einkommens auf die gleiche Weise wie von einer hohen Einkommenselastizität des Auslands in bezug auf das vom Inland exportierte Produkt.

Während einige der Implikationen des Modells von den Größenverhältnissen der Wachstumsrate n der Bevölkerung und der Wachstumsrate λ der Weltexportnachfrage bei festen Preisen abhängen, ist zu betonen, daß der erste Teil der Aussage 5.2 unabhängig von λ ist. Selbst wenn die Weltexportnachfrage viel schneller wächst als die heimische Bevölkerung, impliziert also eine höhere Wachstumsrate der Bevölkerung eine geringere Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums, wenn die Produktionselastizität der Zwischenprodukte die mit dem Absolutwert der Preiselastizität der Exportnachfrage $|\eta|$ gewichtete Lernelastizität übersteigt. Diese Bedingung kann im Fall des kleinen Landes mit einer positiven Lernelastizität nicht erfüllt sein, in dem die absolute Preiselastizität der Exportnachfrage unendlich groß ist. Während empirisch geschätzte Nachfrageelastizitäten in der Regel relativ klein sind (nach Senhadji und Montenegro, 1999, zum Beispiel $|\eta| \approx 1$), haben Panagariya et al. (2001) kürzlich einen Wert von 26 für Textilien (multi-fibre products) aus Bangladesch ermittelt, ein Wert der die Vorstellungen der Außenhandelstheoretiker im Hinblick auf die Lage kleiner Länder stützt. Auch diese Autoren merken allerdings an, daß andere Schätzungen in der Regel sehr viel kleinere Werte ergeben. Welche Schätzungen die tatsächlichen Werte auch immer besser treffen, so beziehen sie sich in jedem Fall auf einzelne Länder. Wie bereits angemerkt worden ist, erscheint es hinsichtlich der zentralen Fragestellung des vorliegenden Modells angemessen, das Inland als eine Gruppe ähnlicher Länder des Südens zu interpretieren, für die der Absolutwert der Exportnachfrageelastizität relativ gering sein sollte. Damit soll nicht ausgeschlossen werden, daß der Fall des kleinen Landes für andere Fragestellungen sinnvoll ist. Im Abschnitt 5.3 wird ein solches Modell betrachtet.

Hinsichtlich der Auswirkung der Wachstumsrate der Bevölkerung auf das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens ist die Bedeutung der Nachfrageelastizität noch offensichtlicher. Immer wenn die Weltexportnachfrage preisunelastisch ist, fallen die Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens mit zunehmendem n. Wenn n unter dieser Voraussetzung einen bestimmten Grenzwert übersteigt, ist die Wachstumsrate sogar negativ. Zu beachten ist dabei, daß derartige Voraussagen nur für solche Länder gelten, die noch nicht in der Lage sind, die benötigten Zwischenprodukte selbst herzustellen.

Diese Beobachtung führt zu den Implikationen des Modells für die Wirtschaftspolitik, wobei zwei unterschiedliche Ansätze zu unterscheiden sind. Zunächst kann nach einer optimalen Wirtschaftspolitik bei **gegebener** Produktionsstruktur und gegebener Wachstumsrate der Bevölkerung gesucht werden. Dazu kann das Modell ähnlich wie im Fall der geschlossenen Volkswirtschaft im Abschnitt 4.5 um den Staat erweitert werden. Der Staat kann Zölle erheben, um die terms of trade zugunsten des Inlands zu beeinflussen, und eventuell durch Subventionen die Akkumulation des Kapitals beschleunigen, so daß höhere Lerneffekte eintreten. Allerdings hat die Akkumulation des Kapitals durch die Erhöhung der Produktion nicht nur einen positiven Effekt auf das learning by doing, sondern auch einen negativen Effekt auf die terms of trade, so daß eine genauere Analyse der optimalen Wirtschaftspolitik erforderlich ist. Dieser Ansatz wird hier jedoch nicht weiter verfolgt, weil dieses erste Konzept der Wirtschaftspolitik nicht das eigentliche Problem trifft.

Nur die zweite Konzeption der Wirtschaftspolitik, die die herrschende Produktionsstruktur **nicht** als **gegeben** ansieht, kann den eigentlichen Kern des Problems treffen. Wenn eine zu hohe Wachstumsrate der Bevölkerung zu einer geringen Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums in einem Entwicklungsland führt und hierfür die Abhängigkeit von importierten Zwischenprodukten verantwortlich zu machen ist, so besteht – abgesehen von Geburtenkontrollen – der einzige Ausweg letztlich darin, daß das Land diese Güter selbst herstellt. Das heißt, das Entwicklungsland muß versuchen, Produktionstechniken der industrialisierten Länder zu übernehmen und so die Beschränkung der Exportnachfrage zu eliminieren. Eines der überzeugendsten unter den Argumenten für den Freihandel im dynamischen Zusammenhang beziehungsweise für eine exportorientierte Entwicklungspolitik ist, daß der Außenhandel zu einer Adaption des Wissens anderer Länder führen kann. So einleuchtend das Argument auch ist, so sollte es nicht dahingehend verstanden werden, daß laissez faire allein alle Probleme lösen kann. Wie bereits früher angemerkt worden ist, legen verschiedene empirische Studien nahe, daß die Wissensdiffusion in erster Linie national und nicht international wirkt. John Stuart Mill hat so gesehen einen guten Grund für sein Argument gehabt, daß eine temporäre Protektion junger Industrien, die eine ausländische Produktionstechnologie anwenden, notwendig sein kann, um eine für den internationalen Wettbewerb hinreichende Vertrautheit mit diesen industriellen Verfahrensweisen zu gewinnen.[18]

Angesichts der vorangehenden Analyse erscheint die Anmerkung trivial, daß die Wirtschaftspolitik einen Einfluß auf die Wachstumsrate nehmen kann, ist aber aufgrund des wichtigen Resultats der Politikineffektivität in den Modellen des semi-endogenen Wachstums in geschlossenen Volkswirtschaften erforderlich. Der Grund für diese Politikineffektivität ist, daß die Produktionsstruktur innerhalb des jeweiligen Modellrahmens gegeben ist. Jedes Modell ist natürlich immer nur ein vereinfachtes Abbild der Realität, das im Falle einer geschlossenen Volkswirtschaft eben nicht berücksichtigt, daß sich andere Länder zu einem gegebenen Zeitpunkt in der Regel strukturell von dem betrachteten Inland unterscheiden. Eine Änderung der Produktionsstruktur aufgrund von Adaptionen aus dem Ausland kann selbstverständlich zu anderen Wachstumsraten führen, und soweit die Wirtschaftspolitik diese Struktur beeinflussen kann, hat sie einen Einfluß auf das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens. Im nächsten Abschnitt wird ein Zwei-Sektoren-Modell formuliert, in dem strukturelle Änderungen auch ohne Nachahmung ausländischer Produktionsverfahren möglich sind und durch den internationalen Handel beeinflußt werden.

[18] Eine ausführliche Darstellung des Erziehungsarguments der Protektion und des sogenannten Mill-Bastable-Dogmas findet sich in Christiaans (1997, Kapitel III.2).

5.3 Industrialisierung einer kleinen offenen Volkswirtschaft

5.3.1 Die geschlossene Volkswirtschaft

Das statische Gleichgewicht Das Modell der Beschränkung der Handelsbilanz erlaubt eine Erklärung des stilisierten Faktums 8. Da der Außenhandel in diesem Modell eine Voraussetzung für das Wachstum gemäß der gegebenen Produktionstechnik ist, läßt sich der Zusammenhang zwischen dem Außenhandel und dem Wirtschaftswachstum gemäß dem stilisierten Faktum 7 jedoch nicht analysieren. Früher ist bereits angemerkt worden, daß das Faktum 7 mit dem Prozeß des Strukturwandels zusammenhängen kann, der durch das mit dem Außenhandel verbundene Muster der internationalen Spezialisierung beeinflußt wird, insbesondere wenn diese Spezialisierung mit einem Prozeß der Industrialisierung oder Deindustrialisierung einhergeht.

Im folgenden wird der Einfluß des Außenhandels auf die Industrialisierung und damit das Wirtschaftswachstum anhand des von Christiaans (2003b) formulierten Zwei-Sektoren-Wachstumsmodells ohne Skaleneffekte analysiert. Im ersten Sektor werden industrielle Güter und im zweiten Sektor Agrargüter produziert. Gleichzeitig wird auch in diesem Modell die strenge Vorhersage der Theorie des semi-endogenen Wachstums abgemildert, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens immer mit der Wachstumsrate der Bevölkerung steigt, die zusammen mit dem Startwert des Kapitalstocks die wesentliche Determinante einer möglichen Industrialisierung oder Deindustrialisierung des Landes ist.

Wie zuvor wird unterstellt, daß es Lerneffekte gibt, die intern auf Länderebene aber extern auf Unternehmensebene sind. In Abweichung zu den Ausführungen des Abschnitts 5.2 treten die Lerneffekte jetzt aufgrund der Investitionstätigkeit auf, so daß an die Stelle des learning by doing nun das **learning by investment** tritt.

Ein übliches Ergebnis in Modellen, die auf der Akkumulation von Humankapital oder dem learning by doing (beziehungsweise investment) basieren, ist es, daß ein anfangs rückständiges Land nach dem Übergang von der Autarkie zum Freihandel langsamer wächst als der Rest der Welt. Im Gegensatz dazu wird sich herausstellen, daß auch die Möglichkeit besteht, daß ein anfangs rückständiges Land schneller wächst oder ein anfangs fortgeschrittenes Land durch den Außenhandel langsamer wächst, wenn man die Rückständigkeit durch einen komparativen Nachteil in der industriellen Produktion definiert. Die Ursache für diese Ergebnisse liegt in der möglichen Umkehrung der komparativen Vorteile. Die relative Höhe der Wachstumsrate der inländischen Bevölkerung, die in der Regel als wichtige Determinante des Einflusses des Außenhandels auf das Wachstum vernachlässigt wird, spielt in diesem Zusammenhang eine entscheidende Rolle. In Abhängigkeit von dem sich ergebenden Spezialisierungsmuster kann also sowohl eine positive als auch eine negative Beziehung zwischen dem Außenhandel und dem Wachstum auftreten. Speziell ist es auch möglich, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens nach dem Übergang zum Freihandel als Ergebnis einer beschleunigten Industrialisierung temporär ansteigt, dann aber wieder fällt. In einem solchen Fall setzt ein Prozeß der Deindustrialisierung ein, wobei das schließlich Agrargüter produzierende Inland aber trotzdem von der relativ hohen Wachstumsrate im Ausland profitiert, da sich seine terms of trade relativ schnell verbessern. Eine negative Wirkung des Außenhandels auf das Wachstum tritt auf, wenn die Wachstumsrate der Bevölkerung im Inland relativ groß und der anfängliche Kapitalstock relativ klein ist, woraus sich in der Ausgangssituation ein komparativer Vorteil in der landwirtschaftlichen Produktion ergibt, wenn sich das Inland auf seinem autarken steady state-Pfad befindet.

Ein vergleichbarer, aber in einigen wesentlichen Punkten abweichender Ansatz stammt von Wong und Yip (1999). So wird im folgenden eine ähnliche Produktionsstruktur zugrundegelegt und wie in Wong und Yip (1999) angenommen, daß sich eine kleine offene Volkswirtschaft einer exogen gegebenen Wachstumsrate des Restes der Welt gegenübersieht. Der entscheidende Unterschied ist, daß der arbeitsvermehrende Lernindex einen Exponenten hat, der kleiner als eins ist, wodurch sich abnehmende Grenzproduktivitäten der Wissensakkumulation ergeben. Durch diese Annahme entsteht im Gegensatz zum Ansatz von Wong und Yip (1999) ein semi-endogenes Wachstumsmodell ohne Skaleneffekte, das die Berücksichtigung einer positiven Rate des Bevölkerungswachstums im langfristigen Gleichgewicht erlaubt. Ferner wird eine extreme klassische Sparfunktion (also ein Spezialfall der Goldenen Faustregel) verwendet. Diese Annahme vereinfacht die Analyse im Vergleich zum Ansatz der dynamischen Optimierung und ist aufgrund der im Kapitel 3 vorgetragenen Kritik an jenem Ansatz auch realistischer. Andere Annahmen unterscheiden sich lediglich aus Gründen der Vereinfachung. So wird anstelle des kumulierten Output nun der Kapitalstock als Lernindex verwendet, wodurch das Modell eine Zustandsvariable weniger enthält. Wie sich herausstellen wird, ist für die globale dynamische Analyse trotzdem die Betrachtung zweier Zustandsvariablen erforderlich.

Jedes einer großen Anzahl identischer Unternehmen j produziert seinen Output Y_{1j} des Gutes 1 mit Arbeit L_{1j} und Kapital K_j gemäß der Produktionsfunktion

$$Y_{1j} = K_j^{\alpha}(K^{\beta/(1-\alpha)}L_{1j})^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha,\beta<1, \quad \alpha+\beta<1.$$

Die aggregierten Größen sind durch $L_1 = \sum_j L_{1j}$, $K = \sum_j K_j$ und $Y_1 = \sum_j Y_{1j}$ gegeben. Durch den aggregierten Kapitalstock K in der Produktionsfunktion wird ein arbeitsvermehrender technischer Fortschritt impliziert, der mit der Formulierung des learning by doing beziehungsweise learning by investment im Sinne von Sheshinski (1967a) oder des endogenen Wachstums bei Romer (1986) verwandt ist.[19] Der Exponent von K, $\beta/(1-\alpha)$, ist aufgrund der Annahme $\alpha+\beta<1$ kleiner als eins. Für $1-\alpha-\beta=0$ ergibt sich ein Wachstumsmodell mit Skaleneffekten. Obwohl die unternehmensspezifischen Produktionsfunktionen im folgenden nicht verwendet werden, sind sie hier aufgeführt worden, um zu verdeutlichen, daß ein **externer Effekt** durch learning by investment unterstellt wird.

Nimmt man vollständige Konkurrenz an, so kann man die einzelwirtschaftlichen

[19] Obwohl die meisten empirischen Studien die Bedeutung des learning by **doing** betonen und den kumulierten Output als Lernindex verwenden, liefert Sheshinski (1967b) auch Belege für die Bedeutung des learning by investment.

Produktionsfunktionen zu einer sektoralen Produktionsfunktion für den Sektor 1 (Industrie) aggregieren (vgl. zum Beispiel Christiaans, 1997, S. 14):

$$Y_1 = K^{\alpha}(K^{\beta/(1-\alpha)}L_1)^{1-\alpha} = K^{\alpha+\beta}L_1^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1,\ \alpha + \beta < 1. \tag{5.46}$$

Während das physische Kapital K ausschließlich im Sektor 1 verwendet wird, setzen beide Sektoren die Arbeit L ein, wobei L_i die Menge der Arbeit im Sektor i $(i = 1,2)$ bezeichnet. Die Produktionsfunktion im zweiten Sektor (Landwirtschaft) ist linear in der Arbeit. Um die Diskussion verschiedener potentieller Lerneffekte zwischen den Sektoren so weit wie möglich zu vereinfachen, wird vorausgesetzt, daß $Y_2 = a_2 L_2$ ist. Die konstante Arbeitsproduktivität a_2 wird auf eins normiert, so daß

$$Y_2 = L_2. \tag{5.47}$$

Die Größen Y_i, K, L und L_i hängen von der Zeit ab, was zur Vereinfachung der Notation aber nicht explizit kenntlich gemacht wird. Die unterstellte Produktionsstruktur kann als minimaler Ansatz für eine Theorie der Faktorausstattung des internationalen Handels betrachtet werden, in dem eine schwache Version des Rybczynski-Theorems gilt [vgl. die folgenden Beziehungen (5.48) und (5.49)].

Die Bedingung für die Vollbeschäftigung der Arbeit, $L_1 + L_2 = L$, und die Gleichung (5.47) implizieren $L_1 = L - Y_2$, wobei für alle Variablen Nichtnegativitätsbedingungen gelten. Setzt man das Ergebnis in (5.46) ein, so ergibt sich die Transformationsfunktion in einem Zeitpunkt. Die Angebotsfunktionen bei vollständiger Konkurrenz erhält man als Lösungen des Problems der Erlösmaximierung[20]

$$\max_{Y_1 \geqq 0,\, Y_2 \geqq 0} \left\{ pY_1 + Y_2 \mid Y_1 = K^{\alpha+\beta}(L - Y_2)^{1-\alpha} \right\},$$

wobei p den relativen Preis des Gutes 1 in Einheiten des Gutes 2 bezeichnet, das als Numéraire verwendet wird. Die implizierten Angebotsfunktionen lauten

$$Y_1 = (1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} K^{(\alpha+\beta)/\alpha} p^{(1-\alpha)/\alpha}, \tag{5.48}$$

$$Y_2 = L - (1-\alpha)^{1/\alpha} K^{(\alpha+\beta)/\alpha} p^{1/\alpha}. \tag{5.49}$$

Die vollständige Spezialisierung auf die landwirtschaftliche Produktion ist offenbar nicht möglich, wenn $0 < p < \infty$ gilt und $K > 0$ ist. Dagegen spezialisiert sich die Volkswirtschaft vollständig auf die industrielle Produktion, wenn p oder K hinreichend große Werte annehmen.

Die Haushalte entscheiden über ihre Ersparnis und die Allokation des Konsums auf die beiden Güter. Als einfache Faustregel wird die extreme Version der klassischen

[20] Dabei ist zu beachten, daß die Transformationsfunktion streng konkav ist. Weil physisches Kapital ausschließlich im Sektor 1 verwendet wird, basiert die statische Erlösmaximierung allein auf der effizienten Allokation der Arbeit auf die beiden Sektoren. Daher hat die dynamische Externalität des learning by investment keinen verzerrenden Einfluß auf die statische Erlösmaximierung, obwohl die private Grenzproduktivität des Kapitals nicht mit der gesellschaftlichen übereinstimmt. Vgl. zur Erlösmaximierung zum Beispiel Woodland (1982).

Sparfunktion verwendet, derzufolge das gesamte Kapitaleinkommen gespart und das gesamte Arbeitseinkommen konsumiert wird.[21] Die momentane Nutzenfunktion hat die Cobb-Douglas-Form $U(C_1, C_2) = C_1^{\theta_1} C_2^{\theta_2}$, wobei C_i den Konsum des Gutes i bezeichnet und θ_i, $i = 1, 2$, positive Parameter sind, die sich ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit zu eins addieren. Diese Nutzenfunktion impliziert, daß beide Güter konsumiert und daher in einer geschlossenen Volkswirtschaft auch produziert werden. Daher folgt aus der Gleichung (5.47), daß der Reallohnsatz in Einheiten des zweiten Gutes durch $w = \partial Y_2/\partial L_2 = 1$ gegeben ist. Also maximiert der repräsentative Haushalt zu jedem Zeitpunkt seine Nutzenfunktion unter der Beschränkung $pC_1 + C_2 = L$. Die Lösung dieses Problems ist durch

$$pC_1 = \theta_1 L, \tag{5.50}$$

$$C_2 = (1 - \theta_1) L \tag{5.51}$$

gegeben. Während unterstellt wird, daß der Output des landwirtschaftlichen Sektors ein reines Konsumgut ist, dient der industrielle Output sowohl als Konsumgut als auch als Investitionsgut. Damit umfaßt die Gesamtnachfrage nach dem Gut 1 den Konsum C_1 und die Investitionsnachfrage.

Setzt man das Angebot (5.49) an und die Nachfrage (5.51) nach Gut 2 gleich, so erhält man den relativen Preis im kurzfristigen Gleichgewicht:

$$p = \frac{\theta_1^{\alpha} L^{\alpha}}{(1 - \alpha) K^{\alpha+\beta}}. \tag{5.52}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Variablen L und K zu jedem Zeitpunkt vorherbestimmt sind. Substituiert man dieses Preisverhältnis in die Angebotsfunktionen (5.48) und (5.49), so ergeben sich gleichgewichtigen Angebotsmengen beider Sektoren als Funktionen der vorherbestimmten Variablen:

$$Y_1 = \theta_1^{1-\alpha} K^{\alpha+\beta} L^{1-\alpha}, \tag{5.53}$$

$$Y_2 = (1 - \theta_1) L. \tag{5.54}$$

Dynamische Analyse Die Bevölkerungsgröße ist proportional zur Arbeitsmenge und wächst mit der exogenen und konstanten Rate n, $0 < n < 1$: $g_L = n$. Da das industrielle Erzeugnis sowohl konsumiert als auch investiert werden kann, ist die aggregierte Bruttoinvestition I im kurzfristigen Gleichgewicht gleich der Differenz zwischen dem Output Y_1 und dem Konsum C_1 des Gutes 1. Unter Vernachlässigung des Kapitalverschleißes entspricht die Bruttoinvestition der Nettoinvestition:

$$\dot{K} = I = Y_1 - C_1. \tag{5.55}$$

Wie zuvor wird ein gleichgewichtiger Wachstumspfad durch die Konstanz aller Wachstumsraten definiert, die für die hier verwendete Konsumfunktion die Konstanz

[21] Die Verwendung der Goldenen Faustregel würde das vorliegende Modell unnötig verkomplizieren.

des Kapitalkoeffizienten im Sektor 1 impliziert ($g_{Y_1} = g_K$).[22] Unter Verwendung der Bedingungen für das gleichgewichtige Wachstum und $g_L = n$ ergibt die logarithmische Ableitung der Gleichungen (5.53), (5.54) und (5.52) mit der nun hinlänglich bekannten Verfahrensweise die folgenden Wachstumsraten im steady state:

$$g_{Y_1} = g_K = \underbrace{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}_{=:\gamma} n = \gamma n, \tag{5.56}$$

$$g_{Y_2} = n, \tag{5.57}$$

$$g_p = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta} n = (1-\gamma) n. \tag{5.58}$$

Da angenommen worden ist, daß $1-\alpha-\beta > 0$ ist, gilt $\gamma > 1$. Der Output des ersten Gutes wächst also schneller als die Bevölkerung, so daß das Modell positives Pro-Kopf-Wachstum beinhaltet. Verwendet man die Gleichungen (5.56)–(5.58), so erhält man die gleichgewichtige Wachstumsrate des Nationaleinkommens $Y = pY_1 + Y_2$ in Einheiten des zweiten Gutes als

$$g_Y = (g_p + g_{Y_1})\frac{pY_1}{Y} + g_{Y_2}\frac{Y_2}{Y} = n.$$

Dieser Ausdruck impliziert, daß das langfristige Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens $g_{Y/L} = 0$ ist, wobei allerdings nicht berücksichtigt wird, daß der relative Preis des ersten Gutes stetig fällt. Die Wachstumsrate des Nationaleinkommens (pro Kopf) in Einheiten des industriellen Erzeugnisses ist deshalb

$$g_{Y/p} = g_Y - g_p = \gamma n, \; g_{Y/(pL)} = (\gamma - 1) n > 0.$$

Im steady state gilt $g_{Y_1} - \gamma g_L = g_K - \gamma g_L = 0$ und $g_{Y_2} - g_L = 0$. Daher sind die folgenden niveauangepaßten Pro-Kopf-Variablen im langfristigen Gleichgewicht konstant:

$$y_1 := \frac{Y_1}{L^\gamma}, \; k := \frac{K}{L^\gamma}, \; y_2 := \frac{Y_2}{L}. \tag{5.59}$$

Setzt man (5.53), (5.50) und (5.52) in (5.55) ein, so folgt

$$\begin{aligned} g_K = \frac{\dot{K}}{K} &= \alpha\theta_1^{1-\alpha} K^{\alpha+\beta-1} L^{1-\alpha} \\ &= \alpha\theta_1^{1-\alpha}\left(\frac{K}{L^\gamma}\right)^{\alpha+\beta-1} L^{\gamma(\alpha+\beta-1)} L^{1-\alpha} = \alpha\theta_1^{1-\alpha} k^{\alpha+\beta-1}, \end{aligned} \tag{5.60}$$

wobei $\gamma(\alpha+\beta-1)+1-\alpha = 0$ gemäß der Definition von γ zu beachten ist. Die Definition von k impliziert $\dot{k} = g_K k - \gamma n k$, woraus zusammen mit dem Ausdruck für g_K folgt:

$$\dot{k} = \alpha\theta_1^{1-\alpha} k^{\alpha+\beta} - \gamma n k. \tag{5.61}$$

[22] Setzt man (5.52) in (5.50) ein und dividiert C_1 durch Y_1 gemäß (5.53), so folgt $C_1 = (1-\alpha)Y_1$. Die Substitution in (5.55) impliziert die Konstanz des Kapitalkoeffizienten analog zu der Bemerkung 3.3 auf der Seite 117.

Diese Differentialgleichung in k beschreibt das dynamische Verhalten der geschlossenen Volkswirtschaft. Unter Beachtung der Annahme $0 < \alpha + \beta < 1$ folgt unmittelbar, daß die Gleichung (5.61) eine eindeutiges positives Gleichgewicht

$$k_e = \left(\frac{\alpha \theta_1^{1-\alpha}}{\gamma n} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} \tag{5.62}$$

besitzt, daß global stabil für jeden gegebenen Startwert $k(0) = k_0 > 0$ ist. Daher ist es sinnvoll, die langfristige Entwicklung der Volkswirtschaft mit Bezug zum steady state zu analysieren. In diesem Zusammenhang ist zu beachten, daß die Gleichungen (5.53), (5.54) und (5.52) gleichermaßen in den niveauangepaßten Pro-Kopf-Variablen (5.59) ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta_1^{1-\alpha} k^{\alpha+\beta}, \\ y_2 &= 1 - \theta_1, \\ p &= \frac{\theta_1^{\alpha}}{(1-\alpha)\, k^{\alpha+\beta}} L^{-\beta/(1-\alpha-\beta)} = \frac{\theta_1^{\alpha}}{(1-\alpha)\, k^{\alpha/\gamma}} K^{-\beta/(1-\alpha)}. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Wenn also k gegen den langfristigen Gleichgewichtswert konvergiert, dann auch y_1, y_2 und p, wobei der Relativpreis im steady state mit der konstanten Rate $(1-\gamma)n$ fällt.

Die Implikationen dieses Modells für die langfristige Entwicklung mehrerer autarker Länder entsprechen im wesentlichen denjenigen anderer Standardmodelle des semi-endogenen Wachstums. Das Pro-Kopf-Einkommen und die durchschnittliche Arbeitsproduktivität wachsen stetig, wobei die Wachstumsraten wirtschaftspolitisch kaum zu beeinflussen sind. Wenn die Parameterwerte des Modells für alle betrachteten Länder gleich sind, stimmen auch die langfristigen Wachstumsraten überein. Da die Pro-Kopf-Wachstumsraten im steady state unabhängig vom Startwert des Pro-Kopf-Einkommens sind, können die armen Länder die reichen Länder bezüglich des Pro-Kopf-Einkommens nicht einholen. Die folgende Aussage faßt die wesentlichen Ergebnisse zusammen.

Aussage 5.4. *Wenn der Startwert des niveauangepaßten Kapitalstocks pro Kopf positiv ist, $k_0 > 0$, existiert ein eindeutiges und global stabiles langfristiges Gleichgewicht bei Autarkie. Im steady state werden beide Güter produziert und die Erzeugung des landwirtschaftlichen Produktes wächst mit der Rate n des Bevölkerungswachstums. Die Produktion des industriellen Erzeugnisses wächst mit der Rate $\gamma n > n$, während sein relativer Preis mit der Rate $(1-\gamma)n$ stetig fällt. Das Nationaleinkommen pro Kopf in Einheiten des industriellen Erzeugnisses wächst mit der Rate $(\gamma-1)n > 0$, während es in Einheiten des Agrargutes konstant ist.*

Wie im Modell von Wong und Yip (1999) fällt der relative Preis des industriellen Erzeugnisses stetig. Für den Fall des Freihandels wird sich herausstellen, daß ein Land, das Industrieprodukte exportiert, trotzdem eine höhere Wachstumsrate des

Pro-Kopf-Einkommens als ein Land aufweisen kann, das landwirtschaftliche Produkte exportiert.

5.3.2 Die kleine offene Volkswirtschaft

Analyse der langfristigen Gleichgewichte Anders als im Fall der Autarkie sind für die offene Volkswirtschaft verschiedene Spezialisierungsmuster möglich, die zu unterschiedlichen Ergebnissen hinsichtlich der langfristigen Entwicklung eines Landes führen. Zunächst wird der Fall der **Diversifikation der Produktion** betrachtet. Im Fall einer kleinen Volkswirtschaft bei freiem Handel mit dem Rest der Welt (kurz: Ausland) ist der Zeitpfad des relativen Preises p des industriellen Erzeugnisses in Einheiten des Agrarproduktes exogen auf dem Weltmarkt gegeben. Dementsprechend wird die Variable p von nun an als exogene Größe interpretiert. Die Allokation des Konsums auf die beiden Güter hängt von p ab und Angebot und Nachfrage müssen auf den heimischen Märkten jeweils nicht mehr übereinstimmen. Mit Bezug zur dynamischen Entwicklung des Modells muß lediglich die Sparentscheidung der Haushalte betrachtet werden. Die Angebotsfunktionen sind nach wie vor durch (5.48) und (5.49) gegeben.

Im folgenden wird unterstellt, daß alle Parameterwerte des Auslands mit Ausnahme der Wachstumsrate der Bevölkerung jeweils mit denen des Inlands übereinstimmen. Die Wachstumsrate der Bevölkerung im Ausland wird mit n^* bezeichnet. Diese Annahme impliziert, daß alle im Abschnitt 5.3.1 abgeleiteten Wachstumsraten im steady state jetzt als die Wachstumsraten des Auslands interpretiert werden können (mit n^* anstelle von n), die aus der Sicht des Inlands exogen sind.[23] Unterstellt man, daß sich das Ausland auf seinem steady state-Pfad befindet, so lautet die exogene Wachstumsrate des relativen Preises

$$g_p = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta} n^* = (1-\gamma) n^*. \tag{5.64}$$

Mit Bezug zu den im folgenden abzuleitenden Aussagen werden die Annahmen des Modells wie folgt zusammengefaßt: *Das Inland produziert unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz zwei Güter gemäß den Produktionsfunktionen (5.46) und (5.47), wobei $L_1 + L_2 = L$ und $g_L = n$ gilt. Beide Güter werden konsumiert, während das industrielle Erzeugnis auch als Investitionsgut dient. Das gesamte Kapitaleinkommen wird gespart und das gesamte Arbeitseinkommen konsumiert. Das Ausland befindet sich im langfristigen Gleichgewicht und das exogene Preisverhältnis fällt mit der Rate $g_p = (1-\gamma) n^*$.*

[23] Wenn n größer als n^* ist, wird das Inland langfristig ein großes Land. Allerdings ist zu beachten, daß n^* als durchschnittliche Wachstumsrate des Restes der Welt interpretiert werden muß, der aus einer großen Anzahl von Ländern besteht. Die Annahme eines kleinen Landes kann daher für einen relativ langen Zeitraum gerechtfertigt sein.

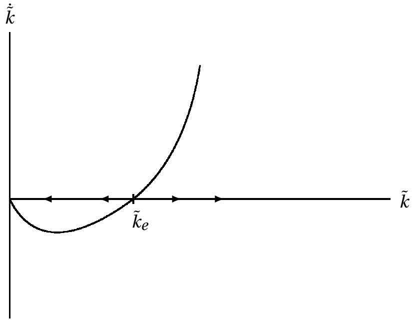

Abbildung 5.3
Instabilität des diversifizierten langfristigen Gleichgewichts

Solange die Produktion diversifiziert ist, gilt für den Reallohnsatz $w = 1$, und der aggregierte Konsum erfüllt die Budgetbedingung $pC_1 + C_2 = L$. Daher werden die Investitionen unter der extremen klassischen Sparhypothese durch

$$pI = p\dot{K} = pY_1 + Y_2 - L$$

bestimmt, woraus zusammen mit (5.48) und (5.49) folgt

$$\dot{K} = \alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} K^{(\alpha+\beta)/\alpha} p^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{5.65}$$

Da das Ausland im langfristigen Gleichgewicht verweilt, impliziert die logarithmische Ableitung von (5.65) unter Verwendung von (5.64), daß eine konstante Wachstumsrate von K

$$g_K = -\frac{1-\alpha}{\beta} g_p = \gamma n^*$$

erfordert. Daher ist

$$\tilde{k} := K p^{(1-\alpha)/\beta} \tag{5.66}$$

in einem steady state konstant. Aus der Definition von $\tilde{k}$ folgt $\dot{\tilde{k}} = g_K \tilde{k} - \gamma n^* \tilde{k}$. Substituiert man g_K gemäß (5.65) und beachtet, daß $K^{\beta/\alpha} p^{(1-\alpha)/\alpha} = \tilde{k}^{\beta/\alpha}$ gilt, so folgt

$$\dot{\tilde{k}} = \alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \tilde{k}^{(\alpha+\beta)/\alpha} - \gamma n^* \tilde{k}. \tag{5.67}$$

Weil $(\alpha+\beta)/\alpha > 1$ ist, erweist sich das langfristige Gleichgewicht als instabil (vgl. die Abbildung 5.3).

Die Gleichung (5.67) ist für $t \to \infty$ nur gültig, wenn $\tilde{k}_0 \leqq \tilde{k}_e$ ist. Zum Beweis beachte man, daß (5.67) eine Bernoullische Differentialgleichung ist, die, wie im Abschnitt 2.1.3 gezeigt worden ist, explizit gelöst werden kann.

$$\tilde{k}(t, \tilde{k}_0) = \left[\left(\tilde{k}_0^{-\beta/\alpha} - \tilde{k}_e^{-\beta/\alpha} \right) e^{\frac{\beta}{\alpha}\gamma n^* t} + \tilde{k}_e^{-\beta/\alpha} \right]^{-\alpha/\beta}, \tag{5.68}$$

wobei

$$\tilde{k}_e = \left(\frac{\gamma n^*}{\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}}\right)^{\alpha/\beta} \tag{5.69}$$

Anhand dieser Lösung ist zu sehen, daß $\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t, \tilde{k}_0) = 0$, wenn

$$\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e,$$

und daß ein $\bar{t} < \infty$ existiert, so daß $\lim_{t\to\bar{t}} \tilde{k}(t, \tilde{k}_0) = \infty$, wenn $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$. Dadurch entstehen in diesem Modell jedoch keinerlei Probleme, da sich das Inland in diesem Fall zu einem Zeitpunkt $t_1 < \bar{t}$ vollständig auf die Produktion des Gutes 1 spezialisieren wird. Die dynamische Entwicklung folgt dann einer anderen Differentialgleichung.

Obwohl die Differentialgleichung (5.67) eine Gleichgewichtslösung $\tilde{k}_e > 0$ hat, müssen für die Existenz eines steady state weitere Bedingungen realisiert werden. Eine zur Ableitung der Gleichung (5.61) analoge Vorgehensweise ermöglicht es, die Relationen (5.48) und (5.49) als Funktionen von $\tilde{k}$ auszudrücken.

$$Y_1 = (1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \tilde{k}^{(\alpha+\beta)/\alpha} p^{-(1-\alpha)/\beta} \tag{5.70}$$

$$Y_2 = L - (1-\alpha)^{1/\alpha} \tilde{k}^{(\alpha+\beta)/\alpha} p^{-(1-\alpha-\beta)/\beta} \tag{5.71}$$

Die Gleichung (5.70) impliziert unmittelbar, daß in einem langfristigen Gleichgewicht $g_{Y_1} = \gamma n^*$ gilt. Dagegen folgt aus (5.71)

$$g_{Y_2} = n\frac{L}{Y_2} - n^*\frac{L-Y_2}{Y_2}. \tag{5.72}$$

Demnach kann g_{Y_2} nur dann konstant sein, wenn entweder $n = n^*$ und damit $g_{Y_2} = n$ ist oder wenn L/Y_2 konstant ist. Der zweite Fall impliziert einen Widerspruch, weil er einerseits $g_{Y_2} = g_L = n$ und andererseits $g_{Y_2} \neq n$ gemäß (5.72) mit sich bringt, wenn $n \neq n^*$ ist. Daher existiert ein diversifiziertes langfristiges Gleichgewicht bei Freihandel nur für $n = n^*$. Allerdings wird sich herausstellen, daß eine Art Quasi-steady state existiert, in dem die Volkswirtschaft diversifiziert bleibt, wenn $n > n^*$ und $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_e$ gilt.

Die Situation ist mit dem im Abschnitt 5.1.2 skizzierten Oniki-Uzawa-Bardhan-Modell vergleichbar, in dem die Wachstumsraten der Bevölkerung ebenfalls übereinstimmen müssen, wenn beide Länder in einem langfristigen Gleichgewicht sind. Dieses Ergebnis ist insofern überraschend, als im vorliegenden Modell des kleinen Landes keine Gleichgewichtsbedingung für den Weltmarkt auftaucht, auf der der Beweis von Bardhan (1965) basiert. Die tragende Rolle übernimmt hier das vorgegebene Preisverhältnis am Weltmarkt. Zudem geht die Analogie noch weiter. Wie sich herausstellen wird, existiert ein steady state bei Spezialisierung auf die industrielle Produktion, wenn die Wachstumsrate der inländischen Bevölkerung mindestens so groß wie diejenige im Rest der Welt ist. Allgemein existiert ein asymptotischer steady state mit Spezialisierung auf die landwirtschaftliche Produktion. Diese Ergebnisse sind vergleichbar mit den von Khang (1971) abgeleiteten Aussagen für das OUB-Modell.

Angesichts dieser Ergebnisse ist das diversifizierte langfristige Gleichgewicht lediglich von akademischem Interesse. Eine langfristig diversifizierte Produktion bei Freihandel kann nur als Grenzfall auftreten. Lediglich wenn $n \geqq n^*$ ist und das Inland zufällig den Gleichgewichtswert $\tilde{k}_e$ realisiert, wenn es von der Autarkie zum Freihandel übergeht, bleibt die Diversifikation langfristig erhalten. Ansonsten wird ein Prozeß der vollständigen Industrialisierung oder Deindustrialisierung in Gang gesetzt. Der Vollständigkeit halber wird noch erwähnt, daß (5.64), (5.70) und (5.71) für den Fall $n = n^*$ unmittelbar den letzten Teil der folgenden Aussage implizieren, die die Ergebnisse zusammenfaßt.

Aussage 5.5. *Ein diversifiziertes langfristiges Gleichgewicht bei Freihandel existiert nur, wenn die Wachstumsraten der Bevölkerung im Inland und im Ausland übereinstimmen; wenn es existiert, ist es instabil. Startet das Inland im langfristigen Gleichgewicht, wenn es zum Freihandel übergeht, so stimmen alle Wachstumsraten bei Freihandel mit denjenigen bei Autarkie gemäß der Aussage 5.4 überein.*

Die Aussage 5.5 impliziert zusammen mit der folgenden Aussage 5.6, daß in einem diversifizierten steady state tatsächlich kein Außenhandel stattfindet. Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem im Abschnitt 5.1.2 abgeleiteten Fall für das OUB-Modell überein, wobei zu beachten ist, daß die Sparquote aus dem Kapitaleinkommen hier gleich eins ist, so daß sich die Bedingung $n/s = n^*/s^*$, unter der kein Handel auftritt, jetzt auf $n = n^*$ reduziert.

Auch wenn die Implikation der vollständigen Spezialisierung auf den ersten Blick empirisch fragwürdig erscheinen mag, sollte man zum einen bedenken, daß die beiden Güter in diesem Modell jeweils stellvertretend für den gesamten industriellen beziehungsweise landwirtschaftlichen Sektor stehen, und zum anderen, daß im Modell Freihandel im strengen Sinne unterstellt wird, so daß weder Handelsbeschränkungen in der Form von Zöllen noch Subventionen an die heimischen Sektoren berücksichtigt werden. Zum Beispiel hat der Anteil des Agrarsektors an der gesamten Bruttowertschöpfung in der Bundesrepublik Deutschland im Jahre 2000 lediglich 1,2 % betragen, und es ist wohl realistisch davon auszugehen, daß er ohne die EU-Agrarpolitik noch erheblich geringer gewesen wäre. Trotz der Subventionierung des landwirtschaftlichen Sektors ist die Bundesrepublik im Jahre 2000 ein Nettoimporteur von Agrarprodukten gewesen. Dagegen liegt der Anteil der industriellen Produktion an der Bruttowertschöpfung in einem Land wie Nigeria bei wenig mehr als 5 %. Insofern erscheint diese Implikation des Modells durchaus plausibel.

Gemäß (5.52) hängt das Preisverhältnis bei Autarkie von den absoluten Werten von L und K sowie von dem Präferenzparameter θ_1 ab. Eine allgemeine Aussage bezüglich der **komparativen Vorteile** anhand der Variablen k und $\tilde{k}$ zu dem Zeitpunkt, zu dem das Land zum Freihandel übergeht, ist daher nicht möglich. Zum Beispiel impliziert $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ nicht allgemein, daß das Inland einen komparativen Vorteil in der industriellen Produktion hat. Eine eingeschränkte Aussage über die komparativen Vorteile ist trotzdem möglich.

Aussage 5.6. *Das Inland befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ beim Übergang zum Freihandel auf seinem autarken steady state-Pfad ($k_0 = k_e$). Dann gilt:*

(a) *Im Fall $n = n^*$ hat das Inland einen komparativen Vorteil in der industriellen (landwirtschaftlichen) Produktion, wenn $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ ($\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$) ist. Für $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_e$ findet kein internationaler Handel statt.*

(b) *Im Fall $n < n^*$ hat das Inland einen komparativen Vorteil in der industriellen Produktion, wenn $\tilde{k}_0 \geqq \tilde{k}_e$ ist.*

(c) *Im Fall $n > n^*$ hat das Inland einen komparativen Vorteil in der landwirtschaftlichen Produktion, wenn $\tilde{k}_0 \leqq \tilde{k}_e$ ist.*

Beweis: Für diesen Beweis ist es erforderlich, die Preisverhältnisse unter Autarkie und auf dem Weltmarkt zu unterscheiden. Abweichend von der sonstigen Darstellung bezeichnet p das Preisverhältnis bei Autarkie im Inland und p^* das Preisverhältnis am Weltmarkt. Setzt man k_e gemäß (5.62) in (5.63) ein, so folgt für $t = 0$:

$$\text{wenn} \quad k_0 = k_e, \quad \text{dann} \quad p = \left(\frac{\gamma n}{\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} K_0^{-\beta/(1-\alpha)}. \tag{5.73}$$

Setzt man $\tilde{k}_0 := K_0 p^{*(1-\alpha)/\beta} \gtreqless \tilde{k}_e$ und verwendet $\tilde{k}_e$ aus (5.69), so folgt

$$\tilde{k}_0 \gtreqless \tilde{k}_e \quad \Longleftrightarrow \quad p^* \gtreqless \left(\frac{\gamma n^*}{\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} K_0^{-\beta/(1-\alpha)}. \tag{5.74}$$

Die Aussage 5.6 folgt unmittelbar aus dem Vergleich der Preisverhältnisse in (5.73) und (5.74) für die verschiedenen Fälle. □

Als nächstes wird der Fall der **Spezialisierung auf die landwirtschaftliche Produktion** analysiert. Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise bedeutet der Ausdruck *Spezialisierung* im folgenden immer *vollständige Spezialisierung*. Obwohl eine umfassende Analyse der Übergangsdynamik im Moment noch zurückgestellt wird, legt es die Abbildung 5.3 nahe, daß sich das Inland asymptotisch auf die landwirtschaftliche Produktion spezialisieren wird, wenn $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$ ist, wobei $\tilde{k}_0$ den Startwert von $\tilde{k}$ zum Zeitpunkt des Übergangs zum Freihandel bezeichnet.

Gemäß (5.70) kann die asymptotische Spezialisierung in die landwirtschaftliche Produktion formal bewiesen werden, indem gezeigt wird, daß aus $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$ folgt

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t)^{(\alpha+\beta)/\alpha} p(t)^{-(1-\alpha)/\beta} = 0.$$

Unter Verwendung von (5.68) und $p(t) = p_0 e^{(1-\gamma)n^* t}$ gemäß (5.64) ist das Produkt auf der linken Seite für den Fall $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$ gleich

$$p_0^{-(1-\alpha)/\beta} \left[\underbrace{\left(\tilde{k}_0^{-\beta/\alpha} - \tilde{k}_e^{-\beta/\alpha}\right)}_{>0} e^{\beta^2\gamma n^* t/[\alpha(\alpha+\beta)]} + \tilde{k}_e^{-\beta/\alpha} e^{-\beta\gamma n^* t/(\alpha+\beta)} \right]^{-(\alpha+\beta)/\beta}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert für $t \to \infty$ gegen null.

Weil im Fall eines positiven Startwertes des Kapitalstocks für jedes endliche t gilt $\tilde{k}(t) > 0$ und damit auch $K(t) > 0$, wird eine geringe Menge des ersten Gutes weiterhin für immer produziert werden. Daher ist die unter der Annahme der Diversifikation abgeleitete Differentialgleichung (5.67) weiterhin gültig. Wenn jedoch $\tilde{k} = 0$ ist, wird nur das Gut 2 produziert und die relevanten Wachstumsraten folgen direkt aus $Y = Y_2 = L$ und (5.64):

$$g_Y = g_{Y_2} = n,\ g_{Y/p} = n - g_p = n + (\gamma - 1)n^*,\ g_{Y/L} = 0,\ g_{Y/(pL)} = (\gamma - 1)n^*.$$

Die Wachstumsrate pro Kopf im Inland wird also durch die Wachstumsrate n^* der Weltbevölkerung bestimmt und ist unabhängig von der Wachstumsrate der eigenen Bevölkerung. Da beide Güter im Inland konsumiert werden, importiert das Inland industrielle Produkte und exportiert landwirtschaftliche Güter.

Ein steady state mit Spezialisierung auf das Gut 2 ist möglich, weil p stetig fällt, so daß sich die terms of trade des Inlands stetig verbessern, ohne daß sich die Produktivität im industriellen Sektor erhöht. Zusammengefaßt gilt

Aussage 5.7. *Wenn $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$ ist, spezialisiert sich das Inland langfristig auf die landwirtschaftliche Produktion. Die gleichgewichtige Wachstumsrate des Einkommens pro Kopf ist unabhängig von der Wachstumsrate der inländischen Bevölkerung. Das Pro-Kopf-Einkommen in Einheiten des landwirtschaftlichen Produktes wächst mit der Rate null, in Einheiten des industriellen Erzeugnisses wächst es mit der Rate* $(\gamma - 1)n^* > 0$.

Angenommen, es sei $n > n^*$. Dann kann das Inland die höhere Wachstumsrate $(\gamma - 1)n$ des Pro-Kopf-Einkommens erreichen, indem es zur Autarkie zurückkehrt, was möglich ist, solange $K > 0$ ist. Für $n > n^*$ und $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$ besteht also eine negative Wirkung des Außenhandels auf das Wachstum, die mit einem Prozeß der Deindustrialisierung verbunden ist. Später wird sich zeigen, daß ein mit einem Prozeß der Industrialisierung verbundener positiver Effekt des Außenhandels auf das Wachstum entsteht, wenn $n > n^*$ und $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ ist. Ein Land, das eine höhere Wachstumsrate der Bevölkerung als das Ausland aufweist und für das beim Übergang zum Freihandel $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_e$ gilt, steht sich also besser, wenn es zunächst in Autarkie verbleibt und darauf wartet, daß der heimische Kapitalstock groß genug ist, um $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ zu gewährleisten [man beachte (5.66) und die Tatsache, daß der Kapitalstock bei Autarkie für $n > n^*$ schneller wächst als $p^{(1-\alpha)/\beta}$ im Ausland]. Wenn das Inland zur Zeit $t = 0$ auf seinem autarken steady state-Pfad ist, ist ein komparativer Vorteil in der landwirtschaftlichen Produktion eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für dieses Szenario (vgl. die Aussage 5.6). Zum Beispiel ist es möglich, daß das Inland auch für $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ einen komparativen Vorteil in der landwirtschaftlichen Produktion hat.

Obwohl sich herausstellen wird, daß sich ein Land für $n < n^*$ unabhängig vom Startwert $\tilde{k}_0$ asymptotisch auf die landwirtschaftliche Produktion spezialisiert, existiert in diesem Fall ein positiver Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum. Gemäß der Aussage 5.7 ist die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in Einheiten des Gutes 1 gleich $(\gamma-1)n^*$. Dieser Wert übersteigt die Wachstumsrate bei Autarkie gemäß der Aussage 5.4, wenn $n < n^*$ ist.

Im Fall der **Spezialisierung auf die industrielle Produktion** schließlich ist der Reallohnsatz durch $w = p\partial Y_1/\partial L$ gegeben, und es gilt

$$wL = (1-\alpha)pY_1.$$

Setzt man diesen Ausdruck in $p\dot{K} = pY_1 - wL$ ein, so folgt

$$\dot{K} = \alpha Y_1 = \alpha K^{\alpha+\beta}L^{1-\alpha}, \quad g_K = \alpha k^{\alpha+\beta-1}. \tag{5.75}$$

Durch die Substitution von g_K in $\dot{k} = g_K k - \gamma n k$ gemäß der Definition von k ergibt sich

$$\dot{k} = \alpha k^{\alpha+\beta} - \gamma n k. \tag{5.76}$$

Diese Gleichung impliziert, daß ein eindeutiges und stabiles langfristiges Gleichgewicht existiert, wenn es möglich ist, das Gleichgewicht bei Spezialisierung in die industrielle Produktion aufrechtzuerhalten. Im Zusammenhang mit der Diskussion der Gleichung (5.68) für den Fall der Diversifikation ist gezeigt worden, daß $\lim \tilde{k}(t) \to \infty$ in endlicher Zeit, wenn $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ gilt. Da p fällt, impliziert die rechte Seite von (5.71) also, daß $Y_2(t_1) = 0$ zu einem endlichen Zeitpunkt t_1, so daß die industrielle Spezialisierung einsetzt. Wegen $L_1 = L$ folgt aus der Gleichung (5.46), daß im steady state $g_{Y_1} = g_K = \gamma n$ ist. Zusammen mit (5.64) ergibt sich daraus

$$g_Y = \gamma n + (1-\gamma)n^*,\ g_{Y/L} = (\gamma-1)(n-n^*),\ g_{Y/p} = \gamma n,\ g_{Y/(pL)} = (\gamma-1)n.$$

Das Inland exportiert industrielle Produkte im Austausch für landwirtschaftliche Güter.

Ein steady state mit industrieller Spezialisierung kann nur dann langfristig aufrechterhalten werden, wenn $n \geqq n^*$ ist. Denn die rechte Seite der Gleichung (5.49) darf nicht positiv werden, was

$$n \leqq \frac{\alpha+\beta}{\alpha} g_K + \frac{1}{\alpha} g_p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta} n - \frac{\beta}{\alpha(1-\alpha-\beta)} n^* \iff n \geqq n^*$$

erfordert. Zusammengefaßt gilt

Aussage 5.8. *Für $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ gibt es einen endlichen Zeitpunkt t_1, zu dem sich das Inland auf die industrielle Produktion spezialisiert. Dieses Spezialisierungsmuster ist nur dann langfristig aufrechtzuerhalten, wenn die Wachstumsrate n der Bevölkerung im Inland nicht geringer als im Rest der Welt ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, existiert ein eindeutiges und stabiles langfristiges Gleichgewicht, in dem die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens mit zunehmendem Wert von n steigt. Das Pro-Kopf-Einkommen in Einheiten des Agrarproduktes wächst mit der Rate $(\gamma-1)(n-n^*)$; in Einheiten des industriellen Erzeugnisses wächst es mit der Rate $(\gamma-1)n$.*

Dieses Ergebnis unterscheidet sich erheblich von dem Resultat im Fall der landwirtschaftlichen Spezialisierung, in dem die Wachstumsrate pro Kopf von der Wachstumsrate der heimischen Bevölkerung unabhängig ist. Je schneller die Bevölkerung eines industrialisierten Landes wächst, um so größer ist die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens. Im Gegensatz zur Autarkie wächst jetzt auch das Pro-Kopf-Einkommen in Einheiten des Agrarproduktes mit positiver Rate, wenn $n > n^*$ gilt. Dadurch ergeben sich potentiell dynamische Gewinne aus dem Außenhandel. Wenn das Ausland langsamer als das Inland wächst, fallen die terms of trade des Inlands langsamer als im Fall der Autarkie.

Weil die Bedingung $n \geqq n^*$ notwendig für die langfristige Aufrechterhaltung der Industrialisierung ist, besteht ein langfristig nicht-negativer Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum des Einkommens pro Kopf in Einheiten des Agrarproduktes in industrialisierten Ländern. Wenn $n > n^*$ ist, übersteigen die Wachstumsraten des Einkommens pro Kopf gemäß der Aussage 5.8 die entsprechenden Wachstumsraten eines Agrarlandes gemäß der Aussage 5.7, obwohl sich die terms of trade des industrialisierten Landes stetig verschlechtern.

Zu beachten ist, daß es gemäß der Aussage 5.6 für den Fall $n > n^*$ möglich ist, daß ein Land einen komparativen Nachteil in der industriellen Produktion hat, auch wenn $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_e$ ist. Bei Freihandel wird sich dieser komparative Nachteil schließlich in einen komparativen Vorteil verwandeln. Das Land wird dann langfristig schneller als der Rest der Welt wachsen. Eine anfängliche Rückständigkeit kann also auch bei Freihandel aufgeholt werden, wenn das Land das Potential für ein hohes Wachstum aufweist, das hier durch die Wachstumsrate der Bevölkerung gemessen wird.

Der Vergleich der verschiedenen diskutierten Fälle (und zusätzlich der ausgelassenen Grenzfälle) ergibt zusammen mit der Aussage 5.6 die

Aussage 5.9. *Ein negativer Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens entsteht genau dann, wenn $n > n^*$ und $\tilde{k}_0 \leqq \tilde{k}_e$ gilt. Wenn das Inland zum Zeitpunkt $t = 0$ im autarken langfristigen Gleichgewicht ist, erweist sich ein anfänglicher komparativer Vorteil in der Landwirtschaft als notwendige Bedingung für einen negativen Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum.*

Übergangsdynamik Zunächst wird das **dynamische System** abgeleitet, das die globale Entwicklung des Inlandes beschreibt. Gemäß der Aussage 5.8 ist es möglich, daß ein Land, dessen Produktion unter Freihandel anfangs diversifiziert ist, sich schließlich auf die industrielle Produktion spezialisiert, obwohl dieses spezialisierte Gleichgewicht langfristig nicht aufrechtzuerhalten ist, wenn $n < n^*$ ist. Dieses Ergebnis weist auf die Bedeutung einer vollständigen Analyse der Übergangsdynamik hin. Da die dynamische Entwicklung im Fall der Diversifikation oder der asymptotischen Spezialisierung auf Agrarprodukte am besten mittels der Variablen $\tilde{k}$ beschrieben werden kann, während k im Fall der industriellen Spezialisierung die geeignete alternative Variable ist, liegt die Analyse eines Phasendiagramms im $(k, \tilde{k})$-Raum nahe.

Als erster Schritt wird in der Gleichung (5.49) $Y_2 = 0$ gesetzt und anschließend durch L dividiert. Nach einigen mittlerweile bekannten Rechenschritten folgt $1 = (1-\alpha)k^{\alpha+\beta} p L^{\beta/(1-\alpha-\beta)}$, wobei $k = K/L^\gamma$ gemäß (5.59) zu bedenken ist. Ersetzt man p durch $p = \tilde{k}^{\beta/(1-\alpha)} K^{-\beta/(1-\alpha)}$ entsprechend der Definition von $\tilde{k}$, so ergibt sich schließlich

$$1 = (1-\alpha)^{1-\alpha} k^{\alpha(1-\alpha-\beta)} \tilde{k}^{\beta}. \tag{5.77}$$

Durch diese Hyperbel wird die Grenzlinie zwischen der Diversifikation und der Spezialisierung auf die industrielle Produktion im $(k, \tilde{k})$-Raum in den Abbildungen 5.4, 5.5 und 5.6 definiert. Unter der Hyperbel ist die Produktion im Inland diversifiziert, wenn $(k, \tilde{k}) > (0, 0)$ gilt, und über der Hyperbel herrscht industrielle Spezialisierung.

Die Definitionen von k und $\tilde{k}$ implizieren $\tilde{k} = k L^\gamma p^{(1-\alpha)/\beta}$, woraus

$$g_{\tilde{k}} = g_k + \gamma(n - n^*) \tag{5.78}$$

folgt. Ersetzt man $g_{\tilde{k}}$ durch (5.67), so ergibt sich

$$\dot{k} = \alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} \tilde{k}^{\beta/\alpha} k - \gamma n k. \tag{5.79}$$

Diese Differentialgleichung beschreibt gemeinsam mit (5.67) die **Dynamik im Fall der Diversifikation**. Die Isoklinen $\dot{k} = 0$ und $\dot{\tilde{k}} = 0$ sind durch

$$\dot{k} = 0: \qquad \tilde{k} = \tilde{k}_1 := \left(\frac{\gamma n}{\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}} \right)^{\alpha/\beta} \quad (\text{oder } k = 0), \tag{5.80}$$

$$\dot{\tilde{k}} = 0: \qquad \tilde{k} = \tilde{k}_2 := \left(\frac{\gamma n^*}{\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha}} \right)^{\alpha/\beta} \quad (\text{oder } \tilde{k} = 0) \tag{5.81}$$

gegeben, wobei $\tilde{k}_2$ gleich dem früher definierten Wert $\tilde{k}_e$ ist (vgl. die Abbildung 5.3).

Im Fall der **Spezialisierung auf die industrielle Produktion** ergibt die Verwendung von (5.76) in Verbindung mit (5.78) die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{k}} = \alpha k^{\alpha+\beta-1} \tilde{k} - \gamma n^* \tilde{k}, \tag{5.82}$$

die zusammen mit (5.76) die Dynamik für diesen Fall beschreibt. Die Isoklinen $\dot{k} = 0$ und $\dot{\tilde{k}} = 0$ lauten

$$\dot{k} = 0: \qquad k = k_1 := \left(\frac{\alpha}{\gamma n} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} \quad (\text{oder } k = 0), \tag{5.83}$$

$$\dot{\tilde{k}} = 0: \qquad k = k_2 := \left(\frac{\alpha}{\gamma n^*} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} \quad (\text{oder } \tilde{k} = 0), \tag{5.84}$$

wobei k_1 der Gleichgewichtswert von k im Fall einer aufrechtzuerhaltenden industriellen Spezialisierung ist. Setzt man k_1 und $\tilde{k}_1$ beziehungsweise k_2 und $\tilde{k}_2$ in (5.77) ein, so erkennt man, daß die Isoklinen $\dot{\tilde{k}} = 0$ und $\dot{k} = 0$ an der Grenzlinie stetig verlaufen.

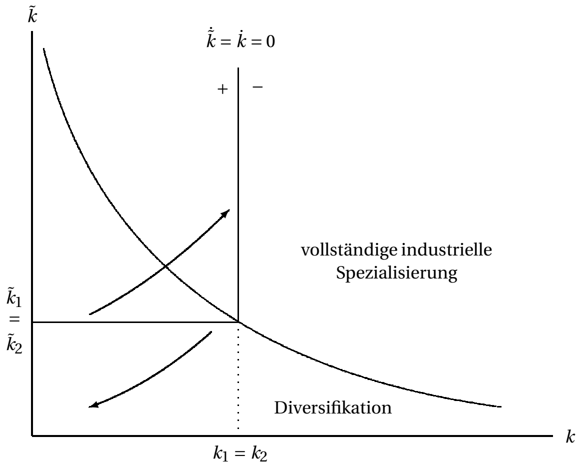

Abbildung 5.4
Das Phasendiagramm für $n = n^*$

Die Formeln (5.80) und (5.81) implizieren, daß $\dot{\tilde{k}} = 0$ und $\dot{k} = 0$ für $n = n^*$ übereinstimmen und daß $\dot{\tilde{k}} = 0$ oberhalb (unterhalb) von $\dot{k} = 0$ liegt, wenn $n < n^*$ $(n > n^*)$ ist. Daher sind drei grundsätzliche Fälle zu betrachten. Da der autarke Gleichgewichtswert k_e von k gemäß (5.62) wegen $0 < \theta_1 < 1$ kleiner als k_1 ist, erscheint es sinnvoll, sich auf Startwerte $k_0 < k_1$ zu konzentrieren.

Die Abbildung 5.4 zeigt das Phasendiagramm des Inlands für den **Fall** $n = n^*$. Ein diversifiziertes langfristiges Gleichgewicht existiert zwar, weil $\dot{k} = 0$ und $\dot{\tilde{k}} = 0$ übereinstimmen, ist aber instabil. Unter der Annahme, daß sich das Inland beim Übergang zum Freihandel in der Nähe seines autarken steady state befindet, gibt es daher zwei interessante Fälle.

Wenn $k_0 < k_1$ ist, startet das Inland in der Abbildung 5.4 links von k_1. Deshalb ist es entscheidend, ob $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_1$ $(= \tilde{k}_2 = \tilde{k}_e)$ oder $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_1$ gilt, wobei $\tilde{k}_0$ der Startwert von $\tilde{k}$ beim Übergang zum Freihandel ist. Im ersten Fall spezialisiert sich das Inland schließlich auf die Produktion des Gutes 1 und im zweiten Fall spezialisiert es sich asymptotisch auf die Produktion des Gutes 2. Da die Wachstumsraten im diversifizierten steady state mit den Wachstumsraten bei Autarkie übereinstimmen (vgl. die Aussage 5.5), kann das Inland seinen Startwert nicht durch den Zeitpunkt des Übergangs zum Freihandel beeinflussen. Wenn zum Beispiel die Industrialisierung im Inland später als im Rest der Welt angefangen hat, ist der heimische Kapitalstock kleiner als der durchschnittliche Kapitalstock im Ausland, und es gilt $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_1$.

Eine tiefere Analyse des Falls $k_0 > k_1$ ist lediglich von theoretischem Interesse. Man beachte, daß es unmöglich ist, anhand des Phasendiagramms zu entscheiden, ob eine im oberen Bereich rechts von $\dot{k} = \dot{\tilde{k}} = 0$ startende Trajektorie ein Gleichgewicht mit industrieller Spezialisierung erreicht oder rechts von $\dot{k} = 0$ in den Bereich der Diversifikation übergeht. In diesem Fall würde sich das Inland langfristig auf die Landwirtschaft spezialisieren. Ebensowenig gibt das Phasendiagramm darüber Auskunft, ob $\tilde{k}$ asymptotisch einen endlichen Gleichgewichtswert auf $\dot{\tilde{k}} = 0$ erreicht, wenn die Spezialisierung aufrechtzuerhalten ist oder die Trajektorie entlang der Isoklinen $\dot{\tilde{k}} = 0$ gleitet. Der Vollständigkeit halber wird nun gezeigt, daß die Trajektorien in jedem Fall konvergieren. Dazu werden die Differentialgleichungen (5.76) und (5.82), die die dynamische Entwicklung bei Spezialisierung auf das Gut 1 beschreiben, gelöst. Da (5.76) eine Bernoullische Differentialgleichung ist, die von $\tilde{k}$ unabhängig ist, kann sie explizit gelöst werden. Man erhält

$$k(t, k_0) = \left[\left(k_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{\alpha}{\gamma n} \right) e^{-(1-\alpha)nt} + \frac{\alpha}{\gamma n} \right]^{1/(1-\alpha-\beta)}$$

Diese Lösung kann in die Gleichung (5.82) eingesetzt werden, die die Entwicklung von $\dot{k}$ bei Spezialisierung auf Gut 1 darstellt. Für $n = n^*$ ergibt sich damit die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{k}} = -\gamma n \frac{k_0^{1-\alpha-\beta} - \alpha/(\gamma n)}{\left(k_0^{1-\alpha-\beta} - \alpha/(\gamma n) \right) + \alpha e^{(1-\alpha)nt}/(\gamma n)} \tilde{k},$$

die durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann. Nach der relativ aufwendigen Berechnung erhält man als Ergebnis

$$\tilde{k}(t, \tilde{k}_0) = \frac{\tilde{k}_0}{k_0} \left[\left(k_0^{1-\alpha-\beta} - \frac{\alpha}{\gamma n} \right) e^{-(1-\alpha)nt} + \frac{\alpha}{\gamma n} \right]^{1/(1-\alpha-\beta)}.$$

Für $t \to \infty$ ergibt sich daraus

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t, \tilde{k}_0) = \frac{\tilde{k}_0}{k_0} \left(\frac{\alpha}{\gamma n} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} = \frac{k_1}{k_0} \tilde{k}_0.$$

Der Grenzwert von $\tilde{k}$ ist also in jedem Fall endlich.

Anhand der Abbildung 5.5 kann man erkennen, daß sich das Inland **im Fall** $n < n^*$ unabhängig von den Startwerten asymptotisch auf die Produktion in der Landwirtschaft spezialisiert (vgl. die Aussage 5.8). Die Abbildung zeigt lediglich eine Trajektorie, die deshalb besonders interessant ist, weil sie zeigt, wie sich eine Volkswirtschaft entwickelt, die mit einem komparativen Vorteil in der industriellen Produktion startet (vgl. die Aussage 5.6), aber eine zu geringe Wachstumsrate der Bevölkerung aufweist, um die industrielle Spezialisierung aufrechtzuerhalten. Diese Volkswirtschaft startet mit Diversifikation, spezialisiert sich dann für ein endliches Zeitintervall auf die industrielle Produktion und gelangt schließlich in den Bereich der Diversifikation zurück, wo ein Prozeß der Deindustrialisierung mit asymptotischer Spezialisierung auf die Landwirtschaft einsetzt. Ein industrialisiertes Land kann also bei Freihandel seine industrielle Konkurrenzfähigkeit verlieren, wenn seine Wachstumsrate zu gering ist. Denn im Beispiel wächst der heimische Kapitalstock

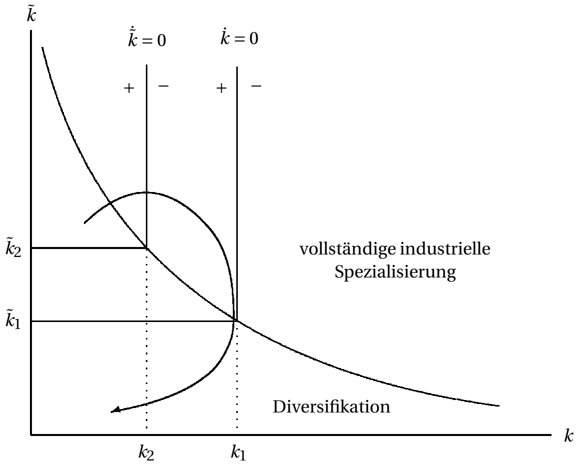

Abbildung 5.5
Das Phasendiagramm für $n < n^*$

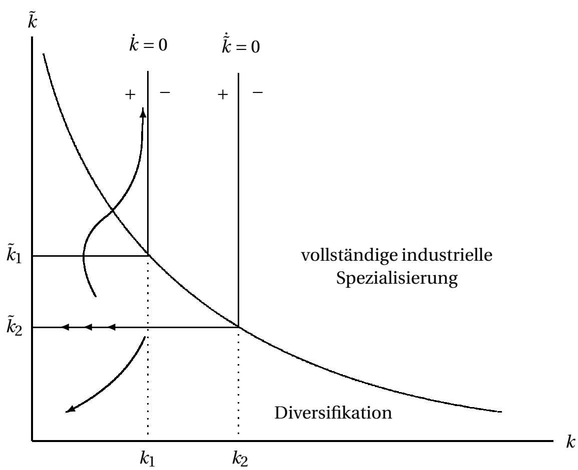

Abbildung 5.6
Das Phasendiagramm für $n > n^*$

mit der Rate γn, während der ausländische Kapitalstock mit der durchschnittlichen Rate $\gamma n^* > \gamma n$ zunimmt.

Für **den Fall** $n > n^*$ ist die in der Abbildung 5.6 dargestellte Situation vergleichbar zu derjenigen im Fall $n = n^*$. Wenn $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_2$ ist, spezialisiert sich das Inland langfristig auf die Erzeugung von Industriegütern, und wenn $\tilde{k}_0 < \tilde{k}_2$ ist, spezialisiert es sich asymptotisch auf die landwirtschaftlichen Aktivitäten. Im Gegensatz zum Fall $n = n^*$ muß die Entwicklung von k allerdings nicht monoton verlaufen. Weil die Wachstumsrate g_K des Kapitalstocks für $\tilde{k} = \tilde{k}_2$ bei Freihandel gleich γn^* und bei Autarkie gleich $\gamma n > \gamma n^*$ ist, kann das Inland darüber hinaus seinen Startwert beeinflussen, indem es später von der Autarkie zum Freihandel übergeht, um so einen Wert $\tilde{k}_0 > \tilde{k}_2$ zu erreichen.

Wenn das Inland bei $\tilde{k}_2$ auf $\dot{\tilde{k}} = 0$ startet, ergibt sich ein interessanter Grenzfall. Die Trajektorie gleitet dann auf dieser Isokline mit $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$, die Produktion bleibt aber diversifiziert. Auf dieser Trajektorie wachsen K und Y_1 mit der konstanten Rate γn^*, während L^Y mit der Rate $\gamma n > \gamma n^*$ wächst. Anhand von (5.72) kann man sehen, daß Y_2 mit einer größeren Rate als n zunimmt, wobei diese Wachstumsrate allerdings gegen n konvergiert. Dieser Grenzfall ist also eine Art Quasi-steady state, in dem alle Variablen außer Y_2 mit konstanter Rate wachsen und g_{Y_2} gegen einen konstanten Wert konvergiert, wobei die Arbeit einer stetigen Reallokation unterliegt.

5.3.3 Wirtschaftspolitische Implikationen

Die Erweiterung des im Abschnitt 4.5 dargestellten einfachen Wachstumsmodells ohne Skaleneffekte um einen zweiten Sektor und den internationalen Handel zeigt, daß die Rate des Bevölkerungswachstums eine wichtige Determinante der endogenen komparativen Vorteile, der Industrialisierung und des langfristigen Wachstums ist. Eines der wesentlichen Ergebnisse des Modells ist, daß ein diversifiziertes langfristiges Gleichgewicht bei Freihandel entweder instabil ist oder gar nicht existiert, wenn die Wachstumsrate der Bevölkerung im Inland nicht mit derjenigen im Ausland übereinstimmt. Deshalb führt der internationale Handel zu einem Prozeß der Industrialisierung oder Deindustrialisierung des Inlands, wodurch Unterschiede der langfristigen Wachstumsraten und der Auswirkungen der Wachstumsrate der Bevölkerung auf das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens erklärt werden können. Zum Beispiel steigt die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in Einheiten des industriellen Erzeugnisses mit zunehmender Wachstumsrate der Bevölkerung, wenn ein Land industrialisiert ist. Wenn ein Land nur landwirtschaftliche Produkte erzeugt, hängt die Wachstumsrate dagegen von der Wachstumsrate im Rest der Welt ab. Für ein Land mit einem relativ hohen Bevölkerungswachstum ist die Wirkung des Außenhandels auf das Wachstum positiv, wenn es beim Übergang zum Freihandel einen relativ großen Kapitalstock und damit einen komparativen Vorteil in der industriellen Produktion hat. Dagegen ist ein negativer Einfluß möglich, wenn es einen komparativen Vorteil in der landwirtschaftlichen Produktion aufweist, wodurch ein Prozeß der Deindustrialisierung entstehen kann. Ein Land mit einer relativ kleinen Wachstumsrate der Bevölkerung kann einen anfänglichen komparativen Vorteil in der industriellen Produktion sogar verlieren und langfristig seine Industrie abbauen. Trotzdem kann ein Agrarland mit einer relativ geringen Rate des Bevölkerungswachstums ($n < n^*$) vom internationalen Handel auch in dynamischer Sicht profitieren, weil sich seine terms of trade bei Freihandel schneller als das Preisverhältnis bei Autarkie verbessern.

Die Möglichkeit der Deindustrialisierung im Fall eines relativ kleinen anfänglichen Kapitalstocks erinnert an die Armutsfallen in der neoklassischen Wachstumstheorie (vgl. auch Deardorff, 2001), in denen ein stabiles Gleichgewicht auf niedrigem Niveau des Pro-Kopf-Einkommens erreicht wird. Das vorliegende Modell geht mit dem Ansatz unterschiedlicher Wachstumsraten der Bevölkerung einen Schritt weiter, weil es zeigt, daß nicht nur Armutsfallen auf niedrigem **Niveau**, sondern auch mit niedrigen **Wachstumsraten** möglich sind. Tatsächlich kann die langfristige Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens in einem industrialisierten Land höher als in einem Agrarland sein, obwohl sich die terms of trade des Exporteurs von Industrieprodukten stetig verschlechtern. Wenn das Agrargut stark inferior ist, so daß sich die terms of trade des Industrielandes nicht verschlechtern, wird diese Vorhersage erst recht gelten.

Diese Ergebnisse zeigen, daß es keine einfache Antwort auf die Frage nach der besten Entwicklungspolitik gibt, die sich in der Literatur hauptsächlich um die alternativen Strategien der **Exportförderung (outward looking)** und der **Importsubstitution (import substitution)** dreht. Dabei ist zu beachten, daß der Begriff der Exportförderung in der Regel für eine außenorientierte Entwicklungsstrategie benutzt wird, die *sowohl gegenüber der Produktion für den Binnen- oder Exportmarkt als auch gegenüber der Verwendung von Inlands- und Importgütern handels- und industriepolitisch neutral* (Weltbank, Weltentwicklungsbericht 1987, S. 89) ist. Ein Land mit einem relativ hohen Wachstumspotential (gemessen durch die Wachstumsrate der Bevölkerung) wird durch den Außenhandel an Wachstum einbüßen und seine Industrie benachteiligt sehen, wenn es zu früh zum Freihandel übergeht. Es kann jedoch ein höheres Wachstum durch den Handel erreichen, wenn es mit einem komparativen Vorteil in der industriellen Produktion starten kann. Eine temporärer Schutz junger Industrien durch Subventionen kann daher sinnvoll sein. Wie bereits im Abschnitt 5.1 angemerkt worden ist, stimmt dieses Ergebnis gut mit der empirischen Evidenz über das Wachstum der südostasiatischen Länder überein, die sich wie etwa Süd-Korea nicht streng an eine neutrale Politik der Exportförderung im Sinne der Definition der Weltbank gehalten, sondern eine Industriepolitik verfolgt haben, deren Ziel eine beschleunigte Industrialisierung gewesen ist.

Obwohl der Effekt des Außenhandels auf das Wachstum für ein Land mit einem relativ geringen Wachstumspotential im vorliegenden Modell positiv ist, muß beachtet werden, daß dieses Ergebnis von den unterstellten Nutzenfunktionen abhängt. Wenn das Agrargut stark inferior ist, können sich die terms of trade für ein Agrarland auch verschlechtern statt sich wie hier zu verbessern. Ferner kann die Messung des

Wachstumspotentials durch die Rate des Bevölkerungswachstums in einigen Fällen sinnvoll sein, in anderen dagegen nicht. Spezifische Anwendungen können zum Beispiel die Unterscheidung der Bevölkerung und der Anzahl der Arbeiter oder auch genauer der ungelernten Arbeit und des Humankapitals erfordern. Ein kleines Land kann natürlich in gewissem Umfang auch von der internationalen Diffusion des Wissens profitieren, die hier auf der Basis der im Abschnitt 5.1.1 diskutierten empirischen Ergebnisse vernachlässigt worden ist. Dort ist auch auf die Existenz von empirischen Studien mit anderen Schlußfolgerungen hingewiesen worden. In jedem Fall gilt, daß man nicht jegliche internationale Wissensdiffusion vollständig ausschließen kann. Die Übertragung des grundlegenden Wissens über die Existenz bestimmter Produkte wird allerdings ohnehin nur durch einen prohibitiven Protektionismus verhindert, so daß dieser mögliche Wissenstransfer zum Beispiel nicht gegen eine Subventionierung junger Industrien spricht. Alle diese Sachverhalte weisen auf mögliche Erweiterungen des hier betrachteten Modells hin, die eventuell auch eine allgemeine Gleichgewichtsanalyse umfassen können.

5.4 Zusammenfassung

Abgesehen von der positiven Korrelation des Wachstums des Pro-Kopf-Einkommens mit dem Wachstum des Außenhandels und der negativen Korrelation mit dem Bevölkerungswachstum können die stilisierten Fakten über das Wirtschaftswachstum gut anhand eines einfachen learning by doing-Modells des semi-endogenen Wachstums ohne Skaleneffekte in einer geschlossenen Volkswirtschaft erklärt werden. In diesem Kapitel ist gezeigt worden, daß die Betrachtung offener Volkswirtschaften die genannten Erklärungsdefizite beseitigen kann. Da es sich bei stilisierten Fakten stets lediglich um Verallgemeinerungen häufig wiederkehrender empirischer Tatbestände handelt, ist es sinnvoll, daß entsprechende Erklärungsansätze mehrere Möglichkeiten offen halten und so zu einer spezifischen Erklärung des jeweiligen Verhaltens beitragen. So wird zum Beispiel die generelle empirische Gültigkeit des Zusammenhangs zwischen dem Außenhandel und dem Wachstum durch die viel beachtete Analyse von Rodriguez und Rodrik (2000) in Frage gestellt.

Während der Außenhandel in Modellen des semi-endogenen Wachstums bisher nur wenig berücksichtigt worden ist, existiert sowohl im Rahmen der älteren neoklassischen Wachstumstheorie als auch mit Bezug zur Theorie des endogenen Wachstums eine Vielzahl von Analysen offener Volkswirtschaften. Die zentralen Ergebnisse dieser Ansätze sind lediglich kurz skizziert worden. Das grundlegende Modell der älteren neoklassischen Theorie ist die dynamische Erweiterung des Heckscher-Ohlin-Samuelson-Modells des Außenhandels durch Oniki und Uzawa (1965) und Bardhan (1965). Obwohl dieser Ansatz durch die Berücksichtigung zweier handelbarer Güter und der endogenen Akkumulation des Kapitals in einem allgemeinen Gleichgewicht von bemerkenswerter Allgemeinheit und an Eleganz nach wie vor kaum zu über-treffen ist, kann und will er zur Erklärung der genannten stilisierten Fakten über das Wachstum wenig beitragen. Diese Fakten sind zur Zeit der Formulierung dieser Modelle gar nicht der Gegenstand der Untersuchung gewesen. Vielmehr ist den Autoren damals um eine adäquate Modellierung des Faktors Kapital in der ansonsten statisch ausgelegten HOS-Theorie des internationalen Handels gegangen. Daher behandelt die ältere neoklassische Theorie im wesentlichen nicht den Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum, sondern den Einfluß des Wachstums und damit der endogenen Akkumulation des Kapitals auf die komparativen Vorteile und damit den Außenhandel. Die langfristigen Wachstumsraten des Nationaleinkommens sind ohne den technischen Fortschritt ohnehin durch die Wachstumsraten der Bevölkerung festgelegt. Sofern langfristige Gleichgewichte gesucht werden, stellt sich heraus, daß sie, von Grenzfällen abgesehen, nur existieren, wenn die Wachstumsraten der Bevölkerung in beiden Ländern gleich sind. Diese Einschränkung gilt in modifizierter Form auch für andere Ansätze und muß entsprechend berücksichtigt werden.

Im Gegensatz zur älteren neoklassischen Theorie steht der Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum im Zentrum der Analyse offener Volkswirtschaften in Modellen des endogenen Wachstums. Die Erweiterung der F&E-Modelle auf offene Volkswirtschaften impliziert in der Regel steigende und konvergierende Wachstumsraten in den betrachteten Ländern, wodurch die positive Korrelation zwischen dem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens und dem Außenhandelsvolumen erklärt werden kann. Dagegen implizieren Ansätze des endogenen Wachstums, die auf dem learning by doing beruhen, in der Regel unterschiedliche Wachstumsraten der am Außenhandel beteiligten Länder, wobei die Wachstumsrate eines Landes durch den Übergang von der Autarkie zum Freihandel sinken kann. Ähnliche Ergebnisse sind bei den F&E-Modellen möglich, wenn man wie in den learning by doing-Modellen keine internationale Diffusion des Wissens unterstellt. Auch wenn die Implikationen nicht eindeutig dadurch festgelegt werden, ob Wissensdiffusion vorliegt oder nicht, zeigt sich die Bedeutung dieser letztlich nur empirisch zu beantwortenden Frage. Wie auch immer die Antwort lautet, so basieren die Implikationen der Modelle offener Volkswirtschaften mit endogenem Wachstums vielfach auf den involvierten Skaleneffekten. Diese Skaleneffekte sind empirisch nicht haltbar und verhindern eine sinnvolle Berücksichtigung des Bevölkerungswachstums, so daß die negative Korrelation zwischen dem Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens und dem Bevölkerungswachstum nicht erklärt werden kann.

Angesichts dieser Probleme sind zwei Modelle des semi-endogenen Wachstums entwickelt worden. Obwohl in der empirischen Literatur zur Wissensdiffusion internationale knowledge spillovers sowohl vertreten als auch abgelehnt werden, gibt es gute Argumente dafür, daß die Diffusion des Wissens intranational stärker als international wirkt. Dadurch wird die Analyse von Modellen gerechtfertigt, in denen das learning by doing als Grenzfall ein externer Effekt auf der Ebene der Unternehmen, aber ein interner Effekt auf Länderebene ist. Als erster Ansatz in dieser Richtung ist ein Modell mit importierten Zwischenprodukten und einer exogen gegebenen Weltexportnachfrage analysiert worden, die ökonomisch wie eine keynesianische Nachfragebeschränkung wirkt. Durch diesen Einbau eines keynesianischen Elements in das neoklassische Modell des semi-endogenen Wachstums kann das Bevölkerungspuzzle gelöst werden. Ob die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums mit zunehmender Wachstumsrate der Bevölkerung steigt oder fällt, hängt davon ab, ob die Produktionselastizität des importierten Zwischenproduktes kleiner oder größer als die mit dem Absolutwert der Preiselastizität der Exportnachfrage gewichtete Lernelastizität ist. Anhand empirischer Schätzwerte für diese Parameter läßt sich erkennen, daß eine mit zunehmender Wachstumsrate der Bevölkerung fallende Wachstumsrate des Pro-Kopf-Konsums im wesentlichen für Entwicklungsländer in Frage kommt. In bezug auf das Pro-Kopf-Einkommen gilt, daß dessen Wachstumsrate jedenfalls dann mit dem Bevölkerungswachstum fällt, wenn die Weltexportnachfrage preisunelastisch ist. Diese Bedingung ist wahrscheinlich dann erfüllt, wenn eine Gruppe von Entwicklungsländern betrachtet wird, die ein homogenes Produkt wie etwa Textilstoffe exportieren. Das Modell mit importierten Zwischenprodukten kann keine Aussagen über den Zusammenhang zwischen dem Wachstum und dem Außenhandel treffen, da der Außenhandel definitionsgemäß eine Voraussetzung für die Produktion gemäß der verfügbaren Technik darstellt.

Daher ist der Zusammenhang zwischen dem Außenhandel und der Industrialisierung und damit dem Wachstum einer kleinen offenen Volkswirtschaft anhand eines Zwei-Sektoren-Modells untersucht worden. Während der industrielle Sektor durch Lerneffekte aufgrund von Investitionen charakterisiert ist, gibt es im Agrarsektor keinen technischen Fortschritt. Für den Fall einer geschlossenen Volkswirtschaft gleicht die dynamische Entwicklung weitestgehend derjenigen eines analogen Ein-Sektor-Modells. Durch die Öffnung der Volkswirtschaft ergeben sich dagegen weitreichende Implikationen. Das langfristige Gleichgewicht bei Diversifikation der Produktion ist instabil, sofern es überhaupt existiert. Daher sind lediglich die beiden Fälle der vollständigen Spezialisierung auf die landwirtschaftliche oder die industrielle Produktion interessant. Im Falle der landwirtschaftlichen Spezialisierung ist die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens unabhängig vom Wachstum der inländischen Bevölkerung. Die Wirkung des Außenhandels auf das Wachstum ist in diesem Fall positiv, wenn die durchschnittliche Wachstumsrate der Bevölkerung im Rest der Welt größer als diejenige im Inland ist und umgekehrt. In letzterem Fall ist es für das Inland vorteilhaft, erst zu einem späteren Zeitpunkt zum Freihandel überzugehen. Im Falle der industriellen Spezialisierung steigt die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens mit zunehmender Wachstumsrate der inländischen Bevölkerung. Hier kann der Außenhandel keinen negativen Einfluß auf das Wachstum haben. Wenn sich das Inland zum Zeitpunkt des Übergangs von Autarkie zum Freihandel im autarken langfristigen Gleichgewicht befindet, gilt allgemein, daß ein anfänglicher komparativer Vorteil in der landwirtschaftlichen Produktion eine notwendige Bedingung für einen negativen Einfluß des Außenhandels auf das Wachstum ist. Die Analyse der Übergangsdynamik zum langfristigen Gleichgewicht in diesem Modell zeigt insbesondere, daß eine endogene Umkehrung der komparativen Vorteile möglich ist, wenn ein industrialisiertes Land zum Freihandel übergeht, dessen Wachstumsrate der Bevölkerung zu klein ist, um mit dem Wachstum im Rest der industrialisierten Welt mitzuhalten. In diesem Fall setzt schließlich ein Prozeß der Deindustrialisierung ein, der aus dem Industrieland ein Agrarland macht.

Beide betrachteten Modelle machen deutlich, daß die Politikineffektivität in bezug auf die langfristige Wachstumsrate in der Theorie des semi-endogenen Wachstums nicht mehr gilt, wenn man den internationalen Handel berücksichtigt. Im Fall des Modells mit importierten Zwischenprodukten ist zu beachten, daß realistischerweise davon ausgegangen werden muß, daß industrialisierte Länder über andere Produktionsverfahren als die Entwicklungsländer verfügen. Eine Beeinflussung des langfristigen Wachstums ist daher sicherlich möglich, wenn es gelingt, einen Strukturwandel zu unterstützen. Dieses Modell hat mit den Modellen geschlossener Volkswirtschaften jedoch gemeinsam, daß dieser Strukturwandel nicht explizit modelliert wird. Das Zwei-Sektoren-Modell stellt einen ersten Ansatz dar, diesen Strukturwandel aufgrund des Außenhandels endogen zu erfassen, der zu einer Industrialisierung oder Deindustrialisierung führen kann.

Kapitel 6:

Kritische Würdigung

Die Bedeutung des Wirtschaftswachstums für den Wohlstand der Nationen ist grundlegend. Schon geringe Unterschiede in den Wachstumsraten des Pro-Kopf-Einkommens verschiedener Länder führen in der mittleren bis langen Frist zu erheblichen Unterschieden der Lebensstandards. Der Aufschwung, den die Wachstumstheorie in den vergangenen 15 Jahren erlebt hat, ist daher ebenso verständlich, wie das wissenschaftliche Desinteresse an Fragen des Wirtschaftswachstums von den frühen siebziger Jahren bis zur Mitte der neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts unverständlich ist. Die Analyse des Wirtschaftswachstums kann mittels unterschiedlicher Methoden und unter Verwendung verschiedener Paradigmata erfolgen. Der Gegenstand dieser Arbeit ist die neoklassische Wachstumstheorie im weiteren Sinne, die sich auf formale Modelle stützt, wobei hier nur kleine Modelle betrachtet worden sind, die einer analytischen Lösung zugänglich sind. Trotz dieser erheblichen Einschränkung des Untersuchungsbereichs ist es eine Folge des genannten Aufschwungs der Wachstumstheorie, daß es in diesem Rahmen nicht möglich, ist, einen umfassenden Überblick über die wahre Flut an Veröffentlichungen zu diesem Thema zu geben.

Dementsprechend hat sich die Darstellung auf die zentralen Prototypen der neoklassischen Wachstumsmodelle beschränkt, um die wesentlichen Denkrichtungen aufzeigen und an geeigneter Stelle kritisieren zu können. Da die Mathematik für das Verständnis dieser Modelle eine zentrale Rolle spielt, sind die wichtigsten mathematischen Methoden relativ ausführlich erörtert worden. Obwohl alle Wachstumsmodelle grundsätzlich mit den gesamten Zeitpfaden des Nationaleinkommens und anderer ökonomischer Größen befaßt sind, wird die Analyse häufig durch die Betrachtung der Eigenschaften von langfristigen Gleichgewichten vereinfacht. Dadurch kann anstelle eines Systems von Differentialgleichungen letztlich ein einfaches System algebraischer Gleichungen analysiert werden. Wie in allen anderen Bereichen der dynamischen Theorie kann die Betrachtung solcher Gleichgewichte nur dann sinnvoll sein, wenn man davon ausgehen kann, daß sich das System etwa nach Störungen zurück in die Richtung des Gleichgewichts bewegt. Daraus ergibt sich die überragende Bedeutung der Stabilitätstheorie für die Wachstumstheorie. Während die Gleichgewichte statischer Modelle in der Wirtschaftstheorie seit jeher durch Anpassungsmechanismen ergänzt und auf ihre Stabilität hin untersucht worden sind, gilt diese Aussage für die Wachstumstheorie nur mit Einschränkungen.

Solow (1956) verwendet in seinem Grundmodell der gesamten neoklassischen Wachstumstheorie eine konstante Sparquote als Verhaltenshypothese. Insofern ist keine Berechnung und Anpassung an etwa eine *optimale* Sparquote erforderlich, und die Erreichung des statischen Gleichgewichts stellt in seinem Modell kein Problem dar. Vom kurzfristigen statischen Gleichgewicht ist das langfristige Gleichgewicht zu unterscheiden, das durch die Konstanz aller Wachstumsraten definiert ist, und auf dessen Eigenschaften sich zahlreiche der aus der Wachstumstheorie abgeleiteten Einsichten stützen. Die Stabilität dieses Gleichgewichts ist im Solow-Modell ebenfalls gewährleistet. Die Situation stellt sich völlig unterschiedlich dar, wenn man die positive Interpretation des ursprünglich normativ formulierten Ramsey-Koopmans-Cass-(RKC)-Modells verwendet. Entsprechend dem neoklassischen Paradigma der Rationalität bestimmen die Haushalte ihre Ersparnis nun mit Verfahren der dynamischen Optimierung. Der optimale Pfad kann als in jedem Zeitpunkt (kurzfristig) gleichgewichtiger Pfad bei vollkommener Voraussicht interpretiert werden (PFC-Gleichgewicht). Doch Anpassungsmechanismen an diesen gleichgewichtigen Pfad sind praktisch nicht formuliert worden. Wenn man keinen stabilen Anpassungsmechanismus angeben kann, muß unterstellt werden, daß die optimale Lösung unmittelbar exakt berechnet wird. Denn nur in diesem Fall konvergiert der gleichgewichtige Pfad auch gegen das langfristige Gleichgewicht, das im RKC-Modell ein Sattelpunkt ist. Daher führen die geringsten Fehler in der Berechnung dazu, daß das langfristige Gleichgewicht nicht erreicht wird. Selbst wenn man das zugrundeliegende Modell aus der Sicht des Forschers exakt kennt, kann man die Lösung in aller Regel gar nicht hinreichend genau berechnen. Das langfristige Gleichgewicht im RKC-Modell ist daher instabil und folglich nur eingeschränkt als positive Theorie des Wirtschaftswachstums geeignet.

Als Alternative zur dynamischen Optimierung ist die Verwendung von Faustregeln vorgeschlagen worden. Beispiele für sinnvolle Faustregeln im Zusammenhang mit dem Wirtschaftswachstum sind die konstante Sparquote oder die klassische Sparfunktion, die verallgemeinert worden ist, um sie in positiver Hinsicht plausibler zu machen und in normativer Hinsicht zu verbessern. Natürlich kann man nicht davon ausgehen, daß sich tatsächlich alle Haushalte entsprechend der resultierenden Goldenen Faustregel verhalten. Um genauere Auskunft hierüber zu erhalten, bedarf es erheblicher empirischer Forschung, die nicht lediglich versucht, die Rationalität des Verhaltens zu beweisen oder zu widerlegen. Doch eine plausible Faustregel, die zu einem stabilen steady state führt, rechtfertigt die Analyse eines solchen Gleichgewichts eher als eine dynamische Optimierungslösung, die instabil ist.

Die Kritik an der dynamischen Optimierung richtet sich weniger an die ältere neoklassische Wachstumstheorie, die sie in erster Linie in normativen Ansätzen verwendet hat, sondern an die neuere Theorie des endogenen Wachstums, in der sie sich zur Standardhypothese in positiven Ansätzen entwickelt hat. Selbstverständlich kann man alle Wachstumsmodelle letztlich auch mit alternativen Sparhypothesen formulieren, wodurch die Analyse sogar vereinfacht wird. In der Theorie des endogenen Wachstums hat die verwendete Sparhypothese allerdings im Gegensatz zur älteren neoklassischen Wachstumstheorie und zur neueren semi-endogenen Wachstumstheorie Einfluß auf die im steady state erreichbaren Wachstumsraten. Diese Eigenschaft ist sogar ein Bestandteil der Definition des endogenen Wachstums, das sich durch die Beeinflußbarkeit der Wachstumsraten und die Möglichkeit des positiven Pro-Kopf-Wachstums ohne exogenen technischen Fortschritt auszeichnet.

Angesichts der Bedeutung des Wirtschaftswachstums für den Wohlstand ist es naheliegend, daß gerade diese Eigenschaften der Theorie des endogenen Wachstums zur Renaissance der Wachstumstheorie beigetragen haben. Wenn ein positives Pro-Kopf-Wachstum durch endogenen technischen Fortschritt entsteht und die Wachstumsrate wirtschaftspolitisch beeinflußbar ist, ergeben sich dadurch im Vergleich zur älteren neoklassischen Theorie, in der die Wachstumsrate durch exogene Konstanten bestimmt ist, weitreichende Implikationen. Jedoch beinhalten viele Modelle des endogenen Wachstums Skaleneffekte. Die Wachstumsrate im langfristigen Gleichgewicht steigt in diesen Fällen mit der Größe der Volkswirtschaft, gemessen etwa durch die Bevölkerungsgröße. Wenn nun die Bevölkerung selbst mit konstanter Rate wächst, wird impliziert, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens selbst exponentiell wächst, was empirisch nicht haltbar ist. Gleichzeitig bedeutet dieses Ergebnis, daß in diesen Fällen kein steady state existiert.

Obwohl es auch Modelle des endogenen Wachstums ohne Skaleneffekte gibt, basiert die Möglichkeit des endogenen Gleichgewichtswachstums auf Grenzfällen von Parameterwerten, die es praktisch irrelevant macht. Daraus muß gefolgert werden, daß entweder kein steady state existiert oder daß das Wachstum semi-endogen ist. In diesem Fall wird ein positives Pro-Kopf-Wachstum zwar durch endogenen technischen Fortschritt ermöglicht, doch ist die Wachstumsrate wie in der älteren neoklassischen Theorie nicht wirtschaftspolitisch beeinflußbar. Daher spielt auch die Höhe der Sparquote letztlich keine Rolle für das langfristige Wachstum. Wenn man sich mit gleichgewichtigem Wachstum befassen will, gilt also, daß Modelle des semiendogenen Wachstums verwendet werden sollten und daß die verwendete Sparhypothese von untergeordneter Bedeutung für die langfristigen Ergebnisse ist. Daher ist es selbst ohne empirische Untermauerung möglich, einfache Faustregeln zu verwenden, die plausibler und einfacher zu handhaben sind als die Hypothese der dynamischen Optimierung bei vollkommener Voraussicht.

Die Modelle des semi-endogenen Wachstums stehen mit den sogenannten stilisierten Fakten des Wirtschaftswachstums weitgehend im Einklang. Hierbei spielt es kaum ein Rolle, auf welchem Mechanismus der technische Fortschritt basiert. Für geschlossene Volkswirtschaften gilt sowohl im Falle des technischen Fortschritts durch die Forschung und Entwicklung als auch im Falle des learning by doing, daß die langfristige Wachstumsrate $g_{Y/L}$ des Nationaleinkommens pro Kopf durch

$$g_{Y/L} = \text{Konstante} \cdot n$$

gegeben ist, wobei n die Wachstumsrate der Bevölkerung ist und die Konstante von Parametern der Produktionstechnik abhängt. Anhand dieser Formulierung ist unmittelbar zu erkennen, daß es von der Erklärung der stilisierten Fakten mindestens zwei Ausnahmen geben muß. Zunächst kann ein Modell einer geschlossenen Volkswirtschaft naturgemäß keine Aussagen über die Auswirkungen des Außenhandels auf das Wirtschaftswachstum machen, wobei der als stilisiertes Faktum genannte positive Effekt ohnehin in Frage gestellt worden ist. Zum anderen impliziert die Gleichung, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens mit zunehmender Wachstumsrate der Bevölkerung steigt, was empirisch zumindest dann nicht haltbar ist, wenn Entwicklungsländer und industrialisierte Länder verglichen werden (Bevölkerungspuzzle). Die Betrachtung geschlossener Volkswirtschaften reicht aus beiden Gründen nicht aus.

Daher ist ein einfaches Modell des semi-endogenen Wachstums auf offene Volkswirtschaften erweitert worden. Durch die Einführung einer Nachfragebeschränkung nach Exporten eines Landes mit geringem Einkommensniveau zeigt sich, daß die strenge Beziehung zwischen der Wachstumsrate der Bevölkerung und der Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens nicht mehr gilt. Unter plausiblen Annahmen über Parameter wie die Preiselastizität der Exportnachfrage erkennt man, daß die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens bei steigender Wachstumsrate der Bevölkerung fallen kann. Damit läßt sich das grundlegende Modell des semi-endogenen Wachstums durch einfache Modifikationen an spezielle Tatbestände wie etwa die Importabhängigkeit von Entwicklungsländern anpassen.

Die Wirkung des Außenhandels auf die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens ist anhand eines Zwei-Sektoren-Modells der Industrialisierung einer kleinen offenen Volkswirtschaft analysiert worden. Dabei zeigt sich, daß der Außenhandel negativ auf das Pro-Kopf-Wachstum wirkt, wenn das Inland eine relativ hohe Wachstumsrate der Bevölkerung aufweist und durch den Außenhandel aufgrund eines zu geringen Startwertes des Kapitalstocks ein Prozeß der Deindustrialisierung einsetzt. Dieser Prozeß kann durch einen späteren Übergang zum Freihandel vermieden werden. In allen anderen Fällen wirkt der Außenhandel zumindest in diesem Modell nicht negativ auf das Wachstum ein.

Beide betrachteten Modelle machen deutlich, daß die Exogenität der langfristigen Wachstumsrate in Modellen des semi-endogenen Wachstums auf der gegebenen Produktionsstruktur basiert. Ein echter Strukturwandel wird in diesen Ansätzen in der Regel nicht endogen modelliert. Diese Eigenschaft gilt auch für das Modell mit der exogenen Exportbeschränkung, bei dem die Produktionsstruktur inklusive der Abhängigkeit von importierten Zwischenprodukten vorgegeben ist. Man kann dieses Modell daher auch so interpretieren, daß eine vollständige Spezialisierung auf das produzierte Gut bereits eingesetzt hat, wobei sich aufgrund dieser Spezialisierung das Bevölkerungspuzzle löst. Das Modell der Industrialisierung kann dagegen in einem einfachen Rahmen die Produktionsstruktur endogen bestimmen. Da diese Spezialisierung in bestimmten Fällen zum Beispiel durch den Zeitpunkt des Übergangs zum Freihandel beeinflußt werden kann und Einfluß auf die gleichgewichtige Wachstumsrate hat, kann also in einem Modell, das für eine geschlossene Volkswirtschaft semi-endogenes Wachstum impliziert, das Wachstum zumindest in bestimmten Grenzen endogen werden.

Alle hier betrachteten Ansätze können jedoch nicht mehr bieten, als prinzipielle Möglichkeiten aufzuzeigen, wie das Wirtschaftswachstum abläuft und gegebenenfalls beeinflußt werden kann. In konkreten Anwendungsfällen können sie Hinweise geben, über welche Variablen Daten zu erheben sind, um im empirischen Vergleich zwischen Ländern etwa Rückschlüsse auf mögliche Ursachen von Unterschieden im Wirtschaftswachstum zu erlangen. Angesichts der strukturellen Instabilität der Modelle des endogenen Wachstums, die die Möglichkeit der direkten Beeinflussung der langfristigen Wachstumsraten bei bestehender Produktionsstruktur unwahrscheinlich machen, ist der wesentliche Ansatzpunkt für Länder mit geringem Einkommensniveau beim Strukturwandel zu sehen. Eine adäquate Modellierung des Strukturwandels in Modellen des Wirtschaftswachstums steckt jedoch noch in den Anfängen. Hier öffnet sich ein weites Betätigungsfeld für die zukünftige Forschung. Insbesondere hinsichtlich der Anwendung der neoklassischen Wachstumstheorie auf Entwicklungsländer ist einschränkend darauf hinzuweisen, daß eine funktionierende marktwirtschaftliche Ordnung unterstellt wird. Sofern die Allokation der Ressourcen in diesen Ländern anderen Gesetzen unterliegt, die keine statisch effiziente Lösung gewährleisten, ist diese Tatsache bei der Beurteilung der Implikationen und bei der Ableitung von Politikempfehlungen zu berücksichtigen. Dieser Hinweis gilt allgemeiner auch für entwickelte Volkswirtschaften immer dann, wenn eine marktwirtschaftliche Ordnung nur eingeschränkt realisiert ist.

Mit Bezug zur Auswahl der dargestellten Ansätze wird zum wiederholten Male darauf hingewiesen, daß es neben den neoklassischen Wachstumsmodellen insbesondere auch keynesianische und evolutorische Analysen des Wirtschaftswachstums gibt. Auch wenn man der neoklassischen Methode den Vorzug gibt, sollte man die anderen Richtungen nicht gänzlich aus den Augen verlieren. Wie die Analyse des Modells mit einer Beschränkung der Exportnachfrage gezeigt hat, kann manchmal eine Integration verschiedener Ansätze zu einer besseren Erklärung empirischer Tatbestände beitragen. Auch die generelle Beschränkung auf Modelle mit langfristigen Gleichgewichten wird zwar häufig (und auch hier) mit den stilisierten Fakten bezüglich der langfristigen Konstanz etwa des Kapitalkoeffizienten begründet, doch kann man diese empirischen Daten auch anders interpretieren. Insbesondere die Tatsache, daß etwa im Oniki-Uzawa-Bardhan-Modell gar kein steady state existiert, wenn die Wachstumsraten der Bevölkerung in den betrachteten Ländern nicht übereinstimmen, macht die Betrachtung von langfristigen Gleichgewichten zumindest zweifelhaft. Zum Teil sind es wohl die mit Modellen ohne langfristige Gleichgewichte verbundenen analytischen Schwierigkeiten, die zum Rückgriff auf Gleichgewichtsmodelle führen. Durch die Betrachtung von Modellen ohne langfristige Gleichgewichte könnte auch der bereits angesprochene Strukturwandel, der zum Beispiel mit einer andauernden Reallokation der Arbeit von der Landwirtschaft in den Industriesektor und den Dienstleistungssektor verbunden sein kann, besser dargestellt werden. Erste Ansätze in dieser Richtung stammen von Kongsamut et al. (2001), Koch (2002) und Meckl (2002). Zuvor ist bereits festgestellt worden, daß das Wachstum zumindest teilweise endogen werden kann, wenn der Strukturwandel berücksichtigt wird. Wie schon das Solow-Modell zeigt, sind die Wachstumsraten im allgemeinen immer dann wirtschaftspolitisch beeinflußbar, wenn man sich nicht auf die Betrachtung langfristiger Gleichgewichte beschränkt.

Literaturverzeichnis

Zitate der Einträge finden sich auf den jeweils angegebenen Seiten.

Aghion, P. und Howitt, P. (1992): A Model of Growth Through Creative Destruction, *Econometrica* 60, 323–351. 203

— (1998): *Endogenous Growth Theory*, Cambridge: MIT Press. 203, 205, 210

Amann, H. (1995): *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Berlin: de Gruyter, 2. Aufl. 19, 38, 105

Araujo, A. und Scheinkman, J. A. (1983): Maximum Principle and Transversality Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models, *Journal of Economic Theory* 30, 1–16. 96, 123

Arnold, L. (1997): *Wachstumstheorie*, München: Vahlen. 119

— (1998): Growth, Welfare, and Trade in an Integrated Model of Human Capital Accumulation and Research, *Journal of Macroeconomics* 20, 81–105. 203

— (2000): Stability of the Market Equilibrium in Romer's Model of Endogenous Technological Change: A Complete Characterization, *Journal of Macroeconomics* 22, 69–84. 203

Arrow, K. J. (1962): The Economic Implications of Learning by Doing, *Review of Economic Studies* 29, 155–173. 119, 230, 231

— (1968): Applications of Control Theory to Economic Growth, in: G. B. Dantzig und A. F. Veinott, Jr., Hg., *Mathematics of the Decision Sciences, Part 2*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 85–119. 78, 90, 91, 133, 142

Arrow, K. J., Block, H. D. und Hurwicz, L. (1959): On the Stability of the Competitive Equilibrium, II, *Econometrica* 27, 89–109. 104

Arrow, K. J. und Hurwicz, L. (1958a): Gradient Method for Concave Programming, I – Local Results, in: Arrow et al. (1958), 117–126. 51

— (1958b): Gradient Method for Concave Programming, III – Further Global Results and Applications to Resource Allocation, in: Arrow et al. (1958), 133–145. 51

Arrow, K. J., Hurwicz, L. und Uzawa, H. (1958): *Studies in Linear and Non-Linear Programming*, Stanford: Stanford University Press. 49, 50, 104, 325, 337

Arrow, K. J. und Kurz, M. (1970): *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Baltimore: John Hopkins. 82, 89, 91, 124, 142

Başar, T. und Olsder, G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*, London: Academic Press, 2. Aufl. 79

Bardhan, P. K. (1965): Equilibrium Growth in the International Economy, *Quarterly Journal of Economics* 79, 455–464. 119, 259, 265, 303, 315

— (1966): On Factor Accumulation and the Pattern of International Specialization, *Review of Economic Studies* 33, 39–44. 259

— (1970): *Economic Growth, Development, and Foreign Trade*, New York: Wiley. 260, 265, 277, 279, 285

— (1971): On Optimum Subsidy to a Learning Industry: An Aspect of the Theory of Infant Industry Protection, *International Economic Review* 12, 54–70. 244, 249

Barro, R. J. und Becker, G. S. (1989): Fertility Choice in a Model of Economic Growth, *Econometrica* 57, 481–501. 186, 226

Barro, R. J. und Sala-i-Martin, X. (1998): *Wirtschaftswachstum*, München: Oldenbourg, amerikanische Originalausgabe: Economic Growth, 1995, New York: McGraw-Hill. 114, 118, 134, 147, 155, 156, 172, 174, 175, 176, 177, 185, 186, 188, 191, 203, 259

Baumol, W. J. und Quandt, R. E. (1964): Rules of Thumb and Optimally Imperfect Decisions, *American Economic Review* 54, 23–46. 52

Beavis, B. und Dobbs, I. M. (1990): *Optimization and Stability Theory for Economic Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press. 104

Becker, G. S. und Barro, R. J. (1988): A Reformulation of the Economic Theory of Fertility, *Quarterly Journal of Economics* 108, 1–25. 226

Becker, G. S., Murphy, K. M. und Tamura, R. (1990): Human Capital, Fertility, and Economic Growth, *Journal of Political Economy* 98, S12–S37. 186, 257

Becker, R. A. (1981): The Duality of a Dynamic Model of Equilibrium and an Optimal Growth Model: The Heterogeneous Capital Goods Case, *Quarterly Journal of Economics* 95, 271–300. 139

Bellman, R. (1957): *Dynamic Programming*, Princeton: Princeton University Press. 79

Ben-David, D. und Loewy, M. B. (1998): Free Trade, Growth, and Convergence, *Journal of Economic Growth* 3, 143–170. 272

Benhabib, J. und Nishimura, K. (1979): The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth, *Journal of Economic Theory* 21, 421–444. 102

Benhabib, J. und Rustichini, A. (1994): Introduction to the Symposium on Growth, Fluctuations, and Sunspots: Confronting the Data, *Journal of Economic Theory* 63, 1–18. 204

Benveniste, L. M. und Scheinkman, J. A. (1979): On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics, *Econometrica* 47, 727–732. 85

— (1982): Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case, *Journal of Economic Theory* 27, 1–19. 90, 94, 95, 96, 97, 123, 139, 152

Berkovitz, L. D. (1974): *Optimal Control Theory*, New York: Springer. 69, 79, 82

Bhagwati, J. N. (1958): Immiserizing Growth: A Geometric Note, *Review of Economic Studies* 25, 201–205. 289

Blanchard, O. und Fischer, S. (1989): *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge: MIT Press. 120, 134, 152

Blume, L. und Simon, C. (1994): *Mathematics for Economists*, New York: Norton. 35, 45, 105

Bobzin, H. (2001): Computer Simulation of Reallocating Resources among Growing Regions, in: Roy und Schulz (2001), 33–57. 3

Boldrin, M. und Scheinkman, J. A. (1988): Learning-By-Doing, International Trade and Growth: A Note, in: P. W. Anderson, K. J. Arrow und D. Pines, Hg., *The Economy as an Evolving Complex System*, Reading, MA: Addison-Wesley, 285–300. 249

Branstetter, L. G. (2001): Are Knowledge Spillovers International or Intranational in Scope? Microeconometric Evidence from the U.S. and Japan, *Journal of International Economics* 53, 53–79. 247, 256

Bräuninger, M. (2001): Ersparnis und Kapitalakkumulation im Romer-Modell, *Jahrbuch für Wirtschaftswissenschaften (Review of Economics)* 52, 177–189. 204

Bretschger, L. (2004): *Wachstumstheorie*, München: Oldenbourg, 3. Aufl. 119

Brock, W. A. und Scheinkman, J. A. (1977): The Global Asymptotic Stability of Optimal Control with Applications to Dynamic Economic Theory, in: Pitchford und Turnovsky (1977), 173–205. 102

Browning, M. und Lusardi, A. (1996): Household Saving: Micro Theories and Micro Facts, *Journal of Economic Literature* 34, 1797–1855. 154, 155, 156, 188

Buhr, W. (2001): A Macroeconomic Growth Model of Competing Regions, in: Roy und Schulz (2001), 11–32. 3

Buhr, W. und Christiaans, T. (2001): Economic Decisions by Approved Principles: Rules of Thumb as Behavioral Guidelines, in: F. Bolle und M. Carlberg, Hg., *Advances in Behavioral Economics – Essays in Honor of Horst Todt*, Heidelberg: Physica, 25–38. 52, 54, 156

— (2002): Statische Skalerträge, *Wirtschaftswissenschaftliches Studium* 31, 572–582. 109

Burmeister, E. (1980): *Capital Theory and Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press. 152, 161

Burmeister, E. und Dobell, A. R. (1970): *Mathematical Theories of Economic Growth*, London: Macmillan. 114, 119, 160

Burmeister, E., Dobell, A. R. und Kuga, K. (1968): A Note on the Global Stability of a Simple Growth Model with Many Capital Goods, *Quarterly Journal of Economics* 82, 657–665. 153, 160

Burmeister, E. und Turnovsky, S. J. (1978): Price Expectations, Disequilibrium Adjustments, and Macroeconomic Price Stability, *Journal of Economic Theory* 17, 287–311. 153, 154

Calvo, G. A. (1977): The Stability of Models of Money and Perfect Foresight: A Comment, *Econometrica* 45, 1737–1739. 63

Carlson, D. A., Haurie, A. B. und Leizarowitz, A. (1991): *Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems*, Berlin: Springer, 2. Aufl. 105

Cass, D. (1965): Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies* 32, 233–240. 119, 133, 138

— (1966): Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem, *Econometrica* 34, 833–850. 144

Cass, D. und Shell, K. (1976): The Structure and Stability of Competitive Dynamical Systems, *Journal of Economic Theory* 12, 31–70. 102

Christiaans, T. (1997): *Learning by Doing in offenen Volkswirtschaften*, Heidelberg: Physica. 136, 231, 249, 256, 260, 262, 274, 275, 294, 297

— (2003a): Balance of Payments Constrained Non-Scale Growth and the Population Puzzle, *Topics in Macroeconomics* 3, No. 1, Article 1. 277

— (2003b): Non-Scale Growth, Endogenous Comparative Advantages, and Industrialization, Discussion Paper No. 113-03, University of Siegen. 295

— (2004): Types of Balanced Growth, *Economics Letters* 82, 253–258. 215, 226

Clarke, F. H. und Vinter, R. B. (1987): The Relationship between the Maximum Principle and Dynamic Programming, *SIAM Journal on Control and Optimization* 25, 1291–1311. 85, 86

Clemhout, S. und Wan, Jr., H. Y. (1970): Learning by Doing and Infant Industry Protection, *Review of Economic Studies* 37, 33–56. 249

Coe, D. T. und Helpman, E. (1995): International R&D Spillovers, *European Economic Review* 39, 859–887. 256

De Long, J. B. und Summers, L. H. (1991): Equipment Investment and Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* 106, 445–502. 255

Deardorff, A. V. (1974): A Geometry of Growth and Trade, *Canadian Journal of Economics* 7, 295–306. 260

— (2001): Rich and Poor Countries in Neoclassical Trade and Growth, *Economic Journal* 111, 277–294. 268, 269, 314

Diamond, P. (1965): National Debt in a Neoclassical Growth Model, *American Economic Review* 55, 1126–1150. 155

Dinopoulos, E. und Segerstrom, P. (1999): A Schumpeterian Model of Protection and Relative Wages, *American Economic Review* 89, 450–472. 258, 259

Dixit, A. K. und Norman, V. (1998): *Außenhandelstheorie*, München: Oldenbourg, 4. Aufl., amerikanische Originalausgabe: Theory of International Trade, 1980, Cambridge: Cambridge University Press. 259

Domar, E. D. (1946): Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment, *Econometrica* 14, 137–147. 3

Dorfman, R., Samuelson, P. A. und Solow, R. M. (1958): *Linear Programming and Economic Analysis*, New York: McGraw-Hill. 144

Dornbusch, R. (1976): Expectations and Exchange Rate Dynamics, *Journal of Political Economy* 84, 1161–1176. 63

Eicher, T. S. und Turnovsky, S. J. (1999a): Convergence in a Two-Sector Nonscale Growth Model, *Journal of Economic Growth* 4, 413–428. 225

— (1999b): International Capital Markets and Non-Scale Growth, *Review of International Economics* 7, 171–188. 258, 259

— (1999c): Non-Scale Models of Economic Growth, *Economic Journal* 109, 394–415. 215, 216, 218, 219, 224

Eicher, T. S., Turnovsky, S. J. und Walz, U. (2000): Optimal Policy for Financial Market Liberalizations: Decentralization and Capital Flow Reversals, *German Economic Review* 1, 19–42. 134

Feenstra, R. C. (1996): Trade and Uneven Growth, *Journal of Development Economics* 49, 229–256. 257, 275

Feichtinger, G. und Hartl, R. F. (1986): *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, Berlin: de Gruyter. 70, 71, 77, 82, 94, 102, 105, 132, 138, 144

Findlay, R. (1984): Growth and Development in Trade Models, in: Jones und Kenen (1984), 185–236. 267, 292

Frenkel, M. und Hemmer, H.-R. (1999): *Grundlagen der Wachstumstheorie*, München: Vahlen. 119

Friedman, M. (1957): *A Theory of the Consumption Function*, Princeton: Princeton University Press. 154

Gale, D. (1967): On Optimal Development in a Multi-Sector Economy, *Review of Economic Studies* 34, 1–18. 88

Galor, O. und Weil, D. N. (2000): Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond, *American Economic Review* 90, 806–828. 110

Gandolfo, G. (1981): *Qualitative Analysis and Econometric Estimation of Continuous Time Dynamic Models*, Amsterdam: North-Holland. 7

Gandolfo, G., Hg. (1993): *Continuous Time Econometrics: Theory and Applications*, London: Chapman & Hall. 7

Gandolfo, G. (1996): *Economic Dynamics*, Berlin: Springer, 3. Aufl. 25, 30, 37, 63, 104

Göcke, M. (2000): *Learning-by-doing und endogenes Wachstum*, Heidelberg: Physica. 230

Goh, A.-T. und Olivier, J. (2002): Learning by Doing, Trade in Capital Goods, and Growth, *Journal of International Economics* 56, 411–444. 274, 275

Goodfriend, M. und McDermott, J. (1995): Early Development, *American Economic Review* 85, 116–133. 110, 255

Gray, J. A. (1984): Dynamic Instability in Rational Expectations Models: An Attempt to Clarify, *International Economic Review* 25, 93–122. 152

Grossman, G. M. und Helpman, E. (1990): Comparative Advantage and Long-Run Growth, *American Economic Review* 80, 796–815. 272, 275

— (1991a): *Innovation and Growth in the Global Economy*, Cambridge: MIT Press. 203, 205, 257, 258

— (1991b): Quality Ladders in the Theory of Growth, *Review of Economic Studies* 58, 43–61. 203

— (1995): Technology and Trade, in: G. M. Grossman und K. Rogoff, Hg., *Handbook of International Economics, Vol. III*, Amsterdam: North-Holland, 1279–1337. 272, 275

Gustavson, P., Hansson, P. und Lundberg, L. (1999): Technology, Resource Endowments, and International Competitiveness, *European Economic Review* 43, 1501–1530. 256

Hahn, F. H. (1966): Equilibrium Dynamics with Heterogeneous Capital Goods, *Quarterly Journal of Economics* 80, 633–646. 64, 119, 151, 152

Hale, J. K. und Koçak, H. (1991): *Dynamics and Bifurcations*, New York: Springer. 59, 105, 153

Halkin, H. (1974): Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons, *Econometrica* 42, 267–272. 88, 89

Harrod, R. F. (1939): An Essay in Dynamic Theory, *Economic Journal* 49, 14–33. 3

Hartman, P. (1964): *Ordinary Differential Equations*, New York: Wiley. 104

Havrylyshyn, O. und Civan, E. (1985): Intra-Industry Trade Among Developing Countries, *Journal of Development Economics* 18, 253–271. 278, 287

Heller, W. P. (1975): Tâtonnement Stability of Infinite Horizon Models with Saddle-Point Instability, *Econometrica* 43, 65–80. 146, 147

Helpman, E. (1988): Growth, Technological Progress, and Trade, *Empirica* 15, 5–25. 184

Hestenes, M. R. (1966): *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, New York: Wiley. 69, 105

Heuser, H. (1993a): *Lehrbuch der Analysis*, Bd. 1, Stuttgart: Teubner, 10. Aufl. 20, 62, 105

— (1993b): *Lehrbuch der Analysis*, Bd. 2, Stuttgart: Teubner, 8. Aufl. 105

— (1993c): *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Stuttgart: Teubner, 2. Aufl. 25, 30, 105

Hieke, H. (1997): Balance-of-Payments-Constrained Growth: A Reconsideration of the Evidence for the U.S. Economy, *Journal of Post Keynesian Economics* 19, 313–325. 291

Hirsch, M. W. und Smale, S. (1974): *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, New York: Academic Press. 16, 18, 19, 30, 37, 38, 41, 42, 45, 104, 225

Hirsch, W. Z. (1956): Firm Progress Ratios, *Econometrica* 24, 136–143. 230, 231

Irwin, D. A. und Klenow, P. J. (1994): Learning by Doing Spillovers in the Semiconductor Industry, *Journal of Political Economy* 102, 1200–1227. 232, 256

Johnson, H. G. (1959): Economic Development and International Trade, *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 97, 253–272. 259, 289

— (1971): Trade and Growth: A Geometrical Exposition, *Journal of International Economics* 1, 83–101. 260

Jones, C. I. (1995): R&D-Based Models of Economic Growth, *Journal of Political Economy* 103, 759–784. 5, 188, 203, 204, 205, 209, 210, 214, 253, 255, 256

— (1999): Growth: With or Without Scale Effects, *American Economic Review, Papers and Proceedings* 89, 139–144. 210, 215

— (2001): Population and Ideas: A Theory of Endogenous Growth, U.C. Berkeley and NBER, Discussion Paper, Version 5.0. 226, 228

Jones, L. E. und Manuelli, R. (1990): A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Policy Implications, *Journal of Political Economy* 98, 1008–1038. 116, 192

Jones, R. W. und Kenen, P. B., Hg. (1984): *Handbook of International Economics, Vol. I*, Amsterdam: North-Holland. 329, 336

Jorgenson, D. W. (1963): Capital Theory and Investment Behavior, *American Economic Review* 53, 247–259. 129

Kaldor, N. (1961): Capital Accumulation and Economic Growth, in: F. A. Lutz und D. C. Hague, Hg., *The Theory of Capital*, New York: St. Martin's Press, 177–222. 183

Kamien, M. I. und Schwartz, N. L. (1991): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amsterdam: North-Holland, 2. Aufl. 105

Khan, M. S., Montiel, P. und Haque, N. U. (1990): Adjustment with Growth – Relating the Analytical Approaches of the IMF and the World Bank, *Journal of Development Economics* 32, 155–179. 2

Khang, C. (1968): A Neoclassical Growth Model of a Resource-Poor Open Economy, *International Economic Review* 9, 329–338. 277

— (1971): Equilibrium Growth in the International Economy: The Case of Unequal Natural Rates of Growth, *International Economic Review* 12, 239–249. 266, 267, 303

Klenow, P. J. und Rodriguez-Clare, A. (1997): Economic Growth: A Review Essay, *Journal of Monetary Economics* 40, 597–617. 175, 187

Knobloch, H. W. und Kappel, F. (1974): *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Stuttgart: Teubner. 55, 105

Koch, K.-J. (2002): Beyond Balanced Growth: On the Analysis of Growth Trajectories, Discussion Paper No. 101-02, Universität Siegen. 323

Kongsamut, P., Rebelo, S. und Xie, D. (2001): Beyond Balanced Growth, *Review of Economic Studies* 68, 869–882. 323

Koopmans, T. C. (1965): On the Concept of Optimal Economic Growth, in: *The Econometric Approach to Development Planning*, Amsterdam: North-Holland, Pontificiae Academiae Scientarum Scriptum Varia, 225–287, 225–287. 119, 133

Krelle, W. (1988): *Theorie des wirtschaftlichen Wachstums*, Berlin: Springer, 2. Aufl. 119

Krusell, P. und Smith, Jr., A. A. (1996): Rules of Thumb in Macroeconomic Equilibrium: A Quantitative Analysis, *Journal of Economic Dynamics and Control* 20, 527–558. 156, 157

Kuga, K. (1977): General Saddlepoint Property of the Steady State of a Growth Model with Heterogeneous Capital Goods, *International Economic Review* 18, 29–58. 151

Kuhn, H. W. und Tucker, A. W. (1951): Nonlinear Programming, in: J. Neyman, Hg., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley: University of California Press, 481–492. 50

Kurz, M. (1968): The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes, *Review of Economic Studies* 35, 155–174. 55, 99, 101, 116, 149, 152

Kuznets, S. (1973): *Population, Capital, and Growth*, New York: Norton. 3, 255

La Salle, J. P. und Lefschetz, S. (1967): *Die Stabilitätstheorie von Ljapunow: Die direkte Methode mit Anwendungen*, Mannheim: Bibliographisches Institut Mannheim, amerikanische Originalausgabe: Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, 1961, New York: Academic Press. 44

Ladrón-de-Guevara, A., Ortigueira, S. und Santos, M. S. (1997): Equilibrium Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth, *Journal of Economic Dynamics and Control* 21, 115–143. 225

Lei, V. und Noussair, C. N. (2002): An Experimental Test of an Optimal Growth Model, *American Economic Review* 92, 549–570. 158, 159, 160

Léonard, D. und Long, N. V. (1992): *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge: Cambridge University Press. 83, 105

Lettau, M. und Uhlig, H. (1999): Rules of Thumb versus Dynamic Programming, *American Economic Review* 89, 148–174. 157

Levhari, D. und Liviatan, N. (1972): On Stability in the Saddle-Point Sense, *Journal of Economic Theory* 4, 88–93. 101

Lewis, W. A. (1955): *The Theory of Economic Growth*, London: Allen and Unwin. 3

Li, C.-W. (2000): Endogenous vs. Semi-Endogenous Growth in a Two-R&D-Sector Model, *Economic Journal* 110, C109–C122. 214, 215

Lieberman, M. B. (1984): The Learning Curve and Pricing in the Chemical Processing Industries, *RAND Journal of Economics* 15, 213–228. 231, 287

Long, N. V. und Vousden, N. (1977): Optimal Control Theorems, in: Pitchford und Turnovsky (1977), 11–34. 91, 105

Lucas, Jr., R. E. (1988): On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics* 22, 3–42. 107, 134, 148, 185, 193, 203, 221, 230, 249, 257, 273, 275

— (1990): Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?, *American Economic Review, Papers and Proceedings* 80, 92–96. 248

Maizels, A. (2000): The Manufactures Terms of Trade of Developing Countries with the United States, 1981–97, QEH Working Paper Number 36, University of Oxford. 291

Mak, J. und Walton, G. M. (1972): Steamboats and the Great Productivity Surge in River Transportation, *Journal of Economic History* 32, 619–640. 232

Mangasarian, O. L. (1966): Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems, *Journal of SIAM Control* 4, 139–152. 77, 78

Mankiw, N. G., Romer, D. und Weil, D. N. (1992): A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* 107, 407–437. 169, 175, 186, 255

van Marrewijk, C. und Verbeek, J. (1993a): *Disequilibrium Growth Theory*, Aldershot: Avebury. 2

— (1993b): On Opulence Driven Poverty Traps, *Journal of Population Economics* 6, 67–81. 186

Maußner, A. und Klump, R. (1996): *Wachstumstheorie*, Berlin: Springer. 119, 176

McKenzie, L. W. (1986): Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems, and Comparative Dynamics, in: K. J. Arrow und M. D. Intriligator, Hg., *Handbook of Mathematical Economics, Vol. III*, Amsterdam: North-Holland, 1281–1355. 144

Meadows, D. L., Meadows, D. H., Behrens, W. W. und Randers, J. (1972): *Die Grenzen des Wachstums*, Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt. 228, 229

Meckl, J. (2002): Structural Change and Generalized Balanced Growth, *Journal of Economics* 77, 241–266. 323

Michel, P. (1982): On the Transversality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems, *Econometrica* 50, 975–985. 90, 93, 94

Modigliani, F. und Brumberg, R. (1954): Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of the Cross-Section Data, in: K. K. Kurihara, Hg., *Post Keynesian Economics*, New Brunswick, NJ: Rutgers Uinversity Press, 388–436. 154

Mulligan, C. B. und Sala-i Martin, X. (1993): Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth, *Quarterly Journal of Economics* 108, 739–773. 225

Negishi, T. (1962): The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article, *Econometrica* 30, 635–669. 52

Nelson, R. (1995): Recent Evolutionary Theorizing about Economic Change, *Journal of Economic Literature* 33, 48–90. 2

Neumann, K. (1975): *Operations Research Verfahren*, Bd. 1, München: Carl Hanser. 47

Nordhaus, W. D. (1992): Lethal Model 2: The Limits to Growth Reconsidered, *Brookings Papers on Economic Activity* , 1–59. 229

Oniki, H. und Uzawa, H. (1965): Patterns of Trade and Investment in a Dynamic Model of International Trade, *Review of Economic Studies* 32, 15–38. 119, 259, 265, 315

Pack, H. und Westphal, L. E. (1986): Industrial Strategy and Technological Change – Theory versus Reality, *Journal of Development Economics* 22, 87–128. 258

Panagariya, A., Shah, S. und Mishra, D. (2001): Demand Elasticities in International Trade: Are They Really Low?, *Journal of Development Economics* 64, 313–342. 293

Peretto, P. F. (1998): Technological Change and Population Growth, *Journal of Economic Growth* 3, 283–311. 210

Perko, L. (1996): *Differential Equations and Dynamical Systems*, New York: Springer, 2. Aufl. 16, 18, 20, 25, 30, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 44, 57, 103, 105

Petit, M. L. (1990): *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press. 148

Phelps, E. S. (1967): *Golden Rules of Economic Growth*, Amsterdam: North-Holland. 141, 161, 162

Pitchford, J. P. und Turnovsky, S. J., Hg. (1977): *Applications of Control Theory to Economic Analysis*, Amsterdam: North-Holland. 327, 333

Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. und Mishchenko, E. F. (1964): *Die mathematische Theorie optimaler Prozesse*, München: Oldenbourg, russische Originalausgabe: 1961, Moskau: Fizmatgiz. 69

Powell, A. (1991): Commodity and Developing Countries Terms of Trade: What Does the Long Run Show?, *Economic Journal* 101, 1485–1496. 291

Ramsey, F. P. (1928): A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal* 38, 543–559. 73, 119, 133, 138, 154

Rebelo, S. (1991): Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy* 99, 500–521. 189

Rivera-Batiz, L. A. und Romer, P. M. (1991a): Economic Integration and Endogenous Growth, *Quarterly Journal of Economics* 106, 531–555. 257, 269

— (1991b): International Trade with Endogenous Technological Change, *European Economic Review* 35, 971–1004. 257

Rockafellar, R. T. (1976): Saddle Points of Hamiltonian Systems in Convex Lagrange Problems Having a Nonzero Discount Rate, *Journal of Economic Theory* 12, 71–113. 102

Rodriguez, F. und Rodrik, D. (2000): Trade Policy and Economic Growth: A Skeptic's Guide to the Cross-National Evidence, Center for Economic Policy Research, Discussion Paper No. 2143, Revised Version. 257, 258, 315

Romer, P. M. (1986): Increasing Returns and Long Run Growth, *Journal of Political Economy* 94, 1002–1037. 107, 134, 183, 231, 296

— (1989): Capital Accumulation in the Theory of Long-Run Growth, in: R. J. Barro, Hg., *Modern Business Cycle Theory*, Cambridge: Harvard University Press, 51–127. 183

— (1990): Endogenous Technological Change, *Journal of Political Economy* 98, S71–S102. 5, 65, 134, 148, 192, 193, 195, 197, 203, 204, 215, 252, 257, 275

Roy, J. und Schulz, W., Hg. (2001): *Theories of Regional Competition*, Baden-Baden: Nomos. 327

Samuelson, P. A. (1947): *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge: Harvard University Press, (erweitere Auflage 1983). 104

— (1958): An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *Journal of Political Economy* 66, 467–482. 155

— (1965): A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule, *American Economic Review* 55, 486–496. 144

— (1972): The General Saddlepoint Property of Optimal Control Motions, *Journal of Economic Theory* 5, 102–120. 101

Sanyal, A. (1996): Real World Agents, REH Agents, and the Econometrician, *Journal of Post Keynesian Economics* 18, 471–476. 152

Sargent, T. J. (1982): *Makroökonomik*, München: Oldenbourg, amerikanische Originalausgabe: Macroeconomic Theory, 1979, New York: Academic Press. 132

Sargent, T. J. und Wallace, N. (1973): The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight, *Econometrica* 41, 1043–1048. 60, 62, 63

Seierstad, A. (1982): Differentiability Properties of the Optimal Value Function in Control Theory, *Journal of Economic Dynamics and Control* 4, 303–310. 85

Seierstad, A. und Sydsæter, K. (1977): Sufficient Conditions in Optimal Control Theory, *International Economic Review* 18, 367–391. 77, 78

— (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Amsterdam: North-Holland. 77, 83, 85, 87, 105, 141, 143

Senhadji, A. S. und Montenegro, C. E. (1999): Time Series Analysis of Export Demand Equations: A Cross-Country Analysis, *IMF Staff Papers* 46, 259–273. 277, 287, 293

Shell, K. (1966): Toward a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation, *American Economic Review, Papers and Proceedings* 56, 62–68. 119

— (1969): Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics, in: H. W. Kuhn und G. P. Szegö, Hg., *Mathematical Systems Theory and Economics, Vol. I*, New York: Springer, 241–292. 89

Sheshinski, E. (1967a): Optimal Accumulation with Learning by Doing, in: K. Shell, Hg., *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, Cambridge: M.I.T. Press, 31–52. 230, 231, 232, 249, 259, 296

— (1967b): Tests of the Learning by Doing Hypothesis, *Review of Economics and Statistics* 49, 568–578. 231, 296

Sidrauski, M. (1967): Inflation and Economic Growth, *Journal of Political Economy* 75, 796–810. 60, 63

Simon, J. L. und Steinmann, G. (1984): The Economic Implications of Learning by Doing for Population Size and Growth, *European Economic Review* 26, 167–185. 256

Smith, M. A. M. (1977): Capital Accumulation in the Open Two-Sector Economy, *Economic Journal* 87, 273–282. 264

— (1984): Capital Theory and Trade Theory, in: Jones und Kenen (1984), 289–324. 267

Solow, R. M. (1956): A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* 70, 65–94. 3, 5, 24, 107, 108, 116, 119, 133, 138, 143, 156, 207, 210, 238, 319

Strulik, H. (1997): Learning-by-Doing, Population Pressure, and the Theory of Demographic Transition, *Journal of Population Economics* 10, 285–298. 186

Swan, T. W. (1956): Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record* 32, 334–361. 107

Takayama, A. (1972): *International Trade: An Approach to the Theory*, New York: Holt, Rinehart & Winston. 265

— (1985): *Mathematical Economics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2. Aufl. 37, 50, 104, 105, 129, 132, 138, 141, 217

— (1993): *Analytical Methods in Economics*, Ann Arbor: University of Michigan Press. 63, 104, 129

Thirlwall, A. P. (1979): The Balance of Payments Constraint as an Explanation of International Growth Rate Differences, *Banca Nazionale del Lavorno Quarterly Review* 32, 45–53. 289, 291

Tobin, J. (1965): Money and Economic Growth, *Econometrica* 33, 671–684. 119

Trauth, T. (1997): *Innovation und Außenhandel*, Heidelberg: Physica. 271

Trefler, D. (1995): The Case of Missing Trade and other HOV Mysteries, *American Economic Review* 85, 1029–1046. 256

Turnovsky, S. J. (2000): *Methods of Macroeconomic Dynamics*, Cambridge: MIT Press, 2. Aufl. 63

Uzawa, H. (1958a): Gradient Method for Concave Programming, II – Global Stability in the Strictly Concave Case, in: Arrow et al. (1958), 127–132. 51

— (1958b): The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming, in: Arrow et al. (1958), 32–37. 50

— (1961a): On a Two-Sector Model of Economic Growth, *Review of Economic Studies* 29, 40–47. 119, 215, 259

— (1961b): The Stability of Dynamic Processes, *Econometrica* 29, 617–631. 36

— (1963): On a Two-Sector Model of Economic Growth II, *Review of Economic Studies* 30, 105–118. 119, 259

— (1965): Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth, *International Economic Review* 6, 18–31. 119, 203, 221

Varian, H. R. (1992): *Microeconomic Analysis*, New York: Norton, 3. Aufl. 66, 99, 241, 280

Vosgerau, H.-J. (1980): Wachstumstheorie II: neoklassische, in: W. Albers, K. E. Born, E. Dürr und A. Zottmann, Hg., *Handwörterbuch der Wirtschaftswissenschaften, Bd. 8*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 492–512. 119

Wan, Jr., H. Y. (1971): *Economic Growth*, New York: Harcourt Brace Jovanovich. 107, 119

von Weizsäcker, C. C. (1965): Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon, *Review of Economic Studies* 32, 85–104. 87

Wolff, R. (1997): Saddle-point Dynamics in Non-Autonomous Models of Multisector Growth With Variable Returns to Scale, *Journal of Mathematical Economics* 27, 267–282. 101

Woll, A. (1984): *Wirtschaftspolitik*, München: Vahlen. 2

Wong, K.-Y. und Yip, C. K. (1999): Industrialization, Economic Growth, and International Trade, in: E. K. Choi und B. S. Jensen, Hg., *Economic Growth and International Trade*, Oxford: Blackwell, 164–182. 250, 296, 300

Woodland, A. D. (1982): *International Trade and Ressource Allocation*, Amsterdam: North-Holland. 259, 265, 297

Wright, T. P. (1936): Factors Affecting the Cost of Airplanes, *Journal of the Aeronautical Sciences* 3, 122–128. 231

Wymer, C. R. (1972): Econometric Estimation of Stochastic Differential Equation Systems, *Econometrica* 40, 565–577. 7

Young, A. (1991): Learning by Doing and the Dynamic Gains from Trade, *Quarterly Journal of Economics* 106, 369–406. 257, 273

— (1998): Growth without Scale Effects, *Journal of Political Economy* 106, 41–63. 210, 213

Stichwortverzeichnis